

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

JACQUES AZÉMA

Théorie générale des processus et retournement du temps

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4^e série, tome 6, n° 4 (1973), p. 459-519

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1973_4_6_4_459_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

THÉORIE GÉNÉRALE DES PROCESSUS ET RETOURNEMENT DU TEMPS

PAR JACQUES AZÉMA (*)

0. Introduction

Cet article est un exposé des résultats que l'on peut obtenir en appliquant les théorèmes de la théorie générale des processus aux « tribus de retour » d'un processus de Markov. Ce travail apparaît donc comme la systématisation des idées introduites dans [3], et particulièrement de la remarque suivante : il est à peu près équivalent de dire qu'un processus croissant (non nécessairement adapté) vérifie l'égalité de définition d'une fonctionnelle additive :

$$A_{t+s} = A_t + A_s \circ \theta_t,$$

ou de dire que le processus croissant retourné est bien mesurable par rapport aux « tribus de retour » $\hat{\mathcal{F}}_t$. Il est à signaler que Gettoor et Sharpe dans [12] et [13], ont étudié plus systématiquement ces fonctionnelles additives non adaptées, qu'ils ont appelées fonctionnelles additives brutes, pour démontrer les beaux résultats que l'on sait.

Le chapitre 1 a en partie pour but de donner un sens plus précis à la remarque que l'on vient d'énoncer; il faut raisonner sur les tribus non complétées pour obtenir un cadre satisfaisant; on aboutit ainsi à donner des temps d'arrêt, des processus prévisibles, etc., des définitions purement algébriques; cela présente l'avantage de mettre en évidence la symétrie qui existe entre les opérateurs de meurtre et les opérateurs de translation; il est d'ailleurs curieux de constater que les Markovologues, qui passent une partie appréciable de leur temps à tuer d'une manière ou d'une autre leurs processus, ont systématiquement utilisé les opérateurs de translation,

(*) Équipe de Recherche n° 1 « Processus stochastiques et applications » dépendant de la section n° 2 « Théorie physique et Probabilités » associée au C. N. R. S.

mais n'ont utilisé les opérateurs de meurtre que de façon beaucoup plus anecdotique. On retiendra de ce chapitre que les processus prévisibles et co-prévisibles se caractérisent de manière particulièrement simple à l'aide des opérateurs de meurtre et de translation; on est amené aussi à définir une nouvelle classe de fonctionnelles additives, qui vérifient la relation algébrique

$$A_{t+s} = A_{t-} + A_s \circ \theta_t$$

et qui, après retournement, se révèle être la classe des processus croissant co-prévisibles.

On a rassemblé dans le chapitre 2 quelques applications aux processus de Markov, qui se traitent bien, parfois de manière inattendue, à l'aide des techniques du chapitre 1; c'est le cas du théorème de Dellacherie selon lequel un borélien qui n'est visité qu'à des instants formant un ensemble dénombrable est semi-polaire; nous n'avons pas réécrit la démonstration figurant dans [3] du théorème selon lequel un ensemble finement parfait est le support fin d'une fonctionnelle additive continue, qui aurait pu trouver place dans cette rubrique.

Le chapitre 3 est consacré à montrer d'une part, que les opérations de projection sur la tribu des ensembles prévisibles et sur la tribu des ensembles co-bienmesurables commutent, et qu'il en est de même des opérations de projection sur la tribu des ensembles bien mesurables et co-prévisibles. Le premier résultat est une conséquence assez simple du théorème de représentation de Meyer. Pour démontrer le second, on est amené à étudier la classe des potentiels surmédiants réguliers : on montre pour ces potentiels un théorème de représentation analogue à celui qu'a montré Meyer pour les potentiels de la classe (D), à ceci près que les fonctionnelles qui interviennent alors, sont les fonctionnelles bien mesurables et co-prévisibles (appelées dans cet article fonctionnelles droites) au lieu des fonctionnelles prévisibles et co-bienmesurables du théorème de Meyer. Ce sont d'ailleurs ces fonctionnelles droites qui se trouvent être en correspondance bi-univoque avec les mesures ne chargeant pas les polaires, et non pas les fonctionnelles additives usuelles comme pourrait le faire penser une généralisation abusive des travaux de Hunt et Meyer. Pour pouvoir faire correspondre mesures et fonctionnelles additives naturelles, il faut travailler sous une hypothèse supplémentaire (dite CMF), qui, on le voit plus loin, est une sorte d'hypothèse de dualité. Or c'est précisément sous dualité qu'ont travaillé Hunt, Meyer et, plus récemment, Revuz sur ce type de problème. Les résultats s'agencent donc convenablement, à la satisfaction générale.

Au chapitre 4 on s'intéresse enfin au retournement du temps; on donne une démonstration du théorème de Chung et Walsh selon lequel le retourné d'un processus fortement markovien est « modérément » markovien.

L'hypothèse (CMF) du chapitre précédent apparaît alors comme une condition nécessaire et suffisante pour que le régularisé à droite du processus retourné soit fortement markovien. Les méthodes proposées permettent de manipuler le processus retourné de manière commode : on montre ainsi que la formule de dualité de Hunt, la manière dont se comporte le processus retourné quand on relativise le processus initial, ou quand on change de loi initiale, s'interprètent simplement dans le langage de la théorie générale des processus.

Le chapitre 5 est une sorte d'annexe au chapitre 3 : on y montre que les potentiels excessifs qui sont les régularisés de potentiels surmédians réguliers, ont certaines propriétés qu'on n'avait l'habitude de rencontrer que pour les potentiels de fonctionnelles additives continues ; en particulier, le théorème de Motoo leur est applicable.

Au chapitre 6 enfin, on montre que l'hypothèse (CMF) est en liaison directe avec l'existence d'un semi-groupe dual fortement markovien ; une classe importante de processus satisfait donc à cette hypothèse. Cela permet aussi de traiter l'irritant problème, bien connu des spécialistes, du comportement en 0 du processus retourné, tout au moins quand le processus initial est un processus de Hunt.

1. Temps d'arrêt et temps de retour algébriques

L'usage courant en théorie des processus de Markov est de considérer une famille croissante de tribus convenablement complétée (tribus « définitives »). Cela présente beaucoup d'avantages, mais aussi des inconvénients quand il est nécessaire de changer de probabilité sur Ω . C'est pourquoi certains auteurs (Courrèges et Priouret [10], Meyer [20]), ont été amenés à étudier les temps d'arrêt d'une famille canonique de tribus considérée avant complétion, qu'ils ont caractérisés par des propriétés algébriques. Nous proposons ici une présentation fondée sur l'emploi d'opérateurs de meurtre qui se prêtent bien au calcul et au retournement du temps.

1.1. (Ω, \mathcal{F}^0) est un espace de Blackwell (on pourra consulter [20] au sujet de ces espaces) ; on supposera, pour éviter de fastidieux passages au quotient, que les parties de Ω réduites à un point appartiennent à \mathcal{F}^0 .

DÉFINITIONS. — Soit $(k_t)_{t \geq 0}$ une famille d'applications de Ω dans lui-même telle que $(\omega, t) \rightarrow k_t(\omega)$ soit mesurable de $(\Omega \times \mathbf{R}_+, \mathcal{F}^0 \otimes \mathcal{B}_{\mathbf{R}_+})$ dans (Ω, \mathcal{F}^0) ($\mathcal{B}_{\mathbf{R}_+}$ désigne la tribu borélienne sur \mathbf{R}_+), et soit ζ une variable aléatoire finie sur Ω ; nous dirons que $(k_t)_{t \geq 0}$ est une famille d'opérateurs de meurtre de durée de vie ζ si

$$a. \quad \forall s \geq 0, \quad \forall t \geq 0, \quad k_s \circ k_t = k_{s \wedge t}.$$

- b. $\forall t \geq 0, \zeta \circ k_t = \zeta \wedge t$.
 c. $\forall \omega, \forall \omega' [k_s(\omega) = k_s(\omega') \text{ pour } s < t] \Rightarrow [k_t(\omega) = k_t(\omega')]$.
 d. $\forall \omega, \forall t \geq \zeta(\omega), k_t(\omega) = \omega$.

Par convention, on posera k_x égal à l'identité sur Ω .

Exemples. — Soit E un espace polonais, δ un « point cimetièrre ».

1. Ω est l'ensemble de toutes les fonctions continues à droite de \mathbf{R}_+ dans $E \cup \{\delta\}$ à durée de vie finie ζ . On note comme d'habitude $X_t(\omega)$ le point $\omega(t)$; la famille $(k_t)_{t \geq 0}$ de Ω dans Ω définie par les égalités

$$\begin{aligned} X_s(k_t(\omega)) &= X_s(\omega) & \text{si } t > s, \\ X_s(k_t(\omega)) &= \delta & \text{si } t \leq s, \end{aligned}$$

est une famille d'opérateurs de meurtre de durée de vie ζ .

2. L'exemple qui suit est un peu moins habituel, et nous servira pour l'étude des processus « modérément markovien » de Chung et Walsh qui sont à trajectoires continues à gauche.

Ω est maintenant l'ensemble de toutes les fonctions continues à gauche de \mathbf{R}_+ dans $E \cup \{\delta\}$ vérifiant les propriétés suivantes :

- a. $X_0(\omega) = \delta$.
 b. $\forall s > 0 [X_s(\omega) = \delta] \Rightarrow [\forall t \geq s, X_t(\omega) = \delta]$.
 c. $\zeta(\omega) = \inf \{s > 0; X_s(\omega) = \delta\}$ est fini quel que soit ω . La famille $(k_t)_{t \geq 0}$ de Ω dans Ω définie par

$$\begin{aligned} X_s(k_t(\omega)) &= X_s(\omega) & \text{si } t \geq s, \\ X_s(k_t(\omega)) &= \delta & \text{si } t < s, \end{aligned}$$

est une famille d'opérateurs de meurtre de durée de vie ζ .

1.2. TEMPS D'ARRÊT ALGÈBRIQUES. — Les hypothèses sont celles du paragraphe précédent. Donnons-nous une famille d'opérateurs de meurtre $(k_t)_{t \geq 0}$ de durée de vie ζ .

