

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

JEAN BARGE

JEAN LANNES

FRANÇOIS LATOUR

PIERRE VOGEL

Λ -sphères

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4^e série, tome 7, n° 4 (1974), p. 463-505

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1974_4_7_4_463_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Λ -SPHÈRES

PAR JEAN BARGE, JEAN LANNES, FRANÇOIS LATOUR
ET PIERRE VOGEL

0. Introduction

Dans la suite, variété voudra dire variété différentiable, compacte et orientée.

Soit Λ un anneau de fractions de \mathbf{Z} .

On appelle Λ -sphère de dimension n , toute variété V , sans bord, de dimension n , telle que $\tilde{H}_i(V; \Lambda) = 0$ pour $i < n$.

On appelle H_Λ -cobordisme tout cobordisme orienté (W, V_1, V_2) tel que

$$H_*(W, V_i; \Lambda) = 0.$$

On note Θ_n^Λ l'ensemble des classes de Λ -sphères de dimension n à H_Λ -cobordisme près; c'est un groupe pour l'opération de somme connexe.

L'objet de cet article est l'étude du groupe Θ_n^Λ . Pour cela nous utilisons une généralisation de la méthode de Kervaire-Milnor qui peut se schématiser ainsi.

Trouver un groupe de cobordisme A_n^Λ engendré par des objets plus généraux que les Λ -sphères de sorte qu'on ait un morphisme d'oubli $\Theta_n^\Lambda \rightarrow A_n^\Lambda$. Si on appelle P_n^Λ le groupe relatif (de sorte qu'on ait la suite exacte $\rightarrow P_{n+1}^\Lambda \rightarrow \Theta_n^\Lambda \rightarrow A_n^\Lambda \rightarrow P_n^\Lambda \rightarrow$) on veut réunir les deux conditions heuristiques :

1° Les objets de A_n^Λ sont des variétés avec une certaine structure sur le fibré normal en dehors d'un point, structure qui doit être conservée par cobordisme, de sorte que le groupe A_n^Λ est (plus ou moins) explicitement calculable grâce à la construction de Thom.

2° Le groupe P_n^Λ peut être déterminé par les méthodes de la chirurgie c'est-à-dire si $(W, \partial W)$ est un objet de P_n^Λ , la structure sur le fibré normal de W doit être telle qu'on trouve une seule obstruction pour tuer $H_*(W; \Lambda)$ par chirurgie.

Ces deux conditions sont satisfaites pour la structure de E^Λ -orientation (ou encore Λ -trivialisation) d'un fibré. La définition d'une Λ -trivialisation d'un fibré ξ , la plus chargée de contenu intuitif (pour les auteurs, du moins) est une trivialisation stable de $p\xi$ (somme de Whitney itérée p fois) avec p inversible dans Λ . Cependant, au paragraphe 1, nous

définissons la notion de E^Λ -orientation à la Browder (où E^Λ est la fibre d'une localisation $BSO \rightarrow BSO_\Lambda$) car elle se révèle d'un maniement technique plus agréable.

Dans le paragraphe 2 on définit des morphismes de P_{2l}^Λ dans des groupes de Witt. Pour P_{4k}^Λ c'est le morphisme habituel dans $WQ(\Lambda)$ obtenu au niveau d'un représentant $(W, \partial W)$ en prenant la forme d'intersection sur $H_{2k}(W; \Lambda)$ qui est paire (pour $1/2 \notin \Lambda$ l'argument classique utilisant les classes de Wu s'applique).

Lorsque $1/2 \notin \Lambda$, on définit une généralisation de l'invariant de Kervaire :

$$P_{4k+2}^\Lambda \rightarrow WQ(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}).$$

Pour cela on s'inspire de la construction, de Rourke et Sullivan, de l'invariant de Kervaire d'une donnée de chirurgie; on construit une application sur le groupe de bordisme non orienté $\bar{q} : \mathcal{N}_{2k+1}(E^\Lambda, W) \rightarrow \mathbf{Z}/2$, on montre qu'elle se factorise par

$$q : H_{2k}(W, \mathbf{Z}/2) \rightarrow \mathbf{Z}/2$$

et que q est une forme quadratique, associée à la forme d'intersection modulo 2, dont la classe dans $WQ(\mathbf{Z}/2)$ ne dépend que de la classe de $(W, \partial W)$ dans P_{4k+2}^Λ .

Dans le paragraphe 3, on vérifie que si W^n est E^Λ -orientée, il n'y a pas d'obstructions pour tuer, par chirurgies E^Λ -orientées, $\tilde{H}_p(W; \Lambda)$ (pour $p < [n/2] - 1$); il en résulte comme dans Kervaire-Milnor que $P_{2l+1}^\Lambda = 0$ et que le morphisme $\tau : P_{2l}^\Lambda \rightarrow WQ(\Lambda_l)$ [construit au paragraphe 2 avec $\Lambda_l = \Lambda/(1 - (-1)^l)\Lambda$] est injectif pour $l \neq 2$. On vérifie enfin que τ est surjectif par construction d'exemples par une méthode voisine du plombage de Kervaire-Milnor.

Soient $W(\mathbf{Q}, \mathbf{Z})$ le groupe de Witt des formes d'enlacement : $C \otimes C \rightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ où C est un groupe fini, et $W(\Lambda, \mathbf{Z})$ le sous-groupe engendré par les formes avec $\Lambda \otimes C = 0$.

Dans le paragraphe 4, on constate que, associer à une Λ -sphère V^{4k-1} la forme d'enlacement sur $H_{2k-1}(V; \mathbf{Z})$, définit un morphisme $e : \Theta_{4k-1}^\Lambda \rightarrow W(\Lambda, \mathbf{Z})$.

Dans l'appendice, on rassemble des résultats sur la structure du groupe $WQ(\Lambda)$, on construit une suite exacte

$$0 \rightarrow \mathbf{Z} \rightarrow WQ(\Lambda) \xrightarrow{\delta} W(\Lambda, \mathbf{Z}) \rightarrow 0$$

et on détermine $W(\Lambda, \mathbf{Z})$ comme la somme directe, pour p nombre premier inversible dans Λ , des groupes $W(\mathbf{F}_p)$.

Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} P_{4k}^\Lambda & \longrightarrow & \Theta_{4k-1}^\Lambda \\ \downarrow \tau & & \downarrow e \\ WQ(\Lambda) & \xrightarrow{\delta} & W(\Lambda, \mathbf{Z}) \end{array}$$

est anticommutatif, il en résulte la surjectivité de e . Soient

$$\tilde{P}_{4k}^\Lambda = \ker(P_{4k}^\Lambda \xrightarrow{\delta, \tau} W(\Lambda, \mathbf{Z})), \quad \tilde{\Theta}_{4k-1}^\Lambda = \ker e;$$

et pour $n \neq 0$ (4),

$$\tilde{P}_n^\Lambda = P_n^\Lambda, \quad \tilde{\Theta}_n^\Lambda = \Theta_n^\Lambda;$$

on a la suite exacte

$$\rightarrow \tilde{P}_{n+1}^\Lambda \rightarrow \tilde{\Theta}_n^\Lambda \rightarrow A_n^\Lambda \rightarrow \tilde{P}_n^\Lambda$$

et \tilde{P}_n^Λ a un bon comportement par rapport à Λ pour $n \neq 4$, plus précisément si $\Lambda_1 \subset \Lambda_2$ sont deux anneaux de fractions de \mathbf{Z} et si $\Lambda_{1,2}$ est l'anneau de fractions déterminé par $\Lambda_1 \cap \Lambda_{1,2} = \mathbf{Z}$ et $\Lambda_1 + \Lambda_{1,2} = \Lambda_2$, alors pour $n \neq 4$ le morphisme d'oubli induit un isomorphisme $\tilde{P}_n^{\Lambda_1} \otimes \Lambda_{1,2} \xrightarrow{\sim} \tilde{P}_n^{\Lambda_2} \otimes \Lambda_{1,2}$.

Dans le paragraphe 5, on commence à déterminer A_n^Λ et on montre comment calculer Θ_n^Λ à partir de $\Theta_n^{\mathbf{Z}}$ (qui est le groupe Θ_n de Kervaire-Milnor pour $n \neq 3$) et $\Theta_n^{\mathbf{Q}}$.

On considère le groupe de cobordisme des variétés fermées E^Λ -orientées : Ω_n^Λ et la suite exacte

$$\rightarrow \Omega_n^\Lambda \rightarrow A_n^\Lambda \rightarrow \pi_{n-1}(\text{SO}) \otimes \Lambda \rightarrow \Omega_{n-1}^\Lambda \rightarrow .$$

Par des arguments de suites spectrales, on montre que le morphisme d'oubli induit un isomorphisme $\Omega_n^{\Lambda_1} \otimes \Lambda_{1,2} \xrightarrow{\sim} \Omega_n^{\Lambda_2} \otimes \Lambda_{1,2}$ et que si $\Omega_n^{\text{SO}, \Lambda}$ est le groupe relatif du morphisme d'oubli $\Omega_n^\Lambda \rightarrow \Omega_n^{\text{SO}}$, $\Omega_n^{\text{SO}, \Lambda}$ est Λ -local. Il résulte que $A_n^{\Lambda_1} \otimes \Lambda_{1,2} \xrightarrow{\sim} A_n^{\Lambda_2} \otimes \Lambda_{1,2}$ et que pour $n \neq 3$ les applications d'oubli induisent des isomorphismes

$$\Theta_n^{\mathbf{Z}} \otimes \Lambda \xrightarrow{\sim} \tilde{\Theta}_n^\Lambda \otimes \Lambda$$

et $\tilde{\Theta}_n^\Lambda \otimes \Lambda' \xrightarrow{\sim} \tilde{\Theta}_n^{\mathbf{Q}} \otimes \Lambda'$ (où $\Lambda \cap \Lambda' = \mathbf{Z}$ et $\Lambda + \Lambda' = \mathbf{Q}$); comme Θ_n^Λ est un groupe de torsion on a la décomposition

$$\tilde{\Theta}_n^\Lambda = \Theta_n^{\mathbf{Z}} \otimes \Lambda \oplus \tilde{\Theta}_n^{\mathbf{Q}} \otimes \Lambda'.$$

On se restreint donc au cas où $\Lambda = \mathbf{Q}$.

Dans le paragraphe 6, on explicite le calcul de $A_n^{\mathbf{Q}}$: si $n \equiv 1, 2$ (4) par oubli $A_n^{\mathbf{Q}} \simeq \Omega_n^{\text{SO}}$; pour $n \equiv 0$ (4), $A_{4k}^{\mathbf{Q}}$ est le sous-groupe de Ω_{4k}^{SO} formé des classes des variétés dont les nombres de Pontrjagin décomposables sont nuls; pour $n = 4k - 1$ on a une suite exacte

$$0 \rightarrow \mathbf{Q}^{\pi(k)-1} / \mathcal{L}' \rightarrow A_{4k-1}^{\mathbf{Q}} \rightarrow \Omega_{4k-1}^{\text{SO}} \rightarrow 0$$

où \mathcal{L}' est le réseau des nombres de Pontrjagin décomposables des variétés fermées

$$(\mathcal{L}' \subset \mathbf{Z}^{\pi(k)-1}).$$

Soit V^{4k-1} une variété fermée, $E^{\mathbf{Q}}$ orientée hors d'un point; ses classes de Pontrjagin sont de torsion, en les enlaçant on obtient $\pi(k) - 1$ éléments de \mathbf{Q}/\mathbf{Z} ; cela définit un morphisme $e_p : A_{4k-1}^{\mathbf{Q}} \rightarrow (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})^{\pi(k)-1}$ et on a la suite exacte

$$0 \rightarrow R_{4k-1} \rightarrow A_{4k-1}^{\mathbf{Q}} \xrightarrow{e_p \oplus \theta} (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})^{\pi(k)-1} \oplus \Omega_{4k-1}^{\text{SO}} \rightarrow 0,$$

où $R_{4k-1} = \mathbf{Z}^{\pi(k)-1} / \mathcal{L}'$.

En conclusion, la classe de V^n dans $A_n^{\mathbf{Q}}$ est presque entièrement déterminée par des nombres caractéristiques, comme corollaire on trouve que la classe de V est indépendante de la $E^{\mathbf{Q}}$ -orientation sur $V - x_0$.

Dans le paragraphe 7, on détermine l'homomorphisme $A_{4k}^{\mathbf{Q}} \rightarrow P_{4k}^{\mathbf{Q}}$ i. e. on calcule l'image de la signature $A_{4k}^{\mathbf{Q}} \rightarrow \mathbf{Z}$; ce calcul est basé sur le théorème de Hattori-Stong donnant les relations entre nombres de Pontrjagin des variétés fermées; comme autre application du théorème de Hattori-Stong on calcule le cardinal de R_{4k-1} . Enfin on utilise les résultats d'Adams et l'interprétation en cobordisme de l'invariant e_c d'Adams pour étudier la flèche d'oubli $A_n^{\mathbf{Z}} \rightarrow A_n^{\mathbf{Q}}$.

Dans le paragraphe 8, on rassemble les résultats pour calculer $\Theta_n^{\mathbf{Q}}$ (comme corollaire on trouve qu'une variété dont un multiple borde est cobordante à une $\mathbf{Z}[1/2]$ -sphère) et on étudie le morphisme d'oubli $\Theta_n^{\mathbf{Z}} \rightarrow \Theta_n^{\mathbf{Q}}$.

L'énoncé des résultats est explicité dans [3].

1. La suite exacte de Kervaire-Milnor pour un anneau de fractions

Pour construire une suite exacte analogue à celle de Kervaire-Milnor, il nous faut remplacer la notion de trivialisations stable d'un fibré par celle de E^{Λ} -orientation.

Notons $BSO \rightarrow BSO_{\Lambda}$ une localisation de l'espace simple BSO par rapport à la famille des nombres premiers non inversibles dans Λ . Soit E^{Λ} la fibration image réciproque par cette localisation de la fibration des chemins sur BSO_{Λ} et soit γ^{Λ} le SO -fibré vectoriel, « image réciproque du SO -fibré universel γ sur BSO », par la projection $E^{\Lambda} \rightarrow BSO$. Soit ξ un SO -fibré vectoriel de base X .

DÉFINITION 1.2. — Nous appelons E^{Λ} -orientation du fibré ξ , toute application fibrée, du SO -fibré ξ dans le SO -fibré γ^{Λ} .

Nous disons que deux E^{Λ} -orientations de ξ sont équivalentes si elles sont homotopes parmi les applications fibrées.

LEMME 1.3. — Soit X un C. W. complexe tel que $\tilde{H}_*(X; \Lambda) = 0$. Alors tout SO -fibré vectoriel sur X est E^{Λ} -orientable.

Deux E^{Λ} -orientations sont équivalentes.

Soit ξ un fibré de base X et soit $f : X \rightarrow BSO$ une application classifiante du fibré ξ . Il y a bijection entre les classes de E^{Λ} -orientations du fibré ξ et les classes d'homotopies verticales de relèvements de f dans E^{Λ} [4].

Comme $\tilde{H}_*(X; \Lambda) = 0$ on a pour tout Λ -module M .

$\tilde{H}^*(X; M) = 0$. Il résulte alors de la théorie de l'obstruction que pour tout espace Λ -local Y , $[X, Y]$ a un seul élément. En particulier toute application de X dans BSO est homotope à l'application constante dans BSO_{Λ} et se relève donc dans E^{Λ} . De plus, deux relevés sont verticalement homotopes puisque la fibre $\Omega(BSO_{\Lambda})$ de E^{Λ} sur BSO est Λ -locale.

DÉFINITION 1.4. — On appelle \mathcal{A}_n^Λ la classe des triples (V, x, u) où V est une variété sans bord, de dimension n , x un point de V , et u une E^Λ -orientation du SO-fibré normal stable de $V-x$.

On appelle cobordisme entre deux objets (V_1, x_1, u_1) et (V_2, x_2, u_2) de \mathcal{A}_n^Λ tout triple (W, γ, u) où W est un cobordisme entre les variétés V_1 et V_2 , $(\gamma, \partial\gamma)$ un chemin plongé dans $(W, \partial W)$ reliant x_1 à x_2 , et u une E^Λ -orientation du fibré normal à la variété $W-\gamma$ qui prolonge u_1 et u_2 .

On appelle A_n^Λ l'ensemble des objets de \mathcal{A}_n^Λ définis à cobordisme près. C'est un groupe pour la somme connexe.

DÉFINITION 1.5. — On appelle \mathcal{P}_n^Λ la classe des couples (W, u) où W est une variété de dimension n , dont le bord est une Λ -sphère, et u une E^Λ -orientation du fibré normal de W .

On appelle cobordisme entre deux objets (W_1, u_1) et (W_2, u_2) de \mathcal{P}_n^Λ , tout couple (X, u) où X est un cobordisme entre W_1 et W_2 induisant un H_Λ -cobordisme entre ∂W_1 et ∂W_2 , et u une E^Λ -orientation du fibré normal de X qui prolonge u_1 et u_2 .

On appelle P_n^Λ , l'ensemble des objets de \mathcal{P}_n^Λ définis à cobordisme près. C'est un groupe pour la somme connexe sur le bord.

On peut construire la suite

$$(1.6) \quad \rightarrow A_n^\Lambda \xrightarrow{a} P_n^\Lambda \xrightarrow{b} \Theta_{n-1}^\Lambda \xrightarrow{c} A_{n-1}^\Lambda \rightarrow$$

L'application a associe à la classe de (V, x, u) la classe dans P_n^Λ du couple

$$(V-D, u \mid V-D)$$

où D est un disque ouvert contenant le point x .

L'application b associe à la classe de (W, u) , la classe de la Λ -sphère ∂W .

L'application c associe à la classe d'une Λ -sphère V , la classe dans A_n^Λ de (V, x, u) où x est un point quelconque de V et u une E^Λ -orientation du fibré normal à $V-x$. Cette application est bien définie, car une variété munie de deux E^Λ -orientations en dehors d'un point, équivalentes, définit le même élément de A_n^Λ ; il suffit alors d'appliquer le lemme 1.3.

On a, en fait, deux théories de cobordisme Θ_n^Λ et A_n^Λ , et P_n^Λ est la théorie relative. La suite 1.6 est donc exacte.

