A. Brunel
D. Revuz

Marches récurrentes au sens de Harris sur les groupes localement compacts. I

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 7, nº 2 (1974), p. 273-310
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1974_4_7_2_273_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.
4e série, t. 7, 1974, p. 273 à 310.

MARCHES RÉCURRENTES AU SENS DE HARRIS SUR LES GROUPES LOCALEMENT COMPACTS I

PAR A. BRUNEL (*) ET D. REVUZ (*)

L'étude des chaînes de Markov récurrentes au sens de Harris a fait un grand progrès avec l'article [7] de Neveu où sont introduits d'une part les fonctions spéciales, d'autre part des opérateurs potentiels permettant, entre autres choses, de résoudre l'équation de Poisson pour les fonctions de module spécial et d'intégrale nulle.

Dans le cas des marches de Harris sur les groupes abéliens ou dénombrables, Spitzer et Kesten dans [12], [6] et [5], Ornstein [8], Port et Stone [9] avaient construit des noyaux de convolution qui permettaient de résoudre l'équation de Poisson pour des fonctions positives mais à support compact.

Or il apparaît que les fonctions à support compact sont des cas particuliers de fonctions spéciales. Notre but dans cet article va donc être d'utiliser les résultats de Neveu pour élargir la validité des résultats antérieurs relatifs aux marches.

Le plan de l'article sera alors le suivant. Dans le chapitre I nous faisons quelques rappels et démontrons quelques résultats préliminaires sur les chaînes de Feller.

A partir du chapitre II nous considérons une marche de Harris sur un groupe localement compact métrisable mais quelconque par ailleurs. Nous atteignons donc des groupes non étudiés jusque là comme le groupe des déplacements du plan. Nos méthodes devront évidemment éviter tout emploi de la transformation de Fourier.

Nous commençons par montrer un résultat de normalité. Pour cela nous introduisons la distinction classique entre marches de type I et marches de type II et montrons qu'elle est valable en toute généralité. De la normalité nous déduisons l'existence d'un noyau potentiel A qui est un noyau de convolution et qui permet de résoudre l'équation de Poisson à second membre spécial.

Dans le chapitre III nous faisons une étude plus approfondie du noyau potentiel et des solutions de l'équation de Poisson. Nous montrons en particulier des propriétés de sous-additivité généralisant ce qui est connu pour les groupes discrets. Cela nous permet de montrer que la propriété de normalité est vraie pour toutes les fonctions à la fois spéciales et cospéciales. Cette classe de fonction dont l'importance a déjà été montrée dans [2]

(*) Équipe de Recherche n° 1 « Processus stochastiques et applications » dépendant de la Section n° 1 « Mathématiques, Informatique » associée au C. N. R. S.

est ensuite caractérisée dans le cas des marches par une propriété d'intégrabilité qui généralise un résultat de [7].

Dans un autre article nous traiterons du problème de renouvellement. Nous étudierons notamment la validité d'une conjecture émise par Kesten [5] dans le cas discret suivant laquelle la frontière de Martin ne comporte que un ou deux points. Nous montrerons aussi par un exemple que la classe des fonctions spéciales et cospéciales est la plus grande pour laquelle les théorèmes de normalité et de renouvellement soient vrais en toute généralité.

Nous tenons à remercier M[me] Elie-Woimant pour d'utiles remarques sur une première version de cet article.

CHAPITRE I

Préliminaires

Cet article ne peut être lu sans une certaine connaissance des résultats de Neveu [7]. Nous allons néanmoins faire quelques rappels sur ceux dont nous ferons un usage constant : ceci permettra de fixer un certain nombre de notations. Nous démontrerons également quelques résultats préliminaires notamment sur les chaînes de Feller.

1. Rappels.

(1.1) Dans tout cet article nous considérons une chaîne X de Harris, définie sur un espace $(E, \mathscr{E})$ de type dénombrable. Sa probabilité de transition sera désignée par P et sa mesure invariante par m.

Suivant Neveu, si h est une fonction mesurable comprise entre 0 et 1, on appellera I_h l'opérateur de multiplication par h et on posera

$$U_h = \sum_0^\infty (PI_{1-h})^n P = \sum_0^\infty P(I_{1-h}P)^n.$$

Si $h = c \in (0, 1)$ on écrit $U_h = U_c$; en particulier pour $c = 1$, $U_1 = P$. Ces opérateurs servent à plusieurs fins, dont la première est de poser

(1.2) Définition. — Une fonction f bornée mesurable et positive est dite *spéciale* si $U_h(f)$ est bornée quelle que soit h comprise entre 0 et 1, avec $m(h) > 0$.

Ces fonctions sont très importantes. On en trouvera dans Neveu [7] et Brunel et Revuz [2] d'autres caractérisations. On appellera S l'ensemble des fonctions spéciales et N l'ensemble des *charges* c'est-à-dire des fonctions f telles que $|f| \in S$ et $m(f) = 0$. Neveu a montré dans [7] que l'on peut construire un noyau permettant de résoudre l'équation de Poisson dont le second membre est une charge. Rappelons que si f est spéciale et $m(h) > 0$, alors $h.U_h(f)$ est spéciale.

(1.3) Soit h une fonction strictement positive et telle que $U_h > 1 \otimes m$ [le noyau $1 \otimes m$ est celui qui à g fait correspondre la fonction constante $m(g)$]. Neveu [7] a montré qu'il existait de telles fonctions qui sont en particulier spéciales et elles ont été caractérisées en terme de dualité dans Brunel et Revuz [2].

Pour une telle fonction, on pose

$$V = U_h - 1 \otimes m$$

et

$$W_h = \sum_0^\infty (VI_h)^n V = \sum_0^\infty V(I_h V)^n.$$

Ce noyau qui va nous servir constamment, est un noyau positif, propre, et qui satisfait quelle que soit g comprise entre 0 et 1 aux identités suivantes :

$$(1.4) \qquad \begin{cases} U_g + U_g I_g W_h = W_h + \dfrac{1}{m(h)} U_g(h) \otimes m, \\ U_g + W_h I_g U_g = W_h + \dfrac{1}{m(h)} 1 \otimes (hm) U_g. \end{cases}$$

Ces identités, pour $g = 1$, s'écrivent :

$$(1.4\ bis) \qquad \begin{cases} P + PW_h = W_h + \dfrac{1}{m(h)} Ph \otimes m, \\ P + W_h P = W_h + \dfrac{1}{m(h)} 1 \otimes (hm) P, \end{cases}$$

et nous en ferons un usage constant. On en déduit immédiatement que si f est une charge

$$(I-P)(I+W_h) f = f,$$

et donc que le noyau $I + W_h$ fournit une solution, d'ailleurs bornée, de l'équation de Poisson.

Citons encore une formule de Neveu, qui nous sera très utile; si h_1 et h_2 sont deux fonctions ayant les propriétés ci-dessus, les opérateurs W_{h_1} et W_{h_2} que l'on peut leur associer vérifient l'identité

$$(1.5) \qquad W_{h_1} + \frac{1}{m(h_1)} W_{h_2}(h_1) \otimes m = W_{h_2} + \frac{1}{m(h_2)} 1 \otimes (h_2 . m) W_{h_1}.$$

Dans le deuxième chapitre nous allons nous intéresser dans le cas des marches au problème de la normalité.

(1.6) DÉFINITION. — Une chaîne de Harris sera dite *normale* si pour toute charge $f \in N$, la limite $\lim_{n \to \infty} \sum_1^n P_k f$ existe.

(1.7) PROPOSITION. — *La chaîne* X *est normale si et seulement si* $\lim_n P_n W_h f$ *existe pour un h et pour toute fonction f de module spécial.*

Démonstration. — De (1.4 *bis*) on déduit facilement que pour $f \in \mathrm{N}$:

$$\mathrm{W}_h f = \sum_1^n \mathrm{P}_k f + \mathrm{P}_{n+1} \mathrm{W}_h f.$$

Il en résulte immédiatement que si la limite de $\mathrm{P}_n \mathrm{W}_h f$ existe, X est normale.

Réciproquement, si X est normale, la convergence a lieu pour $f \in \mathrm{N}$. Si f est spéciale, la fonction $m(h) f - m(f) h$ est dans N et donc

$$\mathrm{P}_n \mathrm{W}_h (m(h) f - m(f) h) = m(h) \mathrm{P}_n \mathrm{W}_h f - \frac{m(f)(1-m(h))}{m(h)},$$

a une limite ce qui prouve le résultat [on s'est servi du fait que $\mathrm{W}_h(h) = (1-m(h))/m(h)$ (*cf.* [7])].

C'est en étudiant la limite de $\mathrm{P}_n \mathrm{W} f$ que nous chercherons à démontrer la normalité des marches dans le chapitre II.

Nous utiliserons encore le résultat suivant

(1.8) PROPOSITION. — *Si f est une charge et si X est apériodique on a*

$$\lim_{n \to \infty} \mathrm{W}_h \mathrm{P}_n f = 0.$$

Démonstration. — De (1.4 *bis*) on déduit facilement que

$$\sum_1^n \mathrm{P}_k + \mathrm{W}_h \mathrm{P}_n = \mathrm{W}_h + \frac{1}{m(h)} 1 \otimes (h.m) \sum_1^n \mathrm{P}_k.$$

En posant

$$\nu = m(h)^{-1}.(h.m)$$

on a donc

$$\mathrm{W}_h \mathrm{P}_n f(x) = \mathrm{W}_h f(x) + \left\langle \nu - \varepsilon_x, \sum_1^n \mathrm{P}_k f \right\rangle.$$

Mais si f est une charge il résulte de la formule du début de la démonstration précédente que

$$\left\langle \nu - \varepsilon_x, \sum_1^n \mathrm{P}_k f \right\rangle = \langle \nu - \varepsilon_x, \mathrm{W}_h f \rangle - \langle \nu - \varepsilon_x, \mathrm{P}_{n+1} \mathrm{W}_h f \rangle$$

et d'après le théorème d'Orey (*cf.* [10] ou [4]) le dernier terme tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini. On a donc, pour tout x,

$$\begin{aligned} \lim \mathrm{W}_h \mathrm{P}_n f(x) &= \mathrm{W}_h f(x) + \langle \nu - \varepsilon_x, \mathrm{W}_h f \rangle \\ &= \nu \mathrm{W}_h f = 0, \end{aligned}$$

car $\nu \mathrm{W}_h$ est un multiple de m (*cf.* [7]).

2. CHAÎNES DE FELLER. — Dans ce paragraphe nous supposerons que $(\mathrm{E}, \mathscr{E})$ est un espace localement compact à base dénombrable muni de sa tribu borélienne. On désignera

par C_K, C_0, C_b les espaces de fonctions continues à support compact, continues tendant vers zéro à l'infini, continues bornées. On notera d'un signe $+$ les parties positives de ces espaces.

(2.1) DÉFINITION. — Nous dirons que la chaîne est *de Feller* si P transforme les fonctions de C_K en fonctions de C_b.

En fait, on a la propriété plus forte

(2.2) LEMME. — *Si* X *est de Harris et de Feller,* P *transforme les fonctions de* C_b *en fonctions de* C_b.

Démonstration. — Si $f \in C_b^+$, Pf est semi-continue inférieurement (SCI). Mais comme $P\,1 = 1$ on a

$$\|f\| - Pf = P(\|f\| - f)$$

qui est aussi SCI. Par suite Pf est semi-continue supérieurement (SCS) et donc Pf est continue.

Dorénavant, nous ne considèrerons plus que des chaînes à la fois de Harris et de Feller.

Introduisons la notation suivante : si h est continue bornée et positive, on notera $\mathcal{K}_h$ l'espace des fonctions continues majorées par un multiple de h, soit

$$\mathcal{K}_h = \{ f \in C_b : \exists\, t \, |f| \leqq th \}.$$

Les résultats qui suivent seront d'un usage constant dans le chapitre II.

(2.3) PROPOSITION. — *Si h est une fonction continue positive comprise entre* 0 *et* 1 *et telle que* $U_h > 1 \otimes m$, *les opérateurs* U_h *et* W_h *transforment les fonctions de* $\mathcal{K}_h$ *en fonction de* C_b.

Démonstration. — C'est la même qu'en (2.2) en remarquant que les fonctions $U_h(h)$ et $W_h(h)$ sont constantes, donc continues. On peut aussi observer que $U_h I_h$ transforme C_b en C_b.

Tous les résultats précédents sont valables dans le cas des marches dont les probabilités de transition vérifient clairement les conditions précédentes. Il est moins évident qu'il existe des fonctions h vérifiant les conditions de l'énoncé précédent. Lorsqu'il existe une chaîne $\hat{X}$ de Feller en dualité avec X, cela résulte des résultats de [2] et de l'importante proposition suivante. Ceci sera encore amélioré dans le chapitre suivant.

(2.4) PROPOSITION. — *Si la mesure m charge tous les ouverts, il existe une fonction spéciale continue et strictement positive.*

Démonstration. — Soit h une fonction spéciale strictement positive. Il existe un compact K chargé par m et tel que 1_K soit majoré par un multiple de h; pour trouver un tel compact on peut par exemple choisir a en sorte que $\{ h \geqq a \}$ soit chargé par m, il existe alors un compact chargé par m et contenu dans cet ensemble en vertu de la régularité de m.

Pour $c \in)0, 1($ la fonction $U_c(., K)$ est alors SCS, strictement positive et spéciale. L'espace E est réunion de fermés $\{ U_c(., K) \geqq n^{-1} \}$ dont l'un au moins est d'intérieur F non vide. Il existe dans cet ouvert F une fonction φ continue, positive, non nulle et majorée par un multiple de $U_c(., K)$ donc spéciale. Comme la mesure m charge tous les ouverts, on a $m(\varphi) > 0$ et donc $U_{c'}(\varphi)$, $c' \in)0, 1($, est spéciale, continue et strictement positive en vertu de l'irréductibilité de la chaîne.

La condition sur la mesure est inessentielle, car on montre facilement que tout ouvert de mesure nulle est contenu dans un ouvert de mesure nulle et de complémentaire absorbant auquel on peut se restreindre. On peut donc toujours supposer que m charge tous les ouverts, ce qui est d'ailleurs naturellement réalisé pour les promenades et toutes les chaînes usuelles.