DÉFINITIONS. — Nous dirons qu'une variable aléatoire T , à valeurs dans $\mathbf{R}_+ \cup \{+\infty\}$, \mathcal{F}^0 -mesurable est :

★ un temps d'arrêt algébrique si $[T] \subset [0, \zeta[$ et si elle vérifie

$$\forall s \in \mathbf{R}_+, \forall \omega \in \Omega \begin{cases} s > T(\omega) \Rightarrow T \circ k_s(\omega) = T(\omega), \\ s \leq T(\omega) \Rightarrow T \circ k_s(\omega) = +\infty; \end{cases}$$

★ un temps d'arrêt algébriquement prévisible si $[T] \subset]0, \zeta]$ et si elle vérifie

$$\forall s \in \mathbf{R}_+, \forall \omega \in \Omega \begin{cases} s \geq T(\omega) \Rightarrow T \circ k_s(\omega) = T(\omega), \\ s < T(\omega) \Rightarrow T \circ k_s(\omega) = +\infty. \end{cases}$$

Nous dirons qu'un processus Z , $\mathcal{F}^0 \otimes \mathcal{B}_{\mathbf{R}_+}$ -mesurable est algébriquement prévisible si $[Z \neq 0] \subset]0, \zeta[$ et s'il vérifie

$$\forall t \in \mathbf{R}_+, \forall \omega \in \Omega \quad [0 < t \leq \zeta(\omega)] \Rightarrow Z_t(\omega) = Z_t \circ k_t(\omega).$$

Introduisons alors la famille croissante et continue à droite $(\mathcal{F}_t^0)_{t \geq 0}$ en posant

$$\mathcal{F}_t^0 = \bigcap_{s > t} k_s^{-1}(\mathcal{F}^0).$$

On peut alors, comme d'habitude, définir la notion de processus bien mesurable, ou prévisible relativement à $(\mathcal{F}_t^0)_{t \geq 0}$: on dira qu'un processus est bien mesurable (resp. prévisible) s'il est mesurable par rapport à la tribu engendrée par les processus adaptés à la famille $(\mathcal{F}_t^0)_{t \geq 0}$ et continus à droite (resp. continus à gauche). On dira alors qu'un temps d'arrêt T est prévisible si $[T]$ est un ensemble aléatoire prévisible. On a le théorème suivant :

THÉORÈME. — Soit T une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{R}_+ \cup \{+\infty\}$:

1. Supposons $[T] \subset]0, \zeta[$, alors

T est un temps d'arrêt algébrique

$$\Leftrightarrow T \text{ est un temps d'arrêt de la famille } (\mathcal{F}_t^0)_{t \geq 0}.$$

2. Supposons que $[T] \subset]0, \zeta[$ alors

T est un temps d'arrêt algébriquement prévisible

$$\Leftrightarrow T \text{ est un temps d'arrêt prévisible de la famille } (\mathcal{F}_t^0)_{t \geq 0}.$$

3. Soit Z un processus mesurable à support dans $]0, \zeta[$; Z est algébriquement prévisible si et seulement si Z est prévisible relativement à (\mathcal{F}_t^0) .

Démonstration :

1. Nous nous bornerons à montrer que si T est un temps d'arrêt de la famille (\mathcal{F}_t^0) dont le graphe est inclus dans $]0, \zeta[$, alors

$$[s \leq T(\omega)] \Rightarrow [T \circ k_s(\omega) = +\infty]$$

(les autres points sont très faciles). Il suffit de considérer le cas particulier où T ne prend que les deux valeurs a et $+\infty$ on remarque alors que

$$[T \circ k_u(\omega) \geq u \wedge \zeta(\omega)] \Rightarrow [T \circ k_u(\omega) = +\infty]$$

et l'on distingue deux cas :

a. $t \wedge \zeta(\Omega) \leq a$; on a alors

$$T \circ k_t(\omega) \geq a \geq \zeta(\omega) \wedge t,$$

et donc

$$T \circ k_t(\omega) = +\infty$$

d'après la remarque qui précède.

b. $t \wedge \zeta(\omega) > a$ et $T(\omega) = +\infty$; comme $[T = \infty]$ est \mathcal{F}_a^0 -mesurable, il résulte immédiatement de la définition de \mathcal{F}_a^0 que l'on a encore $T \circ k_t(\omega) = +\infty$.

C. Q. F. D.

Montrons tout de suite le point 3 : Supposons Z prévisible, et montrons que l'on peut écrire

$$Z_t = Z_\zeta \circ k_t \quad \text{sur }]0, \zeta].$$

On peut se limiter au cas où Z est continu à gauche. Soit alors $0 < t \leq \zeta(\omega)$: on peut écrire

$$Z_s(\omega) = Z_s \circ k_t(\omega)$$

quel que soit $s < t$; faisons tendre s vers t par valeurs inférieures, il vient

$$Z_t(\omega) = Z_t \circ k_t(\omega) = Z_{t \wedge \zeta(\omega)}(k_t(\omega)) = Z_\zeta \circ k_t(\omega).$$

Pour montrer la réciproque, nous définirons la relation d'équivalence \mathcal{R} sur $]0, \zeta]$ de la façon suivante :

$$(\omega, s) \sim (\omega', s'), \quad (\mathcal{R}) \iff s = s' \quad \text{et} \quad k_s(\omega) = k_s(\omega').$$

Nous allons montrer que la tribu \mathcal{T} des ensembles aléatoires prévisibles inclus dans $]0, \zeta]$ est formée des ensembles aléatoires mesurables de $]0, \zeta]$ saturés pour \mathcal{R} . Il est tout d'abord clair d'après la partie directe que tout élément de \mathcal{T} est saturé pour \mathcal{R} ; pour montrer la réciproque nous utiliserons une technique inspirée de celle de Meyer [20] qui utilise la propriété suivante vérifiée par les espaces de Blackwell : deux sous-tribus séparables d'un espace de Blackwell qui ont mêmes atomes sont égales. Il est facile de voir que la tribu \mathcal{T} est séparable : \mathcal{T} est en effet engendrée par les ensembles aléatoires $(A_{n,p,q})_{(n,p,q) \in \mathbf{N}^3}$ suivants :

$$A_{n,p,q} = \left(k_{p/2^n}^{-1}(H_q) \times \left] \frac{p}{2^n}, \frac{p+1}{2^n} \right] \right) \cap]0, \zeta],$$

où $(H_q)_{q \geq 0}$ désigne une famille dénombrable d'événements engendrant \mathcal{F}_∞^0 . Soit alors H un atome de la tribu \mathcal{T} ; si (ω, s) et (ω', s') sont deux points de H on peut écrire $\zeta(\omega) \wedge s = \zeta(\omega') \wedge s'$ [car le processus $(\omega, s) \rightarrow \zeta(\omega) \wedge s$ est prévisible]; on a donc $s = s'$. Considérons d'autre part un réel t strictement inférieur à s puisque l'ensemble prévisible

$$(k_t^{-1} \{ k_t(\omega) \} \times]t, \infty)) \cap]0, \zeta]$$

contient (ω, s) , il contient aussi (ω', s) ; on peut donc écrire,

$$\forall t < s, \quad k_t(\omega) = k_t(\omega'),$$

ce qui entraîne

$$k_s(\omega) = k_s(\omega');$$

H est donc saturé pour \mathcal{R} , et les classes d'équivalences selon \mathcal{R} sont des réunions d'atomes de \mathfrak{F} . Il en résulte que, si A est un ensemble aléatoire mesurable inclus dans $]0, \zeta]$ saturé pour \mathcal{R} , les tribus \mathfrak{F} et $\mathfrak{F} \vee A$, ayant mêmes atomes, seront égales; on a donc $A \in \mathfrak{F}$. Nous avons donc caractérisé comme nous le voulions la tribu \mathfrak{F} ; la fin de la démonstration est maintenant immédiate : si Z vérifie $Z_t = Z_s \circ k_t$ sur $]0, \zeta]$, les ensembles aléatoires $[Z \geq a] \cap]0, \zeta]$ sont saturés pour \mathcal{R} quel que soit a; ils sont donc prévisibles et Z est prévisible.

Reste à montrer le point 2. On déduit aisément du point 3 que, pour toute variable aléatoire Y, $(\omega, s) \rightarrow Y \circ k_s(\omega)$ est prévisible : on peut en effet écrire

$$Y \circ k_t(\omega) = (Y \circ k_s) \circ k_t(\omega) \quad \text{si } t \leq s(\omega).$$

Soit alors T un temps d'arrêt algébriquement prévisible; on peut écrire

$$[T] = \{ \omega, s; T \circ k_s(\omega) = s \},$$

ce qui montre que T est prévisible. Inversement, considérons un temps d'arrêt T prévisible dont le graphe est contenu dans $]0, \zeta]$; nous allons procéder par étapes :

α . $[s < T(\omega) \text{ et } 0 < s \leq \zeta(\omega)] \Rightarrow T \circ k_s(\omega) = +\infty$; en effet, puisque le processus $1_{[0, T]_{0, \zeta}}$ est prévisible algébrique d'après le point 3 ci-dessus, on peut écrire

$$[0 < s \leq \zeta(\omega)] \Rightarrow ([0 \leq s < T(\omega)] \Leftrightarrow [0 \leq \zeta \circ k_s(\omega) < T \circ k_s(\omega)]);$$

on a donc aussi les implications suivantes :

$$[s < T(\omega) \text{ et } 0 < s \leq \zeta(\omega)] \Rightarrow [T \circ k_s(\omega) > \zeta \circ k_s(\omega)] \Rightarrow [T \circ k_s(\omega) = +\infty].$$

β . Il est clair alors que $[s < T(\omega)] \Rightarrow T \circ k_s(\omega) = +\infty$; en effet, ou bien $0 < s \leq \zeta(\omega)$ et cela résulte alors du point α , ou bien $T(\omega) = +\infty$ et $s > \zeta(\omega)$, et cela résulte alors de ce que $k_s(\omega) = \omega$.

γ . L'implication

$$[s > T(\omega)] \Rightarrow [T \circ k_s(\omega) = T(\omega)]$$

étant une propriété de tout temps d'arrêt, il reste seulement à montrer que

$$[s = T(\omega)] \Rightarrow [T \circ k_s(\omega) = T(\omega)],$$

ce qui se fait en écrivant que le processus $1_{[T]}$ est algébriquement prévisible.

DÉFINITIONS. — Par analogie, nous dirons qu'un processus Z , $F_{\infty}^0 \otimes \mathcal{G}_{\mathbf{R}^+}$ -mesurable, est algébriquement bien mesurable si $[Z \neq 0] \in [0, \zeta[$ et si Z est mesurable par rapport à la tribu engendrée par les processus adaptés continus à droite.

Nous appellerons \mathfrak{T}_1^0 et \mathfrak{T}_3^0 respectivement les familles d'ensembles aléatoires algébriquement bien mesurables et prévisibles (\mathfrak{T}_1^0 est une tribu sur $[0, \zeta[$ et \mathfrak{T}_3^0 une tribu sur $]0, \zeta]$).

Ces définitions attirent sur elles les foudres de Strasbourg pour deux raisons

— Les constantes ne sont pas des temps d'arrêt algébriques; mais pour les applications aux processus de Markov que nous avons en vue, on peut sans inconvénient remplacer une constante t , soit par le temps d'arrêt $t_{\uparrow > t}$, soit par le temps d'arrêt algébriquement prévisible $t_{\downarrow \geq t}$ si l'on veut mettre en évidence le caractère prévisible de t (cas modérément markovien).

— Les processus algébriquement prévisibles ne sont pas algébriquement bien mesurables : si Z est algébriquement prévisible, c'est la restriction de Z à $[0, \zeta[$ qui est algébriquement bien mesurable; il faut prendre une précaution analogue en ce qui concerne les temps d'arrêt algébriquement prévisibles.