REMARQUE 1.7. — En tensorisant la suite exacte d'homotopie de la fibration

$$BSO \rightarrow BSO_\Lambda,$$

on obtient :

$$\pi_*(E^\Lambda) \otimes \Lambda = 0,$$

et, par utilisation du théorème de Hurewicz-Serre :

$$\tilde{H}_*(E^\Lambda; \Lambda) = 0.$$

Enfin, à l'aide du théorème des coefficients universels, on a, pour tout Λ -module M :

$$\tilde{H}^*(E^\Lambda; M) = 0.$$

2. Construction de l'homomorphisme $\tau : P_{2l}^\Lambda \rightarrow WQ(\Lambda_l)$

On appelle Λ_l l'anneau Λ si l est pair et $\Lambda/2\Lambda$ si l est impair.

PREMIER CAS : l pair $l = 2k$.

2.1. Soit $(W, u) \in \mathcal{P}_{4k}^\Lambda$; sur $L_{2k}(W; \Lambda) = H_{2k}(W, \Lambda)/\text{Tors}$, la forme d'intersection est une forme bilinéaire symétrique à valeurs dans Λ notée \cdot . La dualité de Poincaré

$$H_{2k}(W; \Lambda) \xrightarrow{\sim} H^{2k}(W, \partial W; \Lambda)$$

donne par passage au quotient [car $H^{2k}(W, \partial W; \Lambda) \xrightarrow{\sim} H^{2k}(W; \Lambda)$ car ∂W est une Λ -sphère] l'isomorphisme $L_{2k}(W, \Lambda) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(L_{2k}(W; \Lambda), \Lambda)$ associé à la forme d'intersection; la forme d'intersection est non dégénérée.

PROPOSITION 2.1. — Soit $(W, u) \in \mathcal{P}_{4k}^\Lambda$, la forme d'intersection sur $L_{2k}(W; \Lambda)$ est une forme bilinéaire symétrique à valeurs dans Λ , non dégénérée et paire. Sa classe dans $WQ(\Lambda)$ ne dépend que de la classe de (W, u) dans P_{4k}^Λ ; cela définit un homomorphisme

$$\tau : P_{4k}^\Lambda \rightarrow WQ(\Lambda),$$

fonctoriel en Λ .

Démonstration. — Si 2 est une unité de Λ il est clair que la forme d'intersection est paire. Si 2 n'est pas une unité de Λ , les classes de Stiefel-Whitney de W sont nulles (car W est E^Λ -orientée) donc aussi les classes de WU or $v_{2k} \cap x$ est la réduction modulo 2 de $x \cdot x$. Dans tous les cas il existe une unique forme quadratique $q : L_{2k}(W; \Lambda) \rightarrow \Lambda$ associée à la forme d'intersection.

Si $[W, u] = 0$ dans P_{4k}^Λ , soit U^{4k+1} une variété E^Λ -orientée avec $\partial U = W \bigcup_{\partial W} W_0$ et $\tilde{H}_*(W_0; \Lambda) = 0$. On a alors $L_{2k}(W; \Lambda) = L_{2k}(\partial U; \Lambda)$ et pour montrer que la classe de $(L_{2k}(W; \Lambda), q)$ est nulle dans $WQ(\Lambda)$ nous allons exhiber un sous-espace de $H_{2k}(\partial U; \Lambda)$ inclus dans son orthogonal, dont l'image par q est zéro et de rang moitié de celui de $H_{2k}(\partial U; \Lambda)$.

Considérons le diagramme

$$(2.2) \quad \begin{array}{ccccccc} \longrightarrow & H^{2k}(U; \Lambda) & \xrightarrow{i^*} & H^{2k}(\partial U; \Lambda) & \xrightarrow{\delta} & H^{2k+1}(U, \partial U; \Lambda) & \longrightarrow \\ & \uparrow \text{D} & & \uparrow \text{D} & & \uparrow \text{D} & \\ \longrightarrow & H_{2k+1}(U, \partial U; \Lambda) & \xrightarrow{\partial} & H_{2k}(\partial U; \Lambda) & \longrightarrow & H_{2k}(U; \Lambda) & \longrightarrow \end{array}$$

Soient $A = \text{Im } \partial$ et $B = \ker \delta$ alors $\text{rg}_\Lambda A + \text{rg}_\Lambda B = \text{rg}_\Lambda H_{2k}(\partial U; \Lambda)$ et la suite exacte

$$0 \rightarrow A \rightarrow H_{2k}(\partial U; \Lambda) \xrightarrow{\text{D}} H^{2k}(\partial U; \Lambda)/B \rightarrow 0$$

montre que $\text{rg}_\Lambda H_{2k}(\partial U; \Lambda) = 2\text{rg}_\Lambda A$.

Si $x, y \in H_{2k+1}(U, \partial U; \Lambda)$,

$$\begin{aligned} \partial x \cdot \partial y &= (\text{D } \partial x) \cup (\text{D } \partial y) [\partial U] \\ &= i^*(\text{D}x \cup \text{D}y) [\partial U] = \delta i^*(\text{D}x \cup \text{D}y) [U] \\ &= 0. \end{aligned}$$

DEUXIÈME CAS : l impair et 2 unité de Λ .

Dans ce cas on considère la forme quadratique nulle sur $H_l(W, \Lambda)$ et l'homomorphisme nul $\tau : P_{2l}^\Lambda \rightarrow 0 = \text{WQ}(O)$.

TROISIÈME CAS : $l = 2k + 1$ et 2 non unité de Λ (cf. [9]).

2.3. Soient $(W, u) \in \mathcal{P}_{2l}^\Lambda$ et $\bar{u} : W \rightarrow E^\Lambda$ l'application recouverte par u . On considère le diagramme commutatif, noté (α, β) :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\alpha} & W \\ \downarrow i & & \downarrow \bar{u} \\ Y & \xrightarrow{\beta} & E^\Lambda \end{array}$$

où Y est une variété (non nécessairement orientable) de dimension $l+1$, de bord X , i est l'inclusion de X dans Y , α une immersion générique de X dans W et β une application continue.

Soit $\bar{\gamma}^\Lambda$ un SO-fibré vectoriel sur E^Λ tel que $\gamma^\Lambda \oplus \bar{\gamma}^\Lambda$ soit trivial, on en choisit une trivialisation ε .

Soit ξ le fibré stable de base Y égal à $v_Y \oplus \beta^* \bar{\gamma}^\Lambda$. La E^Λ -orientation de W et la trivialisation ε donnent alors un isomorphisme entre $\xi|_X$ et le stabilisé du O_l fibré normal à l'immersion α .

Cela définit un élément $\varphi(\alpha, \beta)$ du groupe de bordisme non orienté $\mathcal{N}_{l+1}(\text{BO}, \text{BO}_l)$ groupe qui est égal à $\mathbf{Z}/2$. Soit $\# \alpha$ le nombre de points doubles de l'immersion générique α , réduit modulo 2.

LEMME 2.4. — *L'élément de $\mathbf{Z}/2$, $\# \alpha + \varphi(\alpha, \beta)$ ne dépend que de la classe de bordisme non orienté de (α, β) . Cela définit une application $\bar{q} : \mathcal{N}_{l+1}(E^\Lambda, W) \rightarrow \mathbf{Z}/2$.*

Démonstration ⁽¹⁾. — L'ensemble des classes d'homotopie régulière d'immersions $\alpha : X^l \rightarrow W^{2l}$ homotopes à une application donnée est en bijection avec $\mathbf{Z}/2$; cela résulte de la classification des immersions qui montre que $\# \alpha$ et $\varphi(\alpha, \beta)$ induisent deux bijections (en général différentes) de cet ensemble sur $\mathbf{Z}/2$. Si (α, β) et (α', β') sont deux diagrammes avec $Y = Y'$, $\beta = \beta'$ et α homotope à α' , on a donc

$$\# \alpha + \varphi(\alpha, \beta) = \# \alpha' + \varphi(\alpha', \beta').$$

Supposons que les diagrammes (α_0, β_0) et (α_1, β_1) sont égaux dans $\mathcal{N}_{l+1}(E^\Lambda, W)$, il existe donc une variété Z de dimension $l+2$, $\partial Z = Y_0 \cup_{X_0} Z' \cup_{X_1} Y_1$, et des applications rendant le diagramme

$$\begin{array}{ccc} Z' & \xrightarrow{a} & W \\ \downarrow & & \downarrow \bar{a} \\ Z & \xrightarrow{b} & E^\Lambda \end{array}$$

commutatif et étendant α_i et β_i ; de plus Z' n'a aucune composante connexe fermée.

On peut homotoper a en une application de Z' dans $W \times I$ qui est une immersion sauf en un nombre fini de points. Par « piping » on fait rentrer ces points dans un collier de $X_0 \cup X_1$ et on obtient une immersion \bar{a} de Z' dans $W \times I$; les immersions $\bar{a}|_{X_i}$ sont régulièrement homotopes à des immersions génériques, $\alpha'_i : X_i \rightarrow W \times \{i\}$ et par relèvement des homotopies pour les immersions on trouve une immersion générique

$$a' : Z' \rightarrow W \times I$$

telle que $a'|_{X_i} = \alpha'_i$. La propriété d'extension des homotopies permet de compléter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} Z' & \xrightarrow{a'} & W \times I \\ \downarrow & & \downarrow \bar{a} \\ Z & \xrightarrow{b'} & E^\Lambda \end{array}$$

Soient $\beta'_i = b'|_{Y_i}$.

La construction de 2.3 appliquée à (Z, Z') donne alors un cobordisme entre les variétés singulières représentant $\varphi(\alpha'_0, \beta'_0)$ et $\varphi(\alpha'_1, \beta'_1)$.

De plus l'ensemble des points doubles de a' étant une variété de dimension 1, on a que $\# \alpha'_0 = \# \alpha'_1$ et donc

$$\# \alpha_0 + \varphi(\alpha_0, \beta_0) = \# \alpha'_0 + \varphi(\alpha'_0, \beta'_0) = \# \alpha'_1 + \varphi(\alpha'_1, \beta'_1) = \# \alpha_1 + \varphi(\alpha_1, \beta_1).$$

Soit $x \in \mathcal{N}_{l+1}(E^\Lambda, W)$ représenté par un diagramme

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\alpha} & W \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \xrightarrow{\beta} & E^\Lambda \end{array}$$

⁽¹⁾ En raisonnant composantes par composantes, on peut supposer que X est connexe.

comme $\dim W = 2 \dim X$, on peut supposer que α est une immersion générique et on pose $\bar{q}(x) = \# \alpha + \varphi(\alpha, \beta)$.

2.5. Soit h l'homomorphisme $\mathcal{N}_{l+1}(E^\Lambda, W) \rightarrow H_l(W; \mathbf{Z}/2)$ composé de l'homomorphisme $\mathcal{N}_{l+1}(E^\Lambda, W) \rightarrow H_{l+1}(E^\Lambda, W; \mathbf{Z}/2)$ et du connectant

$$H_{l+1}(E^\Lambda, W; \mathbf{Z}/2) \rightarrow H_l(W; \mathbf{Z}/2)$$

(qui est un isomorphisme puisque 2 est non inversible dans Λ , voir 1.7).

Si $(\alpha + \alpha', \beta + \beta')$ désigne le diagramme obtenu à partir des diagrammes (α, β) et (α', β') en faisant la somme disjointe on a

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha + \alpha', \beta + \beta') &= \varphi(\alpha, \beta) + \varphi(\alpha', \beta'), \\ \#(\alpha + \alpha') &= \# \alpha + \# \alpha' + \alpha_*[X] \cdot \alpha'_*[X'] \end{aligned}$$

et donc pour $x, x' \in \mathcal{N}_{l+1}(E^\Lambda, W)$:

$$\bar{q}(x + x') = \bar{q}(x) + \bar{q}(x') + h(x) \cdot h(x')$$

(.) désignant la forme d'intersection modulo 2.

LEMME 2.6. — *Il existe une unique application $q : H_l(W; \mathbf{Z}/2) \rightarrow \mathbf{Z}/2$ telle que*

$$q \circ h = \bar{q};$$

et q est une forme quadratique associée à la forme d'intersection.

Démonstration. — D'après le calcul de $\mathcal{N}_{l+1}(E^\Lambda, W)$ [6], on sait que h est surjective et que son noyau admet une base formée des classes de diagrammes de la forme

$$\left[\begin{array}{ccc} X^p & \rightarrow & W \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y^{p+1} & \rightarrow & E^\Lambda \end{array} \right] \times M^{l-p} \quad \text{avec } p < l.$$

On homotope $X^p \rightarrow W$ en un plongement de fibré normal v . La donnée d'un sous-fibré trivial de v de dimension $2(l-p)$ détermine un élément ψ du groupe de bordisme $\mathcal{N}_{p+1}(\mathbf{BO}, \mathbf{BO}_p)$ qui vaut $\mathbf{Z}/2$; comme $p < l$ on peut choisir un tel sous-fibré de façon à ce que $\psi = 0$, et à l'aide d'un plongement $M^{l-p} \rightarrow \mathbf{R}^{2(l-p)}$ on construit un plongement $\alpha : X^p \times M^{l-p} \rightarrow W$ tel que $\varphi(\alpha, \beta)$ est nul. L'application \bar{q} est donc nulle sur le noyau de h .

PROPOSITION 2.7. — *Soit $(W, u) \in \mathcal{P}_{4k+2}^\Lambda$ avec 2 non inversible dans Λ ; la classe de $(H_{2k+1}(W, \mathbf{Z}/2), q)$ dans $\mathbf{WQ}(\mathbf{Z}/2) = \mathbf{WQ}(\Lambda/2 \Lambda)$ ne dépend que de la classe de (W, u) dans $\mathbf{P}_{4k+2}^\Lambda$; cela définit un homomorphisme $\tau : \mathbf{P}_{4k+2}^\Lambda \rightarrow \mathbf{WQ}(\Lambda/2 \Lambda)$ fonctoriel en Λ .*

Démonstration. — En reprenant les notations de la démonstration de 2.1 en particulier le diagramme 2.2 [avec Λ remplacé par $\mathbf{Z}/2$ et les changements de dimension qui s'imposent], il reste à vérifier que q est nulle sur $\partial(H_{2k+2}(U, \partial U; \mathbf{Z}/2))$. Soit

$$x \in \partial(H(U, \partial U; \mathbf{Z}/2)),$$

x est représenté par

$$\begin{array}{ccc} X^{2k+1} & \xrightarrow{\alpha} & \partial U \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y^{2k+2} & \xrightarrow{\beta} & U \end{array}$$

Soit $\bar{v} : U \rightarrow E^\Lambda$ induit par la E^Λ -orientation de U , alors $x = h([\alpha, \bar{v}, \beta])$. On peut supposer que Y n'a pas de composante connexe fermée et comme dans 2.4 on peut transformer β et α en des immersions il est alors clair que $\neq \alpha = 0$ et que $\varphi(\alpha, \bar{v} \circ \beta) = 0$.

3. Calcul de P_n^Λ

3.1. NOTATIONS. — Soit $(W, u) \in \mathcal{P}_n^\Lambda$.

On appelle chirurgie de dimension k la donnée d'un plongement

$$\varphi : S^k \times D^{n-k} \rightarrow (\text{Int } W) \times 1$$

et d'une E^Λ -orientation v de $W \times I \cup_\varphi D^{k+1} \times D^{n-k}$ étendant u sur $W \times 0$.

On pose

$$\partial(W \times I \cup_\varphi D^{k+1} \times D^{n-k}) = W \times 0 \cup \partial W \times I \cup W' \quad \text{et} \quad u' = v|_{W'}$$

on a alors $(W', u') \in \mathcal{P}_n^\Lambda$ et on dit qu'on obtient (W', u') en effectuant la chirurgie correspondante; (W, u) et (W', u') ont même image dans P_n^Λ .

On dit qu'une chirurgie est associée à $x \in H_k(W; \Lambda)$ si $\varphi_* [S^k] = \lambda x$ avec λ unité de Λ .

On dit qu'un espace X est (Λ, k) -connexe si

$$\tilde{H}_i(X; \Lambda) = 0 \quad \text{pour} \quad i \leq k \quad \text{et de plus} \quad \pi_1(X) = 0 \quad \text{si} \quad k \geq 1.$$

PROPOSITION 3.2. — Soient $(W, u) \in \mathcal{P}_n^\Lambda$ avec W $(\Lambda, k-1)$ -connexe et $x \in H_k(W; \Lambda)$. Il existe une chirurgie associée à x dans chacun des cas suivants :

- (i) $k \leq [(n-1)/2]$.
- (ii) $n = 2k \geq 6$ et $q(x) = 0$.

Démonstration. — Comme W est $(\Lambda, k-1)$ -connexe il résulte du théorème d'Hurewicz-Serre qu'il existe $f : S^k \rightarrow W$ telle que $f_* [S^k] = \lambda x$ avec λ unité de Λ .

Comme $\pi_k(E^\Lambda) \otimes \Lambda = 0$ (1.7) quitte à changer l'unité λ , on peut supposer qu'il existe $g : D^{k+1} \rightarrow E^\Lambda$ telle que

$$\begin{array}{ccc} S^k & \xrightarrow{f} & W \\ \downarrow & & \downarrow \bar{u} \\ D^{k+1} & \xrightarrow{g} & E^\Lambda \end{array}$$

soit commutatif.

Soit en épaississant

$$\begin{array}{ccc} S^k \times D^{n-k} & \xrightarrow{\bar{f}} & W \\ \downarrow \wr & & \downarrow \bar{u} \\ D^{k+1} \times D^{n-k} & \xrightarrow{\bar{g}} & E^\Lambda \end{array}$$

Ce diagramme est recouvert par un diagramme de morphismes fibrés unique à homotopie près

★

$$\begin{array}{ccc} V_{S^k \times D^{n-k}} & \xrightarrow{v_1} & V_W \\ \downarrow & & \downarrow u \\ V_{D^{k+1} \times D^{n-k}} & \xrightarrow{v_2} & \gamma^\Lambda \end{array}$$

Lorsque $n-k > 2$, la classification des immersions donne une classe d'homotopie régulière d'immersion $\psi : S^k \times D^{n-k} \rightarrow W$ homotope à \bar{f} et induisant v_1 sur les fibrés normaux.