La proposition précédente a les corollaires évidents.

(2.5) COROLLAIRE. — *La mesure m est de Radon.*

(2.6) COROLLAIRE. — *Toutes les fonctions positives bornées à support compact sont spéciales.*

Ce dernier résultat montre que l'étude faite dans les chapitres suivants généralise celle de Spitzer [12], Spitzer et Kesten [6], Kesten [5] et Ornstein [8].

3. FRONTIÈRE. — Nous allons donner ci-dessous en nous inspirant des travaux classiques sur le sujet un bref aperçu de la théorie de la frontière dans le cas récurrent. Nous ne chercherons pas ici à donner des énoncés de généralité maximale; mais seulement à indiquer le lien entre la théorie de la frontière et les théorèmes limites que nous démontrerons pour les marches.

Nous considérerons donc ci-dessous une chaîne X que nous supposons de Harris et de Feller et pour laquelle nous faisons les deux hypothèses suivantes vérifiées dans le cas des marches :

(i) Il existe une fonction h satisfaisant aux hypothèses de (1.3).

(ii) Si $x \neq y$, $P(x, .) \neq P(y, .)$.

Rappelons encore que d'après les résultats de Neveu et le paragraphe précédent, si $f \in C_K$ la fonction $W_h f$ est bornée.

(3.1) Soit alors $\{f_k\}_{k \in \mathbf{N}}$ un système dénombrable dense dans C_K pour la topologie de la convergence uniforme sur les compacts et posons

$$d(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|W_h f_k(x) - W_h f_k(y)|}{2^k \| W_h f_k \|}.$$

La distance ainsi définie est bornée et induit sur E une topologie moins fine que la topologie initiale de E.

DÉFINITION. — On appelle E* l'espace compact complété de E pour d. On appelle *frontière* de E, l'ensemble $E^* \setminus E$.

Les fonctions $W_h f_k$ sont uniformément continues sur E pour d et donc aussi les fonctions $W_h f$ pour $f \in C_K$. Toutes ces fonctions admettent donc un prolongement unique à E^*. Si $\bar{x} \in E^* \setminus E$, l'application $f \to W_h f(\bar{x})$ définit une mesure sur E qu'on appellera $W_h(\bar{x}, .)$.

Remarquons qu'une suite $\{x_n\}$ de points de E converge vers $\bar{x} \in E^* \setminus E$ si et seulement si x_n tend vers Δ pour la topologie initiale de E et si les mesures $W_h(x_n, .)$ convergent vaguement vers $W_h(\bar{x}, .)$. L'ensemble de mesures $\{W_h(x, .), x \in E\}$ est en effet vaguement relativement compact, puisque pour $f \in C_K$, $W_h f$ est bornée et l'on aurait pu aussi définir la frontière de cette façon. Le nombre de points de $E^* \setminus E$ est donc égal au nombre de valeurs d'adhérence vagues de $\{W_h(x, .), x \in E\}$ lorsque $x \to \Delta$.

(3.2) Appelons $C(E^*)$ l'ensemble des fonctions continues sur E^*. A cause de l'hypothèse (ii) faite sur P, $W_h(C_K)$ sépare les points de E^* et donc l'algèbre engendrée par $W_h(C_K)$ et 1_{E^*} est dense dans $C(E^*)$. Ceci permet d'énoncer

PROPOSITION. — *Si m est non bornée et si X est normale, lorsque $n \to \infty$, les probabilités $P_n(x, .)$ convergent étroitement sur E^* vers une probabilité ν portée par la frontière et indépendante de x.*

Démonstration. — Si X est normale nous avons vu que, pour tout $f \in C_K$, $P_n W f(x)$ converge vers une limite qui est indépendante de x car c'est une fonction harmonique bornée donc constante. Les probabilités $P_n(x, .)$ convergent donc sur $W(C_K) \cup 1_{E^*}$ et par suite étroitement vers une probabilité ν qui est portée par E^* puisque pour tout compact K de E, $\lim_n P_n(x, K) = 0$ (Il n'est pas difficile de voir que l'intersection d'un borélien de E^* avec E est un borélien de E pour la topologie initiale.)

En faisant quelques hypothèses supplémentaires sur P il n'est pas difficile de montrer que réciproquement la convergence des P_n sur E^* entraîne la normalité. Elle entraîne en tout cas de manière évidente la convergence des $P_n W f$ pour $f \in C_K$, sans autre hypothèse sur P.

CHAPITRE II

Normalité et opérateurs potentiels des marches de Harris

1. NOTATIONS ET PRÉLIMINAIRES. — Nous allons maintenant étudier les marches de Harris qui forment une classe particulière des chaînes étudiées au chapitre précédent. Les notations du chapitre I resteront valables mais nous allons en ajouter d'autres relevant de la situation particulière étudiée.

(1.1) L'espace d'état sera désormais un groupe G localement compact métrisable non compact. On désignera par μ une probabilité sur G telle que le plus petit sous-groupe fermé engendré par son support soit G lui-même et vérifiant les deux conditions suivantes :

(i) Pour tout voisinage V de l'unité e dans G, on a, en désignant par μ^n les puissances de convolution de μ,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mu^n(\mathrm{V}) = \infty.$$

(ii) La probabilité μ est *étalée* c'est-à-dire qu'il existe un entier n tel que μ^n ne soit pas étrangère à une mesure de Haar de G.

Sous ces hypothèses on démontre (*cf.* [10]) que la marche aléatoire X de probabilité de transition $\mathrm{P}(x, .) = \mu \bigstar \varepsilon_x$ est récurrente au sens de Harris. Ceci entraîne notamment que le groupe G est unimodulaire (*cf.* [1]) et nous appellerons m une mesure de Haar. C'est évidemment une mesure invariante de X.

On appellera $\hat{\mu}$ l'image de μ par l'application $x \to x^{-1}$ où x^{-1} est l'inverse de x dans G. La marche $\hat{\mathrm{X}}$ de probabilité de transition $\hat{\mathrm{P}}(x, .) = \hat{\mu} \bigstar \varepsilon_x$ est aussi récurrente au sens de Harris et en dualité avec X par rapport à m.

Il nous arrivera aussi d'avoir à considérer les marches droites de probabilité de transition $\varepsilon_x \bigstar \mu$ et $\varepsilon_x \bigstar \hat{\mu}$. Tout ce qui se rapporte à ces marches sera noté d'un indice d. Ainsi si S est l'opérateur de symétrie dans le groupe défini par $\mathrm{S} f(x) = f(x^{-1})$ on a

$$\mathrm{P}.\mathrm{S} = \mathrm{S}.\hat{\mathrm{P}}^d,$$

et pour une fonction h symétrique

$$\mathrm{U}_h.\mathrm{S} = \mathrm{S}.\hat{\mathrm{U}}_h^d, \qquad \mathrm{W}_h.\mathrm{S} = \mathrm{S}.\hat{\mathrm{W}}_h^d.$$

(1.2) On appellera τ_a l'opérateur de translations à droite par a dans G, c'est-à-dire que pour une fonction f, $\tau_a f(x) = f(xa)$. Il est clair que $\mathrm{P}\,\tau_a = \tau_a \mathrm{P}$ et l'on en déduit facilement que pour $0 \leqq h \leqq 1$, en abrégeant τ_a en τ,

$$\tau\, \mathrm{U}_h = \mathrm{U}_{\tau h}\, \tau.$$

En particulier si $\mathrm{U}_h \geqq 1 \otimes m$, on constate que $\mathrm{U}_{\tau h}$ a la même propriété et les opérateurs W que l'on peut leur associer suivant [7] vérifient la relation

$$\tau\, \mathrm{W}_h = \mathrm{W}_{\tau h}\, \tau,$$

que nous utiliserons constamment sans nouveau commentaire.

On appellera σ_a l'opérateur de translation à gauche par a : $\sigma_a f(x) = f(ax)$.

D'après le chapitre I, pour montrer la normalité il faut montrer la convergence des suites $\mathrm{P}_n \mathrm{W}_h f$ pour une fonction h spéciale et co-spéciale et toute fonction f spéciale. Pour cela nous utiliserons une fonction h particulière que nous allons construire ci-après. Nous aurons besoin du lemme classique suivant dont la démonstration est laissée au lecteur.

(1.3) Lemme. — *Soit* $f \in \mathrm{C}_0$, *et* K *un compact de* G; *l'application*

$$x \to \inf_{b \in \mathrm{K}} f(xb)$$

est continue et tend vers zéro à l'infini.

Nous allons en déduire

(1.4) LEMME. — *Il existe une fonction h de C_0, symétrique et strictement positive telle que*

(i) $U_h > 1 \otimes m$, $\hat{U}_h > 1 \otimes m$;

(ii) $\lim_{b \to e} \| W_h(\tau_b h - h) \|_\infty = \lim_{b \to e} \| \hat{W}_h(\tau_b h - h) \|_\infty = 0$.

Démonstration. — Soit u une fonction non nulle de C_K^+. Comme X est récurrente la fonction

$$h_1 = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} P_n u,$$

où $\alpha \in \mathbf{R}_+$, est strictement positive; par ailleurs elle est dans C_0. Enfin

$$h_1 = \alpha \left(u + \frac{1}{2} U_{1/2} u \right),$$

donc h_1 est spéciale.

On posera de même

$$\hat{h}_1 = \alpha \sum_0^{\infty} 2^{-n} \hat{P}_n u;$$

la fonction

$$h_2 = h_1 \wedge \hat{h}_1$$

est spéciale et co-spéciale et donc d'après [2], en choisissant α convenablement, $U_{h_2} > 1 \otimes m$ et $\hat{U}_{h_2} > 1 \otimes m$.

Soit V un voisinage symétrique compact de e et posons

$$h'(x) = \inf_{b \in V} h_2^2(xb), \qquad \hat{h}'(x) = h'(x^{-1})$$

et

$$h = h' \wedge \hat{h}'.$$

Nous allons montrer que h satisfait aux conditions (ii). Comme elle satisfait manifestement à toutes les autres conditions du lemme, ce sera la fonction cherchée.

Soit alors $\varepsilon > 0$, et K le compact $\{ h \geqq \varepsilon \}$. Puisque V est symétrique, pour tout $x \in G$ et tout $b \in V$, on a

$$h(xb) < h_2^2(x),$$

donc *a fortiori*

$$| h(x) - h(xb) | < h_2^2(x),$$

et donc pour $x \in K^c$ et $b \in V$:

$$| h(x) - h(xb) | < \varepsilon h_2(x).$$

Par ailleurs h_2 est minorée sur K par une constante $C > 0$. Comme h est uniformément continue, il existe un voisinage $W \subset V$ tel que pour $b \in W$, $x \in K$ on ait

$$| h(x) - h(xb) | \leqq C\varepsilon \leqq \varepsilon h_2(x).$$

On a donc finalement

$$|\tau_b h - h| < \varepsilon h_2 \qquad \text{si} \quad b \in W.$$

Il en résulte que

$$\| W_{h_2}(\tau_b h - h) \| < \frac{\varepsilon m(h_2)}{1 - m(h_2)},$$

puis comme d'après [7],

$$W_h(\tau_b h - h) = W_{h_2}(\tau_b h - h) - \frac{1}{m(h)} \langle h.m, W_{h_2}(\tau_b h - h) \rangle,$$

on voit que,

$$\lim_{b \to e} \| W_h(\tau_b h - h) \|_\infty = 0.$$

On obtient de la même façon le résultat relatif à $\hat{W}_h$.

Dans toute la suite h sera la fonction qui vient d'être construite, et W_h et $\hat{W}_h$ seront les opérateurs qui lui sont associés par le théorème de Neveu [7], p. 109. Quel que soit $a \in G$, $\tau_a h$ est aussi spéciale et cospéciale et on peut donc aussi lui associer les opérateurs $W_{\tau_a h}$ et $\hat{W}_{\tau_a h}$.

Nous allons maintenant démontrer quelques résultats préparatoires.

(1.5) LEMME. — *Pour toute fonction* φ *spéciale et tout* $a \in G$,

$$\| W_h \varphi - W_{\tau_a h} \varphi \| \leqq \frac{m(\varphi)}{m(h)} (\| \hat{W}_h(\tau_a h - h) \|_\infty + \| W_h(\tau_{a^{-1}} h - h) \|_\infty).$$

Démonstration. — La formule I.1.5 permet d'écrire :

$$W_h \varphi - W_{\tau_a h} \varphi = \frac{1}{m(h)} \langle \tau_a h, W_h \varphi \rangle - \frac{m(\varphi)}{m(h)} W_{\tau_a h}(h),$$

et comme

$$W_h(h) = W_{\tau_a h}(\tau_a h)$$

(*cf.* [7] p. 110), on a

$$W_h \varphi - W_{\tau_a h} \varphi = \frac{1}{m(h)} \langle W_h(\tau_a h - h), \varphi \rangle - \frac{m(\varphi)}{m(h)} W_{\tau_a h}(h - \tau_a h).$$

La formule

$$W_{\tau h} = \tau W_h \tau^{-1}$$

permet d'obtenir facilement l'inégalité annoncée. ■

(1.6) LEMME. — *Pour* $f \in C_K^+$ *et* $x_0 \in G$, *la suite* $(W_h P_n f(x_0), n \in N)$ *est bornée.*

Démonstration. — Soit V_0 un voisinage symétrique compact de e; la fonction

$$f' = \sup_{a \in V_0} (\tau_a f)$$

est dans C_K^+. Supposons qu'il existe une suite (n_j) d'entiers tels que

$$\lim_j W_h P_{n_j} f(x_0) = +\infty.$$

Pour $a \in V_0$, on a

$$W_h P_{n_j} f'(x_0 a) = W_{\tau_a h} P_{n_j}(\tau_a f')(x_0) \geqq W_{\tau_a h} P_{n_j} f(x_0)$$

et le lemme précédent permet de conclure que $W_h P_{n_j} f'$ converge uniformément vers $+\infty$ sur un voisinage V compact de x_0. Soit alors g une fonction positive, non nulle, à support dans V; la relation

$$\langle g, W_h P_{n_j} f' \rangle = \langle \hat{W}_h g, P_{n_j} f' \rangle \leqq \| \hat{W}_h g \|_\infty \| f' \|_1$$

conduit à une contradiction. ■

(1.7) LEMME. — *Pour toute fonction* $f \in C_K^+$, *la suite des fonctions* $W_h P_n f$ *est bornée sur tout compact.*

Démonstration. — Il suffit de montrer que pour tout $x_0 \in G$ il existe un voisinage V de e tel que la suite $W_h P_n f$ soit bornée sur $x_0 V$. Or

$$\begin{aligned} W_h P_n f(x_0 a) - W_h P_n f(x_0) &= W_{\tau_a h} P_n(\tau_a f)(x_0) - W_h P_n f(x_0) \\ &= W_{\tau_a h} P_n(\tau_a f)(x_0) - W_h P_n(\tau_a f)(x_0) + W_h P_n(\tau_a f - f)(x_0). \end{aligned}$$

Si V_0 est un voisinage compact de e, la fonction

$$f' = \sup_{a \in V_0} (\tau_a f)$$

est dans C_K^+ et pour $\eta > 0$ on peut trouver un voisinage $V \subset V_0$ tel que pour $a \in V$,

$$|\tau_a f - f| \leqq \eta f',$$

et donc

$$|W_h P_n(\tau_a f - f)|(x_0) \leqq \eta W_h P_n f'(x_0).$$

Le résultat découle alors des deux lemmes précédents.