1.3. OPÉRATEURS DE TRANSLATION ET TEMPS DE RETOUR ALGÉBRIQUES.

DÉFINITION. — Reprenons notre espace de Blackwell (Ω, \mathfrak{F}^0) . Nous dirons qu'une famille $(\theta_t)_{t \geq 0}$ d'applications de Ω dans lui-même est une famille d'opérateurs de translation de durée de vie ζ si

- $(\omega, s) \rightarrow \theta_t(\omega)$ est mesurable de $(\Omega \times \mathbf{R}_+, \mathfrak{F}^0 \otimes \mathcal{G}_{\mathbf{R}^+})$ dans (Ω, \mathfrak{F}^0) .
- $\forall s \geq 0, \forall t \geq 0, \theta_s \circ \theta_t = \theta_{s+t}; \forall \omega, \theta_0(\omega) = \omega$.
- $\forall \omega, \forall \omega' [\theta_s(\omega) = \theta_s(\omega') \text{ pour } s > t] \Rightarrow \theta_t(\omega) = \theta_t(\omega')$.
- La variable aléatoire finie ζ vérifie $\zeta \circ \theta_t = (\zeta - t)^+$.
- $\forall t \geq \zeta(\omega), \theta_t(\omega) = \theta_{\zeta(\omega)}(\omega)$.

La proposition suivante, dont nous laisserons la démonstration au lecteur prouve qu'il est équivalent de se donner une famille d'opérateurs de meurtre ou une famille d'opérateurs de translation.

PROPOSITION. — Soit $(k_t)_{t \geq 0}$ une famille d'opérateurs de meurtre de durée de vie ζ ; la famille $(\hat{k}_t)_{t \geq 0}$ définie par $\hat{k}_t(\omega) = k_{\zeta(\omega)-t+}(\omega)$ est une famille d'opérateurs de translation de durée de vie ζ .

De même, si $(\theta_t)_{t \geq 0}$ est une famille d'opérateurs de translation de durée de vie ζ , la famille $(\hat{\theta}_t)_{t \geq 0}$ définie par $\hat{\theta}_t(\omega) = \theta_{\zeta(\omega)-t+}(\omega)$ est une famille d'opérateur de meurtre de durée de vie ζ .

Dans la suite de ce paragraphe nous nous donnons une famille $(\theta_t)_{t \geq 0}$ d'opérateurs de translation sur (Ω, \mathcal{F}^0) de durée de vie ζ . Nous considérerons la famille d'opérateurs de meurtre $(\hat{\theta}_t)_{t \geq 0}$ à laquelle on peut associer une famille $(\hat{\mathcal{F}}_t^0)_{t \geq 0}$ de tribus en procédant comme au paragraphe précédent; on aura de même les notions de temps d'arrêt algébrique ou algébriquement prévisible relativement à $(\hat{\theta}_t)_{t \geq 0}$. On se propose maintenant de réécrire les relations algébriques caractérisant ces derniers êtres à l'aide des opérateurs θ_t (et non pas comme dans leurs définitions, des opérateurs $\hat{\theta}_t$). Nous allons voir que l'on retrouve alors le langage des temps de retour ([26], [7]).

La seule donnée est, nous le répétons, une famille d'opérateurs de translation $(\theta_t)_{t \geq 0}$. Dans ce paragraphe, les notions de temps d'arrêt algébrique, algébriquement prévisible, etc. s'entendent donc par convention, par rapport à la famille d'opérateurs de meurtre $(\hat{\theta}_t)_{t \geq 0}$ [nous ferons une convention différente dans les chapitres suivants, quand nous nous donnerons à la fois une famille $(k_t)_{t \geq 0}$ et une famille $(\theta_t)_{t \geq 0}$].

Enfin, si Z est un processus, on notera \hat{Z} le processus défini par $Z_t(\omega) = Z_{(\zeta(\omega)-t)^+}(\omega)$.

Regardons par exemple comment on peut transformer la relation algébrique caractérisant les processus algébriquement prévisibles : un processus Z est prévisible si et seulement si

$$Z = Z_\zeta \circ \hat{\theta} \quad \text{sur }]0, \zeta]; \quad \text{mais } Z_\zeta \circ \hat{\theta} = (\widehat{Z_\zeta \circ \theta}) = (\widehat{\hat{Z}_0 \circ \theta})$$

on a par conséquent l'équivalence

$$\begin{aligned} Z \text{ est algébriquement prévisible} \\ \Leftrightarrow \hat{Z} = \hat{Z}_0 \circ \theta \quad \text{sur } [0, \zeta[. \end{aligned}$$

On préfère généralement écrire ce résultat pour \hat{Z} et énoncer

$$\begin{aligned} \hat{Z} \text{ est algébriquement prévisible} \\ \Leftrightarrow \forall t \geq 0, \quad \forall \omega, \quad [0 \leq t < \zeta(\omega)] \Rightarrow Z_t(\omega) = Z_0 \circ \theta_t(\omega). \end{aligned}$$

On peut alors caractériser facilement la tribu $\hat{\mathcal{F}}_t^0$ à l'aide de $(\theta_t)_{t \geq 0}$: on écrit que A appartient à $\hat{\mathcal{F}}_t^0$ si et seulement si $A \times]t, \infty[$ est algébriquement prévisible, et on applique le critère précédent : il vient

$$A \in \hat{\mathcal{F}}_t^0 \Leftrightarrow \forall s > 0, \quad A \cap [\zeta > s + t] = \theta_s^{-1}(A) \cap [\zeta > s + t].$$

On retrouve ainsi la définition classique de la tribu des événements postérieurs à $(\zeta - t)^+$. Pour continuer dans cette voie nous aurons besoin

de définir la notion de temps de retour; auparavant, nous introduirons quelques notations :

Si S est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{R}_+ \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$, on appellera \hat{S} la variable aléatoire définie par

$$\hat{S}(\omega) = \begin{cases} \zeta(\omega) - S(\omega) & \text{si } S(\omega) \leq \zeta(\omega), \\ -\infty & \text{si } S(\omega) > \zeta(\omega). \end{cases}$$

Si S et T sont deux variables aléatoires à valeurs dans

$$\mathbf{R}_+ \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\},$$

on notera $[S, T[$ (par exemple), l'ensemble aléatoire $\{\omega, s \in \Omega \times \mathbf{R}_+; S(\omega) \leq s < T(\omega)\}$ et $[S]$ l'ensemble aléatoire $[S, S]$ (noter que dans $[S, T[$ et dans $[S]$ il n'y a que des points à « distance finie »); on s'intéressera principalement à des variables aléatoires S telles que $[S] \subset [0, \zeta]$, auquel cas $\hat{S} = \zeta - S$.

DÉFINITIONS. — Soit L une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{R}_+ \cup \{-\infty\}$; nous dirons que L est :

— un temps de retour algébrique si $[L] \subset]0, \zeta]$ et si

$$L \circ \theta_t = \begin{cases} L - t, & \text{sur } L > t, \\ -\infty & \text{sur } L \leq t; \end{cases}$$

— un temps algébriquement coprévisible si $[L] \subset [0, \zeta[$ et si

$$L \circ \theta_t = \begin{cases} L - t & \text{sur } [L \geq t], \\ -\infty & \text{sur } [L < t]. \end{cases}$$

Soit Z un processus mesurable; nous dirons que Z est :

— algébriquement co-optionnel si $[Z \neq 0] \subset]0, \zeta]$ et s'il est mesurable par rapport à la tribu engendrée par les processus Y continus à gauche et mesurables vérifiant la relation

$$\forall s > 0, \forall t, Y_{s+t} = Y_s \circ \theta_t \quad \text{sur } [0 < s + t \leq \zeta];$$

— algébriquement coprévisible si $[Z \neq 0] \subset [0, \zeta[$ et si

$$\forall t \geq 0, \forall \omega \quad ([0 \leq t < \zeta(\omega)] \Rightarrow Z_t(\omega) = Z_0 \circ \theta_t(\omega)).$$

Il est sans doute bon de faire le lien avec la notion usuelle de temps de retour, due à Nagasawa [26] (voir par exemple [7]). Un temps de retour algébrique n'est pas essentiellement différent d'un temps de retour usuel si ce n'est que, pour des raisons techniques, on fait jouer à $-\infty$ le rôle tenu par 0 dans la définition de Nagasawa. En revanche, il est important

de noter qu'un temps de retour algébriquement coprévisible peut prendre les deux valeurs 0 et $-\infty$ et que l'événement $[L = 0]$ doit être défini avec précision : il suffit en effet à déterminer L puisque $L(\omega)$ est l'unique nombre réel t compris entre 0 et $\zeta(\omega)$ tel que $L \circ \theta_t(\omega) = 0$.

Dans tout cet article on conviendra que $\sup \Phi = -\infty$; on veillera donc à distinguer, quand on considérera le dernier temps de visite L^Γ d'un borélien Γ , les trajectoires ω qui ne rencontrent jamais Γ [pour lesquelles $L^\Gamma(\omega) = -\infty$] et les trajectoires ω qui ne visitent Γ que pour $t = 0$ [pour lesquelles $L^\Gamma(\omega) = 0$] On peut alors énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME. — *On a les équivalences suivantes :*

1. *L est un temps de retour algébrique $\Leftrightarrow \hat{L}$ est un temps d'arrêt algébrique [relativement à la famille $(\hat{\theta}_t)_{t \geq 0}$].*
2. *L est un temps algébriquement co-prévisible $\Leftrightarrow \hat{L}$ est algébriquement prévisible.*
3. *Z est un processus algébriquement co-optionnel $\Leftrightarrow \hat{Z}$ est algébriquement bien mesurable.*
4. *Z est un processus algébriquement co-prévisible $\Leftrightarrow \hat{Z}$ est algébriquement prévisible.*

L'équivalence 4 a déjà été vue, 2 s'en déduit facilement ; nous laisserons au lecteur le soin d'établir 1 et 3.

Notations. — On notera :

— \mathcal{H}_g^0 la tribu sur $]0, \zeta]$ formée des ensembles aléatoires dont l'indicateur est algébriquement co-optionnel.

— \mathcal{H}_d^0 la tribu sur $[0, \zeta[$ formée des ensembles aléatoires dont l'indicateur est algébriquement coprévisible.

— Par extension on appellera g_0 -temps de retour les temps de retour algébriques et d_0 -temps de retour les temps de retour algébriquement co-prévisibles.

(Les indices g et d sont là pour rappeler que \mathcal{H}_g^0 est engendrée par des processus continus à gauche et \mathcal{H}_d^0 par des processus continus à droite.)

1.4. PROCESSUS CROISSANTS ET FONCTIONNELLES ADDITIVES. — Nous allons maintenant faire un travail analogue en ce qui concerne les processus croissants : définir la notion de processus croissant algébrique quand on se donne une famille $(k_t)_{t \geq 0}$, puis voir ce que deviennent ces relations dans le cas où k_t est de la forme $\hat{\theta}_t$. Supposons donc donné un espace de Blackwell (Ω, \mathcal{F}^0) muni d'une famille $(k_t)_{t \geq 0}$ de durée de vie ζ .

DÉFINITIONS. — Nous dirons que $(A_t)_{t \geq 0}$ est un processus croissant algébriquement bien mesurable si $\forall \omega, t \rightarrow A_t(\omega)$ est croissante continue à droite; A est bien mesurable positif;

$$\forall t, \forall \omega \quad [t \geq \zeta(\omega)] \Rightarrow A_t(\omega) = A_{t-}(\omega).$$

[On note A_- le processus valant $A_{t-}(\omega)$ si $t > 0$ et 0 si $t = 0$.]