S'il existe un plongement φ dans cette classe, le diagramme ★ montre comment trouver une E^Λ -orientation de $W \times I \cup_\varphi D^{k+1} \times D^{n-k}$ étendant u sur $W \times 0$.

Pour chercher φ , il est équivalent de chercher un plongement de S^k dans W régulièrement homotope à $\psi| : S^k = S^k \times 0 \rightarrow W$.

Si $n \geq 2k+1$ il existe toujours un tel plongement ce qui montre la partie (i) si $n \geq 3$ (pour $n \leq 2$ c'est évident).

Si $n = 2k \geq 6$ et k pair, W est alors 1-connexe et le procédé de Whitney montre que $\psi| : S^k \rightarrow W$ est régulièrement homotope à un plongement si $f_* [S^k] \cdot f_* [S^k] = 0$ c'est-à-dire si $q(x) = 0$.

Si $n = 2k \geq 6$, k impair et si 2 est une unité de Λ , il existe toujours une chirurgie associée à x , car si $\psi| : S^k \rightarrow W$ n'est pas régulièrement homotope à un plongement, son double (pour la somme connexe des immersions) l'est et la chirurgie correspondante est associée à $2x$ donc à x .

Si $n = 2k \geq 6$, k impair et 2 non inversible dans Λ , soit \bar{x} l'image de x dans

$$H_k(W, \mathbf{Z}/2) = H_k(W, \Lambda/2\Lambda).$$

La variété singulière suivante représente \bar{x} :

$$\begin{array}{ccc} S^k & \xrightarrow{\psi|} & W \\ \downarrow \wr & & \downarrow \bar{u} \\ D^{k+1} & \xrightarrow{\bar{g}|} & E^\Lambda \end{array}$$

Or l'immersion ψ a été choisie de sorte que $\varphi(\psi|, \bar{g}|) = 0$ et $q(x) = q(\bar{x}) = \#(\psi|)$ qui, par le procédé de Whitney, est l'obstruction à trouver un plongement $S^k \rightarrow W$ régulièrement homotope à $\psi|$.

COROLLAIRE 3.3. — Soit $x \in P_n^\Lambda$, il existe $(W, u) \in \mathcal{P}_n^\Lambda$ dont la classe est x avec W $(\Lambda, [n/2]-1)$ -connexe.

Démonstration. — On peut toujours choisir un représentant (W, u) connexe cela suffit à montrer le corollaire pour $n \leq 3$.

Pour $n \geq 4$, comme $\pi_1(E^\Lambda) = 0$, la démonstration précédente montre en fait que pour tout élément x de $\pi_1 W$, il existe une chirurgie de dimension 1 telle que la classe de $\varphi|_{S^1 \times 0} : S^1 \rightarrow W$ soit x . La démonstration classique [7] fait alors passer de la proposition 3.2 au corollaire.

LEMME 3.4. — Soit $(W, u) \in \mathcal{P}_n^\Lambda$ avec $\tilde{H}_i(W, \Lambda) = 0$ pour $i \leq [n/2]$.
La classe de (W, u) dans P_n^Λ est nulle.

Démonstration. — Comme $\tilde{H}_j(\partial W; \Lambda) = 0$ pour $j < n-1$, la dualité de Poincaré montre d'abord que $\tilde{H}_i(W; \Lambda) = 0$ pour tout i . Soit D^n un disque plongé dans $\text{Int } W$; $W - \text{Int } D$ est un H_Λ -cobordisme entre ∂W et S^{n-1} et $W \times I$ peut être considéré comme un cobordisme dans \mathcal{P}_n^Λ entre $(W, \partial W)$ et (D^n, S^{n-1}) .

THÉORÈME 3.5. — Pour n impair P_n^Λ est nul. L'homomorphisme $\tau : P_{2l}^\Lambda \rightarrow WQ(\Lambda)$ est surjectif; c'est un isomorphisme pour $2l \neq 4$.

Démonstration.

Cas n impair, $n = 2k+1$. — Il est manifeste que $P_1^\Lambda = 0$. Pour $n \geq 3$ on représente $x \in P_{2k+1}^\Lambda$ par (W, u) avec W $(\Lambda, k-1)$ -connexe et on calque la démonstration de [5] ou [7] pour voir comment par une suite de chirurgies de dimension k on peut tuer $H_k(W; \Lambda)$. Il est à remarquer que la méthode s'applique pour $n = 3$ car on ne veut tuer que $H_1(W; \Lambda)$.

Cas n pair, $n = 2l$.

3.6. INJECTIVITÉ DE τ . — Le résultat est clair pour P_2^Λ , nous supposons donc que $n \geq 6$. Soit $(W, u) \in \mathcal{P}_{2l}^\Lambda$ avec W $(\Lambda, l-1)$ -connexe et soit (W', u') obtenue à partir de (W, u) en effectuant une chirurgie de dimension l associée à 0. On a

$$(H_l(W'; \Lambda), q_{W'}) = (H_l(W; \Lambda), q_W) \oplus \text{plan hyperbolique.}$$

Soit $x \in P_{2l}^\Lambda$ avec $\tau(x) = 0$; on représente x par (W, u) avec W $(\Lambda, l-1)$ -connexe; d'après A 2.2 :

$$(H_l(W, \Lambda), q_W) \oplus (\oplus \text{plan hyperbolique}) = \oplus \text{plan hyperbolique,}$$

donc quitte à effectuer un nombre fini de chirurgies associées à zéro, on peut supposer que $H_l(W, \Lambda)$ admet une Λ -base (e_i, f_i) , $1 \leq i \leq p$ avec $e_i \cdot e_j = 0$, $e_i \cdot f_j = \delta_{ij}$, $f_i \cdot f_j = 0$ et $q(e_i) = 0$.

Lorsqu'on effectue alors les chirurgies associées aux e_i , on trouve un représentant (W', u') de x avec

$$\tilde{H}_i(W'; \Lambda) = 0 \quad \text{pour } i \leq l \quad \text{donc } x = 0.$$

3.7. SURJECTIVITÉ DE τ POUR l PAIR. — Soit (M, q) une forme quadratique non dégénérée à valeurs dans Λ. Quitte à multiplier les éléments d'une base de M par des unités de Λ, on peut trouver une base (e_i)_{i∈I} de M telle que l'on ait

$$\forall i, j \in I, \quad e_i \cdot e_j \in \mathbf{Z} \quad \text{et} \quad q(e_i) \in \mathbf{Z}.$$

Si i est un élément de l'ensemble d'indices I, on désigne par ξ_i le fibré vectoriel de dimension l sur S^l stablement trivial de caractéristique d'Euler e_i · e_i = 2 q(e_i). La parité de e_i · e_i assure l'existence d'un tel fibré. On désigne par E_i l'espace total du fibré en boules de ξ_i et par S_i l'image de la section nulle de ξ_i.

Soient i et j deux éléments de I, i < j. Désignons par p l'entier |e_i · e_j| et choisissons p disques fermés disjoints de dimension l : d₁, ..., d_p dans S_i et p disques fermés disjoints de dimension l : δ₁, ..., δ_p dans S_j. Les points de E_i situés au-dessus de d_λ forment un produit d_λ × D^l, de même les points de E_j situés au-dessus de δ_λ forment un produit δ_λ × D^l. On identifie alors d_λ × D^l avec δ_λ × D^l à l'aide d'isomorphismes φ : d_λ → D^l et ψ : D^l → δ_λ conservant ou non l'orientation suivant que e_i · e_j est positif ou négatif.

En faisant cette opération pour tout λ ∈ {1, ..., p} puis pour tous les couples (i, j), i < j, on obtient, après lissage du bord, une variété à bord E voisinage régulier de l'union des sphères S_i telle que la forme intersection sur H_l(E; Λ) soit isomorphe à la forme bilinéaire associée à q.

D'autre part E_i est parallélisable, donc E l'est également.

Le groupe H₁(E; Z) est libre et tout élément de H₁(E; Z) est représentable par un plongement de S¹ dans ∂E car la codimension de S_i dans E est supérieure ou égale à 2 et la dimension de ∂E est supérieure ou égale à 3. Il en résulte que l'on peut attacher des anses à ∂E de façon à obtenir une variété à bord V parallélisable telle que

$$\forall i \neq l, \quad \tilde{H}_i(V; \mathbf{Z}) = 0 \quad \text{et} \quad H_l(V; \Lambda) = M.$$

La forme q étant non dégénérée, l'application

$$H_l(V; \Lambda) \rightarrow H_l(V, \partial V; \Lambda) \xrightarrow{\sim} H^l(V; \Lambda) = \text{Hom}(H_l(V; \Lambda), \Lambda)$$

est un isomorphisme. On vérifie alors facilement que ∂V est une Λ-sphère.

Comme V est E^Λ-orientable puisque parallélisable, la forme quadratique (M, q) appartient à l'image de τ et τ est surjectif.

3.8. SURJECTIVITÉ DE τ POUR l IMPAIR. — La surjectivité de l'application composée [7] :

$$P_n \rightarrow P_n^{\mathbf{Z}} \rightarrow P_n^{\Lambda} \xrightarrow{\tau} \text{WQ}(\Lambda/2\Lambda)$$

entraîne la surjectivité de τ.

PROPOSITION 3.9. — L'application canonique de Θ_n dans Θ_n^Z est un isomorphisme pour tout n différent de 3. Si n est égal à 3, Θ_n^Z se surjecte sur Z/2.

Démonstration. — Comme E^Z est contractile, A_n^Z est isomorphe à A_n . D'après [7] et le théorème 3.5, P_n^Z est isomorphe à P_n pour tout n différent de 4. De plus l'application de A_4^Z dans P_4^Z est injective puisqu'elle induit une application injective de $A_4 = A_4^Z$ dans $WQ(Z) = Z$.

Il en résulte, après utilisation du lemme des 5 que Θ_n^Z est isomorphe à Θ_n pour tout $n \neq 3$.

On a d'autre part la suite exacte

$$0 \rightarrow A_4^Z \xrightarrow{a} P_4^Z \xrightarrow{b} \Theta_3^Z \rightarrow 0$$

Comme $\tau : P_4^Z \rightarrow WQ(Z)$ est surjectif et que $\tau \circ a$ envoie A_4^Z en $2WQ(Z)$, on en déduit une surjection de Θ_3^Z sur $Z/2$.

4. Réduction des groupes P_{4k}^Λ et Θ_{4k-1}^Λ

L'algèbre utilisée dans ce paragraphe est exposée en appendice, le lecteur est invité à s'y reporter pour les notations qui ne seraient pas précisées ci-après.

4.1. Soit V une \mathbf{Q} -sphère de dimension $4k-1$, l'isomorphisme de Poincaré (noté génériquement D) $D : H_{2k-1}(V) \rightarrow H^{2k}(V)$ fait de $H_{2k-1}(V)$ un e -module sur Z ; la forme d'enlacement peut être décrite par la composition des isomorphismes suivants :

$$H_{2k-1}(V) \rightarrow H^{2k}(V) \rightarrow H^{2k-1}(V; \mathbf{Q}/Z) \rightarrow \widehat{H_{2k-1}(V)}.$$

4.2. Soit maintenant une variété à bord W de dimension $4k$ dont le bord ∂W est une \mathbf{Q} -sphère de dimension $4k-1$, la composition de l'isomorphisme de Poincaré

$$D : H_{2k}(W) \rightarrow H^{2k}(W, \partial W)$$

et de l'homomorphisme naturel $H^{2k}(W, \partial W) \rightarrow H^{2k}(W)$ induit un homomorphisme entre les composantes libres $L_{2k}(W) \rightarrow \text{Hom}[L_{2k}(W), Z]$ qui tensorisé par \mathbf{Q} devient l'isomorphisme $H_{2k}(W; \mathbf{Q}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{Q}}[H_{2k}(W; \mathbf{Q}), \mathbf{Q}]$ associé à la forme bilinéaire d'intersection rationnelle. La composante libre $L_{2k}(W)$ de $H_{2k}(W)$ a donc une structure de \tilde{b} -module.

LEMME 4.3. — La somme orthogonale des e -modules coker $L_{2k}(W)$ et $H_{2k-1}(\partial W)$ est neutre.

Démonstration. — Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} & & H^{2k}(\partial W) & \longrightarrow & H^{2k+1}(W, \partial W) \\ & & \uparrow \wr D & & \uparrow \wr D \\ H_{2k}(W, \partial W) & \xrightarrow{\delta} & H_{2k-1}(\partial W) & \xrightarrow{i} & H_{2k-1}(W) \end{array}$$

En prenant les composantes de torsion et en utilisant le théorème des coefficients universels pour la cohomologie nous obtenons :

$$\begin{array}{ccccc}
 & \widehat{H_{2k-1}(\partial W)} & \xrightarrow{\widehat{\text{Tors}(\partial)}} & \widehat{T_{2k}(W, \partial W)} & \\
 & \uparrow \wr & & \uparrow \wr & \\
 T_{2k}(W, \partial W) & \xrightarrow{\text{Tors}(\partial)} & H_{2k-1}(\partial W) & \xrightarrow{\text{Tors}(i)} & T_{2k-1}(W)
 \end{array}$$

où la flèche verticale de gauche est l'isomorphisme associé à la forme d'enlacement de $H_{2k-1}(\partial W)$ et le symbole $T_l(\)$ une abréviation du symbole $\text{Tors}[H_l(\)]$.

Appelons I le sous-module $\text{Im}[\text{Tors}(\partial)]$ de $H_{2k-1}(\partial W)$, le diagramme ci-dessus montre

$$I^\perp = \text{Ker}[\text{Tors}(i)] \quad \text{et} \quad I \subset I^\perp.$$

Nous allons montrer qu'il existe une anti-isométrie du e -module coker $L_{2k}(W)$ sur le e -module I^\perp/I , la démonstration s'achèvera en appliquant le lemme (A 1.10).

Dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 T_{2k}(W) & \longrightarrow & T_{2k}(W, \partial W) & \xrightarrow{\text{Tors}(\partial)} & H_{2k-1}(\partial W) & \xrightarrow{\text{Tors}(i)} & T_{2k-1}(W) & \\
 \downarrow & & \downarrow & & \parallel & & \downarrow & \\
 H_{2k}(W) & \longrightarrow & H_{2k}(W, \partial W) & \xrightarrow{\partial} & H_{2k-1}(\partial W) & \xrightarrow{i} & H_{2k-1}(W) & \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 L_{2k}(W) & \longrightarrow & \text{Hom}[L_{2k}(W), Z] & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & L_{2k-1}(W) & \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 & & 0 & & 0 & & 0 &
 \end{array}$$

les colonnes et la ligne du milieu sont exactes. Nous pouvons considérer chaque ligne comme un complexe différentiel et le diagramme comme une suite exacte courte de complexes différentiels, il en résulte un isomorphisme φ :

$$\varphi : \text{coker } L_{2k}(W) \rightarrow I^\perp/I.$$

Il reste à montrer que cet isomorphisme est une anti-isométrie.

Soient ξ et $\eta \in \text{coker } L_{2k}(W)$, x et y deux de leurs relevés dans

$$H_{2k}(W, \partial W) : \varphi(\xi) = \partial x, \quad \varphi(\eta) = \partial y.$$

Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 H^{2k}(W) & \xrightarrow{i} & H^{2k}(\partial W) \\
 \uparrow \wr_D & & \uparrow \wr_D \\
 H_{2k}(W, \partial W) & \xrightarrow{\partial} & H_{2k-1}(\partial W)
 \end{array}$$

LEMME 4.4. — Ces deux applications sont opposées.

Nous laissons la démonstration au lecteur.

COROLLAIRE 4.5. — L'image par l'homomorphisme δ de la classe de Witt de

$$H_{2k}(W; \mathbf{Q})$$

est l'opposée de la classe dans $W(\mathbf{Q}, \mathbf{Z})$ de $H_{2k-1}(\partial W)$.

COROLLAIRE 4.6. — Si une \mathbf{Q} -sphère, V , de dimension $4k-1$ borde un \mathbf{Q} -disque, le e -module $H_{2k-1}(V)$ est neutre.

4.7. Ceci permet de définir un homomorphisme

$$e: \Theta_{4k-1}^{\mathbf{Q}} \rightarrow W(\mathbf{Q}, \mathbf{Z}),$$

en associant à une \mathbf{Q} -sphère la classe de son module d'enlacement. Plus généralement la composition

$$\Theta_{4k-1}^{\Lambda} \xrightarrow{\text{oubli}} \Theta_{4k-1}^{\mathbf{Q}} \xrightarrow{e} W(\mathbf{Q}, \mathbf{Z}),$$

induit un homomorphisme encore noté e :

$$\Theta_{4k-1}^{\Lambda} \rightarrow W(\Lambda, \mathbf{Z}).$$

PROPOSITION 4.8. — Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} P_{4k}^{\Lambda} & \xrightarrow{b} & \Theta_{4k-1}^{\Lambda} \\ \downarrow \tau & & \downarrow e \\ WQ(\Lambda) & \xrightarrow{\delta} & W(\Lambda, \mathbf{Z}) \end{array}$$

est anticommutatif.

Ceci résulte de (4.5) et de la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} WQ(\Lambda) & \xrightarrow{\delta} & W(\Lambda, \mathbf{Z}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ W(\mathbf{Q}) & \xrightarrow{\delta} & W(\mathbf{Q}, \mathbf{Z}) \end{array}$$

4.9. Soient $\tilde{P}_{4k}^{\Lambda} = \text{Ker}(\delta \circ \tau)$ et σ l'homomorphisme de signature $P_{4k}^{\Lambda} \rightarrow \mathbf{Z}$, la proposition suivante est une reformulation de (A 2.17).

PROPOSITION 4.10. — Pour $k \neq 1$, la restriction de l'homomorphisme σ à \tilde{P}_{4k}^{Λ} est un isomorphisme sur \mathbf{Z} ou sur $8\mathbf{Z}$ suivant que 2 est inversible ou non dans Λ . Dans le premier cas, la signature permet de décomposer P_{4k}^{Λ} en la somme directe

$$P_{4k}^{\Lambda} = \tilde{P}_{4k}^{\Lambda} \oplus W(\Lambda, \mathbf{Z}).$$

4.11. Soit $\tilde{\Theta}_{4k-1}^\Lambda = \text{Ker } e$. On a la suite exacte

$$0 \rightarrow \tilde{\Theta}_{4k-1}^\Lambda \rightarrow \Theta_{4k-1}^\Lambda \xrightarrow{e} W(\Lambda, \mathbf{Z}) \rightarrow 0.$$

Cette suite est scindée lorsque 2 est inversible dans Λ et k différent de 1.