(1.8) LEMME. — *Pour toute fonction* $f \in C_K^+$, *la suite des fonctions* $W_h P_n f$ *est équi-uniformément continue à droite sur tout compact.*

Démonstration. — D'après le lemme (1.5) et les calculs du lemme précédent, pour tout couple (ε, η) de nombres positifs et tout point x_0 on peut trouver un voisinage V de e tel que pour $a \in V$, on ait

$$|W_h P_n f(x_0) - W_h P_n f(x_0 a)| \leqq \frac{m(f)}{m(h)} \varepsilon + \eta W_h P_n f'(x_0).$$

D'après le lemme précédent pour tout compact K, il existe un nombre B tel que

$$\sup_{x_0 \in K} \sup_n W_h P_n f'(x_0) = B < +\infty.$$

Pour tout $\xi > 0$, il existe donc un voisinage V de e tel que pour $x \in \mathrm{K}$ et $x^{-1} y \in \mathrm{V}$, on ait

$$|\mathrm{W}_h \mathrm{P}_n f(x) - \mathrm{W}_h \mathrm{P}_n f(y)| \leqq \xi. \quad \blacksquare$$

La même technique, avec les simplifications dues au fait que pour $f \in \mathrm{C}_{\mathrm{K}}^{+}$ la suite $\mathrm{P}_n \mathrm{W}_h f$ est bornée par $\| \mathrm{W}_h f \|$, donne

(1.9) LEMME. — *Pour toute fonction $f \in \mathrm{C}_{\mathrm{K}}^{+}$, la suite des fonctions $\mathrm{P}_n \mathrm{W}_h f$ est équi-uniformément continue à droite sur tout compact.*

Nous pouvons maintenant énoncer les deux propositions qui vont être la clef de toute la suite.

(1.10) PROPOSITION. — *De toute suite d'entiers on peut extraire une sous-suite $s = (n_j)$ ayant la propriété suivante : pour toute fonction $f \in \mathrm{C}_{\mathrm{K}}$ les quatre suites de fonctions $\mathrm{W}_h \mathrm{P}_{n_j} f$, $\mathrm{P}_{n_j} \mathrm{W}_h f$, $\hat{\mathrm{W}}_h \hat{\mathrm{P}}_{n_j} f$, $\hat{\mathrm{P}}_{n_j} \hat{\mathrm{W}}_h f$ convergent uniformément sur tout compact lorsque j tend vers l'infini.*

Démonstration. — Le groupe G étant métrisable il existe une suite dense dans C_{K} et il suffit de démontrer la proposition pour les éléments de cette suite. Cela résulte alors des lemmes (1.7) et (1.8) et de cinq applications successives du procédé diagonal d'extraction de sous-suites.

(1.11) LEMME. — *Si $s = (n_j)$ est une sous-suite ayant les propriétés précédentes la fonction $\psi = \lim_j \mathrm{P}_{n_j} \mathrm{W}_h f$ est constante sur* G. *Cela entraîne que pour tout $f \in \mathrm{C}_{\mathrm{K}}$, $(x, y) \in \mathrm{G} \times \mathrm{G}$,*

$$\lim_{n \to \infty} (\mathrm{P}_n \mathrm{W}_h f(x) - \mathrm{P}_n \mathrm{W}_h f(y)) = 0.$$

Démonstration. — De la formule (*cf.* [7]) :

$$\mathrm{P} + \mathrm{P}\mathrm{W}_h = \mathrm{W}_h + \frac{1}{m(h)} \mathrm{P} h \otimes m,$$

il résulte que

$$\mathrm{P}_{n+1} \mathrm{W}_h f(x) = \mathrm{P}_n \mathrm{W}_h f(x) - \mathrm{P}_{n+1} f(x) + \frac{m(f)}{m(h)} \mathrm{P}_{n+1} h(x).$$

Les fonctions f et h étant intégrables et bornées il résulte du théorème de Jain [4] que les deux derniers termes de cette égalité tendent vers zéro lorsque n tend vers l'infini. La fonction bornée ψ est donc harmonique et par suite constante.

(1.12) PROPOSITION. — *Soit $s = (n_j)$ une suite vérifiant les conditions de la proposition* (1.10). *La suite des mesures $\varepsilon_x \mathrm{W}_h \mathrm{P}_{n_j}$ converge alors au sens vague vers un multiple $\gamma^s(x).m$ de la mesure de Haar. La fonction γ^s est positive, uniformément continue à droite et vérifie la relation*

$$\mathrm{P} \gamma^s = \gamma^s + \frac{1}{m(h)} \mathrm{P} h.$$

De plus, pour tout $a \in \mathrm{G}$, la fonction $(\mathrm{I} - \tau_a) \gamma^s$ est bornée.

Démonstration. — D'après (1.10) il est clair que les mesures $\varepsilon_x W_h P_{n_j}$ convergent vaguement vers une mesure ν^x et que pour tout $f \in C_K$, l'application $x \to \nu^x(f)$ est continue. Si $g \in C_K$, on a d'autre part

$$\int \nu^x(f).g(x)\,m(dx) = \lim_j \langle W_h P_{n_j} f, g \rangle = \lim_j \langle f, \hat{P}_{n_j} \hat{W}_h g \rangle,$$

d'où il résulte d'après (1.11) appliqué à $\hat{P}$, que si $m(f) = 0$, $\nu^x(f) = 0$ pour tout x et donc que ν^x est bien de la forme $\gamma^s(x).m$.

D'autre part le lemme (1.5) et l'égalité

$$W_{\tau_a h} = \tau_a W_h \tau_{a^{-1}}$$

prouvent que

$$\|\gamma^s - \tau_a \gamma^s\|_\infty \leqq \frac{1}{m(h)}(\|\hat{W}_h(\tau_a h - h)\|_\infty + \|W_h(\tau_{a^{-1}} h - h)\|_\infty).$$

Le choix de h permet d'affirmer que γ^s est uniformément continue à droite.

De la formule

$$P_{n_j+1} f + PW_h P_{n_j} f = W_h P_{n_j} f + \frac{m(f)}{m(h)} P h,$$

on déduit grâce au lemme de Fatou que

$$P\gamma^s \leqq \gamma^s + \frac{1}{m(h)} P h.$$

D'après le lemme (1.5), $(I - \tau_a) W_h P_{n_j} f$ converge vers $(I - \tau_a)\gamma^s.m(f)$ en restant borné, donc $(I - \tau_a)\gamma^s$ est une fonction bornée pour tout $a \in G$ et $P(I - \tau_a) WP_{n_j} f$ converge vers $P(I - \tau_a)\gamma^s.m(f)$. On en déduit que

$$P(I - \tau_a)\gamma^s = (I - \tau_a)\gamma^s + \frac{1}{m(h)}(I - \tau_a) P h;$$

comme toutes les fonctions qui interviennent sont finies on peut réordonner cette expression pour obtenir

$$\gamma^s - P\gamma^s + \frac{1}{m(h)} P h = \tau_a\left(\gamma^s - P\gamma^s + \frac{1}{m(h)} P h\right),$$

ce qui prouve qu'il existe une constante $k \geqq 0$ telle que

$$P\gamma^s = \gamma^s + \frac{1}{m(h)} P h - k.$$

On en déduit que

$$P_n \gamma^s = \gamma^s + \frac{1}{m(h)}(P h + P_2 h + \ldots + P_n h) - nk,$$

or comme $P_n h$ tend vers zéro au sens de Cesaro, ce dernier terme tend vers $-\infty$ si k n'est pas nul, ce qui est incompatible avec la positivité de γ^s. On a donc $k = 0$ et

$$P\gamma^s = \gamma^s + \frac{1}{m(h)} P h. \quad \blacksquare$$

Énonçons encore quelques propriétés de la fonction γ^s qui seront utiles plus loin. La proposition qui suit est une première étape vers la caractérisation des fonctions spéciales.

(1.13) PROPOSITION. — *Toutes les fonctions co-spéciales sont intégrables par la mesure $\gamma_s . m$. En particulier*

$$\int h . \gamma^s . dm = \frac{1-m(h)}{m(h)}.$$

Démonstration. — Soit g une fonction cospéciale et f une fonction de C_K^+ telle que $m(f) = 1$. Le lemme de Fatou entraîne que

$$\int g . \gamma^s . dm \leqq \varliminf_j \langle g, W_h P_{n_j} f \rangle = \varliminf_j \langle \hat{P}_{n_j} \hat{W}_h g, f \rangle \leqq \| \hat{W}_h(g) \|_\infty < \infty,$$

ce qui prouve la première phrase de l'énoncé. Comme

$$\hat{W}_h(h) = \frac{1 - m(h)}{m(h)}$$

([7], p. 110), on a en particulier

$$\int h . \gamma^s . dm \leqq \frac{1-m(h)}{m(h)}.$$

Comme la convergence de $W_h P_{n_j} f$ vers γ^s est uniforme sur les compacts, si $g \in C_K^+$ on a en utilisant (1.10), l'égalité

$$\int g . \gamma^s . dm = \lim_j \langle \hat{P}_{n_j} \hat{W}_h g, f \rangle = \lim_j \hat{P}_{n_j} \hat{W}_h g.$$

On a alors la même égalité pour toutes les fonctions $\hat{P}_k g$. En effet

$$\begin{aligned}\int \hat{P} g . \gamma^s . dm = \int g . P\gamma^s . dm &= \int g . \gamma^s . dm + \frac{1}{m(h)} \int g . P h . dm \\ &= \lim_j \hat{P}_{n_j} \hat{W}_h g + \frac{1}{m(h)} \int \hat{P} g . h . dm,\end{aligned}$$

ce qui en utilisant la formule (1.4 *bis*), soit

$$\hat{W}_h g = \hat{P} g + \hat{W}_h \hat{P} g - \frac{1}{m(h)} \int \hat{P} g . h . dm,$$

s'écrit :

$$\int \hat{P} g . \gamma^s . dm = \lim_j \hat{P}_{n_j} \hat{W}_h (\hat{P} g) + \lim_j \hat{P}_{n_j + 1} g,$$

or le deuxième terme de cette égalité est nul d'après le théorème de Jain [4]. Ce raisonnement pouvant être refait autant de fois qu'on le désire, quel que soit k :

$$\int \hat{\mathrm{P}}_k g . \gamma^s . dm = \lim_j \hat{\mathrm{P}}_{n_j} \hat{\mathrm{W}}_h (\hat{\mathrm{P}}_k g).$$

Enfin si l'on pose

$$\varphi = \sum_0^\infty 2^{-k} \hat{\mathrm{P}}_k g,$$

on a encore

$$\begin{aligned}\int \varphi . \gamma^s . dm &= \sum_0^\infty 2^{-k} \int \hat{\mathrm{P}}_k . g . \gamma^s . dm \\ &= \sum_0^\infty 2^{-k} (\lim_j \hat{\mathrm{P}}_{n_j} \hat{\mathrm{W}}_h (\hat{\mathrm{P}}_k g));\end{aligned}$$

or quel que soit j,

$$\hat{\mathrm{P}}_{n_j} \hat{\mathrm{W}}_h \hat{\mathrm{P}}_k g \leqq \| \hat{\mathrm{W}}_h \hat{\mathrm{P}}_k g \| \leqq \| \hat{\mathrm{W}}_h g \| + k \| g \|$$

d'après les formules de [7], et l'on peut donc intervertir sommation et limite pour obtenir

$$\int \varphi \gamma^s . dm = \lim_j \hat{\mathrm{P}}_{n_j} \hat{\mathrm{W}}_h \varphi.$$

D'après la façon dont h a été construite nous pouvons trouver une fonction φ du type précédent et majorant h. Une nouvelle application du lemme de Fatou donne alors

$$\begin{aligned}\int (\varphi - h) . \gamma^s . dm &\leqq \lim_j \hat{\mathrm{P}}_{n_j} \hat{\mathrm{W}}_h (\varphi - h) \\ &= \int \varphi . \gamma^s . dm - \frac{1 - m(h)}{m(h)},\end{aligned}$$

ce qui, comparé à l'inégalité montrée plus haut, donne

$$\int h . \gamma^s . dm = \frac{1 - m(h)}{m(h)}.$$

2. Étude des solutions de l'équation de Poisson. — La fonction γ^s introduite dans le paragraphe précédent va jouer un rôle fondamental dans toute la suite. C'est notamment une fonction sous-harmonique qui est solution de l'équation de Poisson ayant le second membre de module spécial $-\mathrm{P}\, h/m(h)$. Un des objets de notre étude va justement être de résoudre l'équation de Poisson à second membre spécial. Nous allons faire ci-dessous l'étude de l'unicité des solutions de cette équation.