Nous dirons que A est un processus croissant algébriquement prévisible si $\forall \omega, t \rightarrow A_t(\omega)$ est croissante continue à droite; A est prévisible;

$$A_0 = 0; \quad \forall t \geq 0, \forall \omega \quad [t \geq \zeta(\omega)] \Rightarrow A_t(\omega) = A_\zeta(\omega).$$

Remarques :

1. Contrairement à l'habitude un processus croissant bien mesurable à la permission de charger 0.

2. Si l'on appelle μ_ω la mesure sur \mathbf{R}_+ définie par

$$\mu_\omega]s, t] = A_t(\omega) - A_s(\omega),$$

on voit que μ_ω est portée par $[0, \zeta(\omega)[$ si A est algébriquement bien mesurable et par $]0, \zeta(\omega)]$ si A est algébriquement prévisible.

3. Un processus à trajectoires croissantes et continues à droites est algébriquement prévisible si et seulement si

$$\forall t > 0, \forall \omega, \quad A_t(\omega) = A_\zeta \circ k_t(\omega).$$

4. On ne considérera dans la suite que des processus croissants finis, et l'on dira processus croissant au lieu de processus croissant fini.

Supposons maintenant, comme au paragraphe précédent, que (Ω, \mathcal{F}^0) soit muni d'une famille d'opérateurs de translation $(\theta_t)_{t \geq 0}$ de durée de vie ζ et regardons ce que sont les processus croissants algébriques, par rapport à la famille $(\hat{\theta}_t)$. On adoptera les définitions suivantes :

DÉFINITIONS. — Nous dirons qu'un processus continu à droite A est une fonctionnelle additive algébrique :

a. $A_0 = 0; \quad \forall t, \forall \omega \quad [t \geq \zeta(\omega)] \Rightarrow [A_t = A_\zeta(\omega)].$

b. $\forall s, \forall t, \quad A_{t+s} = A_t + A_s \circ \theta_t.$

c. $\forall \omega, \quad A_\zeta(\omega) < \infty.$

Nous dirons que A , processus continu à droite est une fonctionnelle additive algébriquement co-prévisible si :

a. $A \geq 0.$

b. $\forall t, \forall \omega \quad [t \geq \zeta(\omega)] \Rightarrow [A_t = A_{t-}(\omega)].$

c. $\forall s \geq 0, \forall t \geq 0, \quad A_{t+s} = A_{t-} + A_s \circ \theta_t.$

(Rappelons que, par convention, $A_{0-} = 0$.)

On définira enfin le retourné d'un processus croissant : il faut comme d'habitude, raisonner en termes de mesures (le processus \hat{A} n'ayant guère d'intérêt). Si A est un processus croissant porté par $[0, \zeta]$, on appellera \check{A} le processus croissant qui, pour chaque ω , est la fonction de répartition continue à droite de la mesure image de μ_ω par l'opérateur de retournement $t \rightarrow (\zeta(\omega) - t)^+$, défini sur $[0, \zeta(\omega)]$. Autrement dit, on posera

$$\check{A}_t(\omega) = A_{\zeta(\omega) - t}(\omega),$$

et on pourra écrire, quel que soit Z mesurable borné,

$$\forall \omega, \int_0^x \hat{Z}_t(\omega) dA_t(\omega) = \int_0^x Z_t(\omega) d\check{A}_t(\omega).$$

On a alors la proposition suivante :

PROPOSITION. — Soit A un processus croissant continu à droite porté par $[0, \zeta]$, on a les équivalences :

1. A est une fonctionnelle additive algébrique
 $\Leftrightarrow \check{A}$ est algébriquement bien mesurable.
2. A est une fonctionnelle algébriquement coprévisible
 $\Leftrightarrow \check{A}$ est algébriquement prévisible.

Démonstration :

1. Posons

$$Z_t = A_x - A_t;$$

on montre facilement que A est une fonctionnelle additive algébrique si et seulement si Z_- est \mathcal{H}_g^0 -mesurable, donc si et seulement si $(\hat{Z}_t) = A$ est bien mesurable [par rapport à $(\hat{F}_t^0)_{t \geq 0}$].

2. On voit de même que A est une fonctionnelle co-prévisible si et seulement si Z_- est \mathcal{H}_g^0 -mesurable, d'où le résultat.

Remarque. — Les fonctionnelles co-prévisibles chargent 0 dès qu'elles ne sont pas continues; on a en effet $A_t - A_{t-} = A_0 \circ \theta_t$.

Notation. — Pour raccourcir le langage on emploiera les expressions g_0 -fonctionnelle et d_0 -fonctionnelle pour désigner respectivement les fonctionnelles algébriques et les fonctionnelles algébriquement co-prévisibles. On notera qu'une g_0 -fonctionnelle n'est pas \mathcal{H}_g^0 -mesurable.

1.5. OPÉRATEURS k ET θ EN DUALITÉ. — Supposons maintenant que l'on dispose à la fois sur (Ω, \mathcal{F}^0) d'une famille $(k_t)_{t \geq 0}$ d'opérateurs de

meurtre et d'une famille $(\theta_t)_{t \geq 0}$ d'opérateurs de translation de même durée de vie ζ . Nous dirons que les familles $(k_t)_{t \geq 0}$ et $(\theta_t)_{t \geq 0}$ sont en dualité si

$$\forall s \geq 0, \quad \forall t \geq 0, \quad k_s \circ \theta_t = \theta_t \circ k_{s+t}.$$

(On se gardera de croire que k et \hat{k} sont en dualité; le « passé » construit à l'aide des opérateurs k_t coïncide avec le « futur » construit à l'aide des opérateurs de translation \hat{k}_t ; les théorèmes des paragraphes précédents nous indiquent simplement que, après retournement le passé devient le futur; au contraire, se donner deux familles k et θ en dualité, c'est se donner un « passé » et un « futur » distincts, k_t décrivant ce qui se passe avant t et θ_t ce qui se passe après t). On dispose donc en réalité de quatre familles distinctes $k, \theta, \hat{k}, \hat{\theta}$. Il est donc indispensable de faire conventions pour s'y reconnaître.

Dans toute la suite de cet article, on conviendra que le fait d'être un temps d'arrêt algébrique, un processus algébriquement bien mesurable ou prévisible, et de manière générale tout ce qui s'exprimait à l'aide d'une famille d'opérateurs de meurtre s'entend par rapport à la famille (k_t) . Au contraire, le fait d'être un temps de retour, ou un processus \mathcal{H}_s^0 ou \mathcal{H}_t^0 -mesurable, et tout ce qui est caractérisé par une famille d'opérateurs de translation s'entendra par rapport à la famille (θ_t) .

On notera (\mathcal{F}_t^0) la famille de tribus construite à l'aide de (k_t) et $(\hat{\mathcal{F}}_t^0)$ la famille construite à l'aide de (θ_t) .

Les résultats suivants se montrent à l'aide de petits calculs algébriques faciles :

a. Si S et T sont deux temps d'arrêt algébriques, $S + T \circ \theta_s$ est un temps d'arrêt algébrique; si, de plus, T est algébriquement prévisible $S + T \circ \theta_s$ est algébriquement prévisible.

Énonçons aussi le résultat dual :

b. Si σ et τ sont deux temps de retour algébriques, $\sigma \circ k_\tau$ est un temps de retour algébrique; si, de plus, σ est un d_0 -temps de retour, $\sigma \circ k_\tau$ est encore un d_0 -temps de retour.

[On aura naturellement pris tout d'abord le temps de définir complètement les variables aléatoires $\sigma \circ k_\tau$ en posant

$$\sigma \circ k_\tau(\omega) = -\infty \quad \text{si} \quad \tau(\omega) = -\infty$$

et $T \circ \theta_s(\omega)$ en posant

$$T \circ \theta_s(\omega) = +\infty \quad \text{si} \quad S(\omega) = +\infty.$$

1.6. LES THÉORÈMES DE PROJECTION. — Soit $(\Omega, \mathcal{F}^0, (k_t), \zeta)$ un espace de Blackwell muni d'opérateurs de meurtre k_t de durée de vie ζ . Supposons que l'on se donne en outre une probabilité sur Ω . Appelons \mathcal{F} la tribu complétée de \mathcal{F}^0 et \mathcal{F}_t la tribu engendrée par \mathcal{F}_t^0 et la famille des ensembles négligeables de \mathcal{F} ; on est alors dans les conditions d'application des théorèmes généraux de la théorie générale des processus; dans les applications que nous avons en vue, seuls nous intéresseront les processus bien mesurables à support dans $[0, \zeta[$, ou prévisibles à support dans $]0, \zeta]$; c'est pourquoi nous énoncerons les théorèmes de projection de la manière suivante :

THÉORÈME. — Soit Z un processus $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}_{\mathbf{R}^+}$ -mesurable; il existe un processus 1Z (resp. 3Z) algébriquement bien mesurable (resp. prévisible), unique à une évanescence près, tel que pour tout temps d'arrêt algébrique T (resp. pour tout temps d'arrêt algébriquement prévisible T) on ait

$$E[Z_T] = E[{}^1Z_T] \quad (\text{resp. } E[Z_T] = E[{}^3Z_T]).$$

De même (supposant maintenant que Ω est muni d'une famille d'opérateurs de translation), il existe un processus sZ , \mathcal{H}_s^0 -mesurable (resp. dZ , \mathcal{H}_d^0 -mesurable) unique à une évanescence près tel que pour tout temps de retour algébrique (resp. pour tout d_0 -temps de retour) on ait

$$E[Z_{\cdot}] = E[{}^sZ_{\cdot}] \quad (\text{resp. } E[Z_{\cdot}] = E[{}^dZ_{\cdot}]).$$

Dans ces énoncés, on a convenu de poser

$$Z_x = Z_{-x} = 0.$$

Ce théorème se démontre en appliquant les théorèmes classiques de projection (voir [11]) et en « décomplétant » le résultat obtenu à l'aide de la remarque bien connue selon laquelle, par exemple, un processus bien mesurable par rapport aux tribus \mathcal{F}_t est indistinguable d'un processus bien mesurable par rapport aux tribus \mathcal{F}_t^0 .

Il nous reste à énoncer les théorèmes de projection duale d'un processus croissant qui sont, là encore, une simple conséquence des théorèmes énoncés dans [11].

THÉORÈME. — Soit A un processus croissant intégrable chargeant éventuellement 0; il existe un processus croissant A^1 (resp. A^3), algébriquement bien mesurable (resp. prévisible) unique à une évanescence près, tel que pour tout processus Z , mesurable borné, on ait

$$\langle A^1, Z \rangle = \langle A, {}^1Z \rangle \quad (\text{resp. } \langle A^3, Z \rangle = \langle A, {}^3Z \rangle).$$

De même, il existe une g_0 -fonctionnelle A^s (resp. une d_0 -fonctionnelle A^d) unique telle que

$$\langle A^s, Z \rangle = \langle A, {}^sZ \rangle \quad (\text{resp. } \langle A^d, Z \rangle = \langle A, {}^dZ \rangle)$$

(On note $\langle A, Z \rangle$ le nombre réel $E \left[\int_0^\infty Z_t dA_t \right]$.)

2. Premières applications aux processus de Markov

Nous allons dans ce chapitre nous efforcer de faire oublier l'indigestion due aux trop nombreuses définitions du premier chapitre en donnant quelques applications simples que permettent l'utilisation de ces êtres algébriques. Nous sommes malheureusement obligés de continuer encore un peu sur la voie des définitions pour préciser ce que nous entendons par processus fortement et modérément markoviens et pour éclaircir quelques problèmes liés à la complétion des tribus.