Dans le cas $n \neq 0$ (4) posons

$$\tilde{P}_n^\Lambda = P_n^\Lambda \quad \text{et} \quad \tilde{\Theta}_{n-1}^\Lambda = \Theta_{n-1}^\Lambda.$$

Nous pouvons énoncer :

PROPOSITION 4.12. — *La suite*

$$\dots \rightarrow A_n^\Lambda \xrightarrow{a} \tilde{P}_n^\Lambda \xrightarrow{b} \tilde{\Theta}_{n-1}^\Lambda \xrightarrow{c} A_{n-1}^\Lambda \rightarrow \dots$$

est exacte.

4.13. Soient Λ_1 et Λ_2 deux anneaux de fractions, $\Lambda_1 \subset \Lambda_2$, et $\Lambda_{1,2}$ caractérisé par

$$\Lambda_1 \cap \Lambda_{1,2} = \mathbf{Z} \quad \text{et} \quad \Lambda_1 + \Lambda_{1,2} = \Lambda_2.$$

PROPOSITION 4.14. — *Pour $n \neq 4$ l'application d'oubli $\tilde{P}_n^{\Lambda_1} \rightarrow \tilde{P}_n^{\Lambda_2}$ induit un isomorphisme $\tilde{P}_n^{\Lambda_1} \otimes \Lambda_{1,2} \xrightarrow{\sim} \tilde{P}_n^{\Lambda_2} \otimes \Lambda_{1,2}$.*

Cette proposition est une conséquence de (3.5) et (4.10).

5. Changement d'anneaux

5.1. Soit Ω_n^Λ , le groupe de cobordisme des variétés sans bord, de dimension n , munies d'une E^Λ -orientation. C'est le groupe de cobordisme associé à la fibration :

$$F^\Lambda \rightarrow E^\Lambda \rightarrow \text{BSO},$$

dont la fibre F^Λ est un Λ -localisé de SO .

L'ensemble des classes de E^Λ -orientations à homotopie près, d'une variété V est donc un espace homogène sous l'action du groupe $[V, \text{SO}] \otimes \Lambda$.

La trivialisatation canonique de la sphère S^n fournit une E^Λ -orientation qui permet d'identifier l'ensemble des classes de E^Λ -orientations de S^n , au groupe $\pi_n(\text{SO}) \otimes \Lambda$.

5.2. Nous avons alors la suite exacte de groupes

$$\rightarrow \pi_n(\text{SO}) \otimes \Lambda \xrightarrow{J_\Lambda} \Omega_n^\Lambda \rightarrow A_n^\Lambda \rightarrow \pi_{n-1}(\text{SO}) \otimes \Lambda \rightarrow$$

où J_Λ est l'application qui à une sphère E^Λ -orientée, associe sa classe dans Ω_n^Λ et où la flèche $A_n^\Lambda \rightarrow \pi_{n-1}(\text{SO}) \otimes \Lambda$, est l'obstruction à étendre la E^Λ -orientation d'une variété en dehors d'un point, à cette variété toute entière.

Soit $E_k^\Lambda \rightarrow \text{BSO}(k)$ la fibration image réciproque par l'inclusion de $\text{BSO}(k)$ dans BSO , de la fibration $E^\Lambda \rightarrow \text{BSO}$.

Notons γ_k^Λ le fibré image réciproque du fibré universel sur $\text{BSO}(k)$ par la projection : $E_k^\Lambda \rightarrow \text{BSO}(k)$, et $T\gamma_k^\Lambda$ son espace de Thom.

Nous avons alors l'isomorphisme de Thom-Pontrjagin [11] :

$$(5.3) \quad \Omega_n^\Lambda \simeq \lim_{\substack{\longrightarrow \\ k \rightarrow +\infty}} \pi_{n+k}(T\gamma_k^\Lambda).$$

Nous reprenons les notations de (4.13).

LEMME 5.4. — *L'application d'oubli $\Omega_n^{\Lambda_1} \rightarrow \Omega_n^{\Lambda_2}$ induit un isomorphisme*

$$\Omega_n^{\Lambda_1} \otimes \Lambda_{1,2} \rightarrow \Omega_n^{\Lambda_2} \otimes \Lambda_{1,2}.$$

Il en résulte les corollaires suivants qui permettent le calcul de Θ_n^Λ à partir de $\tilde{\Theta}_n^{\mathbf{Z}} = \Theta_n^{\mathbf{Z}}$ et de $\tilde{\Theta}_n^{\mathbf{Q}}$.

COROLLAIRE 5.5. — *L'application d'oubli $A_n^{\Lambda_1} \rightarrow A_n^{\Lambda_2}$ induit un isomorphisme*

$$A_n^{\Lambda_1} \otimes \Lambda_{1,2} \rightarrow A_n^{\Lambda_2} \otimes \Lambda_{1,2}.$$

On regarde les suites (5.2) pour Λ_1 et Λ_2 ; on tensorise par $\Lambda_{1,2}$ qui est plat, et on applique le lemme des 5.

COROLLAIRE 5.6. — *Pour $n \neq 3$, l'application d'oubli $\tilde{\Theta}_n^{\Lambda_1} \rightarrow \tilde{\Theta}_n^{\Lambda_2}$ induit un isomorphisme $\tilde{\Theta}_n^{\Lambda_1} \otimes \Lambda_{1,2} \rightarrow \tilde{\Theta}_n^{\Lambda_2} \otimes \Lambda_{1,2}$.*

Cela résulte de la proposition (4.14), du corollaire (5.5) et du lemme des 5 pour les suites exactes (4.12) de Λ_1 et Λ_2 .

En appliquant le corollaire (5.6) aux deux cas :

- $\Lambda_1 = \Lambda$, $\Lambda_2 = \mathbf{Q}$. On note alors $\Lambda_{1,2}$, Λ' .
- $\Lambda_1 = \mathbf{Z}$, $\Lambda_2 = \Lambda_{1,2} = \Lambda$. On obtient :

THÉORÈME 5.7. — *Si $n \neq 3$, les applications d'oubli donnent des isomorphismes*

$$\tilde{\Theta}_n^\Lambda \otimes \Lambda' \xrightarrow{\sim} \tilde{\Theta}_n^{\mathbf{Q}} \otimes \Lambda' \quad \text{et} \quad \Theta_n^{\mathbf{Z}} \otimes \Lambda \xrightarrow{\sim} \tilde{\Theta}_n^\Lambda \otimes \Lambda,$$

d'où

$$\tilde{\Theta}_n^\Lambda = \tilde{\Theta}_n^{\mathbf{Q}} \otimes \Lambda' \oplus \Theta_n^{\mathbf{Z}} \otimes \Lambda.$$

Pour obtenir la décomposition en somme directe, il suffit de remarquer que le groupe $\tilde{\Theta}_n^\Lambda$ est de torsion $\Theta_n^{\mathbf{Z}} \otimes \mathbf{Q} \xrightarrow{\sim} \tilde{\Theta}_n^\Lambda \otimes \mathbf{Q}$ et $\Theta_n^{\mathbf{Z}}$ est fini [7].

5.8. *Démonstration du lemme (5.4).* — Le morphisme de fibrations

$$\begin{array}{ccc} F^{\Lambda_1} & \longrightarrow & F^{\Lambda_2} \\ \downarrow & & \downarrow \\ E_k^{\Lambda_1} & \longrightarrow & E_k^{\Lambda_2} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{BSO}(k) & \stackrel{\text{id}}{=} & \text{BSO}(k) \end{array}$$

induit un isomorphisme $H_*(F^{\Lambda_1}) \otimes \Lambda_{1,2} \xrightarrow{\sim} H_*(F^{\Lambda_2}) \otimes \Lambda_{1,2}$ d'où en comparant les suites spectrales homologiques de ces deux fibrations, un isomorphisme

$$H_*(E_k^{\Lambda_1}) \otimes \Lambda_{1,2} \rightarrow H_*(E_k^{\Lambda_2}) \otimes \Lambda_{1,2}.$$

Le morphisme de fibrés

$$\begin{array}{ccc} \gamma_k^{\Lambda_1} & \rightarrow & \gamma_k^{\Lambda_2} \\ \downarrow & & \downarrow \\ E_k^{\Lambda_1} & \rightarrow & E_k^{\Lambda_2} \end{array}$$

induit en homologie, des morphismes qui commutent avec les isomorphismes de Thom; d'où un isomorphisme

$$H_*(T\gamma_k^{\Lambda_1}) \otimes \Lambda_{1,2} \rightarrow H_*(T\gamma_k^{\Lambda_2}) \otimes \Lambda_{1,2}.$$

Pour $k > 2$, les espaces $T\gamma_k^{\Lambda_i}$ ($i = 1, 2$) sont 2-connexes.

Le lemme résulte alors du théorème de Whitehead, modulo la classe de Serre des groupes abéliens annulés par la tensorisation par $\Lambda_{1,2}$, et de l'isomorphisme (5.3).

Considérons la suite exacte de cobordisme relatif :

$$\rightarrow \Omega_n^{\text{SO}} \rightarrow \Omega_n^{\text{SO}, \Lambda} \rightarrow \Omega_{n-1}^{\Lambda} \rightarrow$$

LEMME 5.9. — *Le groupe $\Omega_n^{\text{SO}, \Lambda}$ est Λ -local (c'est-à-dire que la flèche*

$$\Omega_n^{\text{SO}, \Lambda} \rightarrow \Omega_n^{\text{SO}, \Lambda} \otimes \Lambda$$

est un isomorphisme).

On a le morphisme de fibrés

$$\begin{array}{ccc} \gamma_k^{\Lambda} & \longrightarrow & \gamma_k \\ \downarrow & & \downarrow \\ E_k^{\Lambda} & \xrightarrow{p} & \text{BSO}(k) \end{array}$$

qui induit $\varphi_k = T\gamma_k^{\Lambda} \rightarrow \text{MSO}(k)$.

Soit $C(\varphi_k)$ le cône de l'application φ_k . Le groupe $\Omega_n^{\text{SO}, \Lambda}$ est isomorphe à

$$\lim_{\substack{\longrightarrow \\ k}} \pi_{n+k}(C(\varphi_k)).$$

La fibre F^{Λ} de E_k^{Λ} sur $\text{BSO}(k)$ est un espace Λ -local i. e. $\tilde{H}_*(F^{\Lambda}; \Lambda/\mathbf{Z}) = 0$. Il en résulte que

$$p_* : H_*(E_k^{\Lambda}; \Lambda/\mathbf{Z}) \xrightarrow{\sim} H_*(\text{BSO}(k); \Lambda/\mathbf{Z})$$

est un isomorphisme.

Des isomorphismes de Thom on déduit que

$$H_*(T\gamma_k^\Lambda; \Lambda/\mathbf{Z}) \xrightarrow{\sim} H_*(\text{MSO}(k); \Lambda/\mathbf{Z})$$

est un isomorphisme.

Il en résulte [12] que l'espace $C(\varphi_k)$ est Λ -local d'où le lemme.

6. Calcul de $A_n^{\mathbf{Q}}$

6.1. Soit W une variété dont le bord ∂W est muni d'une $E^{\mathbf{Q}}$ -orientation et soit $\varphi : (W, \partial W) \rightarrow (\text{BSO}, E^{\mathbf{Q}})$ le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \partial W & \rightarrow & E^{\mathbf{Q}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ W & \rightarrow & \text{BSO} \end{array}$$

où les applications horizontales sont recouvertes par des applications fibrées. Pour $i > 0$ on a le diagramme

$$\begin{array}{ccc} H^{4i}(\text{BSO}, E^{\mathbf{Q}}; \mathbf{Q}) & \xrightarrow{\varphi^*} & H^{4i}(W, \partial W; \mathbf{Q}) \\ \downarrow j^* & & \downarrow \\ H^{4i}(\text{BSO}; \mathbf{Q}) & \longrightarrow & H^{4i}(W; \mathbf{Q}) \end{array}$$

où j^* est un isomorphisme d'après 1.7.

On définit, pour $i > 0$, des classes de Pontrjagin relatives dans $H^{4i}(W, \partial W; \mathbf{Q})$ par $\bar{p}_i = \varphi^* j^{*-1}(x_i)$ où x_i est la i -ième classe de Pontrjagin rationnelle de BSO .

Si le bord ∂W est vide, ces \bar{p}_i sont les classes de Pontrjagin rationnelles de W .

Lorsque la dimension de W est $4k$, ces classes relatives permettent de définir, pour chaque partition $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ de k , un nombre de Pontrjagin rationnel

$$p_\omega(W) = \bar{p}_{\omega_1} \cup \dots \cup \bar{p}_{\omega_n} [W],$$

qui ne dépend que de la classe de $(W, \partial W)$ dans $\Omega_{4k}^{\text{SO}, \mathbf{Q}}$.

Cela définit un homomorphisme $\bar{P} : \Omega_{4k}^{\text{SO}, \mathbf{Q}} \rightarrow \mathbf{Q}^{\pi(k)}$ où $\pi(k)$ est le nombre de partitions de k , $\bar{P}(V) = \sum p_\omega(V) e_\omega$ où $\{e_\omega\}$ est la base canonique de $\mathbf{Q}^{\pi(k)}$; le diagramme

$$(6.1) \quad \begin{array}{ccc} \Omega_{4k}^{\text{SO}} & \rightarrow & \Omega_{4k}^{\text{SO}, \mathbf{Q}} \\ \text{P} \downarrow & & \bar{P} \downarrow \\ \mathbf{Z}^{\pi(k)} & \hookrightarrow & \mathbf{Q}^{\pi(k)} \end{array}$$

est commutatif (P est construit à partir des nombres de Pontrjagin habituels).

6.2. *Remarque.* — Dans la construction précédente, les nombres de Pontrjagin décomposables [c'est-à-dire différents de $p_{(k)}(W)$] sont indépendants de la $E^{\mathbf{Q}}$ -orientation de ∂W .

En effet, soient

$$\alpha \in H^n(W, \partial W, \mathbf{Q}) \text{ et } \beta \in H^m(W, \partial W, \mathbf{Q}) \text{ et } j^* : H^*(W, \partial W; \mathbf{Q}) \rightarrow H^*(W; \mathbf{Q})$$

on a $\alpha \cup \beta = j^* \alpha \cup \beta = \alpha \cup j^* \beta$, ce qui montre que pour calculer les nombres de Pontrjagin décomposables, il suffit de trouver des relevés $\bar{p}_i \in H^{4i}(W, \partial W; \mathbf{Q})$ des classes de Pontrjagin rationnelles de W et que le résultat est indépendant des choix des \bar{p}_i .

En particulier on peut définir des nombres de Pontrjagin décomposables pour une variété à bord W si les classes de Pontrjagin du bord sont de torsion.

PROPOSITION 6.3. — Pour $n \not\equiv 0 \pmod{4}$, $\Omega_n^{\text{SO}, \mathbf{Q}} = 0$; pour $n = 4k > 0$, \bar{P} est un isomorphisme $\tilde{P} : \Omega_{4k}^{\text{SO}, \mathbf{Q}} \xrightarrow{\sim} \mathbf{Q}^{\pi(k)}$.

Démonstration. — Tensorisons par \mathbf{Q} la suite exacte de cobordisme relatif

$$\rightarrow \Omega_n^{\mathbf{Q}} \rightarrow \Omega_n^{\text{SO}} \rightarrow \Omega_n^{\text{SO}, \mathbf{Q}} \rightarrow \Omega_{n-1}^{\mathbf{Q}} \rightarrow$$

Les lemmes 5.4 et 5.11 montrent alors que $\Omega_n^{\text{SO}} \otimes \mathbf{Q} \rightarrow \Omega_n^{\text{SO}, \mathbf{Q}}$ est un isomorphisme. La proposition découle donc de la connaissance de $\Omega_n^{\text{SO}} \otimes \mathbf{Q}$ et du diagramme 6.1.

6.4. Soient ϑ l'homomorphisme d'oubli $A_n^{\mathbf{Q}} \rightarrow \Omega_n^{\text{SO}}$ et $J' : \pi_{n-1}(\text{SO}) \otimes \mathbf{Q} \rightarrow \Omega_n^{\text{SO}, \mathbf{Q}}$ obtenu en associant à une $E^{\mathbf{Q}}$ -orientation t de S^{n-1} la classe de $(D^n, S^{n-1}; t)$ dans $\Omega_n^{\text{SO}, \mathbf{Q}}$. On a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} \rightarrow & \Omega_n^{\mathbf{Q}} & \rightarrow & A_n^{\mathbf{Q}} & \rightarrow & \pi_{n-1}(\text{SO}) \otimes \mathbf{Q} & \rightarrow & \Omega_{n-1}^{\mathbf{Q}} & \rightarrow \\ & \parallel & & \downarrow \vartheta & & \downarrow J' & & \parallel & \\ \rightarrow & \Omega_n^{\mathbf{Q}} & \rightarrow & \Omega_n^{\text{SO}} & \rightarrow & \Omega_n^{\text{SO}, \mathbf{Q}} & \rightarrow & \Omega_{n-1}^{\mathbf{Q}} & \rightarrow \end{array}$$

qui permet de calculer $A_n^{\mathbf{Q}}$ suivant les valeurs de n modulo 4.

1° $n \equiv 1, 2 \pmod{4}$: On a immédiatement que $\vartheta : A_n^{\mathbf{Q}} \rightarrow \Omega_n^{\text{SO}}$ est un isomorphisme.