Dans ce qui suit nous désignons par caractère réel un homomorphisme dans le groupe additif des réels.

(2.1) Proposition. — *Soit g une fonction spéciale, et ψ_1 et ψ_2 deux fonctions boréliennes positives telles que*

$$\mathrm{P} \psi_1 - \psi_1 = \mathrm{P} \ \psi_2 - \psi_2 = g.$$

Si pour tout $a \in \mathrm{G}$, *la fonction* $(\mathrm{I}-\tau_a)(\psi_1-\psi_2)$ *est bornée, on a* $\psi_1-\psi_2 = k+\chi$ *où* k *est une constante et* χ *un caractère continu réel de* G *tel que* $\mathrm{P}|\chi|-|\chi|$ *soit* m*-intégrable.*

Démonstration. — Posons $\psi = \psi_1-\psi_2$. On a évidemment

$$\mathrm{P}(\mathrm{I}-\tau_a)\psi-(\mathrm{I}-\tau_a)\psi = 0$$

et comme $(\mathrm{I}-\tau_a)\psi$ est bornée il en résulte qu'il existe une constante $c(a)$ telle que $(\mathrm{I}-\tau_a)\psi = c(a)$, soit pour tout $x \in \mathrm{G}$,

$$\psi(x)-\psi(xa) = c(a).$$

En particulier pour $x = e$, cela donne $c(a) = \psi(e)-\psi(a)$, donc

$$\psi(xa) = \psi(x)+\psi(a)-\psi(e).$$

En posant

$$k = \psi(e) \qquad \text{et} \qquad \chi(x) = \psi(x)-\psi(e)$$

on obtient la constante et le caractère cherchés. Le caractère χ est borélien donc continu.

Le caractère χ vérifie évidemment l'égalité $\mathrm{P}\chi = \chi$ qui entraîne $\mathrm{P}|\chi| \geqq |\chi|$. Si la fonction $v = \mathrm{P}|\chi|-|\chi|$ n'était pas m-intégrable, la suite des rapports $\sum_1^n \mathrm{P}_k v \big/ \sum_1^n \mathrm{P}_k g$ convergerait vers l'infini presque partout ce qui est en contradiction avec le fait que

$$|\chi| \leqq k+\psi_1+\psi_2$$

qui entraîne que pour tout n,

$$\mathrm{P}_n|\chi| \leqq k+\psi_1+\psi_2+2\sum_1^n \mathrm{P}_k g.$$

L'existence d'un caractère χ tel que $\mathrm{P}|\chi|-|\chi|$ soit m-intégrable impose en fait au groupe G et à la loi μ de sévères restrictions que nous allons décrire ci-dessous.

(2.2) Proposition. — *S'il existe un caractère* χ *réel continu, non trivial, tel que* $\mathrm{P}|\chi|-|\chi|$ *soit* m*-intégrable, le groupe* G *est extension par* **R** *ou* Z *d'un groupe compact. De plus ce caractère est unique à une multiplication près.*

Démonstration. — Le sous-groupe fermé $\mathrm{Ker}\,\chi$ est un sous-groupe distingué. Appelons m_1 et m_2 des mesures de Haar [1] sur $\mathrm{Ker}\,\chi$ et $\mathrm{G}/\mathrm{Ker}\,\chi$. Pour f borélienne l'intégrale

$$\int_{\mathrm{Ker}\,\chi} f(gx_1)\,dm(x_1)$$

ne dépend que de la classe de g modulo $\mathrm{Ker}\,\chi$ et l'on peut écrire :

$$\int_{\mathrm{G}}(\mathrm{P}|\chi|-|\chi|)\,dm = \int_{\mathrm{G}/\mathrm{Ker}\,\chi} dm_2(x_2)\int_{\mathrm{Ker}\,\chi}(\mathrm{P}|\chi|-|\chi|)(x_2x_1)\,dm_1(x_1).$$

[1] Les groupes $\mathrm{Ker}\,\chi$ et $\mathrm{G}/\mathrm{Ker}\,\chi$ sont récurrents donc unimodulaires.

Mais la fonction $P|\chi|-|\chi|$ est constante sur les classes modulo $\operatorname{Ker}\chi$; en effet, si $g \in \operatorname{Ker}\chi$, on a

$$P|\chi|(xg) = \int |\chi|(yxg)\mu(dy) = P|\chi|(x)$$

et de même évidemment

$$|\chi|(xg) = |\chi|(x).$$

On a donc

$$\int_G (P|\chi|-|\chi|)\,dm = m_1(\operatorname{Ker}\chi)\int_{G/\operatorname{Ker}\chi} (P|\chi|-|\chi|)(x_2)\,dm_2(x_2),$$

cette dernière intégrale ne peut être nulle car cela entraînerait que $P|\chi| = |\chi|$ donc que $|\chi|$ est harmonique et positive donc constante. L'hypothèse entraîne donc que $m_1(\operatorname{Ker}\chi) < \infty$, et le sous-groupe $\operatorname{Ker}\chi$ est donc compact.

Maintenant $G/\operatorname{Ker}\chi$ est isomorphe à un sous-groupe de $\mathbf{R}$ et est localement compact pour une topologie plus fine que celle de $\mathbf{R}$. Si $G/\operatorname{Ker}\chi$ n'est pas isomorphe à $\mathbf{R}$ lui-même il est isomorphe soit à Z soit à un sous-groupe dense dans $\mathbf{R}$ (pour la topologie de $\mathbf{R}$). Nous allons montrer que ce dernier cas est impossible.

Supposons en effet que $G/\operatorname{Ker}\chi$ soit isomorphe à un sous-groupe dense dans $\mathbf{R}$. Pour sa topologie $G/\operatorname{Ker}\chi$ admet d'après le théorème de structure un sous-groupe ouvert de la forme $\mathbf{R}^n \oplus K$ où K est compact. Le fait que χ soit injectif et que $G/\operatorname{Ker}\chi$ ne soit pas isomorphe à $\mathbf{R}$ entraîne alors immédiatement que ce sous-groupe est réduit à $\{e\}$ donc que $G/\operatorname{Ker}\chi$ est discret. Or la fonction $P|\chi|-|\chi|$ doit être intégrable pour la mesure de Haar de ce sous-groupe d'après la première partie de la démonstration et il n'est pas difficile de voir que cette fonction est supérieure à un nombre $k > 0$ sur un voisinage de 0 dans $\mathbf{R}$. Le groupe $G/\operatorname{Ker}\chi$ n'admet donc qu'un nombre fini de points dans ce voisinage et ne saurait par conséquent être dense.

Si χ' est un autre caractère ayant les mêmes propriétés, il s'annule forcément sur $\operatorname{Ker}\chi$ puisque l'image d'un groupe compact par un homomorphisme continu est un sous-groupe compact. On a donc $\operatorname{Ker}\chi \subset \operatorname{Ker}\chi'$ et par raison de symétrie $\operatorname{Ker}\chi = \operatorname{Ker}\chi'$ ce qui prouve la dernière assertion de l'énoncé. ∎

(2.3) Dans la suite nous serons fréquemment obligés d'accorder une attention spéciale au cas que nous sommes en train d'étudier. Nous utiliserons alors les conventions et les notations suivantes. La mesure de Haar m sera déterminée en imposant que l'on ait, avec les notations de la démonstration précédente, $m_1(\operatorname{Ker}\chi) = 1$ et que m_2 soit la mesure de Lebesgue. On appellera alors *caractère canonique* et on notera X le multiple de χ tel que l'image de m par X soit la mesure de Lebesgue (mesure de comptage dans le cas de Z). Il est alors bien connu que la récurrence de la marche entraîne que

$$\int_G X\,d\mu = 0,$$

si l'intégrale a un sens, et nous poserons alors

$$\sigma^2 = \int_G X^2\,d\mu.$$

On a alors

(2.4) THÉORÈME. — *Il existe un caractère χ réel, continu non trivial tel que* $\mathrm{P}\,|\chi|-|\chi|$ *soit intégrable si et seulement si le groupe* G *est du type précédent et si* $\sigma^2 < +\infty$.

Démonstration. — Nous avons déjà vu que sous cette hypothèse G est du type précédent. On appelle $\tilde{\mu}$ l'image de μ par X et $\tilde{\mathrm{P}}$ la probabilité de transition associée à $\tilde{\mu}$. Comme X^2 et $\mathrm{P}\,|\chi|-|\chi|$ sont constants sur les classes modulo Ker X il est facile de voir que

$$\int_{\mathrm{G}} \mathrm{X}^2\, d\mu = \int_{\mathbf{R}} x^2\, d\tilde{\mu}(x),$$

et que

$$\mathrm{I} = \int_{\mathrm{G}} (\mathrm{P}\,|\mathrm{X}|-|\mathrm{X}|)\, dm = \int_{\mathbf{R}} (\tilde{\mathrm{P}}\,|x|-|x|)\, dx.$$

Nous allons donc raisonner comme si G était égal à $\mathbf{R}$ lui-même (le cas de Z se traitant de manière identique) et X désignera le caractère identique $\mathrm{X}(x) = x$. Nous allons montrer que $\mathrm{I} = \sigma^2$.

Soient X^+ et X^- les parties positives et négatives de X. De l'égalité $\mathrm{PX} = \mathrm{X}$ on déduit que $\mathrm{PX}^+ - \mathrm{X}^+ = \mathrm{PX}^- - \mathrm{X}^-$, et par suite

$$\mathrm{P}\,|\mathrm{X}|-|\mathrm{X}| = 2(\mathrm{PX}^+ - \mathrm{X}^+) = 2(\mathrm{PX}^- - \mathrm{X}^-);$$

on a donc, comme X^+ est nul sur $\mathbf{R}^-$ et X^- sur $\mathbf{R}^+$,

$$\mathrm{I} = 2\int_{-\infty}^{0} \mathrm{PX}^+(x)\, dx + 2\int_{0}^{+\infty} \mathrm{PX}^-(x)\, dx,$$

et en utilisant la dualité

$$\begin{aligned}
\mathrm{I} &= 2\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{X}^+(x)\, \hat{\mathrm{P}}\, 1_{(-\infty,\, 0)}(x)\, dx + 2\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{X}^-(x)\, \mathrm{P}(1_{)0,\, +\infty)})(x)\, dx \\
&= 2\int_{0}^{+\infty} x\, \hat{\mathrm{P}}\, 1_{(-\infty,\, 0)}(x)\, dx - 2\int_{-\infty}^{0} x\, \hat{\mathrm{P}}\, 1_{)0,\, +\infty)}(x)\, dx \\
&= 2\int_{0}^{+\infty} x\, \mu((+x,\ \infty()\, dx - 2\int_{-\infty}^{0} x\, \mu()-\infty,\ x()\, dx.
\end{aligned}$$

On peut appliquer le théorème de Fubini dans chacun des termes car la fonction à intégrer y est de signe constant et l'on trouve

$$\mathrm{I} = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2\, d\mu(y) = \sigma^2. \quad \blacksquare$$

(2.5) DÉFINITION. — On dira que la marche est de *type II* si l'on se trouve dans les conditions du théorème précédent. On dira que la marche est de *type I* dans le cas contraire.

Il est clair qu'une marche et sa marche duale, les marches droites et gauches de même loi, sont de même type.

Dans le cas des groupes abéliens on peut améliorer les résultats précédents retrouvant ainsi, mais sans utiliser la transformation de Fourier, un résultat de Port et Stone [9].

(2.6) PROPOSITION. — *Si* X *est une marche de type II sur un groupe* G *abélien, alors* G *est de la forme* $\mathbf{R} \oplus \mathrm{K}$ *ou* $\mathrm{Z} \oplus \mathrm{K}$ *pour un groupe compact* K.

Démonstration. — Un groupe susceptible de porter une marche de type II est clairement compactement engendré; si de plus il est abélien il est de la forme $\mathbf{R}^n \oplus \mathrm{Z}^p \oplus \mathrm{K}$ où K est un groupe compact. Le résultat découle alors immédiatement des résultats précédents. ■

Dans la suite pour les marches de type II on utilisera des notations décrites en (2.3). On posera de plus

$$\mathrm{G}^+ = \{x : \mathrm{X}(x) \geqq 0\} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{G}^- = (\mathrm{G}^+)^{-1}.$$

Le résultat qui suit sera nécessaire dans la prochaine section.

(2.7) PROPOSITION. — *Si la marche est de type II, pour tout* $a \in \mathrm{G}$ *on a*

$$\lim_{n \to \infty} (\mathrm{I} - \tau_a) \mathrm{P}_n |\chi| = 0$$

et la convergence est bornée.

Démonstration. — Soient x et a fixés dans G; d'après la forme de X on peut écrire :

$$|\mathrm{X}|(yxa) - |\mathrm{X}|(yx) = \alpha 1_{\mathrm{G}^+}(y) - \alpha 1_{\mathrm{G}^-}(y) + \psi(yx),$$

où α est une fonction de a et où ψ est une fonction à support compact qui varie avec x mais reste majorée par une constante qui ne dépend que de a. On a donc encore

$$(\mathrm{I} - \tau_a) \mathrm{P}_n |\mathrm{X}|(x) = \alpha \mu^n(\mathrm{G}^+) - \alpha \mu^n(\mathrm{G}^-) + \mathrm{P}_n \psi(x).$$

Le théorème central limite que l'on peut invoquer puisque $\sigma^2 < \infty$ entraîne que

$$\lim_n \mu^n(\mathrm{G}^+) = \lim_n \mu^n(\mathrm{G}^-) = \frac{1}{2},$$

et le théorème de Jain [4] que

$$\lim_n \mathrm{P}^n \psi(x) = 0,$$

ce qui démontre la proposition. ■

3. NOYAUX POTENTIELS. — Nous allons d'abord améliorer la proposition (1.11) en montrant que γ^s ne dépend en fait pas de s.

(3.1) THÉORÈME. — *Il existe une fonction* γ_h *uniformément continue à droite, telle que*

$$\mathrm{P}\gamma_h - \gamma_h = \frac{1}{m(h)} \mathrm{P} h$$

et que pour toute fonction $f \in \mathrm{C_K}$:

$$\lim_{n \to \infty} \mathrm{W}_h \mathrm{P}_n f(x) = m(f) . \gamma_h(x).$$

La convergence est de plus uniforme sur les compacts. On a évidemment les résultats symétriques pour la marche duale et on appelle $\hat{\gamma}_h$ la fonction correspondante.