2.1. PROCESSUS FORTEMENT ET MODÉRÉMENT MARKOVIENS.

DÉFINITIONS. — (Ω, \mathfrak{F}^0) est un espace de Blackwell muni de deux familles (k_t) et (θ_t) de durée de vie ζ , et en dualité (cf. 1.5).

On se donne d'autre part un espace d'états lusinien E auquel on adjoint de la manière habituelle un point cimetière ∂ ; on conviendra, comme d'habitude, que toute fonction f borélienne sur E est prolongée à $E \cup \{\partial\}$ par $f(\partial) = 0$.

Soit P une probabilité sur (Ω, \mathfrak{F}^0) portée par $[\zeta > 0]$; nous appellerons processus P -fortement-markovien la donnée :

— d'une fonction aléatoire $(X_t)_{t \geq 0}$ à valeurs dans $E \cup \{\partial\}$, continue à droite, vérifiant les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} (s > t) \Rightarrow X_t \circ k_s = X_t; \quad \forall \omega [(s \leq t) \Rightarrow [X_t \circ k_s(\omega) = \partial]]; \\ X_s \in E \quad \text{sur } \zeta > s; \\ \forall s, \quad \forall t, \quad X_s \circ \theta_t = X_{s+t}. \end{aligned}$$

[Ainsi, quelle que soit f borélienne, le processus $f(X)$ est $\mathfrak{F}_t^0 \cap \mathcal{H}_t^0$ -mesurable];

— d'une famille $(P_x)_{x \in E}$ de probabilités sur (Ω, \mathfrak{F}^0) vérifiant la condition suivante : quelle que soit Z , variable aléatoire bornée sur Ω , on a

$$E[Z \circ \theta_T; T < \zeta] = E[E_{X_T}[Z]],$$

quel que soit le temps d'arrêt algébrique T (E représente ici l'espérance mathématique associée à P et E_x l'espérance mathématique associée à P_x).

On définit comme de coutume, si m est une probabilité sur E , la probabilité

$$P_m = \int_E P_x m(dx);$$

on dira que le processus est fortement markovien si, quel que soit la loi m , il est P_m -fortement markovien.

Il serait plus honnête d'appeler ces processus, « processus fortement markoviens à durée de vie finie ».

Nous appellerons processus P -modérément markovien la donnée :

— d'une fonction aléatoire $(X_t)_{t \geq 0}$ à valeurs dans $E \cup \{\delta\}$, continue à gauche vérifiant les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} \forall s \geq 0, \quad \forall t \geq 0, \quad \forall \omega \quad & [(s \geq t) \Rightarrow (X_t \circ k_s(\omega) = X_t(\omega))] \\ & \text{et } (s < t) \Rightarrow [X_t \circ k_s(\omega) = \delta]; \\ \forall s > 0, \quad \forall \omega \quad & [[s \leq \zeta(\omega)] \Rightarrow [X_s(\omega) \in E]]; \quad \forall \omega, \quad X_0(\omega) = \delta; \\ \forall s > 0, \quad \forall t \geq 0, \quad & X_s \circ \theta_t = X_{s+t}. \end{aligned}$$

[Quelle que soit f borélienne bornée, $f(X)$ est alors $\mathfrak{F}_s^0 \cap \mathcal{H}_s^0$ -mesurable];

— d'une famille $(P_x)_{x \in E}$ de probabilités sur (Ω, \mathfrak{F}^0) vérifiant la condition suivante : quels que soient la variable aléatoire bornée Z et le temps d'arrêt algébriquement prévisible T , on peut écrire

$$E[Z_0 \circ \theta_T; T \leq \zeta] = E[E_{X_T}[Z]].$$

Nous supposons dans les deux cas que les fonctions $x \rightarrow E_x[Z]$ sont boréliennes, quelle que soit la variable aléatoire Z \mathfrak{F}^0 -mesurable bornée.

2.2. PROBLÈMES DE COMPLÉTION. — On appellera \mathfrak{F}_z^m la complétée de \mathfrak{F}_z^0 par rapport à P_m , \mathfrak{F}_t^m la tribu engendrée par \mathfrak{F}_t^0 et les ensembles de mesure nulle de \mathfrak{F}_z^m ; \mathfrak{F}_t désignera l'intersection des tribus \mathfrak{F}_t^m quand m parcourt l'ensemble des mesures bornées sur E . On définit de même les tribus $\hat{\mathfrak{F}}_t^m$. On appellera processus m -co-optionnels (resp. m -co-prévisibles) les processus à support dans $]0, \zeta[$ (resp. dans $[0, \zeta[$) mesurables par rapport à la tribu \mathcal{H}_g^m (resp. \mathcal{H}_d^m) formée des ensembles aléatoires m -indistinguables d'un ensemble \mathcal{H}_g^0 (resp. \mathcal{H}_d^0)-mesurable : les processus co-optionnels ne sont autres que les processus Z à support dans $]0, \zeta[$ dont le retourné \hat{Z} est bien mesurable par rapport à la famille \mathfrak{F}_t^m . On parlera de même de temps m -co-optionnels ou m -co-prévisibles qui seront les variables aléatoires \mathfrak{F}_z^m -mesurables P_m -presque sûrement égales à un temps de retour algébrique (resp. à un d_0 -temps de retour). Pour les processus croissants, une convention analogue nous fera parler de g_m -fonc-

tionnelles et de d_m -fonctionnelles. On supprimera enfin l'indice m quand une propriété sera vraie quelle que soit la loi initiale; ainsi, on posera

$$\mathcal{A}\mathcal{C}_g = \bigcap_m \mathcal{A}\mathcal{C}_g^m, \quad \mathcal{A}\mathcal{C}_l = \bigcap_m \mathcal{A}\mathcal{C}_l^m;$$

on dira qu'un processus A est, par exemple, une g -fonctionnelle si quelle que soit la loi m , il existe une g_0 -fonctionnelle (dépendant éventuellement de m) P_m -indistinguable de A .

Donnons tout de suite des exemples de processus $\mathcal{A}\mathcal{C}_g$ -mesurables.

PROPOSITION. — Soit L une variable aléatoire \mathcal{F}_x -mesurable, à valeurs dans $\mathbf{R}_+ \cup \{-\infty\}$, telle que $[L] \subset]0, \zeta[$ et vérifiant :

$$L \circ \theta_t = L - t \text{ p. s. sur } [L > t]; \quad L \circ \theta_t = -\infty \text{ p. s. sur } [L \leq t].$$

L est alors co-optionnelle.

Il suffit de se limiter au cas où L est parfait d'après un théorème de Meyer [21].

Démonstration. — Soit m une loi initiale; posons

$$\mu = m U^\nu \quad \left(\text{i. e. } \mu(f) = E_m \left[\int_0^\infty e^{-\nu t} f(X_t) dt \right] \right)$$

et choisissons L' \mathcal{F}_x^0 -mesurable vérifiant

$$P_\mu [L = L'] = 1,$$

ce qui s'écrit encore

$$\int_0^\infty P_m [L \circ \theta_t = L' \circ \theta_t] e^{-\nu t} dt = 1;$$

il existe donc d'après le théorème de Fubini un événement U \mathcal{F}_x -mesurable, P_m -plein tel que

$$\forall \omega \in U \quad \{ t; L \circ \theta_t(\omega) \neq L' \circ \theta_t(\omega) \}$$

soit de mesure de Lebesgue nulle.

D'après une technique due à Walsh (cf. [21]), on pose alors

$$L''(\omega) = \overline{\lim}_{s \downarrow 0} \text{ess } L' \circ \theta_s(\omega);$$

L'application $(\omega, s) \rightarrow L' \circ \theta_s(\omega)$ étant $\mathcal{F}_x^0 \otimes \mathcal{B}_{\mathbf{R}_+}$ -mesurable, il en résulte (Walsh, *Séminaire de probabilités*, V, p. 293, prop. 2.2) que L'' est \mathcal{F}_x^0 -mesurable. On a clairement

$$L'' \circ \theta_0 = L'' \quad \text{et} \quad L'' \circ \theta_t(\omega) = \lim_{s \downarrow t} L' \circ \theta_s(\omega) = \lim_{s \downarrow t} L \circ \theta_s(\omega) \quad \text{si } \omega \in U;$$

il en résulte facilement que pour tout ω dans U , on peut écrire

$$\begin{aligned} L''(\omega) = L(\omega); \quad (t < L''(\omega)) &\Rightarrow L'' \circ \theta_t(\omega) = L''(\omega) - t; \\ (t \geq L(\omega)) &\Rightarrow L'' \circ \theta_t(\omega) = -\infty. \end{aligned}$$

Si l'on pose alors

$$L'''(\omega) = \sup_{0 < t \leq L''(\omega)} \{ t; L'' \circ \theta_t(\omega) < 0 \} \quad (1),$$

L''' est presque sûrement égal à L'' , donc à L (puisque'il y a égalité sur U); et d'autre part L''' est la fin de l'ensemble \mathcal{H}_g^0 -mesurable $[L'' \circ \theta_{\cdot} > 0] \cap]0, \zeta]$; il en résulte que L''' est co-optionnel (non nécessairement algébrique); il en est donc de même de L .

COROLLAIRES :

1. Appelons \mathcal{K}_g la tribu sur $]0, \zeta]$ engendrée par les processus mesurables Z continus à droite, à support dans $]0, \zeta]$, $\mathcal{F}_x \otimes \mathcal{B}_{\mathbf{R}^+}$ -mesurable, et vérifiant la propriété suivante : $\forall s > 0$ les processus $t \rightarrow Z_{s+t}$ et $t \rightarrow Z_s \circ \theta_t$ sont indistinguables sur $]0, \infty[$; alors $\mathcal{K}_g \subset \mathcal{H}_g$.

2. Soit A un processus croissant p. s. fini tel que $A_0 = 0$, $A_x = A_z$, $\mathcal{F}_x \otimes \mathcal{B}_{\mathbf{R}^+}$ -mesurable, et tel que $\forall s \geq 0$, $t \rightarrow A_{t+s} - A_s$ et $t \rightarrow A_t \circ \theta_s$ sont indistinguables; A est alors une g -fonctionnelle.

Le premier corollaire provient de ce que \mathcal{K}_g , comme on le voit facilement, est la tribu engendrée par les intervalles $]L, L']$, où L et L' satisfont aux hypothèses de l'énoncé de la proposition ci-dessus. Le second s'obtient en appliquant le premier corollaire au processus $Z_t = A_x - A_{t-}$.