2° $n \equiv 0, -1 \pmod{4}$:

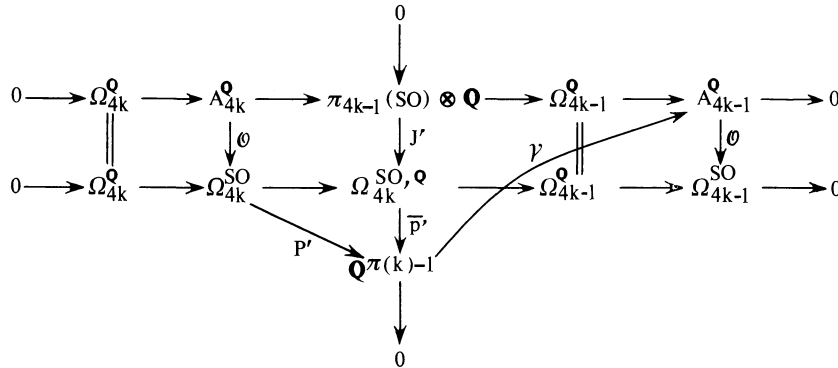
LEMME 6.5. — L'homomorphisme $P \circ J'$ est un isomorphisme de $\pi_{4k-1}(\text{SO}) \otimes \mathbf{Q}$ sur $\mathbf{Q}^{e(k)}$.

Démonstration. — Soit α un générateur de $\pi_{4k-1}(\text{SO}) \simeq \mathbf{Z}$, dans la classe de $E^{\mathbf{Q}}$ -orientation associée à α il y a une trivialisaton t du fibré normal de S^{4k-1} et l'application classifiante $(D^{4k}, S^{4k-1}) \rightarrow (\text{BSO}, E^{\mathbf{Q}})$ est homotope à une application $(D^{4k}, S^{4k-1}) \rightarrow (\text{BSO}, *)$ correspondant à un générateur de $\pi_{4k}(\text{BSO})$. Tous les nombres de Pontrjagin décomposables sont nuls et il résulte des calculs de Bott que $p_k J'(\alpha) = \pm a_k (2k-1)!$ avec $a_k = 1$ si k est pair et $a_k = 2$ si k est impair, d'où le lemme.

Soit $P' : \Omega_{4k}^{\text{SO}, \mathbf{Q}} \rightarrow \mathbf{Q}^{\pi(k)-1}$ l'homomorphisme associé aux nombres de Pontrjagin décomposables, le lemme 6.5 s'exprime par l'exactitude de

$$0 \rightarrow \pi_{4k-1}(\text{SO}) \otimes \mathbf{Q} \xrightarrow{J'} \Omega_{4k}^{\text{SO}, \mathbf{Q}} \xrightarrow{P'} \mathbf{Q}^{\pi(k)-1} \rightarrow 0.$$

Le diagramme 6.4 devient



On en déduit la suite exacte

$$0 \rightarrow A_{4k}^{\mathbf{Q}} \xrightarrow{\theta} \Omega_{4k}^{\mathrm{SO}} \xrightarrow{P'} \mathbf{Q}\pi^{(k)-1} \xrightarrow{\gamma} A_{4k-1}^{\mathbf{Q}} \xrightarrow{\theta} \Omega_{4k-1}^{\mathrm{SO}} \rightarrow 0$$

Soit \mathcal{L}' le réseau sur $\mathbf{Q}\pi^{(k)-1}$,

$$\mathcal{L}' = P'(\Omega_{4k}^{\mathrm{SO}}), \quad \mathcal{L}' \subset \mathbf{Z}\pi^{(k)-1}$$

et

$$0 \rightarrow \mathbf{Q}\pi^{(k)-1} / \mathcal{L}' \rightarrow A_{4k-1}^{\mathbf{Q}} \rightarrow \Omega_{4k-1}^{\mathrm{SO}} \rightarrow 0.$$

Comme $\mathbf{Q}\pi^{(k)-1} / \mathcal{L}'$ est isomorphe à $(\mathbf{Q}/\mathbf{Z})\pi^{(k)-1}$ il est divisible et $A_{4k-1}^{\mathbf{Q}}$ est isomorphe à $(\mathbf{Q}/\mathbf{Z})\pi^{(k)-1} \oplus \Omega_{4k-1}^{\mathrm{SO}}$.

6.6. Nous allons calculer $A_{4k-1}^{\mathbf{Q}}$ d'une autre façon, géométriquement plus significative.

Soit V^{4k-1} une variété sans bord dont les classes de Pontrjagin $p_i \in H^{4i}(V)$ sont de torsion pour $i > 0$; on considère la suite exacte

$$\rightarrow H^{4l-1}(V, \mathbf{Q}) \xrightarrow{j^*} H^{4l-1}(V, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \xrightarrow{\delta} H^{4l}(V, \mathbf{Z}) \xrightarrow{i^*} H^{4l}(V, \mathbf{Q}) \rightarrow$$

Comme $i^*(p_l) = 0$, il existe $\bar{p}_l \in H^{4l-1}(V, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ tel que $p_l = \delta \bar{p}_l$. Pour $n > 0$, $\bar{p}_l \cup p_n \in H^{4l+4n-1}(V, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ est indépendant du choix de \bar{p}_l car

$$(\bar{p}_l + j^* z) \cup p_n = \bar{p}_l \cup p_n + j^*(z \cup i^* p_n) = \bar{p}_l \cup p_n$$

de même

$$\bar{p}_l \cup p_n = p_l \cup \bar{p}_n.$$

Soit $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_r)$ une partition de k différente de (k) , on définit un élément de \mathbf{Q}/\mathbf{Z} appelé enlacement de Pontrjagin par la formule

$$e_{\omega}(p)(V) \equiv \bar{p}_{\omega_1} \cup p_{\omega_2} \cup \dots \cup p_{\omega_r} [V].$$

La démonstration classique montre que si V_0 et V_1 sont cobordantes par une variété dont les classes de Pontrjagin sont de torsion, alors V_0 et V_1 ont mêmes enlacements de Pontrjagin.

En particulier, comme tout fibré $E^{\mathbf{Q}}$ -orientable a ses classes de Pontrjagin de torsion on a des homomorphismes

$$\begin{array}{ccc} \Omega_{4k-1}^{\mathbf{Q}} & \longrightarrow & A_{4k-1}^{\mathbf{Q}} \\ & \searrow e_p & \swarrow e_p \\ & & (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})^{\pi(k)-1} \end{array}$$

Il résulte du lemme 4.4 que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \Omega_{4k}^{\mathbf{SO}, \mathbf{Q}} & \longrightarrow & \Omega_{4k-1}^{\mathbf{Q}} \\ \downarrow \bar{P}' & & \downarrow e_p \\ \mathbf{Q}^{\pi(k)-1} & \xrightarrow{r} & (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})^{\pi(k)-1} \end{array}$$

est anticommutatif (r est la projection naturelle).

La suite exacte 6.5 devient

$$\begin{array}{ccccccc} \Omega_{4k}^{\mathbf{SO}} & \xrightarrow{P'} & \mathbf{Q}^{\pi(k)-1} & \xrightarrow{\gamma} & A_{4k-1}^{\mathbf{Q}} & \longrightarrow & \Omega_{4k-1}^{\mathbf{SO}} \rightarrow 0 \\ & & \searrow & & \downarrow e_p & & \\ & & & & (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})^{\pi(k)-1} & & \end{array}$$

avec le triangle anticommutatif.

On en déduit que la suite

$$(6.6) \quad 0 \rightarrow R_{4k-1} \rightarrow A_{4k-1}^{\mathbf{Q}} \xrightarrow{e_p \oplus \theta} (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})^{\pi(k)-1} \oplus \Omega_{4k-1}^{\mathbf{SO}} \rightarrow 0$$

est exacte avec $R_{4k-1} = \mathbf{Z}^{\pi(k)-1} / \mathcal{L}'$.

Remarque. — Dès que $R_{4k-1} \neq \{0\}$ comme $A_{4k-1}^{\mathbf{Q}}$ est isomorphe à

$$(\mathbf{Q}/\mathbf{Z})^{\pi(k)-1} \oplus \Omega_{4k-1}^{\mathbf{SO}},$$

compter le nombre d'éléments de $A_{4k-1}^{\mathbf{Q}}$ d'ordre donné, montre que la suite 6.6 n'est pas scindable.

On a donc le

THÉORÈME 6.7. — *Pour $n \equiv 1, 2 \pmod{4}$ l'homomorphisme d'oubli $\theta : A_n^{\mathbf{Q}} \rightarrow \Omega_n^{\mathbf{SO}}$ est un isomorphisme.*

Pour $n = 4k$, θ est un isomorphisme de $A_{4k}^{\mathbf{Q}}$ sur le sous-groupe de $\Omega_{4k}^{\mathbf{SO}}$ formé des classes de variétés dont les nombres de Pontrjagin décomposables sont nuls.

Pour $n = 4k-1$, $A_{4k-1}^{\mathbf{Q}}$ est isomorphe à $(\mathbf{Q}/\mathbf{Z})^{\pi(k)-1} \oplus \Omega_{4k-1}^{\mathbf{SO}}$ et on a la suite exacte

$$0 \rightarrow R_{4k-1} \rightarrow A_{4k-1}^{\mathbf{Q}} \xrightarrow{e_p \oplus \theta} (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})^{\pi(k)-1} \oplus \Omega_{4k-1}^{\mathbf{SO}} \rightarrow 0$$

où e_p est construit à partir des enlacements de Pontrjagin.

PROPOSITION 6.8. — Soient V une variété fermée de dimension n , t et t' deux E^Q -orientations de V -point; alors $[V, t] = [V, t']$ dans A_n^Q .

Démonstration. — Pour $n \neq -1$ (4) la classe dans A_n^Q est déterminée par la classe de cobordisme orienté et est donc indépendant de la E^Q -orientation.

Soient V^{4k-1} et deux E^Q -orientations t et t' de $v/V-pt$, on les étend en des E^Q -orientations notées encore t et t' de $v(V)$ ce qui est possible car $\pi_{4k-2}(SO) \otimes Q = 0$.

Soit t'' une E^Q -orientation telle que $[V, t'] + [-V; t''] = 0$ dans Ω_{4k-1}^Q ; on a alors un élément $x = (V \times I, V \times 0 \cup V \times 1; t, t'')$ de $\Omega_{4k}^{SO, Q}$; nous savons que l'image de x dans A_{4k-1}^Q (qui est $[V, t] - [V, t']$) se calcule à l'aide des nombres de Pontrjagin décomposables de x . Ces nombres sont nuls d'après 6.2, ce qui achève la démonstration.

7. Relations entre nombres de Pontrjagin

Nous regroupons dans ce paragraphe divers calculs basés sur la connaissance des relations entre les nombres de Pontrjagin des variétés fermées. Pour des raisons de commodité pour les références à la littérature nous considérons dans ce paragraphe les nombres de Pontrjagin du fibré tangent d'une variété fermée.

PROPOSITION 7.1. — Soit $p \in \mathbf{Z}$, il existe une variété fermée V de dimension $4k$ telle que ses nombres de Pontrjagin décomposables soient nuls et $p_k(V) = p$ si et seulement si p est divisible par d_k , le plus grand diviseur impair de $(2k-1)!$ den (B_k/k) , B_k étant le k -ième nombre de Bernoulli.

7.2. Avant de démontrer 7.1, posons quelques notations utiles pour ce paragraphe. Soient t_i des indéterminées, s_i les fonctions symétriques élémentaires des t_i . Si ω est une partition $(\omega_1, \dots, \omega_n)$ de $|\omega| = \sum \omega_i$, la fonction symétrique, $s_\omega = \sum t_1^{\omega_1} \dots t_n^{\omega_n}$ s'exprime comme polynôme $P_\omega(s_1, \dots, s_{|\omega|})$ où P_ω est à coefficients entiers et homogènes de poids $|\omega|$ (on considère que s_i est de poids i).

Considérons la série formelle

$$e^{\sqrt{t_i}} + e^{-\sqrt{t_i}} - 2 = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{2t_i^p}{2p!}.$$

Soient σ_i les fonctions symétriques élémentaires des $e^{\sqrt{t_i}} + e^{-\sqrt{t_i}} - 2$, qui sont des séries formelles à coefficients rationnels des s_i .

De même $\sigma_\omega = P_\omega(\sigma_1, \dots, \sigma_{|\omega|})$ sont des séries formelles des s_i .

Soit enfin $L = \prod (\sqrt{t_i}/th\sqrt{t_i})$ série formelle à coefficients rationnels des s_i .

Soit V une variété fermée, $p_i \in H^{4i}(V; \mathbf{Z})$ ses classes de Pontrjagin tangentes, on appelle $s_\omega \in H^{4|\omega|}(V; \mathbf{Z})$ les classes de cohomologie $P_\omega(p_1, \dots, p_{|\omega|})$.

De même on appelle σ_ω et L les classes de cohomologie à coefficients rationnels obtenues en donnant la valeur p_i à s_i dans les séries précédentes.

Il est clair que l'évaluation de la classe produit $\sigma_\omega \cdot L$ sur la classe d'orientation, $\sigma_\omega \cdot L [V]$ est une combinaison linéaire à coefficients rationnels des nombres de Pontrjagin de V .

Les nombres de Pontrjagin d'une variété fermée V sont astreints aux seules conditions [11] :

$$(7.3) \quad \sigma_{\omega} \cdot L[V] \in \mathbf{Z}[1/2].$$

Preuve de 7.1. — Comme nous supposons tous les nombres de Pontrjagin différents de $p_k(V)$, nuls, pour écrire les relations (7.3) on peut remplacer L par

$$1 + ((2^{2k} (2^{2k-1} - 1) B_k) / (2k!)) p_k.$$

Le terme de poids le plus bas σ_{ω} est de poids $|\omega|$ les relations (7.3) s'écrivent donc : pour $\omega = \emptyset$:

$$1 \cdot L[V] = \frac{2^{2k} (2^{2k-1} - 1) B_k}{(2k)!} p_k(V) \in \mathbf{Z}[1/2];$$

pour $\omega \neq \emptyset$:

$$\sigma_{\omega}[V] \in \mathbf{Z}[1/2].$$

Calculons d'abord $\sigma_{(l)}[V]$:

$$\begin{aligned} \sigma_{(l)} &= \sum_i (e^{\sqrt{i}/2} - e^{-\sqrt{i}/2})^{2l} = \sum_i \sum_{j=0}^{l-1} (-1)^j C_{2l}^j (e^{(l-j)\sqrt{i}} + e^{-(l-j)\sqrt{i}} - 2) \\ &= \sum_{p=1}^{\infty} \frac{2s(p)}{(2p)!} \left(\sum_{j=0}^{l-1} (-1)^j C_{2l}^j (l-j)^{2p} \right). \end{aligned}$$

Or $s_{(p)}[V] = 0$ sauf $s_{(k)}[V] = (-1)^k k p_k(V)$ et donc

$$\sigma_{(l)}[V] = (-1)^k \left(\sum_{j=0}^{l-1} (-1)^j C_{2l}^j (l-j)^{2k} \right) \frac{p_k(V)}{(2k-1)!}.$$

Or, comme σ_i est de poids minimal i ($\sigma_i = p_i + \dots$) le terme de poids k d'un produit $\sigma_i \dots \sigma_j$ ne contient pas p_k et $\sigma_i \dots \sigma_j[V] = 0$.

Or $\sigma_{(l)} = (-1)^l l \sigma_l +$ produits $\sigma_i \dots \sigma_j$ donc $\sigma_{(l)}[V] = (-1)^l l \sigma_l[V]$.

Comme l divise $\sum_{j=0}^{l-1} (-1)^j C_{2l}^j (l-j)^{2k}$ nous savons que $\sigma_l[V]$ est un multiple entier de $p_k(V)/(2k-1)!$.

De plus $\sigma_{\omega}[V]$ est un multiple entier de $\sigma_{|\omega|}[V]$ d'où finalement $\sigma_{\omega}[V]$ est un multiple entier de $p_k(V)/(2k-1)!$ et $\sigma_1[V] = (-1)^k p_k(V)/(2k-1)!$

Les relations 7.3 sont donc équivalentes à

$$\frac{(2^{2k-1} - 1) B_k}{(2k)!} p_k(V) \in \mathbf{Z}[1/2] \quad \text{et} \quad \frac{p_k(V)}{(2k-1)!} \in \mathbf{Z}[1/2],$$

donc à la divisibilité de $p_k(V)$ par le plus grand diviseur impair de

$$(2k-1)! \cdot \text{den} \left[\frac{B_k(2^{2k-1} - 1)}{k} \right]$$

et le théorème de von Staudt [1] montre que $\text{den} [((2^{2k-1} - 1)B_k)/k] = \text{den}(B_k/k)$ d'où la proposition 7.1.

COROLLAIRE 7.4. — *L'image de l'homomorphisme de signature*

$$\sigma : A_{4k}^{\mathbf{Q}} \rightarrow \mathbf{Z},$$

est l'idéal $\sigma_{4k}^{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{Z}$ où

$$\sigma_{4k}^{\mathbf{Q}} = 2^{2k - v_2[(2k)!] - 1} (2^{2k-1} - 1) \text{num} \left(\frac{B_k}{k} \right).$$

Démonstration. — Les sous-groupes de Ω_{4k}^{SO} formés des classes des variétés dont les nombres de Pontrjagin décomposables tangents (resp. normaux) sont nuls, sont identiques. D'après 7.1, 6.8 et la formule de Hirzebruch on a $\sigma_{4k}^{\mathbf{Q}} = (2^{2k} (2^{2k-1} - 1) B_k) / (2k)! d_k$ et il résulte du théorème de von Staudt [1] que $(2k-1)! \text{den} (B_k/k) = d_k 2^{v_2[(2k)!]}$.

7.5. Soient \mathcal{L} le réseau sur $\mathbf{Q}^{\pi(k)}$ formé des nombres de Pontrjagin des variétés fermées de dimension $4k$ et $\mathbf{R}_{4k-1} = \mathbf{Z}^{\pi(k)} / \mathcal{L} + \mathbf{Z} e_{(k)}$. On a la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathbf{Z} e_{(k)} / \mathcal{L} \cap \mathbf{Z} e_{(k)} \rightarrow \mathbf{Z}^{\pi(k)} / \mathcal{L} \rightarrow \mathbf{R}_{4k-1} \rightarrow 0.$$

D'après 7.1 :

$$\# \mathbf{Z} e_{(k)} / \mathcal{L} \cap \mathbf{Z} e_{(k)} = d_k$$

et

$$\# \mathbf{R}_{4k-1} = \frac{1}{d_k} n_k,$$

avec

$$n_k = \# (\mathbf{Z}^{(k)} / \mathcal{L}).$$

Pour calculer n_k nous allons remplacer les nombres de Pontrjagin par les s_{ω} -nombres qui se comportent mieux pour le produit de variétés.