Démonstration. — Supposons que les mesures $\varepsilon_x W_h P_n$ ne convergent pas vaguement. D'après (1.10) et (1.12) on peut donc trouver deux suites s et s' d'entiers telles que les suites correspondantes de mesures $\varepsilon_x W_h P_n$ convergent vaguement vers $\gamma^s(x).m$ et $\gamma^{s'}(x).m$ avec $\gamma^s \neq \gamma^{s'}$.

D'après (2.1) on doit avoir $\gamma^s - \gamma^{s'} = a+\chi$ où a est une constante et χ un caractère tel que $P|\chi|-|\chi|$ soit intégrable. Mais d'après (1.13) on doit avoir

$$\int h.\gamma^s.dm = \int h.\gamma^{s'}.dm = \frac{1-m(h)}{m(h)},$$

donc

$$a\int h.dm + \int \chi.h.dm = 0,$$

et comme

$$\int \chi.h.dm = 0$$

puisque h est symétrique, $a = 0$, ce qui prouve déjà la convergence vague pour les marches de type I.

Considérons maintenant une marche de type II; soit g une fonction de C_K^+ telle que $m(g) = 1$ on a

$$\chi = \lim_j W_h P_{n_j} g - \lim_j W_h P_{n'_j} g,$$

si $s = (n_j)$ et $s' = (n'_j)$. On peut, quitte à extraire des sous-suites supposer que $n_j \leqq n'_j$. Soit $a \in G$; de l'égalité

$$W_h P_n g = W_h g + \frac{1}{m(h)}\langle h, Pg + P_2 g + \ldots + P_n g\rangle - (Pg + \ldots + P_n g),$$

on déduit par différence que

$$-\chi(a) = (I-\tau_a)\chi = \lim_j \sum_{n_j}^{n'_j}(I-\tau_a)P_k g.$$

La suite au deuxième membre est bornée, et $\hat{P}|X|-|X|$ étant intégrable, où X est cette fois le caractère canonique, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
-\chi(a).\sigma^2 = \int (I-\tau_a)\chi.(\hat{P}|X|-|X|).dm &= \lim_j \int (\hat{P}|X|-|X|).\sum_{n_j}^{n'_j}(I-\tau_a)P_k g.dm \\
&= \lim_j \langle g, (I-\tau_{a^{-1}})(\hat{P}_{n'_j+1}|X|-\hat{P}_{n_j+1}|X|)\rangle \\
&= 0,
\end{aligned}$$

d'après la proposition (2.7). Ceci entraîne que χ est le caractère identiquement nul, et donc on a la convergence vague des mesures $\varepsilon_x W_h P_n$ aussi pour les marches de type II.

On posera $\gamma_h = \gamma^s$, et γ_h a toutes les propriétés démontrées pour les fonctions γ^s, notamment (1.13). Le fait que pour $f \in C_K$ la convergence soit uniforme sur les compacts résulte de la section 1.

Remarques. — Dans la suite nous écrirons simplement γ au lieu de γ_h lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté à craindre. Il est d'autre part facile de montrer que

$$\gamma(x^{-1}) = \hat{\gamma}^d(x).$$

(3.2) COROLLAIRE. — *Pour toute fonction spéciale f on a*

$$\lim_n \mathrm{WP}_n f(x) = m(f).\gamma(x).$$

Démonstration. — Si X est apériodique le résultat découle immédiatement de I.1.8 et du résultat précédent. Si X est périodique de période d on a

$$\lim_n \mathrm{WP}_{nd+k} f = 0$$

quel que soit $k < d$ et on en déduit facilement le résultat général.

Nous cherchons maintenant à démontrer un premier résultat de normalité. Nous commençons par des préliminaires.

(3.3) PROPOSITION. — *Si f est spéciale, quel que soit le couple (x, y) de points de G on a*

$$\lim_{n\to\infty} (\mathrm{P}_n \mathrm{W} f(x) - \mathrm{P}_n \mathrm{W} f(y)) = 0.$$

Démonstration. — Les fonctions $\mathrm{W}f$ étant bornées si $\mathscr{U}$ est un ultrafiltre plus fin que le filtre de Fréchet pour tout $x \in G$ la limite $\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ \mathscr{U}}} \mathrm{P}_n \mathrm{W} f(x)$ existe et définit un nombre $\mathrm{L}(x)$. On a de plus

$$\mathrm{L}(x) = \lim_{\substack{n\to\infty\\ \mathscr{U}}} \mathrm{P}_{n+k} \mathrm{W} f(x),$$

quel que soit k. En effet

$$\mathrm{P}_n \mathrm{W} f(x) - \mathrm{P}_{n+k} \mathrm{W} f(x) = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{P}_{n+i}\left(f - \frac{m(f)}{m(h)} h\right),$$

et comme $f - [m(f)/m(h)]\, h$ est bornée et dans $\mathscr{L}^1(m)$ le théorème de Jain [4] entraîne que le second membre tend vers zéro.

Pour alléger l'écriture posons $\varphi_n = \mathrm{P}_n \mathrm{W} f$. La mesure μ étant étalée, pour k assez grand on a $\mu^k = \alpha + \beta$ où $\alpha = g.m$ est absolument continue par rapport à m. Or

$$\varphi_{n+k}(x) = \langle \varphi_n, \alpha \bigstar \varepsilon_x \rangle + \langle \varphi_n, \beta \bigstar \varepsilon_x \rangle,$$

donc

$$\left| \varphi_{n+k}(x) - \int \varphi_n(y) - g(yx^{-1})\, dy \right| \leqq \| \mathrm{W} f \| . \| \beta \|.$$

La suite φ_n étant bornée, admet une limite suivant $\mathscr{U}$ dans $\sigma(L^\infty, L^1)$ (on confond comme d'habitude les fonctions et leurs classes d'équivalence). Soit ψ un représentant borélien de cette limite; en passant à la limite dans la dernière inégalité on obtient

$$\left| L(x) - \int \psi(y) g(yx^{-1}) \, dy \right| \leqq \| Wf \| . \| \beta \|,$$

et donc

$$| L(x) - P_k \psi(x) | \leqq 2 \| Wf \| . \| \beta \|.$$

Si on fait tendre k vers l'infini on voit que $P_k \psi$ converge uniformément vers L, qui est donc borélienne, invariante et par suite constante. Le résultat est alors évident. ■

Remarque. — Le résultat reste vrai pour tout noyau W associé à une fonction spéciale et co-spéciale autre que h.

Le théorème suivant est un premier résultat de normalité qui contient tous les résultats antérieurs (Spitzer [12], Ornstein [8], Kesten [5] Port et Stone [9]) puisque les fonctions à support compact sont majorées par un multiple de h.

(3.4) THÉORÈME. — *Pour toute fonction f positive, majorée par un multiple de h on a*

$$\lim_{n \to \infty} P_n W f = \int \hat{\gamma}_h . f . dm, \qquad \lim_{n \to \infty} \hat{P}_n \hat{W}_h f = \int \gamma_h . f . dm.$$

Démonstration. — Il suffit évidemment de raisonner pour une des deux marches par exemple la marche duale et pour $f \leqq h$.

D'après (3.3) on peut trouver une sous-suite n_j telle que

$$\lim_{j \to \infty} \hat{P}_{n_j} \hat{W} f = \underline{\lim}_{n \to \infty} \hat{P}_n \hat{W} f,$$

et cette limite est constante. Soit $g \in C_K^+$ avec $m(g) = 1$; dans l'égalité

$$\langle \hat{P}_{n_j} \hat{W} f, g \rangle = \langle f, W P_{n_j} g \rangle,$$

on peut passer à la limite, et en appliquant le théorème de Lebesgue dans le membre de gauche et le lemme de Fatou dans celui de droite on obtient

$$\underline{\lim}_{n \to \infty} \hat{P}_n \hat{W} f \geqq \int \gamma . f . dm.$$

Mais $h - f$ étant aussi positive et spéciale on a

$$\underline{\lim}_{n \to \infty} \hat{P}_n \hat{W} (h - f) \geqq \int \gamma . (h - f) \, dm$$

et comme

$$\hat{P}_n \hat{W} h = \int \gamma . h . dm,$$

on obtient

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\hat{\mathrm{P}}_n\,\hat{\mathrm{W}}\,f \leqq \int \gamma . f . dm,$$

ce qui prouve l'assertion de l'énoncé. ■

Remarque. — On démontrerait de même la normalité pour toutes les fonctions majorées par un multiple de la fonction φ de (1.13). Plus généralement si f est une fonction pour laquelle $\mathrm{P}_n\,\mathrm{W}\,f$ converge, cela est encore vrai pour les fonctions majorées par $\sum 2^{-n}\,\mathrm{P}_n\,f$. Mais nous démontrerons plus loin un meilleur résultat.

Nous allons maintenant utiliser ce qui précède pour construire un noyau potentiel canonique pour la marche X. Ce noyau permettra notamment de résoudre l'équation de Poisson à second membre spécial.

(3.5) Théorème. — *Le noyau*

$$\mathrm{A} = \mathrm{I} + \mathrm{W}_h - 1 \otimes \hat{\gamma}_h . m - \gamma_h \otimes m$$

est un noyau de convolution ayant les propriétés suivantes :

(i) *Il transforme les fonctions spéciales en fonctions finies et bornées supérieurement et les charges en fonctions bornées. De plus si f est de module spécial,* $(\mathrm{I}-\tau)\,\mathrm{A}\,f$ *est borné quel que soit* τ *dans* G.

(ii) *Si f est une charge de module majoré par un multiple de h :*

$$\lim_n \sum_0^n \mathrm{P}_k\,f = \mathrm{A}\,f,$$

$$\lim_n \mathrm{P}_n\,\mathrm{A}\,f = 0.$$

(iii) *Pour toute fonction spéciale f :*

$$(\mathrm{I}-\mathrm{P})\,\mathrm{A}\,f = f.$$

Par définition nous appellerons *potentiels* les fonctions $\mathrm{A}\,f$ pour f spéciale.

Démonstration. — Si f est d'intégrale nulle on montre facilement que

$$\sum_1^n \mathrm{P}_k\,f = \mathrm{W}_h\,f - \mathrm{P}_{n+1}\,\mathrm{W}_h\,f.$$

Si de plus $|f| \in \mathrm{K}_h$ le résultat précédent entraîne que

$$\lim_n \sum_0^n \mathrm{P}_k\,f = f + \mathrm{W}_h\,f - \int \hat{\gamma} . f . dm = \mathrm{A}\,f,$$

et il est évident que $\lim_n \mathrm{P}_n\,\mathrm{A}\,f = 0$, car $\mathrm{P}_n\,f$ tend vers zéro.

Montrons maintenant que A est un noyau de convolution. Soit $f \in K_h^+$ avec $m(f) = 1$ et posons

$$\varphi = f - \frac{h}{m(h)};$$

la fonction φ satisfait aux conditions précédentes donc, en utilisant (1.13)

$$\lim_n \sum_1^n P_k \varphi = W_h \varphi - \int f.\hat{\gamma}_h.dm + \frac{1-m(h)}{m(h)^2}.$$

Or par ailleurs

$$W_h P_n f = W_h f + \frac{1}{m(h)} \left\langle h, \sum_1^n P_k \varphi \right\rangle + \frac{1}{m(h)^2} \left\langle h, \sum_1^n P_k h \right\rangle - \sum_1^n P_k f.$$

En faisant tendre n vers l'infini, il vient

$$\lim_n \left(\sum_1^n P_k f - \frac{1}{m(h)^2} \left\langle h, \sum_1^n P_k h \right\rangle \right)$$
$$= W_h(f) - \gamma_h.m(f) + \frac{1}{m(h)} \langle h, W_h(\varphi) \rangle - \int \hat{\gamma}_h.f.dm + \frac{1-m(h)}{m(h)^2}.$$

Comme $\langle h, W_h \varphi \rangle = \langle \hat{W}_h(h), \varphi \rangle = 0$, on a en posant

$$C_n = \frac{1-m(h)}{m(h)^2} + \frac{1}{m(h)^2} \left\langle h, \sum_1^n P_k h \right\rangle,$$

$$A f = (I + W_h - \gamma_h \otimes m - 1 \otimes \hat{\gamma}_h.m) f = \lim_n \left(\sum_0^n P_k f - C_n \langle m, f \rangle \right)$$
$$= \lim_n \left(\sum_0^n P_k - C_n (1 \otimes m) \right)(f),$$

ce qui prouve que A est un noyau de convolution.

Montrons enfin que A a la propriété (iii). Si f est spéciale

$$A f = f + W_h f - \int f.\hat{\gamma}_h.dm - \gamma_h.m(f)$$

est finie d'après les résultats de la section 1 et PAf l'est également, on peut donc calculer

$$(I-P) A f = f - P f + (I-P) W_h f - \gamma_h.m(f) + P\gamma_h.m(f)$$

et comme

$$(I-P) W_h f = P f - \frac{1}{m(h)} P h.m(f)$$

et que

$$P\gamma_h = \gamma_h + \frac{1}{m(h)} P h,$$

on a

$$(I-P) A f = f.$$

(3.6) COROLLAIRE. — *Le noyau*

$$\hat{A} = I + \hat{W}_h - \hat{\gamma} \otimes m - 1 \otimes \gamma_h . m$$

est un noyau de convolution en dualité avec A *par rapport à m et qui jouit relativement à* $\hat{X}$ *des mêmes propriétés que* A *relativement à* X.