2.3. EXEMPLES DE PROCESSUS \mathcal{H}_g ET \mathcal{H}_t -MESURABLES. — Soit X un processus fortement markovien :

a. Nous avons déjà vu que si f était borélienne de E dans \mathbf{R} , $f(X)$ était $\mathcal{H}_t^0 \cap \mathcal{G}_t^0$ -mesurable; il en résulte que, si f est presque borélienne, $f(X)$ est $\mathcal{H}_t \cap \mathcal{G}_t$ -mesurable.

b. Supposons que X admette des limites à gauche dans E , (ou plus généralement dans un compactifié \bar{E} de E). Si f est borélienne de \bar{E} dans \mathbf{R} , $f(X_-)$ [si, par convention, $f(X_{0-}) = 0$] est $\mathcal{H}_g^0 \cap \mathcal{G}_g^0$ -mesurable.

c. Soit u une fonction excessive sur E , $u(X)$ admet des limites à gauche sur un sous-ensemble U de Ω , P_m -plein quel que soit m ; nous noterons $u(X)_-$ le processus Z tel que $Z_0 = 0$,

$$\begin{aligned} Z_t(\omega) &= u(X)_{t-}(\omega) && \text{si } \omega \in U, \\ Z_t(\omega) &= 0 && \text{si } \omega \notin U; \end{aligned}$$

(1) On conviendra de poser $\sup \Phi = -\infty$, ici, et dans toute la suite de cet article.

compte tenu du fait que u est presque borélienne, on voit facilement que $u(X)_-$ est $\mathcal{H}_g \cap \mathcal{E}_3$ -mesurable.

Les processus \mathcal{H}_g -mesurables sont intéressants sous l'hypothèse (L) de Meyer qui suppose, rappelons-le l'existence d'une mesure ξ sur E , telle que les fonctions excessives ξ -p. s. nulles sont identiquement nulles; on a en effet le résultat suivant :

PROPOSITION. — *Plaçons-nous sous l'hypothèse (L) de Meyer; si A et A' sont deux ensembles aléatoires \mathcal{H}_g -mesurables P_ξ -indistinguables, ils sont indistinguables (i. e. : quelle que soit la loi initiale m , A et A' sont P_m -indistinguables).*

Démonstration. — Il suffit de raisonner dans le cas particulier où A est P_ξ -évanescent; Soit τ un temps de retour algébrique tel que $[\tau] \subset A$; on a $P_\xi[\tau > 0] = 0$. Comme la fonction $x \rightarrow P_x[\tau > 0]$ est excessive, cela entraîne $\forall x \in E, P_x[\tau > 0] = 0$. Soit alors x un point de E ; A est P_x -co-optionnel et vérifie $P_x[\tau > 0] = 0$ quel que soit le temps de retour algébrique τ tel que $[\tau] \subset A$; le théorème de section (cf. [11]) entraîne alors que A est P_x -évanescent.

G. Q. F. D.

Avant de passer aux premières applications, nous allons faire une remarque simple mais qui sera fondamentale dans la suite.

2.4. PROPOSITION. — *Supposons-nous donné un processus fortement markovien et m une loi initiale sur E .*

1. *Si Z est \mathcal{H}_g^m -mesurable, 3Z est encore \mathcal{H}_g^m -mesurable.*

2. *Si Z est \mathcal{H}_d^m -mesurable, 1Z est encore \mathcal{H}_d^m -mesurable; on a même mieux; il existe une fonction borélienne f telle que 1Z soit P_m -indistinguishable de $f(X)$.*

(Dans cet énoncé, il est entendu que les projections 3Z et 1Z sont calculées au moyen de la mesure P_m .)

Démonstration :

1. Il suffit de considérer le cas où $Z = 1_{]0, \tau[}$ (où τ est m -co-optionnelle). Soit τ' un temps de retour algébrique P_m -presque sûrement égal à τ ; posons

$$u(x) = P_x[\tau' > 0];$$

il résulte immédiatement de la définition de la projection prévisible de Z que ${}^3Z = u(X)_-$ à une P_m -évanescence près, d'où le résultat.

2. On se limite de même au cas où $Z = 1_{]0, \tau[}$ où τ est m -co-optionnelle, on pose de même

$$u(x) = P_x[\tau' > 0]$$

et l'on remarque que ${}^1Z = u(X)$.

Il résulte de 2 que tous les processus $\mathcal{H}_d^m \cap \mathcal{G}_1^m$ -mesurables sont (à un processus P_m -évanescent près) de la forme $f(X)$, où f est borélienne.

2.5. UN THÉORÈME DE DELLACHERIE. — Dellacherie a montré dans sa thèse que, un ensemble borélien qui n'était rencontré par X qu'une infinité dénombrable de fois était semi-polaire. Nous allons montrer ici que ce théorème est une conséquence facile d'un autre théorème de Dellacherie de théorie générale des processus (cf. [11]) selon lequel un ensemble prévisible mince est réunion d'une suite de graphes de temps d'arrêts prévisibles.

DÉFINITIONS. — Soit Γ un sous-ensemble borélien de E , espace d'état d'un processus fortement markovien et m une loi initiale sur E ; nous dirons que Γ est

- m -polaire si $\{(\omega, t); t > 0; X_t(\omega) \in \Gamma\}$ est P_m -évanescent.
- m -évanescent si $[X \in \Gamma]$ est P_m -évanescent.
- m -polaire à gauche si $[X_- \in \Gamma]$ est P_m -évanescent.
- m -mince si $[X \in \Gamma]$ est P_m -mince.
- m -semi-polaire s'il existe un semi-polaire borélien Γ' tel que la différence symétrique $\Gamma \Delta \Gamma'$ soit m -polaire.
- Nous dirons que Γ est m -presque borélien s'il existe Γ' borélien tel que $[X \in \Gamma]$ et $[X \in \Gamma']$ sont P_m -indistinguables. On étend de manière évidente les définitions précédentes aux ensembles m -presque boréliens.

Comme d'habitude on supprimera la mesure m si ces propriétés ont lieu quel que soit m . On notera qu'il n'existe pas d'ensemble évanescent dans E excepté l'ensemble vide. Le théorème de Dellacherie s'énonce alors ainsi :

THÉORÈME. — Soit Γ un ensemble m -presque borélien; Γ est m -mince si et seulement s'il est m -semi-polaire.

Démonstration. — Le point non trivial est de montrer qu'un ensemble m -mince est m -semi-polaire; la démonstration repose sur la remarque suivante : Si L une variable m -coprévisible et $h(X)$ la projection bien mesurable de $1_{[L]}$ (où h est borélienne) l'ensemble $[h > 0]$ est semi-polaire. Pour montrer cette remarque on considère une suite $(L_k)_{k \geq 0}$ de temps de retour algébriques tels que $[0, L]$ et $\bigcap_k [0, L_k[$ soient P_m -indistinguables; on pose

$$u_k(x) = P_x[L_k > 0]$$

et on remarque que

$$1_{[L]} = (v - \text{rég } v)(X),$$

où v est la borne inférieure des fonctions u_k . Soit alors Γ un ensemble borélien m -mince; il existe une suite L^n de temps m -coprévisible telle que $[X \in \Gamma]$ et $\sum_n [L^n]$ soient P_m -indistinguables (c'est le théorème de Dellacherie de théorie générale des processus rappelé plus haut). Projetons cette égalité sur la tribu \mathcal{G}_1^m , il vient

$$[X \in \Gamma] = \sum_n h_n(X),$$

avec $[h_n > 0]$ semi-polaire, soit encore

$$[X \in \Gamma] = \bigcup_n [X \in [h_n > 0]]$$

à une P_m -évanescence près, ce qu'il fallait démontrer.

Remarque. — Si l'on se place sous l'hypothèse (L) de Meyer avec une mesure de base ξ , il est immédiat de constater, à l'aide de la proposition 2.3 que les ensembles ξ -minces coïncident avec les ensembles minces, et les ξ -semi-polaires avec les semi-polaires. Le théorème de Dellacherie prend alors sa forme usuelle : Un ensemble est mince si et seulement s'il est semi-polaire.

2.6. COACCESSIBILITÉ DE 0. — 0 n'est pas un temps de retour algébrique (son graphe n'est pas dans $]0, \zeta[$), ni un d_0 -temps de retour; il n'empêche que $\hat{0} = \zeta$ est un temps d'arrêt de la famille \mathcal{F}_t^n ; on peut se demander à quelles conditions ce temps d'arrêt est accessible, totalement inaccessible, prévisible; on conviendra de dire dans ces trois cas que 0 est respectivement m -co-accessible, m -totalement co-accessible, m -co-prévisible (cette dernière notion n'ayant d'ailleurs pas besoin d'être redéfinie). On a le théorème suivant :

THÉORÈME. — Soit m une loi initiale sur l'espace d'états E d'un processus fortement markovien. On a les équivalences suivantes :

1. m est portée par un ensemble m -polaire \Leftrightarrow 0 est m -co-prévisible.
2. m est portée par un semi-polaire \Leftrightarrow 0 est m -co-accessible.
3. m ne charge pas les semi-polaires \Leftrightarrow 0 est m -totalement co-inaccessible.

Démonstration :

1. Supposons m portée par un ensemble m -polaire borélien Γ ; $[0]$ et $[X \in \Gamma]$ sont alors P_m -indistinguables, ce qui prouve que 0 est m -co-prévisible. Inversement, supposons 0 m -co-prévisible et projetons $[0]$ sur la tribu \mathcal{G}_1^m ; d'après la proposition 2.4, il existe une fonction borélienne f

telle que $[0]$ et $f(X)$ soient P_m -indistinguables; autrement dit f est telle que $f(X_0) = 1$, P_m -p. s. et que

$$P_m [\exists t > 0; f(X_t) \neq 0] = 0;$$

on voit alors que m est portée par $[f = 1]$ qui est m -polaire.

2. Supposons m portée par un semi-polaire Γ ; $[0]$ est alors à un ensemble P_m -évanescant près, contenu dans l'ensemble co-prévisible P_m -mince $[X \in \Gamma]$; 0 est donc m -co-accessible; inversement, supposons $[0]$ contenu dans un ensemble \mathcal{H}_t^m -mesurable mince A et projetons l'inclusion sur \mathcal{G}_t^m : il vient $1_{[0]} \leq f(X)$, où, comme nous l'avons vu au paragraphe précédent, l'ensemble $[f > 0]$ est semi-polaire; il en résulte aisément que m est portée par un semi-polaire.

3. Si 0 est totalement m -co-inaccessible et si Γ est un ensemble semi-polaire, $[0] \cap [X \in \Gamma]$ est P_m -évanescant, et par conséquent

$$m(\Gamma) = P_m [X_0 \in \Gamma] = 0;$$

inversement, supposons que m ne charge aucun semi-polaire, nous allons montrer que quel que soit le d_0 -temps de retour τ , $P_m [\tau = 0] = 0$; pour cela appelons φ une fonction borélienne, à support semi-polaire telle que $1_{[\tau]} = \varphi(X)$, on a

$$P_m [\tau = 0] = E_m [\varphi(X_0)] = \int_E m(dx) \varphi(x) = 0,$$

C. Q. F. D.

Remarque. — Le théorème précédent est sans doute plus amusant à appliquer au processus retourné de X . Supposons que X admette des limites à gauche et que le processus $\check{X}_t = X_{(\zeta-t)^+}$ muni des opérateurs de meurtre (\hat{h}_t) et de translation (\hat{k}_t) soit fortement markovien (nous verrons plus loin des conditions pour qu'il en soit ainsi). La loi initiale de \check{X} est alors la mesure $\nu = X_{\zeta-}(P_m)$. Le théorème précédent donne des conditions pour que 0 soit coprévisible relativement à (\hat{k}_t) , c'est-à-dire que ζ soit prévisible relativement à $(\hat{k}_t) = (k_t)$, c'est-à-dire, à la fin des fins, prévisible au sens usuel. On voit, par exemple que ζ est accessible si et seulement si ν est portée par un ensemble P_m -mince, ce qui est équivalent à dire (théorème de Dellacherie) que ν est portée par un ensemble semi-polaire. On peut énoncer :

COROLLAIRE. — *Supposons que X admette des limites à gauche et que le retourné régularisé à droite de X soit fortement markovien. Soit m une loi initiale sur E et ν la loi de $X_{\zeta-}$. On a les équivalences suivantes :*

- ζ est prévisible

$\Leftrightarrow \nu$ est porté par un ensemble Γ vérifiant

$$P_m [\exists t; 0 < t < \zeta; X_{t-} \in \Gamma] = 0.$$

- ζ est accessible
 $\Leftrightarrow \nu$ est porté par un semi-polaire.
- ζ est totalement inaccessible
 $\Leftrightarrow \nu$ ne charge pas les semi-polaires.