Soit \mathcal{L}^* le réseau sur $\mathbf{Q}^{\pi(k)}$ formé des s_{ω} -nombres des variétés fermées de dimension $4k$, $\mathcal{L}^* \subset \mathbf{Z}^{\pi(k)}$.

LEMME 7.5. — *Il existe un automorphisme de $\mathbf{Z}^{\pi(k)}$ qui envoie \mathcal{L} sur \mathcal{L}^* .*

Sur l'ensemble des multi-indices $\alpha = (\alpha_1 \dots \alpha_k)$ avec $\sum j \alpha_j = k$ on introduit la relation d'ordre lexicographique obtenue en comparant les α_i en commençant par α_k .

Le lemme 7.5 résulte directement de la formule, démontrée facilement par récurrence

$$s_{\omega} = p^{b(\omega)} + \sum_{\alpha > b(\omega)} A_{\omega, \alpha} p^{\alpha},$$

avec $A_{\omega, \alpha}$ entiers et $b(\omega)$ est le multi-indice $(\omega_1 - \omega_2, \dots, \omega_k)$ si $\omega = (\omega_1, \dots)$ avec $\omega_1 \geq \omega_2 \geq \dots$.

7.6. Soit ω une partition de poids k , $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$ avec

$$\omega_1 \geq \omega_2 \geq \dots \geq \omega_n > 0,$$

n est appelé longueur de ω et noté $l(\omega)$.

Sur l'ensemble des partitions de poids k on considère une relation d'ordre total $<$ telle que $\omega < \omega'$ si $l(\omega) < l(\omega')$.

Soient X_i des variétés fermées de dimension $4i$; pour toute partition $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ on pose $X^\omega = \prod X_{\omega_i}$.

LEMME 7.6. — Avec les notations précédentes :

$$s_\omega[X^{\omega'}] = 0 \quad \text{si } \omega < \omega' \quad \text{et} \quad s_\omega[X^\omega] = \prod_{i=1}^{l(\omega)} s_{\omega_i}[X_{\omega_i}].$$

Démonstration. — On considère une partition ω de longueur $l(\omega) = n$ comme classe d'équivalence d'applications $[1, n] \rightarrow \mathbf{N}^*$ pour la relation « se déduire l'une de l'autre par une bijection de la source ». Si ω' est une partition de longueur $n' = l(\omega')$ on dit que $\omega' \subset \omega$ s'il existe un représentant $\varphi : [1, n] \rightarrow \mathbf{N}^*$ de ω étendant un représentant de ω' , la classe de $\varphi'' : [1, n-n'] \rightarrow \mathbf{N}^*$ définie par $\varphi''(x) = \varphi(x-n')$ est indépendante des choix faits, on l'appelle ω'' .

On a alors la formule

$$s_\omega[X \times Y] = \sum_{\omega' \subset \omega} s_{\omega'}[X] \cdot s_{\omega''}[Y]$$

qui montre en particulier que $s_{(k+l)}[X^{4k} \times Y^{4l}] = 0$ et en général, par récurrence, le lemme 7.6.

7.7. L'algèbre $\Omega^{\text{SO}}/\text{Tors}$ est une algèbre de polynômes engendrée par des variétés X_i de dimension $4i$, où les X_i vérifient [11] :

$$\begin{aligned} s_{(i)}[X_i] &= \pm 1 & \text{si } 2i+1 \neq p^\alpha, \\ s_{(i)}[X_i] &= \pm p & \text{si } 2i+1 = p^\alpha \text{ avec } p \text{ premier.} \end{aligned}$$

On a alors pour toute partition ω ,

$$[s_\omega(X^\omega)] = \prod_{i=1}^{l(\omega)} \alpha_i^\omega \quad \text{où } \alpha_i^\omega = \begin{cases} 1 & \text{si } 2\omega_i+1 \neq p^\alpha, \\ p & \text{si } 2\omega_i+1 = p^\alpha. \end{cases}$$

Or d'après les lemmes 7.5 et 7.6 on a

$$n_k = \prod_{\omega/|\omega|=k} |s_\omega[X^\omega]| = \prod_{\omega/|\omega|=k} \prod_{i=1}^{l(\omega)} \alpha_i^\omega = \prod_{\substack{p \text{ premier} \\ \text{impair}}} p^{v(p,k)},$$

où $v(p, k)$ est le nombre de fois que $p^\alpha - 1/2$ apparaît comme élément d'une partition de l'entier k .

Donc

$$v(p, k) = \sum_{i, j > 0} \pi \left(k - i \frac{p^j - 1}{2} \right),$$

où $\pi(n)$ est le nombre de partitions de l'entier n . On a donc montré :

PROPOSITION 7.8. — Le cardinal de R_{4k-1} est n_k/d_k où d_k est le plus grand diviseur impair de

$$(2k-1)! \text{den} \left(\frac{B_k}{k} \right) \quad \text{et} \quad n_k = \prod_{\substack{p \text{ premier} \\ \text{impair}}} p^{v(p,k)} \quad \text{avec} \quad v(p, k) = \sum_{i, j > 0} \pi \left(k - i \frac{p^j - 1}{2} \right).$$

PROPOSITION 7.9. — La flèche d'oubli $\text{Tors } A_n^{\mathbf{Z}} \rightarrow A_n^{\mathbf{Q}}$ est nulle.

Preuve. — Il est à remarquer que $\text{Tors } A_n^{\mathbf{Z}} = A_n^{\mathbf{Z}}$ pour $n \neq 0$ (4). Il résulte des calculs d'Adams [2] que $\text{Tors } A_n^{\mathbf{Z}}$ est l'image de $\Omega_n^{\mathbf{Z}} = \Omega_n^{\text{fr}}$.

La composée $\text{Tors } A_n^{\mathbf{Z}} \rightarrow \text{Tors } \Omega_n^{\text{SO}}$ est donc nulle, or pour $n \neq 1$ (4) la flèche $\text{Tors } A_n^{\mathbf{Q}} \rightarrow \text{Tors } \Omega_n^{\text{SO}}$ est un isomorphisme, d'où la proposition pour $n \neq -1$ (4).

Soit $n = 4k - 1$, on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} \Omega_{4k}^{\text{SO}} \oplus \pi_{4k-1}(\text{SO}) & \longrightarrow & \Omega_{4k}^{\text{SO, fr}} & \rightarrow & A_{4k-1} & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow j & & \downarrow & & \\ \Omega_{4k}^{\text{SO}} \oplus \pi_{4k-1}(\text{SO}) \otimes \mathbf{Q} & \longrightarrow & \Omega_{4k}^{\text{SO, Q}} & \rightarrow & \bar{A}_{4k-1} & \rightarrow & 0 \end{array}$$

où les lignes sont exactes, les flèches manifestes et $\bar{A}_{4k-1} = \ker(A_{4k-1}^{\mathbf{Q}} \rightarrow \Omega_{4k-1}^{\text{SO}})$.

Sur $\Omega_{4k}^{\text{SO, fr}}$ on a des nombres de Pontrjagin entiers et l'évaluation de la classe L donne une flèche $\Omega_{4k}^{\text{SO, fr}} \rightarrow \mathbf{Q}$ d'où par passage au quotient une flèche $\Omega_{4k-1}^{\text{fr}} \rightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ que l'on sait coïncider avec la partie impaire de l'invariant d'Adams e_c ([2], [11]).

De plus un élément de $\Omega_{4k}^{\text{SO, fr}}$ a les mêmes nombres de Pontrjagin qu'une variété fermée si et seulement si le L-nombre est entier [11].

Soit \mathcal{L} le réseau $\bar{P}.j(\Omega_{4k}^{\text{SO, fr}})$ on a $\mathcal{L} \subset \bar{\mathcal{L}} \subset \mathbf{Z}^{\pi(k)}$. Le L-nombre réduit modulo \mathbf{Z} définit un homomorphisme injectif $l: \bar{\mathcal{L}}/\mathcal{L} \rightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ et il résulte des calculs d'Adams sur l'invariant e_c que son image est $\mathbf{Z}(1/\alpha_k)$ où α_k est le plus grand diviseur impair de $\text{den}(B_k/k)$ [2].

Déterminons le réseau $\bar{P}.j(\text{Im}(\Omega_{4k}^{\text{SO}} \oplus \pi_{4k-1}(\text{SO})))$; c'est clairement

$$\mathcal{L} + \mathbf{Z}.a_k(2k-1)! e_{(k)}$$

avec $a_k = 1$ si k est pair et 2 si k est impair et $l(\mathcal{L} + \mathbf{Z}.a_k(2k-1)! e_{(k)}/\mathcal{L})$ est engendré par

$$\mu_k = \frac{2^{2k}(2^{2k-1} - 1) B_k a_k}{2k}.$$

Il résulte du théorème de von Staudt que $\mu_k = \lambda_k/\alpha_k$ avec λ_k entier premier à α_k ; donc $\Omega_{4k}^{\text{SO, fr}}$ et $\text{Im}(\Omega_{4k}^{\text{SO}} \oplus \pi_{4k-1}(\text{SO}))$ ont même image dans $\Omega_{4k}^{\text{SO, Q}}$ et la flèche $A_{4k-1} \rightarrow \bar{A}_{4k-1}$ est nulle d'où la démonstration de la proposition 7.9 dans tous les cas.

8. Calcul de $\Theta_n^{\mathbf{Q}}$

La détermination de $\Theta_n^{\mathbf{Q}}$ utilise les calculs de $P_n^{\mathbf{Q}}$ et $A_n^{\mathbf{Q}}$, nous ne dirons donc que peu de chose du groupe $\Theta_3^{\mathbf{Q}}$.

8.1. Considérons la composition

$$A_{4k}^{\mathbf{Q}} \xrightarrow{a} \tilde{P}_{4k}^{\mathbf{Q}} \xrightarrow{\sigma} \mathbf{Z},$$

l'image de $\sigma \circ a$ est l'idéal $\sigma_{4k}^{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{Z}$ [voir (7.4)]. Comme $A_{4k}^{\mathbf{Q}}$ est de rang 1 [voir (6.7)] le noyau de a est la torsion de $A_{4k}^{\mathbf{Q}}$.

8.2. Comme $P_n^{\mathbf{Q}} = 0$ pour $n \not\equiv 0 \pmod{4}$ la suite exacte

$$\dots A_n^{\mathbf{Q}} \xrightarrow{a} \tilde{P}_n^{\mathbf{Q}} \xrightarrow{b} \tilde{\Theta}_{n-1}^{\mathbf{Q}} \xrightarrow{c} A_{n-1}^{\mathbf{Q}} \dots$$

donne les suites exactes courtes suivantes :

Pour $n \equiv 1, 2 \pmod{4}$:

$$0 \rightarrow \Theta_n^{\mathbf{Q}} \rightarrow A_n^{\mathbf{Q}} \rightarrow 0;$$

Pour $n \equiv 0 \pmod{4}$:

$$0 \rightarrow \Theta_n^{\mathbf{Q}} \rightarrow \text{Tors } A_n^{\mathbf{Q}} \rightarrow 0;$$

Pour $n \equiv -1 \pmod{4}$:

$$0 \rightarrow b \tilde{P}_{n+1}^{\mathbf{Q}} \rightarrow \tilde{\Theta}_n^{\mathbf{Q}} \rightarrow A_n^{\mathbf{Q}} \rightarrow 0.$$

En utilisant l'isomorphisme [voir (6.7)] $\text{Tors } A_n^{\mathbf{Q}} \rightarrow \text{Tors } \Omega_n^{\text{SO}}$ nous obtenons :

THÉORÈME 8.3. — *L'application d'oubli $\Theta_n^{\mathbf{Q}} \rightarrow \Omega_n^{\text{SO}}$ induit une surjection de $\Theta_n^{\mathbf{Q}}$ sur $\text{Tors } \Omega_n^{\text{SO}}$ qui est un isomorphisme si $n \not\equiv -1 \pmod{4}$.*

COROLLAIRE 8.4. — *Toute variété fermée dont un multiple borde est cobordante à une $\mathbf{Z}[1/2]$ -sphère.*

Démonstration. — Comme la torsion de Ω_n^{SO} est d'ordre 2 il résulte de (8.3) et (5.4) que l'application d'oubli $\tilde{\Theta}_n^{\mathbf{A}} \rightarrow \text{Tors } \Omega_n^{\text{SO}}$ est surjective dès que $1/2 \in \Lambda$.

8.5. Il nous reste à étudier le groupe $\Theta_{4k-1}^{\mathbf{Q}}$.

Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 0 & & \\
 & & & & \downarrow & & \\
 & & & & R_{4k-1} & & \\
 & & & & \downarrow & & \\
 P_{4k}^{\mathbf{Q}} & \xrightarrow{b} & \Theta_{4k-1}^{\mathbf{Q}} & \xrightarrow{c} & A_{4k-1}^{\mathbf{Q}} & \longrightarrow & 0 \\
 \tau \downarrow & & \downarrow e & & \downarrow e_p \oplus \theta & & \\
 W(\mathbf{Q}) & \xrightarrow{\delta} & W(\mathbf{Q}, \mathbf{Z}) & \rightarrow & 0 & & (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})^{\pi(k)-1} \oplus \Omega_{4k-1}^{\text{SO}} \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & & 0 & & 0 & &
 \end{array}$$

dans lequel lignes et colonnes sont exactes et le carré de gauche anticommutatif.

Notons encore $e_p \oplus \theta$ la composée $(e_p \oplus \theta) \circ c$, nous pouvons énoncer :

THÉORÈME 8.6. — *L'homomorphisme $e \oplus e_p \oplus \theta$:*

$$\Theta_{4k-1}^{\mathbf{Q}} \rightarrow W(\mathbf{Q}, \mathbf{Z}) \oplus (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})^{\pi(k)-1} \oplus \Omega_{4k-1}^{\text{SO}}$$

est surjectif.

8.7. Soit $\overline{\Theta}_{4k-1}^{\mathbf{Q}}$ le noyau de cet homomorphisme, l'application c induit un homomorphisme $r : \overline{\Theta}_{4k-1}^{\mathbf{Q}} \rightarrow R_{4k-1}$ tel que la suite

$$0 \rightarrow b \tilde{P}_{4k}^{\mathbf{Q}} \rightarrow \overline{\Theta}_{4k-1}^{\mathbf{Q}} \rightarrow R_{4k-1} \rightarrow 0$$

est exacte

L'homomorphisme r peut être décrit de la façon suivante :

Soit V une \mathbf{Q} -sphère dans $\overline{\Theta}_{4k-1}^{\mathbf{Q}}$, V est le bord d'une variété W ; nous avons $\pi(k)-1$ nombres de Pontrjagin rationnels pour (W, V) qui dans ce cas sont entiers car $e_p([V]) = 0$, leur classe dans R_{4k-1} est $r([V])$.

8.8. Une sphère d'homotopie borde. De plus, si sa dimension est de la forme $4k-1$, sa forme d'enlacement et ses enlacements de Pontrjagin sont nuls. L'homomorphisme d'oubli $\Theta_{4k-1} \rightarrow \Theta_{4k-1}^{\mathbf{Q}}$ se factorise donc par un homomorphisme $\alpha : \Theta_{4k-1} \rightarrow \overline{\Theta}_{4k-1}^{\mathbf{Q}}$.

Nous avons le diagramme commutatif où les lignes sont exactes :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & b P_{4k} & \rightarrow & \Theta_{4k-1} & \rightarrow & A_{4k-1} \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow \alpha & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & b \tilde{P}_{4k}^{\mathbf{Q}} & \rightarrow & \overline{\Theta}_{4k-1}^{\mathbf{Q}} & \rightarrow & R_{4k-1} \rightarrow 0 \end{array}$$

D'après (7.9) l'application $A_{4k-1} \rightarrow R_{4k-1}$ est nulle et α induit un homomorphisme noté encore $\alpha : \Theta_{4k-1} \rightarrow b \tilde{P}_{4k}^{\mathbf{Q}}$.

Supposons maintenant $k \geq 2$. Soient Z_{4k} et Y_{4k-1} respectivement les fibrés en boules et en sphères sur S^{2k} associé au double, pour la structure de groupe de $\pi_{2k-1} [SO(2k)]$, du fibré tangent à S^{2k} . Les variétés Z_{4k} et Y_{4k-1} engendrent respectivement $\tilde{P}_{4k}^{\mathbf{Q}}$ et $b \tilde{P}_{4k}^{\mathbf{Q}}$, Y_{4k-1} est d'ordre $\sigma_{4k}^{\mathbf{Q}} = 2^{2k-v_2[(2k)!]-1}(2^{2k-1}-1) \text{ num}(B_k/k)$. Soit X_{4k-1} la sphère de Milnor qui engendre $b P_{4k}$, X_{4k-1} est d'ordre $2^{2k-2}(2^{2k-1}-1) \text{ num}(4 B_k/k)$.

En utilisant (8.3) et (4.10) nous obtenons :

THÉORÈME 8.9. — L'homomorphisme d'oubli $\Theta_n \rightarrow \Theta_n^{\mathbf{Q}}$ est nul pour $n \neq -1$ (4), pour $n = 4k-1$ il se factorise en un homomorphisme $\alpha : \Theta_{4k-1} \rightarrow b \tilde{P}_{4k}^{\mathbf{Q}}$ dont la restriction à $b P_{4k}$ est déterminée si $k \geq 2$ par

$$\alpha([X_{4k-1}]) = 8[Y_{4k-1}].$$

Il en résulte que l'oubli induit, si $k \geq 2$, un isomorphisme

$$b P_{4k} \otimes \mathbf{Z}[1/2] \rightarrow b \tilde{P}_{4k}^{\mathbf{Q}} \otimes \mathbf{Z}[1/2],$$

nous remarquons donc :

REMARQUE 8.10. — Si $k \geq 2$ la suite exacte

$$0 \rightarrow b P_{4k} \otimes \mathbf{Z}[1/2] \rightarrow \Theta_{4k-1} \otimes \mathbf{Z}[1/2] \rightarrow A_{4k-1} \otimes \mathbf{Z}[1/2] \rightarrow 0$$

est scindée.