(3.7) La mesure A $(x., .)$ est donc égale à $\alpha \bigstar \varepsilon_x$ où α est une mesure de Radon. Si $\hat{\alpha}$ est l'image de α par l'application $x \to x^{-1}$ on a aussi $\hat{A}(x, .) = \hat{\alpha} \bigstar \varepsilon_x$. Enfin traduit avec les mesures les résultats précédents s'écrivent :

$$\alpha - \alpha \bigstar \mu = \hat{\alpha} - \hat{\alpha} \bigstar \hat{\mu} = \varepsilon_e.$$

En considérant les marches à droite au lieu des marches à gauche on obtient aussi

$$\alpha - \mu \bigstar \alpha = \hat{\alpha} - \hat{\mu} \bigstar \hat{\alpha} = \varepsilon_e.$$

Enfin A possède la propriété analytique suivante qui est claire d'après celle de W : les potentiels des fonctions continues majorées par h sont des fonctions continues.

Ayant montré que le noyau A fournit une solution à l'équation de Poisson à second membre spécial il faut nous préoccuper de savoir dans quelle mesure c'est le seul noyau ayant cette propriété.

(3.8) THÉORÈME. — *Les seuls noyaux de convolution vérifiant les propriétés* (i)-(iii) *de* (3.4) *sont de la forme* $A + c\,(1 \otimes m)$ *avec* $c \in \mathbf{R}$. *Dans le cas des marches de type I ce sont les seuls vérifiant* (i) *et* (iii). *Dans le cas des marches de type II les seuls noyaux de convolution vérifiant* (i) *et* (iii) *sont de la forme* $A + c\,(1 \otimes m) + d\,(1 \otimes X.m - X \otimes m)$ *avec* $c, d \in \mathbf{R}$.

Remarques. — Le noyau $1 \otimes X.m - X \otimes m$ peut aussi s'écrire $(X.m) \bigstar \varepsilon_x$. C'est cette forme qu'utilise Spitzer dans [12].

La constante d qui apparaît à la fin de l'énoncé ne peut être quelconque pour que (i) soit vérifié. Nous reviendrons là-dessus après avoir démontré le théorème du renouvellement pour les marches de type II.

Démonstration. — Si A′ est un autre noyau de convolution vérifiant (iii), pour toute fonction spéciale f :

$$PAf - Af = PA'f - A'f = -f.$$

Il résulte alors de la section II que

$$Af - A'f = a(f) + \chi . b(f),$$

où $a(f)$ et $b(f)$ sont des constantes et χ un caractère tel que $P|\chi| - |\chi|$ soit intégrable. En prenant cette égalité en e on voit que

$$a(f) = \int A(e, dy) f(y) - \int A'(e, dy) f(y),$$

donc que $a(f)$ est l'intégrale de f par rapport à une mesure. En prenant alors la même égalité en un autre point extérieur à Ker χ on obtient que $b(f)$ est aussi donné par une mesure. Donc

$$A' = A + 1 \otimes \nu_1 + \chi \otimes \nu_2,$$

où ν_1 et ν_2 sont des mesures. Mais A et A′ étant des noyaux de convolution, on doit avoir pour tout τ_a :

$$1 \otimes \nu_1 \tau_a + \chi \otimes \nu_2 \tau_a = 1 \otimes \nu_1 + \tau_a \chi \otimes \nu_2,$$

soit encore

$$1 \otimes \nu_1 \tau_a + \chi \otimes \nu_2 \tau_a = 1 \otimes \nu_1 + \chi(a) \otimes \nu_2 + \chi \otimes \nu_2,$$

ce qui entraîne que pour tout a, $\nu_2 \tau_a = \nu_2$ soit $\nu_2 = dm$ pour une constante d quelconque, et ν_1 doit donc vérifier l'équation

$$\nu_1 \tau_a = \nu_1 + d\chi(a).m,$$

quel que soit $a \in G$. Posons

$$\nu'_1 = \nu_1 + d\chi.m;$$

il vient immédiatement $\nu'_1 \tau_a = \nu'_1$ pour tout $a \in G$ et donc finalement $\nu_1 = cm - d\chi.m$. On a donc

$$A' = A + c(1 \otimes m) + d(\chi \otimes m - 1 \otimes \chi.m).$$

Le reste de l'énoncé est alors clair.

(3.9) Corollaire. — *Si* A′ *est un noyau potentiel construit à partir d'une fonction* h' *comme* A *à partir de* h, *il ne diffère de* A *que par un noyau de la forme* $c(1 \otimes m)$.

Dans le cas des groupes dénombrables il est bien connu que l'on peut choisir le nombre c des propositions précédentes en sorte que le noyau potentiel correspondant soit négatif. Nous allons montrer que ceci peut se transposer au cas général. Avec les notations de (3.7) on a

(3.10) Proposition. — *La mesure* α *peut s'écrire* $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ *où* α_1 *est une mesure bornée positive,* α_2 *une mesure positive de densité* p *continue et bornée et* α_3 *une mesure négative et* $\ll m$.

Démonstration. — Puisque μ est étalée il existe un entier n_0 tel que l'on puisse écrire $\mu^{n_0} = \varphi.m + \nu$ avec $\varphi \in C_K^+$ et $\|\nu\| < 1$. La marche de loi μ^{n_0} est aussi de Harris et donc admet un noyau potentiel tel que la mesure correspondante α_0 soit limite vague des mesures

$$\left(\sum_0^n \mu^{kn_0}\right) - C_n^0.m$$

pour une suite de constantes C_n^0. Il est alors clair que les mesures

$$\left(\left(\sum_0^n \mu^{kn_0}\right) - C_n^0.m\right) \star \left(\sum_0^{n_0-1} \mu^k\right)$$

convergent vaguement vers une mesure qui ne diffère de α que par un multiple de m. Si le résultat est vrai pour α_0 il est donc vrai pour α. Nous allons donc ci-dessous le montrer pour α_0, mais nous omettrons les indices 0 et supposerons que $\mu = \varphi . m + \nu$ avec $\varphi \in C_K^+$ et $\| \nu \| < 1$.

On a $\alpha = \varepsilon_e + \alpha \bigstar \mu$, soit encore $\alpha = \varepsilon_e + \alpha \bigstar \varphi . m + \alpha \bigstar \nu$ et en remplaçant dans le terme $\alpha \bigstar \nu$ la mesure α par le second membre on obtient

$$\alpha = \varepsilon_e + \nu + (\alpha \bigstar \varphi . m) + \alpha \bigstar \varphi . m \bigstar \nu + \alpha \bigstar \nu^2,$$

puis on recommence dans $\alpha \bigstar \nu^2$ et ainsi de suite. Par récurrence on obtient la formule

$$\alpha = \sum_0^n \nu^k + \alpha \bigstar (\varphi . m) \bigstar \left(\sum_0^n \nu^k \right) + \alpha \bigstar \nu^{n+1}.$$

La mesure $\alpha_1 = \sum_0^\infty \nu^k$ est une mesure positive bornée.

Soit alors $f \in C_K^+$; on a

$$\left\langle \alpha \bigstar (\varphi . m) \bigstar \sum_0^n \nu^k, f \right\rangle = \int \hat{A} \varphi (x) \, dm (x) \int f (xy) \left(\sum_0^n \nu^k \right) (dy)$$

et cette dernière intégrale tend en croissant lorsque $n \to \infty$ vers $\int f (xy) . \alpha_1 (dy)$ qui est une fonction de $\mathscr{L}^1 (m)$. D'après (3.6) le potentiel $\hat{A} \varphi$ est borné supérieurement, donc l'intégrale totale a une limite qui est éventuellement $-\infty$. Nous allons montrer que c'est en fait une limite finie.

Effectivement comme $| \langle \alpha, f \rangle | < \infty$ si cette limite était $-\infty$ cela entraînerait que $\langle \alpha \bigstar \nu^{n+1}, f \rangle$ tend vers $+\infty$ or ceci est impossible car

$$\begin{aligned} \langle \alpha \bigstar \nu^{n+1}, f \rangle &= \iint f (xy) \, \alpha (dx) \, \nu^{n+1} (dy) \\ &= \int A f (y) \, \nu^{n+1} (dy) \end{aligned}$$

et comme la partie positive de $A f (y)$ est bornée, si cette suite a une limite elle ne peut être que négative ou nulle.

Finalement tous les termes ont donc une limite finie, et par suite les suites de mesures correspondantes une limite vague et l'on a

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_1 + \alpha \bigstar (\varphi . m) \bigstar \alpha_1 + \lim_n \alpha \bigstar \nu^n \\ &= \alpha_1 + (\hat{A} \varphi) \, m \bigstar \alpha_1 + \lim_n \alpha \bigstar \nu^n. \end{aligned}$$

Mais $\lim_n \alpha \bigstar \nu^n$ est nulle. En effet si $f \in C_K$ et $m (f) = 0$, on a

$$\lim_n \langle \alpha \bigstar \nu^n, f \rangle = \lim_n \int A f (y) \, \nu^{n+1} (dy) = 0$$

puisque $\mathrm{A}f$ est bornée dans ce cas. Donc $\lim_n \alpha \bigstar \nu^n$ est un multiple de m, mais d'autre part elle est invariante par ν qui est de masse inférieure à 1 et par suite elle est nulle.

Enfin la partie positive de $(\hat{\mathrm{A}}\,\varphi).m \bigstar \alpha_1$ a bien une densité continue et bornée puisque $(\hat{\mathrm{A}}\,\varphi) \vee 0$ est continue bornée. On appelle α_2 cette mesure et α_3 la différence $\alpha-\alpha_1-\alpha_2$ et l'on a le résultat. ■

On pourrait aussi énoncer

(3.11) COROLLAIRE. — *On peut écrire* $\alpha = \alpha_1+\alpha_2$ *où* α_1 *est positive bornée et* α_2 *absolument continue par rapport à* m *et de densité semicontinue supérieurement et bornée supérieurement.*

Dans le cas discret on peut faire rentrer α_1 dans α_2 et l'on retrouve les résultats de Spitzer et Kesten ([12], [6] et [5]).

Démonstration. — Dans la démonstration précédente on écrit $\alpha \bigstar (\varphi.m) \bigstar \alpha_1$ sous la forme $(\alpha \bigstar (\varphi \bigstar \alpha_1)).m$ et l'on voit que

$$\alpha = \alpha_1+(\alpha \bigstar \psi).m,$$

où ψ est dans $\mathrm{C}_0 \cap \mathscr{L}^1(m)$. ■

Enfin il est possible d'évaluer exactement la partie singulière de A et de W. On appellera μ_1^n la partie singulière de μ^n. On a alors :

(3.12) PROPOSITION. — *Les parties singulières des noyaux* A *et* W *sont égales aux noyaux de convolution* $\left(\sum_0^\infty \mu_1^n\right) \bigstar \varepsilon_x$ *et* $\left(\sum_1^\infty \mu_1^n\right) \bigstar \varepsilon_x$.

Démonstration. — Si g est une fonction à support compact et d'intégrale $m(g)$ nulle les formules (1.4 *bis*) entraînent que

$$\mathrm{W}\,g = \sum_1^{\mathrm{N}} \mathrm{P}_n\,g+\mathrm{P}_{\mathrm{N}}\,\mathrm{W}\,g.$$

En faisant tendre N vers l'infini on obtient donc

$$\mathrm{W}\,g = \sum_1^\infty \mathrm{P}_n^1\,g.$$

CHAPITRE III

Caractérisation et normalité pour les fonctions spéciales et cospéciales

1. PROPRIÉTÉS DES POTENTIELS ET NORMALITÉ. — Dans cette section nous donnons quelques propriétés des potentiels que nous utilisons ensuite pour donner un résultat de normalité plus général que II.3.3. L'un de ces résultats généralise la propriété de sous-

additivité des potentiels classique dans le cas discret (cf. [12] et [6]). Nous commençons par la

(1.1) PROPOSITION. — *Quel que soit* $b \in G$, *les fonctions* $(I-\sigma_b)\,\gamma$ *sont bornées.*

Il est facile de voir que ceci est équivalent à ce que pour tous les potentiels Af, la fonction $(I-\sigma_b)\,Af$ est bornée et en fait dès que ceci est vrai pour un potentiel c'est vrai pour tous. Comme l'adjonction à Af d'une constante et d'un caractère ne change pas cette propriété ceci équivaut encore à dire que pour toutes les solutions de l'équation de Poisson à second membre spécial, telles que $(I-\tau)\,\psi$ soit borné, on a aussi $(I-\sigma)\,\psi$ bornée et que dès que ceci est vrai pour une c'est vrai pour toutes. Ces remarques nous serviront dans la démonstration ci-dessous.

Démonstration. — Supposons d'abord que l'on puisse écrire $\mu = \lambda+\nu$ avec $\|\nu\| < 1$ et $\lambda = \varphi.m$ où φ est égale au carré de convolution d'une fonction ψ de C_K symétrique. Il existe évidemment alors une constante K telle que $\psi \leqq K\,\varphi$ donc telle que $\varphi \leqq K\,(\varphi \bigstar \psi)$ et $\lambda \leqq K\,\lambda \bigstar (\psi.m)$.

Nous avons vu en (II.3.8) dont nous reprenons les notations que $\alpha = \alpha_1+\alpha \bigstar \lambda \bigstar \alpha_1$ et en raisonnant avec la marche à droite on a aussi $\alpha = \alpha_1+\alpha_1 \bigstar \lambda \bigstar \alpha$. La probabilité $\mu' = \alpha_1 \bigstar \lambda$ est de Harris. Supposons en effet qu'elle ne le soit pas et soit $\hat{G}'$ le potentiel de la marche de loi $\hat{\mu}'$. En itérant la relation ci-dessus et en appliquant dans chaque terme, au dernier λ, la majoration définie plus haut, on trouve

$$\sum_0^\infty \mu'^n \leqq K\,(\sum(\alpha_1 \bigstar \lambda)^n \bigstar \psi).m = K.\hat{G}'\,\psi.m.$$

Maintenant en appliquant φ à droite dans $\alpha = \alpha_1+\alpha_1 \bigstar \lambda \bigstar \alpha$ on obtient $\alpha \bigstar \varphi = \alpha_1 \bigstar \varphi+\alpha_1 \bigstar \lambda \bigstar \alpha \bigstar \varphi$, soit $\hat{A}\,\varphi = \alpha_1 \bigstar \varphi+\mu' \bigstar \hat{A}\,\varphi$, ce qui donne

$$\mu'^n \bigstar \hat{A}\,\varphi = \mu'^n \bigstar \alpha_1 \bigstar \varphi+\mu'^{n+1} \bigstar \hat{A}\,\varphi,$$

et par sommation

$$\mu'^n \bigstar \hat{A}\,\varphi = \hat{A}\,\varphi-\sum_0^{n-1} \mu'^k \bigstar \alpha_1 \bigstar \varphi.$$

La série au second membre converge vers une limite finie, donc le premier membre converge en décroissant vers une limite finie $\Gamma < \hat{A}\,\varphi$ et cette limite vérifie $\alpha_1 \bigstar \lambda \bigstar \Gamma = \Gamma$. En multipliant cette dernière relation à gauche par $(\varepsilon_e-\nu)$ on obtient $\mu \bigstar \Gamma = \Gamma$. La fonction Γ est donc harmonique pour $\hat{X}$ et bornée supérieurement, elle est donc constante, par suite $\hat{A}\,\varphi$ est borné inférieurement ce qui est impossible.