On pourra rapprocher ces résultats des résultats analogues de 1 et de 2.

2.7. PROCESSUS RELATIFS. — Reprenons les hypothèses et les notations du paragraphe 2.1 et donnons-nous un processus P_m -fortement markovien. Nous allons voir que l'emploi des opérateurs de meurtre permet d'obtenir à peu de frais une bonne réalisation du u -processus associé à une fonction excessive u par le procédé de BreLOT et Feller (nous ne traitons, il est vrai, que le cas où u est un potentiel de fonctionnelle additive). Soit m une loi initiale; donnons-nous une g_m -fonctionnelle A telle que $0 < E_m A_x < \infty$; nous définirons la probabilité \tilde{P}_m sur (Ω, \mathcal{F}^0) en posant

$$\tilde{E}_m[Z] = \frac{1}{E_m A_x} E \left[\int_0^\infty Z_0 k_s dA_s \right];$$

on remarquera que \tilde{P}_m ne change pas si A est remplacé par une fonctionnelle P_m -indistinguable de A , ce qui fait qu'on peut supposer que A est une g_0 -fonctionnelle, ce que nous ferons; posons alors

$$\tilde{E}_x[Z] = \begin{cases} \frac{1}{E_x A_x} E_x \left[\int_0^\infty Z \circ k_s dA_s \right] & \text{si } 0 < E_x A_x < \infty \\ \varepsilon_{\omega_\delta} & \text{si } E_x A_x \text{ est égal à } 0 \text{ ou l'infini} \end{cases}$$

$[\omega_\delta]$ désigne un point quelconque de $k_0^{-1}(\Omega)$. On a la proposition suivante :

PROPOSITION. — $(\Omega, k, \theta, \zeta, X, (\tilde{P}_x)_{x \in E})$ est \tilde{P}_m -fortement markovien.

Démonstration. — Appelons u la fonction $x \rightarrow E_x A_x$; nous avons à montrer que, quel que soit le temps d'arrêt algébrique T ,

$$\tilde{E}_m[Z \circ \theta_T; T < \zeta] = \tilde{E}_m[\tilde{E}_{X_T}[Z]; T < \zeta];$$

appelons α le premier membre et β le second membre; on a

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{E_m A_x} E_m \left[\int_0^\infty (Z \circ \theta_T) \circ k_s(\omega) 1_{T \circ k_s(\omega) < \zeta(\omega) \wedge s} dA_s(\omega) \right] \\ &= \frac{1}{E_m A_x} E_m \left[(T < \zeta) \int_{T, \omega} Z[\theta_{T(\omega)}[k_s(\omega)]] dA_s(\omega) \right], \end{aligned}$$

cette transformation provenant simplement du fait que

$$T \circ k_s(\omega) = \infty \quad \text{si } s \leq T(\omega) \quad \text{et} \quad T \circ k_s(\omega) = T(\omega) \quad \text{si } s > T(\omega).$$

De même on peut calculer

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{1}{E_m A_x} E_m \left[\int_{]T, \infty[} (T < \zeta) \tilde{E}_{X_T} [Z] dA_s(\omega) \right] \\ &= \frac{1}{E_m A_x} E_m [(T < \zeta) \tilde{E}_{X_T} [Z] u(X_T)]; \end{aligned}$$

on remarquera alors que

$$P_m [X_T \in [u = \infty]] = 0.$$

Ce qui nous autorise à écrire

$$\beta = \frac{1}{E_m A_x} E_m \left[(T < \zeta) E_{X_T} \int_0^\infty Z \circ k_s dA_s \right];$$

comparant alors les deux valeurs ainsi calculées de α et β , on voit que nous aurons gagné si l'on montre que

$$\left(\int_0^\infty Z \circ k_s dA_s \right) \circ \theta_T = \int_{]T, \infty[} Z [\theta_{T(\omega)} [k_s(\omega)]] dA_s(\omega),$$

ce qui est facile.

On remarquera que

$$(0 < u(x) < \infty) \Rightarrow \tilde{E}_x [f(X_t)] = \frac{1}{u(x)} E_x [u(X_t) f(X_t)].$$

Le processus construit est donc bien une réalisation du u -processus (cf. [13]). Si le processus initial était supposé fortement markovien, le u -processus ainsi construit à la propriété suivante : quel que soit x vérifiant $0 < u(x) < \infty$, X est \tilde{P}_x -fortement markovien; cela rend aisée la construction d'un u -processus fortement markovien à valeur dans l'espace d'états $E_u = [0 < u < \infty]$. On bénéficie de la sorte des avantages venus du fait que Ω et X sont à peu près fixes : la réalisation ainsi construite est automatiquement continue à droite, ou limitée à gauche, ou continue sur $]0, \zeta[$, si le processus initial avait la propriété correspondante.

Faisons une dernière remarque : prenons pour g_m -fonctionnelle A le processus $A_t = 1_{]0 < \tau \leq t]}$ où τ est m -co-optionnel; soit τ' un g_0 -temps de retour P_m -p. s. égal à τ et $u(x) = P_x [\tau' > 0]$. On a alors, si $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$,

$$\tilde{E}_m [f_1(X_{t_1}); f_2(X_{t_2}) \dots f_n(X_{t_n})] = \frac{1}{E_m A_x} E_m [f_1(X_{t_1}) \dots f_n(X_{t_n}); \tau > t_n].$$

On en tire la conséquence suivante. Appelons \bar{X}_t le processus tué en τ c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \bar{X}_t(\omega) = X_t(\omega) & \text{si } t < \tau(\omega), \\ \bar{X}_t(\omega) = \delta & \text{si } t \geq \tau(\omega). \end{cases}$$

Munissons Ω de la mesure P' définie par

$$P'(A) = \frac{P(A \cap [\tau > 0])}{P[\tau > 0]}$$

les processus (Ω, \tilde{P}, X) et (Ω, P', X) sont clairement équivalents; comme le premier est fortement markovien, le second l'est aussi; on retrouve ainsi un résultat connu [23].

2.8. Supposons maintenant que X soit P -modérément markovien, c'est-à-dire que l'on ait

$$E[Z \circ \theta_T; T \leq \zeta] = E[E_{X_T}[Z]; T \leq \zeta],$$

quel que soit le temp d'arrêt algébrique prévisible T ; donnons-nous alors une d_0 -fonctionnelle A (ou plus généralement une fonctionnelle P -indistinguable d'une d_0 -fonctionnelle) et posons comme précédemment

$$\begin{aligned} \tilde{E}[Z] &= \frac{1}{EA_x} E\left[\int_0^\infty Z \circ k_s dA_s\right], \\ \tilde{E}_x[Z] &= \begin{cases} \frac{1}{E_x[A_x]} E_x\left[\int_0^\infty Z \circ k_s dA_s\right] & \text{si } 0 < u(x) < +\infty, \\ \varepsilon_{\omega_\beta} & \text{si } u(x) = 0 \text{ où l'infini.} \end{cases} \end{aligned}$$

On a alors de la même façon la

PROPOSITION. — $(\Omega, k, \theta, \zeta, X, (\tilde{P}_x))$ est \tilde{P} -modérément markovien.

La méthode est la même qu'au paragraphe précédent : montrons que

$$\tilde{E}[Z \circ \theta_T; 0 < T \leq \zeta] = \tilde{E}[\tilde{E}_{X_T}[Z]; 0 < T \leq \zeta]$$

quel que soit T prévisible algébrique; appelons α la premier membre et β le second membre; on peut écrire

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{EA_x} E\left[\int_0^\infty (Z \circ \theta_T \circ k_s) 1_{[T \circ k_s < \alpha]} dA_s\right] = \frac{1}{EA_x} E\left[\int_{[T, \alpha[} Z(\theta_{T(\omega)}[k_s \omega]) dA_s\right], \\ \beta &= \frac{1}{EA_x} E\left[\int_0^\infty (\tilde{E}_{X_T}[Z]) \circ k_s 1_{[T \circ k_s < \alpha]} dA_s\right] = \frac{1}{EA_x} E[(T < \infty); \tilde{E}_{X_T}[Z] E_m[A_x - A_{T-}]]. \end{aligned}$$

Mais, puisque

$$A_x - A_{T-} = A_x \circ \theta_T,$$

on a

$$E_m[A_x - A_{T-} | F_{T-}] = E_{X_T}[A_x]$$

d'après la propriété de Markov modérée; on a donc

$$\beta = \frac{1}{EA_x} E\left[(T < \infty) E_{X_T}\left[\int_0^\infty (Z \circ k_s) dA_s\right]\right];$$

il suffit donc pour montrer que $\alpha = \beta$, d'établir l'égalité

$$\left(\int_{[0, \alpha]} Z \circ k_s dA_s \right) \circ \theta_T = \int_{[T, \alpha]} Z(\theta_{T(\omega)}(k_s(\omega))) dA_s(\omega),$$

ce qui va bien.

Application. — Si τ est un temps m -co-prévisible et X un processus P_m -modérément markovien, le processus X défini par

$$\bar{X}_t(\omega) = X_t(\omega) \text{ si } t \leq \tau(\omega), \quad \bar{X}_t(\omega) = \delta \text{ si } t > \tau(\omega)$$

est encore modérément markovien.

3. Deux théorèmes de dualité

Nous nous proposons dans ce chapitre, de montrer les deux résultats suivants qui auront des conséquences importantes.

THÉORÈME. — *Soit m une loi initiale sur l'espace d'état E d'un processus fortement markovien et Z un processus $\mathcal{F}_x \otimes \mathcal{B}_{\mathbf{R}^+}$ -mesurable.*

1. *Les processus ${}^3({}^sZ)$ et ${}^s({}^3Z)$ sont P_m -indistinguables.*
2. *Les processus ${}^1({}^dZ)$ et ${}^d({}^1Z)$ sont P_m -indistinguables.*

(Les projections considérées ici le sont, bien entendu, relativement à la probabilité P_m .)

3.1. Occupons-nous du premier théorème : nous allons voir que c'est une conséquence à peu près immédiate du théorème de représentation des potentiels de Meyer étendu par Benveniste [5] aux processus fortement markoviens. On a la proposition suivante :

PROPOSITION. — *Soit A une g_m -fonctionnelle telle que A_x soit bornée; la projection duale de A sur \mathcal{G}_x^m est encore une g_m -fonctionnelle.*

Démonstration. — On peut raisonner à une P_m -indistinguabilité près; soit A' une g_0 -fonctionnelle -indistinguable de A , et soit u la fonction excessive définie par $u(x) = E_x A_x$; u est un potentiel de la classe (D) fini; le théorème de Meyer affirme l'existence d'une fonctionnelle additive prévisible B engendrant u . B est \mathcal{H}_g^m -mesurable (prop. 2.2, cor. 2), et est la projection duale de A' (donc de A) sur \mathcal{G}_x^m .