8.11. Soient X une \mathbf{Q} -sphère de dimension $4k-1$ ($k \geq 2$) et Σ une sphère d'homotopie de la même dimension. La somme connexe $X \# \Sigma$ est PL-équivalente à X . Par contre si l'image de Σ dans $\Theta_{4k-1}^{\mathbf{Q}}$ est non nulle cette somme connexe n'est pas $H_{\mathbf{Q}}$ -cobordante à X :

REMARQUE 8.12. — Soit $s_{4k-1} = (\sigma_{4k}^{\mathbf{Q}}/P. G. C. D. (\sigma_{4k}^{\mathbf{Q}}, 8))$. Si X est une \mathbf{Q} -sphère de dimension $4k-1$, $k \geq 2$, il existe au moins s_{4k-1} variétés (différentiables) distinctes, PL-équivalentes à X .

APPENDICE

Cet appendice étudie, sous une forme utile pour notre propos, les rapports entre les formes bilinéaires et quadratiques sur un anneau de Dedekind d'une part et celles sur son corps des fractions d'autre part. Le lecteur pourra trouver dans [8] une approche différente.

Nous tenons à remercier Max Karoubi qui nous a permis d'en simplifier la rédaction originale.

A 1. Formes bilinéaires

Soit A un anneau commutatif unitaire.

DÉFINITION A 1.1. — Un b -module sur A est un A -module projectif de type fini muni d'une forme bilinéaire symétrique non dégénéré à valeurs dans A . Nous notons $\mathcal{B}(A)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de b -modules sur A . La somme orthogonale en fait un monoïde commutatif avec élément neutre.

DÉFINITION A 1.2. — Un b -module est neutre s'il possède un facteur direct qui est son propre orthogonal. Nous notons $\mathcal{N}(A)$ le sous-monoïde de $\mathcal{B}(A)$ engendré par les classes d'isomorphisme de b -modules neutres.

DÉFINITION A 1.3. — On note $W(A)$ le quotient $\mathcal{B}(A)/\mathcal{N}(A)$, c'est un groupe, le groupe de Witt de A . (Le produit tensoriel des b -modules en fait un anneau commutatif unitaire.)

A 1.4. Nous supposons maintenant que A est un anneau de Dedekind. Soit K son corps des fractions.

DÉFINITION A 1.5. — Un e -module sur A est un A -module de torsion, de type fini, muni d'une forme bilinéaire symétrique non dégénérée à valeurs dans K/A (forme d'enlacement). Nous notons $\mathcal{B}(K, A)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de e -modules. La somme orthogonale en fait un monoïde avec élément neutre.

DÉFINITION A 1.6. — Un e -module est neutre s'il contient un sous-module qui est son propre orthogonal. Nous notons $\mathcal{N}(K, A)$ le sous-module de $\mathcal{B}(K, A)$ engendré par les classes d'isomorphisme de e -modules neutres.

DÉFINITION A 1.7. — Nous notons $W(K, A)$ le quotient $\mathcal{B}(K, A)/\mathcal{N}(K, A)$.

A 1.8. Soient C un e -module, I (resp. J) un sous-module contenu dans son orthogonal I^\perp (resp. J^\perp). La forme bilinéaire induite sur I^\perp/I (resp. J^\perp/J) est non dégénérée. Soit $[-(J^\perp/J)]$ le e -module obtenu en changeant la forme d'enlacement définie sur (J^\perp/J) en son opposée.

LEMME A 1.9. — *Le e -module $I^\perp/I \oplus [-(J^\perp/J)]$ est neutre.*

Démonstration. — Soient s et t les surjections canoniques : $I^\perp \rightarrow I^\perp/I$ et $J^\perp \rightarrow J^\perp/J$, le sous-module $\{(s(x), t(x)); x \in I^\perp \cap J^\perp\}$ est égal à son orthogonal.

COROLLAIRE A 1.10. — *Le e -module $I^\perp/I \oplus (-C)$ est neutre.*

COROLLAIRE A 1.11. — *Le e -module $C \oplus (-C)$ est neutre. $W(K, A)$ est un groupe.*

COROLLAIRE A 1.12. — *La classe de C est égale à celle de I^\perp/I dans $W(K, A)$.*

A 1.13. Un e -module, S , est dit stablement neutre s'il existe un e -module neutre, N , tel que la somme orthogonale, $C = S \oplus N$, soit neutre [i. e. la classe de S est nulle dans $W(K, A)$].

Le e -module N contient un sous-module I tel que $I = I^\perp$ (orthogonal dans N). De même le e -module C contient un sous-module J tel que $J = J^\perp$ (orthogonal dans C). En considérant I comme un sous-module de C et en appliquant le lemme (A 1.9), nous obtenons :

COROLLAIRE A 1.14. — *Un e -module stablement neutre est neutre.*

DÉFINITION A 1.15. — Un \tilde{b} -module est un A -module projectif de type fini, P , muni d'une forme bilinéaire symétrique à valeurs dans A non singulière [c'est-à-dire telle que l'application associée : $P \rightarrow \text{Hom}_A(P, A)$ soit injective].

A 1.16. On peut considérer le module P comme un réseau sur $K \otimes_A P$ qui est muni d'une forme bilinéaire symétrique non dégénérée à valeurs dans K . Soit P^* le réseau dual de P ([8], chap. IV, § 3), la forme bilinéaire définie sur $K \otimes_A P$ induit sur P^*/P une forme bilinéaire symétrique non dégénérée à valeurs dans K/A ([8], app. 4).

DÉFINITION A 1.17. — Nous appelons conoyau de P le e -module P^*/P (notation : $\text{coker } P$).

LEMME A 1.18. — *Si le conoyau d'un \tilde{b} -module, P , est neutre, il existe un réseau Q sur $K \otimes_A P$ auto-dual, $Q = Q^*$.*

Démonstration. — Soit $I \subset P^*/P$ tel que $I = I^\perp$, nous prenons pour Q le sous-module de P^* tel que $Q/P = I$.

A 1.19. Soient E un b -espace vectoriel sur K , P un réseau sur E contenu dans son dual P^* , P est donc un \tilde{b} -module.

LEMME 1.20. — *La classe de coker P dans $W(K, A)$ est indépendante du choix du réseau P sur E.*

Démonstration. — Soit Q un réseau sur E tel que $Q \subset Q^*$. L'intersection $R = P \cap Q$ est un réseau sur E et nous avons $R \subset P \subset P^* \subset R^*$. L'orthogonal du sous-module P/R de R^*/R est P^*/R . Le e -module $(P^*/R)/(P/R)$ est isomorphe à P^*/P . D'après (A 1.12) la classe de coker R est égale à celle de coker P dans $W(K, A)$, il en est de même pour coker R et coker Q.

A 1.21. Nous avons donc défini un homomorphisme de monoïde $\mathcal{B}(K) \rightarrow W(K, A)$ tel que l'homomorphisme composé $\mathcal{B}(A) \rightarrow \mathcal{B}(K) \rightarrow W(K, A)$ est nul.

LEMME A 1.22. — *L'homomorphisme naturel $\mathcal{N}(A) \rightarrow \mathcal{N}(K)$ est surjectif.*

Soient $a \in A$, $b \in A - \{0\}$. Les formes bilinéaires sur K^2 de matrices $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a/b \end{pmatrix}$ engendrent $\mathcal{N}(K)$. L'équivalence : $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a/b \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & ab \end{pmatrix}$ démontre le lemme.

A 1.23. En conséquence nous obtenons un homomorphisme de groupe δ :

$$W(K) \rightarrow W(K, A).$$

THÉORÈME A 1.24. — *Pour tout anneau de Dedekind A la suite*

$$0 \rightarrow W(A) \rightarrow W(K) \xrightarrow{\delta} W(K, A)$$

est exacte.

Démonstration. — L'injectivité de la flèche $W(A) \rightarrow W(K)$ est démontrée dans [8].

Soient E un b -espace vectoriel sur K dont la classe dans $W(K)$ est dans le noyau de δ et P un réseau sur E contenu dans son dual.

D'après le corollaire (A 1.14) le e -module coker P est neutre. Le lemme (A 1.18) montre que la classe dans $\mathcal{B}(K)$ de E est dans l'image de $\mathcal{B}(A)$.

A 1.25. Soit C un e -module, la décomposition de C en composantes \mathcal{P} -primaires, \mathcal{P} décrivant l'ensemble des idéaux premiers non nuls de A, est une décomposition orthogonale. Il en résulte un isomorphisme entre $W(K, A)$ et la somme directe $\bigoplus_{\mathcal{P}} W(K, A_{\mathcal{P}})$.

L'image du produit des homomorphismes $\delta_{\mathcal{P}} : W(K) \rightarrow W(K, A_{\mathcal{P}})$ est contenu dans $\bigoplus_{\mathcal{P}} W(K, A_{\mathcal{P}})$ et le diagramme ci-dessous est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} W(K) & \xrightarrow{\delta} & W(K, A) \\ & \searrow \Pi \delta_{\mathcal{P}} & \downarrow \\ & & \bigoplus_{\mathcal{P}} W(K, A_{\mathcal{P}}) \end{array}$$

Nous sommes donc amenés à étudier plus particulièrement le cas où l'anneau A est de valuation discrète.

A 1.26. L'anneau A est maintenant de valuation discrète, v, \mathcal{P} désigne l'unique idéal maximal, π une uniformisante, \overline{K} le corps résiduel.

L'homomorphisme : $A \xrightarrow{\times(1/\pi)} K$ induit une injection : $\overline{K} \rightarrow K/A$ qui permet de définir un homomorphisme noté j (dépendant du choix de π) : $W(\overline{K}) \rightarrow W(K, A)$.

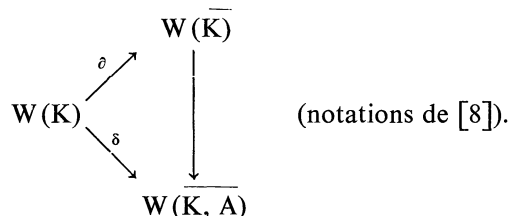
THÉORÈME A 1.27. — Si A est un anneau de valuation discrète, de corps des fractions K, de corps résiduel \overline{K} , le choix d'une uniformisante détermine un isomorphisme

$$W(\overline{K}) \rightarrow W(K, A).$$

Démonstration. — L'injectivité de j résulte de (A 1.14).

Soient C un e-module et I un sous-module de C, maximal pour l'inclusion parmi les sous-modules de C contenus dans leurs orthogonaux. Le e-module I^\perp/I est anisotrope, il est donc annihilé par l'idéal \mathcal{P} et est un espace vectoriel sur \overline{K} . En appliquant (A 1.12) nous obtenons la surjectivité de j .

REMARQUE A 1.28. — L'homomorphisme j fait commuter le diagramme ci-dessous :



Plus généralement :

THÉORÈME A 1.29. — Pour tout anneau de Dedekind A, le groupe $W(K, A)$ est isomorphe à la somme directe $\bigoplus_{\mathcal{P}} W(A/\mathcal{P})$, \mathcal{P} décrivant l'ensemble des idéaux premiers non nuls de A.

A 1.30. Un anneau A est euclidien s'il existe une application

$$\begin{array}{ccc}
 A - \{0\} & \longrightarrow & \mathbf{N}, \\
 a & \longmapsto & \|a\|,
 \end{array}$$

qui satisfait aux conditions suivantes :

- (i) Si $a \neq 0$ est divisible par b , alors $\|a\| \geq \|b\|$.
- (ii) Pour des éléments a et b non nuls de A, il existe q et r tels que $a = bq + r$ avec $r = 0$ ou bien $\|r\| < \|b\|$.

THÉORÈME A 1.31. — Si A est un anneau euclidien, la suite

$$0 \rightarrow W(A) \rightarrow W(K) \xrightarrow{\delta} W(K, A) \rightarrow 0$$

est exacte.

Démonstration. — Il nous reste à montrer la surjectivité de δ .

Soient, γ un nombre premier de l'anneau A , a un élément non nul de A tel que

$$\|a\| < \|\gamma\|$$

\bar{a} sa classe dans le corps $A/\gamma A$, j l'isomorphisme $W(A/\gamma A) \rightarrow W(K, A_{(\gamma)})$ décrit en (A 1; 26). Nous avons la formule (notations de [8]) :

$$\delta(\langle \gamma a \rangle) \equiv j(\langle \bar{a} \rangle) \pmod{\bigoplus_{\|\pi\| < \|\gamma\|} W(K, A_{(\pi)})},$$

où la somme directe est indexée sur les nombres premiers π de A tels que $\|\pi\| < \|\gamma\|$.

La démonstration s'achève par récurrence.

COROLLAIRE A.132. — *Si A est un anneau de valuation discrète, la suite*

$$0 \rightarrow W(A) \rightarrow W(K) \rightarrow W(K, A) \rightarrow 0$$

est exacte.

A 1.33. Soient C un A -module de torsion de type fini, et une résolution projective de type fini de ce module : $0 \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow C$. La différence $[P_0] - [P_1]$ dans $\tilde{K}_0(A)$ ne dépend pas de la résolution choisie, on la note $\chi(C)$. Si C est un e -module neutre $\chi(C)$ est dans $2\tilde{K}_0(A)$, ceci permet de définir un homomorphisme que nous notons encore $\chi : W(K, A) \xrightarrow{\chi} \tilde{K}_0(A)/2\tilde{K}_0(A)$. Il est surjectif.

Soit P un \tilde{b} -module, la définition de coker P donne une résolution projective

$$0 \rightarrow P \rightarrow \text{Hom}_A(P, A) \rightarrow \text{coker } P \rightarrow 0$$

qui montre que $\chi(\text{coker } P) = -2[P]$. Il en résulte que la composée

$$W(K) \xrightarrow{\delta} W(K, A) \xrightarrow{\chi} \tilde{K}_0(A)/2\tilde{K}_0(A)$$

est nulle.

Nous pouvons énoncer le théorème ([8], chap. IV, (3.4)) de la façon suivante :

THÉORÈME A 1.34. — *Si A est l'anneau des entiers d'un corps de nombres K la suite*

$$0 \rightarrow W(A) \rightarrow W(K) \xrightarrow{\delta} W(K, A) \xrightarrow{\chi} \tilde{K}_0(A)/2\tilde{K}_0(A) \rightarrow 0$$

est exacte.

A 2. Formes quadratiques

Nous commençons par indiquer brièvement les modifications à apporter aux définitions du paragraphe A 1 pour les adapter aux formes quadratiques.

A 2.1. En remplaçant dans les définitions (A 1.1), (A 1.5) et (A 1.15) formes bilinéaires par formes quadratiques nous obtenons les définitions respectives de q -module, qe -module et \tilde{q} -module. Le conoyau d'un \tilde{q} -module est un qe -module.

Pour définir les q -modules et qe -modules neutres nous modifions (A 1.2) et (A 1.6) en demandant en outre au sous-module d'être isotrope.

REMARQUE A 2.2. — Si P est un A-module projectif de type fini, l'application

$$\begin{aligned} P \oplus \text{Hom}_A(P, A) &\longrightarrow A, \\ (x, u) &\longmapsto \langle x, u \rangle, \end{aligned}$$

est une forme quadratique non dégénérée. Le q-module, h(P), ainsi construit est neutre et tout q-module neutre est de cette forme, plus précisément on a la proposition suivante dont la démonstration est laissée au lecteur :

PROPOSITION A 2.2. — *Un q-module qui contient un facteur direct, I, isotrope est isométrique à la somme orthogonale de q-modules $I^\perp/I \oplus h(I)$.*

Nous notons respectivement WQ(A) et WQ(K, A) les analogues quadratiques des groupes W(A) et W(K, A) [le groupe WQ(K, A) est donc défini quand A est un anneau de Dedekind].

Nous notons V(K, A) le noyau de l'homomorphisme d'oubli $WQ(K, A) \rightarrow W(K, A)$ (l'oubli est un isomorphisme si 2 est inversible dans A). Le groupe WQ(K, A) se décompose en la somme directe $\bigoplus_{\mathfrak{p}} WQ(K, A_{\mathfrak{p}})$ indexée sur les idéaux premiers non nuls de A.

Mutatis mutandis nous obtenons :

THÉORÈME A 2.3. — *Pour tout anneau de Dedekind A la suite*

$$0 \rightarrow WQ(A) \rightarrow WQ(K) \xrightarrow{\delta} WQ(K, A)$$

est exacte.

A 2.4. Si A est un anneau euclidien on n'a pas, dans le cas quadratique, de suite exacte courte analogue à celle de (A 1.31) (le lecteur pourra étudier le cas de $\mathbb{Z}[i]$ pour s'en convaincre), cependant si A est un anneau de valuation discrète, nous avons :

THÉORÈME A 2.5. — *Si A est un anneau de valuation discrète, la suite :*

$$0 \rightarrow WQ(A) \rightarrow WQ(K) \xrightarrow{\delta} WQ(K, A) \rightarrow 0$$

est exacte.

La surjectivité de δ est en fait une conséquence du résultat plus précis :

LEMME A 2.6. — *Tout qe-module sur un tel anneau est un conoyau.*

Démonstration. — Soient C un qe-module, non nul, \mathcal{P}^α ($\alpha \geq 1$) son annulateur. On peut décomposer C en la somme (non nécessairement orthogonale) d'un module D annulé par $\mathcal{P}^{\alpha-1}$ et d'un module M libre sur A/\mathcal{P}^α . Nous allons montrer que la restriction à M de la forme d'enlacement est non dégénérée, il en résultera la décomposition orthogonale $C = M^\perp \oplus M$. Comme M^\perp est annulé par $\mathcal{P}^{\alpha-1}$ la démonstration du lemme s'achèvera par récurrence dès que nous aurons montré que le qe-module M est un conoyau.