En partant de $\alpha = \alpha_1+\alpha \bigstar \lambda \bigstar \alpha_1$ il est facile d'obtenir

$$\varphi \bigstar \alpha \bigstar \lambda = \varphi \bigstar \mu'+(\varphi \bigstar \alpha \bigstar \lambda) \bigstar \mu'.$$

Or la fonction $\varphi \bigstar \mu'$ est spéciale pour la marche à droite de loi μ', et il est facile de vérifier que $(I-\sigma)\,(\varphi \bigstar \alpha \bigstar \lambda)$ est bornée. Il en résulte que $\varphi \bigstar \alpha \bigstar \lambda$ est une solution de l'équation de Poisson pour cette marche; or $(\mathrm{I}-\tau)(\varphi \bigstar \alpha \bigstar \lambda)$ est borné car

$$(\mathrm{I}-\tau_a)(\varphi \bigstar \alpha \bigstar \lambda)(y) = (\varphi \bigstar \hat{\mathrm{A}}\, g)(y),$$

où g est la charge $x \to \varphi(x)-\varphi(a^{-1}x)$ et l'on sait que $\hat{\mathrm{A}}\, g$ est bornée. Finalement on voit que les potentiels des marches de loi μ' ont la propriété désirée.

Supposons alors que Γ soit un de ces potentiels tels que

$$\Gamma - \mu' \bigstar \Gamma = f$$

pour $f \in \mathrm{C}_{\mathrm{K}}^{+}$. En multipliant à gauche par $\varepsilon_e - \nu$ on obtient

$$\Gamma - \mu \bigstar \Gamma = f - \nu \bigstar f,$$

or $f - \nu \bigstar f$ peut être écrite comme la somme d'une charge et d'une fonction spéciale non-négligeable, donc Γ est à une fonction bornée près une solution de l'équation de Poisson à second membre spécial pour $\hat{\mathrm{X}}$. Tous les copotentiels donc aussi tous les potentiels ont donc la propriété désirée.

Maintenant supposons que μ^2 puisse se décomposer comme ci-dessus; alors $\mu' = (1/2)(\mu+\mu^2)$ peut l'être aussi et la marche de loi μ' vérifie la propriété de l'énoncé. Pour $g \in \mathrm{C}_{\mathrm{K}}^{+}$, il existe donc une fonction f telle que $(\mathrm{I}-\sigma_b)f$ et $(\mathrm{I}-\tau_b)f$ soient bornées pour tout b dans G et que

$$f - \mathrm{P}' f = g.$$

Comme P et P′ commutent, on a aussi

$$\mathrm{P} f - \mathrm{P}'(\mathrm{P} f) = \mathrm{P} g$$

et comme μ est majorée par $2\mu'$, la fonction $\mathrm{P}\, g$ est encore spéciale pour μ' donc $(\mathrm{I}-\sigma)\,\mathrm{P} f$ est bornée. Or l'équation $f - \mathrm{P}' f = g$ peut s'écrire :

$$(\mathrm{I}-\mathrm{P})(2f + \mathrm{P} f) = 2g;$$

comme $(\mathrm{I}-\tau)(2f+\mathrm{P} f)$ est borné, $2f+\mathrm{P} f$ est un potentiel pour P et comme $(\mathrm{I}-\sigma)(2f+\mathrm{P} f)$ est borné, la marche de loi μ a la propriété de l'énoncé.

Maintenant si μ est quelconque comme la marche est de Harris il existe un entier k tel que μ^{2k} aie la propriété de décomposition du début et donc en raisonnant par récurrence la marche de loi μ a la propriété de l'énoncé. ■

Nous aurons besoin dans la suite de la fonction γ' définie par

$$\gamma'(a) = \frac{1}{m(h)} \int h . \tau_a \gamma . dm;$$

cette fonction est uniformément continue à droite, positive, et non bornée. Pour $\mathrm{U} \in \mathrm{C}_{\mathrm{K}}^{+}$ avec $m(\mathrm{U}) = 1$ nous ferons aussi usage de

$$\gamma_{\mathrm{U}}(a) = \int \mathrm{U} . \tau_a \gamma . dm.$$

(1.2) LEMME. — *La fonction* $\gamma - \gamma_U$ *est bornée.*

Démonstration. — On a

$$\gamma(a) - \gamma_U(a) = \int U(x)(I - \sigma_x)\gamma(a)\,dm(x),$$

et d'après la démonstration précédente, $(I - \sigma_x)\gamma(a)$ est uniformément bornée lorsque x décrit un compact. ■

La proposition suivante est importante pour relier le comportement de la marche X et celui de la marche $\hat{X}$.

(1.3) PROPOSITION. — *On a* $\gamma'(x) = \hat{\gamma}'(x^{-1})$ *ou de manière équivalente : quel que soit* τ :

$$\int \gamma . \tau h . dm = \int \tau\hat{\gamma} . h . dm.$$

Remarque. — Pour la marche droite de loi μ l'analogue de γ' sera la fonction $(\gamma^d)'$ définie par

$$(\gamma^d)'(a) = \int \sigma_a \gamma^d . h . dm.$$

En utilisant la relation $\gamma(x^{-1}) = \hat{\gamma}^d(x)$, le fait que h est symétrique et le groupe unimodulaire, cette proposition donne que

$$\begin{aligned}(\gamma^d)'(a) &= \int \gamma^d(ax) . h(x)\,dm(x) = \int \hat{\gamma}(x^{-1}a^{-1}) . h(x)\,dm(x) \\ &= \int \hat{\gamma}(xa^{-1})\,h(x)\,dm(x) = \int \tau_{a^{-1}}\hat{\gamma} . h . dm = \gamma'(a).\end{aligned}$$

Démonstration. — On désignera par $\gamma_{\tau h}$ et $A_{\tau h}$ la fonction γ et l'opérateur A obtenus lorsqu'on remplace h par τh. Comme il est facile de voir sur la définition de γ on a $\gamma_{\tau h} = \tau\gamma_h$ et par suite

$$\begin{aligned}A_{\tau h} &= I + W_{\tau h} - 1 \otimes \hat{\gamma}_{\tau h} . m - \gamma_{\tau h} \otimes m \\ &= I + \tau W_h \tau^{-1} - 1 \otimes \hat{\gamma}_h . m\tau^{-1} - \tau\gamma_h \otimes m,\end{aligned}$$

ce qui montre que $\tau^{-1} A_{\tau h} \tau = A$ donc que $A_{\tau h} = A$. On a donc $A_{\tau h}(h) = A(h)$ soit

$$W_{\tau h}(h) + m(h)(\gamma_h - \gamma_{\tau h}) - \int \hat{\gamma}_{\tau h} . h . dm = 0.$$

Or pour $f \in C_K^+$ et $m(f) = 1$,

$$\begin{aligned}\gamma_{\tau h} - \gamma_h = \lim_n (W_{\tau h} - W_h) P_n f &= \frac{1}{m(h)} W_{\tau h}(h) - \frac{1}{m(h)} \lim \int \tau h . (W_h P_n f) . dm \\ &= \frac{1}{m(h)} W_{\tau h}(h) - \int \tau h . \gamma_h . dm.\end{aligned}$$

Il en résulte que

$$\int \tau h.\gamma.dm = \int \hat{\gamma}_{\tau h}.h.dm = \int \tau \hat{\gamma}_h.h.dm. \quad \blacksquare$$

On en déduit immédiatement que $(\mathrm{I}-\sigma)\gamma'$ est bornée car

$$(\mathrm{I}-\sigma_b)\gamma'(a) = (\mathrm{I}-\tau_{b^{-1}})\hat{\gamma}'(a^{-1})$$

et ceci est borné d'après la définition des fonctions γ'. On en déduit aussi

(1.4) LEMME. — *Quels que soient x et a dans* G,

$$\frac{1}{m(h)}\mathrm{W}(\tau_a h)(x) = \gamma(x)-\gamma(xa)+\gamma'(a).$$

Démonstration. — Soit $f \in \mathrm{C}_{\mathrm{K}}^{+}$ avec $m(f) = 1$; alors

$$\tau_a\gamma = \lim \tau_a \mathrm{W}_h \mathrm{P}_n f = \lim_n \mathrm{W}_{\tau_a h}\mathrm{P}_n(\tau_a f),$$

et d'après les formules I.1.5,

$$\tau_a\gamma = \gamma - \frac{1}{m(h)}\mathrm{W}_h(\tau_a h) + \frac{1}{m(h)}\lim_n \langle h, \mathrm{W}_{\tau_a h}\mathrm{P}_n \tau_a f\rangle.$$

Or

$$\langle h, \mathrm{W}_{\tau_a h}\mathrm{P}_n \tau_a f\rangle = \langle \hat{\mathrm{P}}_n \hat{\mathrm{W}}_h(\tau_{a^{-1}} h), f\rangle$$

et par l'argument de II.1.13 on peut choisir $\varphi \geqq \tau_a^{-1} h$ et trouver une sous-suite n_j telle que $\hat{\mathrm{P}}_{n_j}\hat{\mathrm{W}}(\tau_a^{-1} h)$ converge en restant borné vers $\int \gamma.\tau_a^{-1} h.dm$. On a donc finalement

$$\lim_n \langle h, \mathrm{W}_{\tau_a h}\mathrm{P}_n \tau_a f\rangle = \int h.\tau_a\gamma.dm.$$

ce qui donne le résultat désiré. ■

Le résultat suivant montre que la fonction γ' a la propriété des potentiels du cas discret.

(1.5) THÉORÈME. — *Pour tout x et tout a dans* G, *on a*

$$\gamma(xa) \leqq \gamma(x)+\gamma'(a)$$

et

$$\gamma'(xa) \leqq \gamma'(x)+\gamma'(a),$$

c'est-à-dire que γ' est sous-additive.

Démonstration. — Le lemme précédent montre la première inégalité qui, à son tour, entraîne que

$$\frac{1}{m(h)}\int h(y)\gamma(yxa)\,dm(y) \leqq \frac{1}{m(h)}\int h(y)\gamma(yx)\,dm(y)+\gamma'(a),$$

soit

$$\gamma'(xa) \leqq \gamma'(x)+\gamma'(a). \quad \blacksquare$$

(1.6) PROPOSITION. — *La fonction* $\gamma-\gamma'$ *est bornée.*

Démonstration. — Soit $U \in C_K^+$ avec $m(U) = 1$ et intégrons la formule (1.4) par rapport à la mesure $U.m$. Il vient

$$\left\langle U, \frac{1}{m(h)} W(\tau_a h) \right\rangle = \int U.\gamma.dm - \gamma_U(a) + \gamma'(a).$$

Comme le premier membre est borné il en résulte que $\gamma_U - \gamma'$ est bornée, et comme $\gamma_U - \gamma$ est bornée le résultat en découle. ■

(1.7) PROPOSITION. — *Il existe deux constantes* C *et* D *telles que pour tout* a *dans* G *on ait*

$$\frac{1}{m(h)} W(\tau_a h) \leqq \gamma + \hat{\gamma} + C,$$

$$\frac{1}{m(h)} W(\sigma_a h) \leqq \gamma + \hat{\gamma} + D.$$

Démonstration. — D'après la proposition précédente et (1.4) on a

$$\frac{1}{m(h)} W(\tau_a h)(x) \leqq \gamma(x) + \gamma(a) - \gamma(ax) + C'.$$

Mais

$$\gamma(a) = \gamma(axx^{-1}) \leqq \gamma(ax) + \gamma'(x^{-1})$$

d'après (1.5) et donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{m(h)} W(\tau_a h)(x) &\leqq \gamma(x) + \gamma'(x^{-1}) + C'' \\ &= \gamma(x) + \hat{\gamma}'(x) + C'' \end{aligned}$$

et une nouvelle application de la proposition précédente donne la première inégalité de l'énoncé.

La démonstration de la seconde inégalité va être plus compliquée. On commence par remarquer que la différence $\gamma - \gamma \bigstar [h/m(h)]$ $(\hat{\gamma} - \hat{\gamma} \bigstar [h/m(h)])$ est à une fonction près le potentiel de la charge $[P\,h/m(h)] - [P\,h \bigstar h/m(h)^2]$ et par suite est bornée). Nous allons montrer que la différence $W(\sigma_a h) - W(\tau_a h) \bigstar [h/m(h)]$ est uniformément bornée et le résultat découlera alors de la première inégalité. Pour cela nous écrivons :

$$W(\sigma_a h) = A(\sigma_a h) - \sigma_a h + \gamma . m(h) + \int \hat{\gamma} . \sigma_a h . dm,$$

$$W(\tau_a h) \bigstar \frac{h}{m(h)} = A(\tau_a h) \bigstar \frac{h}{m(h)} - \tau_a h \bigstar \frac{h}{m(h)} + \gamma \bigstar h + \int \hat{\gamma} . \tau_a h . dm,$$

et nous voyons qu'il suffit de montrer que les deux termes

$$A(\sigma_a h) - A(\tau_a h) \bigstar \frac{h}{m(h)} \qquad \text{et} \qquad \int \hat{\gamma}(\sigma_a h - \tau_a h)\, dm$$

sont bornés uniformément en a.