Notons \hat{C} le dual de Pontrjagin de C , $\text{Hom}_A(C, K/A)$, $\beta : C \rightarrow \hat{C}$ l'isomorphisme associé à la forme d'enlacement, $\rho : M \rightarrow \hat{M}$ l'homomorphisme associé à la restriction de la forme d'enlacement, i l'injection : $M \hookrightarrow C$. Du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\beta} & \hat{C} \\ i \uparrow & & \downarrow \hat{i} \\ M & \xrightarrow{\rho} & \hat{M} \end{array}$$

on déduit celui-ci :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}^{\alpha-1} C & \xrightarrow{\mathcal{P}^{\alpha-1} \beta} & \mathcal{P}^{\alpha-1} \hat{C} \\ \mathcal{P}^{\alpha-1} i \uparrow & & \downarrow \mathcal{P}^{\alpha-1} \hat{i} \\ \mathcal{P}^{\alpha-1} M & \xrightarrow{\mathcal{P}^{\alpha-1} \rho} & \mathcal{P}^{\alpha-1} \hat{M} \end{array}$$

où les flèches verticales sont des isomorphismes, il en est donc de même pour $\mathcal{P}^{\alpha-1} \rho$.

Dans le diagramme commutatif suivant les lignes sont exactes :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow \mathcal{P} M \rightarrow M & \xrightarrow{\times \pi^{\alpha-1}} & \mathcal{P}^{\alpha-1} M & \rightarrow & 0 \\ \downarrow \rho & & \downarrow \rho & & \downarrow \mathcal{P}^{\alpha-1} \rho \\ 0 \rightarrow \mathcal{P} \hat{M} \rightarrow \hat{M} & \xrightarrow{\times \pi^{\alpha-1}} & \mathcal{P}^{\alpha-1} \hat{M} & \rightarrow & 0 \end{array}$$

Il en résulte que ρ induit un isomorphisme de $M/\mathcal{P} M$ sur $\hat{M}/\mathcal{P} \hat{M}$ et donc que ρ est un isomorphisme.

Soient $\{\varepsilon_i, 1 \leq i \leq r\}$ une base de M sur A/\mathcal{P}^α et a_{ij} ($i \neq j$) et c_i des éléments de A tels que

$$\varepsilon_i \cdot \varepsilon_j \equiv \frac{a_{ij}}{\pi^\alpha} \pmod{A} \quad \text{et} \quad q(\varepsilon_i) = \frac{c_i}{\pi^{2\alpha}} \pmod{A}.$$

Soit $\{e_i\}$ la base canonique de A^r , nous définissons une forme quadratique φ , sur A^r par

$$e_i \cdot e_j = \pi^\alpha a_{ij} \quad \text{et} \quad \varphi(e_i) = c_i.$$

Il est facile de vérifier que nous avons ainsi construit un \tilde{q} -module sur A dont le q -module M est le conoyau.

A 2.7. L'anneau A est de valuation discrète et de caractéristique $\neq 2$.

Le diagramme commutatif où les lignes sont exactes et où les flèches verticales sont les flèches d'oubli

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow WQ(A) \rightarrow WQ(K) \rightarrow WQ(K, A) \rightarrow 0 \\ \downarrow & & \downarrow \iota & & \downarrow \\ 0 \rightarrow W(A) \rightarrow W(K) \rightarrow W(K, A) \rightarrow 0 \end{array}$$

nous montre que l'homomorphisme d'oubli $WQ(K, A) \rightarrow W(K, A)$ est surjectif et nous donne une suite exacte

$$0 \rightarrow WQ(A) \rightarrow W(A) \xrightarrow{\bar{\delta}} V(K, A) \rightarrow 0.$$

Nous allons décrire une façon de construire un antécédent (pour $\bar{\delta}$) d'un élément de $V(K, A)$.

Soit C un qe -module sur A tel que le e -module sous-jacent soit stablement neutre, d'après (A 1.14) il est neutre et contient un sous-module I tel que $I = I^\perp$.

D'après (A 2.6) il existe un q -module P dont C est le conoyau, soit comme dans (A 1.8) Q le sous-module de $P^\#$ tel que $Q/P = I$. La forme bilinéaire définie sur $K \otimes_A P$ induit sur Q une structure de b -module sur A et la classe de Q dans $W(A)$ a pour image par l'homomorphisme $\bar{\delta}$ la classe de C dans $V(K, A)$.

A 2.8. Nous étudions maintenant le cas particulier de l'anneau $Z_{(2)}$.

Soit P un b -module sur $Z_{(2)}$, il existe un élément v de P , défini modulo $2P$, tel que

$$\forall x \in P, \quad x \cdot x \equiv v \cdot x \pmod{2}.$$

La valeur de $v \cdot v$ modulo 8 est indépendante du choix de v , ce qui permet de définir un homomorphisme de $\mathcal{B}(Z_{(2)})$ dans $Z/8$ qui induit un homomorphisme v :

$$W(Z_{(2)}) \rightarrow Z/8.$$

La restriction de v à $WQ(Z_{(2)})$ est nulle, il existe donc un homomorphisme ρ :

$$V(Q, Z_{(2)}) \rightarrow Z/8,$$

tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} W(Z_{(2)}) & \xrightarrow{\bar{\delta}} & V(Q, Z_{(2)}) \\ & \searrow v & \swarrow \rho \\ & & Z/8 \end{array}$$

Nous reprenons les notations de la fin de (A 2.7).

Comme la restriction de la forme quadratique à I est linéaire, il existe un élément u de C défini modulo I tel que

$$\forall x \in I, \quad q(x) = u \cdot x.$$

La valeur de $q(u)$ est indépendante du choix de u et $8q(u) = 0$ car $2u \in I$. La valeur de $q(u)$ est aussi indépendante du sous-module I tel que $I = I^\perp$; en effet nous avons la formule (avec des notations abusives) :

$$q(u) = \frac{v(Q)}{8} = \frac{\rho(C)}{8}.$$

THÉORÈME A 2.9. — L'homomorphisme ρ est un isomorphisme

$$V(\mathbf{Q}, \mathbf{Z}_{(2)}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Z}/8.$$

Démonstration. — Par un argument analogue à celui de (A 1.27) nous pouvons représenter une classe de $V(\mathbf{Q}, \mathbf{Z}_{(2)})$ par un qe -module anisotrope C . Si cette classe est dans le noyau de ρ , $q(u)$ est nul. Comme C est anisotrope : $u = 0$. Pour la même raison I est nul, d'où $C = 0$. La surjectivité de ρ résulte de la formule $v(\langle 1 \rangle) = \bar{1}$.

A 2.10. Le qe -module coker $\langle 1 \rangle$ engendre le groupe $V(\mathbf{Q}, \mathbf{Z}_{(2)})$ et le e -module sous-jacent au qe -module coker $\langle 2 \rangle$ est le générateur du groupe $W(\mathbf{Q}, \mathbf{Z}_{(2)})$. L'élément de $WQ(\mathbf{Q}, \mathbf{Z}_{(2)}) : \delta(\langle 2 \rangle) - \delta(\langle 1 \rangle)$ est d'ordre 2 (en effet nous avons un isomorphisme de q -espace vectoriel sur $\mathbf{Q} : \langle 1 \rangle \oplus \langle 1 \rangle \simeq \langle 2 \rangle \oplus \langle 2 \rangle$), il permet de scinder la suite exacte

$$0 \rightarrow V(\mathbf{Q}, \mathbf{Z}_{(2)}) \rightarrow WQ(\mathbf{Q}, \mathbf{Z}_{(2)}) \rightarrow W(\mathbf{Q}, \mathbf{Z}_{(2)}) \rightarrow 0.$$

Le groupe $WQ(\mathbf{Q}, \mathbf{Z}_{(2)})$ est donc isomorphe à $\mathbf{Z}/8 \oplus \mathbf{Z}/2$.

A 2.11. L'homomorphisme d'oubli $WQ(\mathbf{Q}, \mathbf{Z}) \rightarrow W(\mathbf{Q}, \mathbf{Z})$ se décompose en la somme des homomorphismes d'oubli $WQ(\mathbf{Q}, \mathbf{Z}_{(2)}) \rightarrow W(\mathbf{Q}, \mathbf{Z}_{(2)})$ et

$$WQ(\mathbf{Q}, \mathbf{Z}[1/2]) \rightarrow W(\mathbf{Q}, \mathbf{Z}[1/2]).$$

Ce dernier est un isomorphisme et l'homomorphisme naturel $V(\mathbf{Q}, \mathbf{Z}) \rightarrow V(\mathbf{Q}, \mathbf{Z}_{(2)})$ est donc un isomorphisme.

D'après (A 2.10) la suite exacte

$$0 \rightarrow V(\mathbf{Q}, \mathbf{Z}) \rightarrow WQ(\mathbf{Q}, \mathbf{Z}) \rightarrow W(\mathbf{Q}, \mathbf{Z}) \rightarrow 0$$

est scindée.

Nous nous proposons de décrire une autre façon de la scinder.

A 2.12. Soit C un qe -module sur \mathbf{Z} , nous notons $\Gamma(C)$ la somme de Gauss

$$\sum_{x \in C} e^{2i\pi q(x)}.$$

La somme de Gauss a les propriétés suivantes :

- (i) $\Gamma[(-C)] = \overline{\Gamma(C)}$.
- (ii) $\Gamma(C_1 \oplus C_2) = \Gamma(C_1) \Gamma(C_2)$.
- (iii) Si N est un qe -module neutre $\Gamma(N) = \sqrt{\# N}$.

Seul (iii) mérite une démonstration.

Soit $I \subset N$ tel que $I = I^\perp$ et $q(I) = 0$,

$$\begin{aligned} (\# I) \Gamma(N) &= \sum_{x \in N, y \in I} e^{2i\pi q(x+y)} \\ &= \sum_{x \in N} e^{2i\pi q(x)} \left(\sum_{y \in I} e^{2i\pi x \cdot y} \right). \end{aligned}$$

Or

$$\sum_{y \in I} e^{2i\pi x \cdot y} = \begin{cases} \# I & \text{si } x \in I. \\ 0 & \text{si } x \notin I. \end{cases}$$

Donc $(\# I) \Gamma(N) = (\# I)^2$. Soit encore $\Gamma(N) = \sqrt{\# N}$.

Comme $WQ(\mathbf{Q}, \mathbf{Z})$ est annulé par la multiplication par 8 et que

$$\gamma(\text{coker } \langle 1 \rangle) = e^{2i\pi/8},$$

nous obtenons en notant μ_8 le groupe des racines huitième de l'unité :

PROPOSITION A 2.13. — Soit C un q -module sur \mathbf{Z} , le nombre complexe

$$(1/\sqrt{\# C}) \Gamma(C)$$

est de module 1 et ne dépend que de la classe de C dans $WQ(\mathbf{Q}, \mathbf{Z})$; l'application qui à la classe de C fait correspondre $(1/\sqrt{\# C}) \Gamma(C)$ est un homomorphisme, $\gamma : WQ(\mathbf{Q}, \mathbf{Z}) \rightarrow \mu_8$ qui fait commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} V(\mathbf{Q}, \mathbf{Z}_{(2)}) \subset WQ(\mathbf{Q}, \mathbf{Z}) & & \\ \rho \downarrow & \sim & \downarrow \gamma \\ \mathbf{Z}/8 & \longrightarrow & \mu_8 \end{array}$$

(L'isomorphisme $\mathbf{Z}/8 \xrightarrow{\sim} \mu_8$ est celui qui envoie $\bar{1}$ sur $e^{2i\pi/8}$.)

THÉORÈME A 2.14. — Pour tout anneau de fractions Λ la suite

$$0 \rightarrow WQ(\Lambda) \rightarrow WQ(\mathbf{Q}) \xrightarrow{\delta} WQ(\mathbf{Q}, \Lambda) \rightarrow 0$$

est exacte.

Démonstration. — D'après A 2.3, il ne reste qu'à vérifier la surjectivité de δ .

Comme le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & WQ(\mathbf{Q}, \mathbf{Z}) & \\ & \downarrow & \\ WQ(\mathbf{Q}) & \searrow \quad \swarrow & \\ & WQ(\mathbf{Q}, \Lambda) & \end{array}$$

est commutatif, il suffit de montrer cette surjectivité dans le cas $\Lambda = \mathbf{Z}$.

Nous avons le diagramme commutatif où les lignes et la colonne de droite sont exactes. [Pour l'exactitude de la ligne inférieure voir (A 1.31)] :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 0 & & \\
 & & & & \downarrow & & \\
 & & & & V(\mathbf{Q}, \mathbf{Z}) & & \\
 & & & & \downarrow & & \\
 0 \rightarrow & W\mathbf{Q}(\mathbf{Z}) & \rightarrow & W\mathbf{Q}(\mathbf{Q}) & \rightarrow & W\mathbf{Q}(\mathbf{Q}, \mathbf{Z}) & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 \rightarrow & W(\mathbf{Z}) & \rightarrow & W(\mathbf{Q}) & \rightarrow & W(\mathbf{Q}, \mathbf{Z}) & \rightarrow 0 \\
 & & & & & \downarrow & \\
 & & & & & 0 &
 \end{array}$$

Nous en déduisons la suite exacte

$$0 \rightarrow W\mathbf{Q}(\mathbf{Z}) \rightarrow W(\mathbf{Z}) \xrightarrow{\bar{\delta}} V(\mathbf{Q}, \mathbf{Z}) \rightarrow \text{coker}[W\mathbf{Q}(\mathbf{Q}) \rightarrow W\mathbf{Q}(\mathbf{Q}, \mathbf{Z})] \rightarrow 0.$$

Or l'image par $\bar{\delta}$ de la classe de $\langle 1 \rangle$ engendre $V(\mathbf{Q}, \mathbf{Z})$.

REMARQUE A 2.15. — Nous retrouvons le résultat $W(\mathbf{Z})/W\mathbf{Q}(\mathbf{Z}) \simeq \mathbf{Z}/8$. L'isomorphisme donné par la signature ([8], chap. IV, § (2.7)) induit un isomorphisme de $W\mathbf{Q}(\mathbf{Z})$ sur $8\mathbf{Z}$ [10].

A 2.16. Ce point est essentiel pour la compréhension du paragraphe 4.

Soit $W(\Lambda, \mathbf{Z})$ le sous-groupe de $W(\mathbf{Q}, \mathbf{Z})$ engendré par les e -modules C tel que $\Lambda \otimes C$ est nul, la composition $W\mathbf{Q}(\Lambda) \rightarrow W\mathbf{Q}(\mathbf{Q}) \rightarrow W(\mathbf{Q}) \xrightarrow{\delta} W(\mathbf{Q}, \mathbf{Z})$ induit un homomorphisme noté encore $\delta : W\mathbf{Q}(\Lambda) \rightarrow W(\Lambda, \mathbf{Z})$ dont nous allons calculer le noyau :

Premier cas $1/2 \in \Lambda$. — Considérons le diagramme commutatif où lignes et colonnes sont exactes :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & W(\Lambda) & \longrightarrow & W(\Lambda, \mathbf{Z}) & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 \rightarrow & W(\mathbf{Z}) & \longrightarrow & W(\mathbf{Q}) & \longrightarrow & W(\mathbf{Q}, \mathbf{Z}) & \rightarrow 0 \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & & & W(\mathbf{Q}, \Lambda) = W(\mathbf{Q}, \Lambda) & & & \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & & & 0 & & 0 &
 \end{array}$$

Nous déduisons la suite exacte

$$(A.2.17) \quad 0 \rightarrow W(\mathbf{Z}) \rightarrow W(\Lambda) \rightarrow W(\Lambda, \mathbf{Z}) \rightarrow 0.$$

La signature permet de la scinder.

Deuxième cas $1/2 \notin \Lambda$. — Définissons $WQ(\Lambda, \mathbf{Z})$, comme le sous-groupe de $WQ(\mathbf{Q}, \mathbf{Z})$ engendré par les qe -modules C tels que $\Lambda \otimes C$ est nul, dans ce cas-ci, l'oubli

$$WQ(\Lambda, \mathbf{Z}) \rightarrow W(\Lambda, \mathbf{Z})$$

est un isomorphisme.

Nous obtenons comme précédemment la suite exacte

$$0 \rightarrow WQ(\mathbf{Z}) \rightarrow WQ(\Lambda) \rightarrow WQ(\Lambda, \mathbf{Z}) \rightarrow 0.$$

Cette extension n'est pas un produit si $\Lambda \neq \mathbf{Z}$, si on identifie le groupe

$$\text{Ext}[WQ(\Lambda, \mathbf{Z}), WQ(\mathbf{Z})]$$

avec $\text{Hom}[WQ(\Lambda, \mathbf{Z}), S^1]$ la formule de Milgram [8] montre qu'elle correspond à la restriction de l'homomorphisme γ à $WQ(\Lambda, \mathbf{Z})$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. F. ADAMS, *On the groups J(X)*, II (*Topology*, vol. 3, 1965, p. 137-173).
- [2] J. F. ADAMS, *On the groups J(X)*, IV (*Topology*, vol. 5, 1966, p. 21-71).
- [3] J. BARGE, J. LANNES, F. LATOUR et P. VOGEL, Λ -sphères (*C. R. Acad. Sci.*, t. 278, série A, 1974, p. 133-135).
- [4] W. BROWDER, *The Kervaire invariant of framed manifolds and its generalization* (*Ann. of Maths*, vol. 90, 1969, p. 157-186).
- [5] W. BROWDER, *Surgery on simply connected manifolds*, Springer, 1972.
- [6] P. E. CONNER et E. E. FLOYD, *Differentiable periodic maps*, Springer Verlag, 1964.
- [7] M. KERVAIRE et J. MILNOR, *Groups of homotopy spheres*, I (*Annals of Maths*, vol. 77, 1963, p. 504-537).
- [8] J. MILNOR et D. HUSEMOLLER, *Symmetric bilinear forms*, Springer Verlag, 1973.
- [9] C. ROURKE et D. SULLIVAN, *On the Kervaire obstruction* (*Annals of Maths*, vol. 94, 1971, p. 397-413).
- [10] J.-P. SERRE, *Cours d'arithmétique*, P. U. F., Paris, 1970.
- [11] R. STONG, *Notes on cobordism theories*, Princeton, 1968.
- [12] D. SULLIVAN, *Geometric topology*, Part I : *Localization, periodicity and Galois symmetry*, 1970.

(Manuscrit reçu le 23 janvier 1974.)

Jean BARGE,
 Jean LANNES,
 François LATOUR,
 Pierre VOGEL,
 U. E. R. de Mathématiques,
 Université de Paris XI,
 91405 Orsay.