Commençons par le second. Comme

$$\int \hat{\gamma}.\sigma_a h.dm = \int \gamma^d(xa)\,h(x)\,dm(x),$$

il vient que

$$\int \hat{\gamma}(\sigma_a h - \tau_a h).dm = \int \gamma^d.\tau_{a^{-1}}h.dm - \int \hat{\gamma}.\tau_a h.dm$$
$$= \int (\gamma^d - \gamma).\tau_{a^{-1}}h.dm;$$

le résultat découle alors de ce que $\gamma^d - \gamma$ est bornée ce qui résulte des trois faits suivants : 1° $\gamma^d - (\gamma^d)'$ est bornée; 2° $\gamma - \gamma'$ est bornée; 3° $(\gamma^d)' = \gamma'$ [*cf.* (1.3)].

Passons alors au premier de ces deux termes. On peut écrire :

$$\frac{1}{m(h)}\mathrm{A}(\tau_a h) \bigstar \frac{h}{m(h)} = \hat{\alpha} \bigstar \frac{h}{m(h)} \bigstar \varepsilon_{a^{-1}} \bigstar \frac{h}{m(h)},$$
$$\frac{1}{m(h)}\mathrm{A}(\sigma_a h) = \hat{\alpha} \bigstar \varepsilon_{a^{-1}} \bigstar \frac{h}{m(h)},$$

et à une mesure bornée près on peut écrire $\alpha = \alpha_1 \bigstar \varphi \bigstar \alpha$ avec $\varphi \in \mathrm{C}_\mathrm{K}^+$. Mais comme $\hat{\alpha} \bigstar \hat{\varphi} \bigstar \hat{\alpha}_1 \bigstar [h/m(h)] - \hat{\alpha} \bigstar \hat{\varphi} \bigstar \hat{\alpha}_1$ est le potentiel d'une charge c'est une fonction bornée et il est alors facile d'en conclure que la différence étudiée est bornée uniformément en a. ■

Nous déduisons de ce qui précède le théorème de normalité suivant qui est le meilleur que l'on puisse obtenir en toute généralité.

(1.8) THÉORÈME. — *Quelle que soit la fonction f spéciale et cospéciale on a*

$$\lim_n \mathrm{P}_n \mathrm{W} f = \int \hat{\gamma}.f.dm.$$

Démonstration. — Constatons d'abord en intégrant la seconde des inégalités précédentes écrites pour $\hat{\mathrm{X}}$, par rapport à $\hat{\mu}^n(da)$, que l'on a pour tout n,

$$\frac{1}{m(h)}\hat{\mathrm{W}}\hat{\mathrm{P}}_n h \leqq \gamma + \hat{\gamma} + \mathrm{D}.$$

Le membre de gauche converge vers $\hat{\gamma}$ lorsque n tend vers l'infini et une fonction f spéciale et cospéciale est intégrable par la mesure $(\gamma + \hat{\gamma} + \mathrm{D}).m$; on peut donc appliquer le théorème de Lebesgue pour obtenir

$$\lim_n \left\langle \mathrm{P}_n \mathrm{W}_h f, \frac{h}{m(h)} \right\rangle = \lim_n \left\langle f, \frac{1}{m(h)} \hat{\mathrm{W}}_h \hat{\mathrm{P}}_n f \right\rangle = \int \hat{\gamma}.f.dm$$

et le résultat découle alors de II.3.2. ■

Quand les fonctions spéciales et cospéciales sont les mêmes on a donc la normalité pour toutes les fonctions spéciales c'est notamment le cas pour les marches symétriques ($\mu = \hat{\mu}$).

On a encore

(1.9) COROLLAIRE. — *Les propriétés* (ii) *du théorème* II.3.5 *sont vraies pour toute charge de module cospécial.*

Il est classique de tirer de la normalité précédemment démontrée un certain nombre de résultats de convergence. Nous allons nous contenter d'esquisser cela ci-dessous, laissant au Lecteur, éventuellement avec l'aide de [10] le soin d'écrire les détails. On désigne ci-dessous par P_K l'opérateur de balayage lié à l'ensemble K.

(1.10) PROPOSITION. — *Si g est une fonction comprise entre* 0 *et* 1, *et spéciale et cospéciale, il existe une mesure ν_g telle que*

$$\lim_n P_n U_g f = \nu_g f$$

pour toute fonction f spéciale et cospéciale.

Si K *est un ensemble spécial et cospécial* (*en particulier si* K *est relativement compact*) *il existe une probabilité λ_K portée par* K *telle que pour tout f borélienne bornée*

$$\lim_n P_n P_K f = \lambda_K(f).$$

Cette probabilité est la probabilité d'équilibre de K *par rapport à* A *c'est-à-dire que $\lambda_K . A$ est égale sur* K *à un multiple de la mesure de Lebesgue. On a de plus*

$$P_K = A(I_K - \Pi_K) + 1 \otimes \lambda_K,$$

où Π_K est la probabilité de transition de la chaîne trace sur K.

Démonstration. — Elle se fait à partir de la formule

$$U_g + W I_g U_g = W + \frac{1}{m(h)} 1 \otimes (h.m) U_g,$$

et est laissée au lecteur.

On remarque que la mesure d'équilibre d'un ensemble ne change pas lorsqu'on ajoute à A un multiple de $1 \otimes m$. Il n'y a donc qu'une théorie du potentiel canonique pour une marche de type I. Pour une marche de type II, on en a, au contraire, toute une famille.

2. CARACTÉRISATION DES FONCTIONS SPÉCIALES ET COSPÉCIALES.

(2.1) PROPOSITION. — *Une fonction bornée f est spéciale si et seulement si le potentiel* $A(f-U)$ *est borné lorsque* U *est une fonction arbitraire de* C_K^+ *telle que* $m(f) = m(U)$.

Démonstration. — Si f est spéciale, $f-\mathrm{U}$ est une charge et la nécessité est donc une conséquence de II.3.5. Pour montrer la suffisance il suffit de constater que

$$\mathrm{A}(f-\mathrm{U}) = f-\mathrm{U}+\mathrm{W}f-\mathrm{WU}-\int\hat{\gamma}(f-\mathrm{U}).dm;$$

nous savons en effet que WU est borné et il résulte alors de l'hypothèse que $\mathrm{W}f$ est borné ce qui prouve que f est spéciale d'après les résultats de [7] (*cf.* [10], prop. 5.9 du chapitre VI).

Remarque. — Si le groupe est discret il est commode de prendre pour U la fonction de Dirac à l'origine. On aura alors que si $m(f) = 1$, la fonction f est spéciale si $\mathrm{A}f(x)-\mathrm{A}(x, 0)$ est bornée. D'autre part au lieu de U on peut prendre n'importe quelle fonction spéciale, par exemple un multiple de h.

Nous en déduisons

(2.2) THÉORÈME. — *Une fonction positive bornée est spéciale et cospéciale si et seulement si elle est intégrable par la mesure* $(\gamma+\hat{\gamma}).m$.

Démonstration. — D'après la proposition II.1.13 seule la suffisance est à montrer. L'hypothèse faite sur f entraîne qu'elle est intégrable par m; nous supposerons donc que $m(f) = 1$. Avec les notations de II.3.7,

$$\alpha = \varepsilon_e+\mathrm{W}(e, .)-\gamma(e).m-\hat{\gamma}.m;$$

on a donc

$$\mathrm{A}f(a) = \langle \alpha\bigstar\varepsilon_a, f\rangle \geqq \mathrm{C}-\langle\hat{\gamma}.m\bigstar\varepsilon_a, f\rangle$$

pour une constante C. Dans l'expression,

$$\mathrm{A}h(a) = h(a)+\mathrm{W}h(a)-\gamma(a)-\int\hat{\gamma}.h.dm,$$

tous les termes sont bornés sauf $\gamma(a)$; il en résulte qu'il existe une constante C′ telle que

$$\begin{aligned}\mathrm{A}f(a)-m(h)^{-1}\mathrm{A}h(a) &\geqq \mathrm{C}'+\gamma(a)-\int f(ya)\hat{\gamma}(y)\,dy\\ &= \mathrm{C}'+\gamma(a)-\int f(y)\hat{\gamma}(ya^{-1})\,dy.\end{aligned}$$

Mais d'après le théorème 1.5 on a

$$\hat{\gamma}(ya^{-1}) \leqq \hat{\gamma}(y)+\hat{\gamma}'(a^{-1}),$$

d'où

$$\mathrm{A}f(a)-m(h)^{-1}\mathrm{A}h(a) \geqq \mathrm{C}'+\gamma(a)-\hat{\gamma}'(a^{-1})-\int\hat{\gamma}(y).f(y)\,dy,$$

or $\hat{\gamma}'(a^{-1}) = \gamma'(a)$ et $\gamma-\gamma'$ est une fonction bornée (*cf.* 1.6); ceci entraîne que si f est intégrable par $\hat{\gamma}.m$ alors $\mathrm{A}f-m(h)^{-1}\mathrm{A}h$ est bornée inférieurement.

Nous allons montrer maintenant que si f est intégrable par $\gamma . m$ la même quantité est bornée supérieurement. On commence par supposer que, suivant la proposition II.3.10, μ peut s'écrire $\Phi . m+\nu$ où Φ est dans C_K^+; en posant $\alpha_1 = \sum_0^\infty \nu^k$ on a

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha \bigstar (\Phi . m) \bigstar \alpha_1$$

et par suite

$$\langle \alpha \bigstar \varepsilon_a, f \rangle = \langle \alpha_1 \bigstar \varepsilon_a, f \rangle + \langle (\hat{A} \Phi . m) \bigstar \alpha_1 \bigstar \varepsilon_a, f \rangle.$$

De même en posant $h' = m(h)^{-1} h$ on a

$$A h'(a) = \langle \alpha \bigstar \varepsilon_a, h' \rangle = \langle \alpha_1 \bigstar \varepsilon_a, f \rangle + \langle (\hat{A} \Phi . m) \bigstar \alpha_1 \bigstar \varepsilon_a, h' \rangle.$$

Dans la suite toutes les égalités et inégalités écrites seront vérifiées à une fonction bornée près. On a ainsi

$$I = A f(a) - A h'(a) = \langle (\hat{A} \Phi . m) \bigstar \alpha_1 \bigstar \varepsilon_a, f - h' \rangle;$$

or

$$\hat{A} \Phi = \Phi + \hat{W} \Phi - \hat{\gamma} . m(\Phi) - \int \hat{\gamma} . \Phi \, dm,$$

où tous les termes sont bornés sauf le troisième. En appelant α_1' la probabilité $m(\Phi) . \alpha_1$, on a donc

$$I = -\int \hat{\gamma}(x) f(xya) \, m(dx) \, \alpha_1'(dy) + \int \hat{\gamma}(x) h'(xya) \, m(dx) \, \alpha_1'(dy),$$

soit en utilisant la définition de $\hat{\gamma}'$ et l'invariance de m par les translations du groupe

$$I = -\int \hat{\gamma}(xa^{-1} y^{-1}) f(x) \, m(dx) \, \alpha_1'(dy) + \int \hat{\gamma}'(a^{-1} y^{-1}) \, \alpha_1'(dy).$$

Comme $m(f) = 1$, on a encore

$$I = \int f(x) (\hat{\gamma}'(a^{-1} y^{-1}) - \hat{\gamma}(xa^{-1} y^{-1})) \, m(dx) \, \alpha_1'(dy).$$

Mais

$$\hat{\gamma}'(a^{-1} y^{-1}) = \hat{\gamma}'(x^{-1} xa^{-1} y^{-1}) \leqq \hat{\gamma}'(x^{-1}) + \hat{\gamma}'(xa^{-1} y^{-1}),$$

donc finalement comme $\hat{\gamma} - \hat{\gamma}'$ est une fonction bornée

$$I \leqq \int \hat{\gamma}'(x^{-1}) f(x) \, dx = \int \gamma(x) f(x) \, dx < \infty,$$

ce qui termine la démonstration dans ce cas.

Maintenant comme μ est étalée, il existe une puissance μ^{n_0} ayant les propriétés ci-dessus et en posant $\beta = \sum_0^{n_0 - 1} \mu^k$ on aura

$$\alpha = \beta \bigstar \alpha_1 + (\hat{A} \Phi . m) \bigstar \alpha_1$$

et on pourra faire la même démonstration que ci-dessus. La démonstration du théorème est donc complète.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Brunel, Y. Guivarch et M. Keane, *Séminaire K. G. B.* (*Astérisque*, *fasc.* 4, 1973).

[2] A. Brunel et D. Revuz, *Quelques applications probabilistes de la quasi-compacité* (à paraître).

[3] M. Duflo, *Opérateurs potentiels des chaînes et des processus de Markov irréductibles* (*Bull. Soc. Math. Fr.*, t. 98, 1970, p. 127-163).

[4] N. C. Jain, *Some limit theorems for a general Markov process* (*Z. Wahrscheinlichkeitstheorie*, vol. 6, 1966, p. 206-223).

[5] H. Kesten, *The Martin boundary of recurrent random walks on countable groups* (*Fifth Berkeley symposium in Probability and Math. Stat.* vol. II, part 2, 1966, p. 51-75).

[6] H. Kesten et F. Spitzer, *Random walks on countably infinite Abelian groups* (*Acta Math.*, vol. 114, 1965, p. 237-265).

[7] J. Neveu, *Potentiel markovien récurrent des chaînes de Harris* (*Ann. Inst. Fourier*, vol. 22, n° 2, 1972, p. 85-130).

[8] D. Ornstein, *Random walks I.* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 138, 1969, p. 1-43).

[9] S. C. Port et C. J. Stone, *Potential theory of random walks on abelian groups* (*Acta Mat.*, vol. **122**, 1969, p. 13).

[10] D. Revuz, *Markov chains* (livre à paraître), North Holland Publishing Company.

[11] W. Rudin, *Fourier analysis on groups*, Interscience, 1967.

[12] F. Spitzer, *Principle of random walks*, Van Nostrand, 1964.

(Manuscrit reçu le 13 novembre 1973.)

A. Brunel,
Université Paris VI
et
D. Revuz,
Université Paris VII
Laboratoire de Probabilités,
9, quai Saint-Bernard,
75230 Paris-Cedex 05.