On peut alors montrer le premier théorème de dualité :

On sait (prop. 3.4) que ${}^3({}^sZ)$ est \mathcal{H}_g^m -mesurable; il nous suffit donc de montrer que pour tout temps de retour algébrique τ , on a l'égalité

$$E_m [{}^3Z_\tau] = E_m [{}^3({}^sZ)_\tau];$$

appelons A la fonctionnelle additive prévisible engendrant le potentiel $x \rightarrow P_x[\tau > 0]$ (ou, ce qui revient au même, la projection prévisible du g_0 -processus croissant $B_t = 1)_{0 < t \leq \tau}$); on a alors

$$\begin{aligned} E_m [{}^3Z_\tau] &= E_m \left[\int_0^\infty {}^3Z_t dB_t \right] = E_m \left[\int_0^\infty {}^3Z_t dA_t \right] = E_m \left[\int_0^\infty Z_t dA_t \right], \\ E_m [{}^{3g}Z_\tau] &= E_m \left[\int_0^\infty {}^{3g}Z_t dB_t \right] \\ &= E_m \left[\int_0^\infty {}^{3g}Z_t dA_t \right] = E_m \left[\int_0^\infty {}^gZ_t dA_t \right] = E_m \left[\int_0^\infty Z_t dA_t \right], \end{aligned}$$

d'où le résultat.

Pour établir la seconde formule de dualité, nous procéderons d'une manière analogue, mais nous aurons besoin d'un « théorème de Meyer » pour les fonctions surmédianes régulières. Nous allons donc revenir à la théorie générale des processus afin d'étudier les surmartingales régulières.

3.2. COMPLÉMENTS SUR LA THÉORIE GÉNÉRALE DES PROCESSUS : PROJECTION BIEN-MESURABLE D'UN PROCESSUS CROISSANT. — $(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$ est un espace de probabilité muni d'une famille croissante de tribus, continue à droite et contenant les ensembles de mesure nulle de \mathcal{F}_∞ .

Nous appellerons processus croissant intégrable (p. c. i.) un processus croissant $(A_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$, continu à droite, positif, tel que $E A_\infty < \infty$ (noter que A_0 n'est pas nécessairement nul). On appellera A_- le processus défini par $A_{0-} = 0$,

$$A_{t-}(\omega) = \lim_{s \uparrow t} A_s(\omega) \quad \text{si } t > 0.$$

SURMARTINGALES. — En suivant J. F. Mertens [16] nous appellerons surmartingale un processus X bien mesurable (non nécessairement continu à droite) tel que pour tout temps d'arrêt S et T bornés, on ait :

1. $X_{S-} \in L^1$.
2. $E[X_T | \mathcal{F}_S] \leq X_S$ p. s.

Nous ne nous occuperons ici que de potentiels, dont la définition sera la suivante :

Nous dirons qu'une surmartingale positive est un potentiel régulier de la classe (Δ) (en abrégé Δ -potentiel) si la famille $(X_T)_{T \in \mathcal{C}}$ est équi-intégrable (\mathcal{C} désigne la famille des temps d'arrêt) et si

$$\lim_n EX_{T_n} = EX_T,$$

chaque fois que (T_n) est une suite croissante de temps d'arrêt de limite T ; (dans cette formule on pose par convention $X_\infty = 0$).

Si A est un p. c. i., on appellera Δ -potentiel engendré par A la projection bien mesurable du processus $A_x - A_-$, c'est-à-dire le processus mesurable X vérifiant l'égalité

$$X_T = E[A_x - A_{T-} | F_T] \quad \text{quel que soit } T \in \mathfrak{F}.$$

On peut alors entreprendre une théorie parallèle au théorème de représentation des potentiels de la classe (D) de Meyer.

PROPOSITION. — Soient A et B deux p. c. i.; A et B ont même projection duale sur la tribu \mathfrak{F}_1 des ensembles bien mesurables si et seulement s'ils engendrent le même Δ -potentiel.

Démonstration. — Appelons μ et ν les mesures sur $\mathfrak{F}_x \otimes \mathfrak{B}_{\mathbf{R}^+}$ déterminées par A et B . Si A et B engendrent le même Δ -potentiel, on peut écrire pour un intervalle stochastique $[S, T[$,

$$\mu[S, T[= E[A_{T-} - A_{S-}] = E[X_S - X_T] = \nu[S, T[;$$

μ et ν coïncident donc sur la tribu \mathfrak{F}_1 , et par conséquent on a pour tout Z -mesurable borné :

$$E\left[\int_0^x Z_t dA_t\right] = E\left[\int_0^x Z_t dA_t\right] = E\left[\int_0^x Z_t dB_t\right] = E\left[\int_0^x Z_t dB_t\right].$$

Inversement, si $A^1 = B^1$; on a pour tout temps d'arrêt T ,

$$E[A_x - A_{T-}] = \mu[T, \infty[= \nu[T, \infty[= E[B_x - B_{T-}],$$

d'où le résultat.

THÉORÈME. — Soit X un Δ -potentiel, il existe un processus croissant bien mesurable intégrable A unique qui engendre X . A est continu si et seulement si X est continue à droite.

Démonstration. — L'unicité résulte immédiatement de la proposition précédente. Quant à l'existence, c'est une conséquence triviale d'un résultat de Mertens (*Z. Wahr.*, Band 22, Heft 1, 1972, théorème T. 3, p. 53). D'après ce théorème, il existe en effet un processus prévisible B , à trajectoires croissantes, nul à l'origine, tel que $X + B$ soit une martingale. (Mertens montre ce résultat pour toute surmartingale positive.) Puisque, dans notre cas X est un potentiel ($EX_t \rightarrow 0$ si $t \rightarrow \infty$), il en résulte que B_x est intégrable et qu'on peut écrire

$$X_T = E[B_x - B_T | F_T]$$

pour tout temps d'arrêt. Nous allons voir maintenant que le fait que X soit régulière entraîne la continuité à gauche de B . Si, en effet T est prévisible annoncé par la suite $(T_n)_{n \geq 0}$, on a

$$E[X_{T_n}; T_n < \infty] = E[B_x - B_{T_n}; T_n < \infty];$$

à la limite,

$$E[X_T; T < \infty] = E[B_x - B_{T-}; T < \infty] = E[B_x - B_T; T < \infty].$$

On a donc

$$E[B_T; T < \infty] = E[B_{T-}; T < \infty]$$

quel que soit T prévisible; les processus B et B étant prévisibles, ils sont égaux. Le processus A régularisé à droite de B répond alors à la question.

On peut alors écrire, de manière à peu près évidente $A - A_- = X - X_+$ (X_+ désignant la régularisée à droite de X), ce qui montre l'assertion relative à la continuité de A .

On peut aller un peu plus loin et écrire la partie purement discontinue de A : c'est le processus

$$C_t = \sum_{s \leq t} (A_s - A_{s-}) = \sum_{s \leq t} (X_s - X_{s+}).$$

Le processus $A - C$ est alors continu et son potentiel est donc régulier de la classe (D). On peut donc énoncer le corollaire suivant qui nous sera utile pour le cas des processus de Markov.

COROLLAIRE. — Soit X un Δ -potentiel et soit

$$C_t = \sum_{s \leq t} (X_s - X_{s+});$$

C_x est intégrable et le processus bien mesurable unique Y vérifiant pour tout temps d'arrêt T ,

$$Y_T = X_T - E \left[\sum_{s \geq T} (X_s - X_{s+}) \mid F_T \right]$$

est un potentiel régulier de la classe (D).

3.3. REPRÉSENTATION DES POTENTIELS FORTEMENT SURMÉDIANS RÉGULIERS. — Revenons maintenant à la situation antérieure, et supposons-nous donné un processus fortement markovien.

On dira qu'une fonction positive presque borélienne v est fortement surmédiane si, pour tout couple (S, T) de temps d'arrêt avec $S \leq T$, $P_S v \geq P_T v$;

Mertens [*Strongly supermedian functions and optimal stopping* (à paraître)] a montré que, pour qu'il en soit ainsi, il suffisait que v vérifie $P_S v \leq v$, $\forall S \in \mathfrak{C}$, et même qu'il suffisait de se restreindre aux temps d'entrée dans les compacts. Si v est fortement surmédiane, on appellera $\text{reg } v$ la fonction excessive $\sup_{t > 0} P_t v$. On sait [8] que v ne diffère de $\text{reg } v$ que sur un ensemble semi-polaire. De plus $v(X)_+ = (\text{reg } v)(X)$. Nous dirons qu'une fonction

fortement surmédiane est un Δ -potentiel si $P_{T_n} v \searrow P_T v$ chaque fois qu'une suite (T_n) de temps d'arrêt tend en croissant vers T (on pose $P_x v = 0$), et si la famille de v. a. $(v(X_T))_{T \in \mathfrak{E}}$ est équi-intégrable quelle que soit la loi initiale. Si v est un Δ -potentiel et m une loi initiale, $v(X)$ est un Δ -potentiel, au sens du paragraphe précédent, relativement au triplet $(\Omega, \mathfrak{F}_t^m, P_m)$.

On remarquera enfin, que si A est une d_0 -fonctionnelle, $v = E A_x$ est un Δ -potentiel; on peut en effet écrire

$$P_T v(x) = E_x [A_x - A_{T-}];$$

reg v est un potentiel de la classe (D) engendré par la g_0 -fonctionnelle $A_t - A_0$. Il en résulte que $\{x; E_x A_0 > 0\}$ est semi-polaire.

THÉORÈME. — Soit v un Δ -potentiel fini; il existe une d -fonctionnelle additive bien mesurable, unique à une indistinguabilité près, telle que

$$v(x) = E_x A_x, \quad \forall x.$$

Démonstration. — Appelons u la régularisée excessive de V ; il résulte immédiatement du corollaire 3.2, que la fonction

$$W = v - E \left[\sum_{0 \leq s < \infty} (v - u)(X_s) \right]$$

est un potentiel régulier de la classe (D); il existe alors d'après le théorème de Meyer une fonctionnelle additive continue B telle que $W = E B_x$. La d -fonctionnelle

$$A_t = B_t + \sum_{s \leq t} (v - u)(X_s)$$

répond alors à la question. L'unicité résulte du théorème 3.2.

On peut alors démontrer le second théorème de dualité de manière parallèle à la démonstration du premier.

Nous avons à montrer que

$$E_m [{}^{1d}Z_\tau] = E_m [{}^{d1}Z_\tau] \quad \text{pour tout } d_0\text{-temps de retour};$$

on appelle alors A la d -fonctionnelle additive bien mesurable engendrant le Δ -potentiel $P_\cdot [\tau \geq 0]$. A est la projection duale sur la tribu \mathfrak{F}_1^m de la d_0 -fonctionnelle $B_t = 1_{\{0 \leq \tau \leq t\}}$; on peut donc écrire

$$\begin{aligned} E [{}^{1d}Z_\tau] &= E \left[\int_0^\infty {}^{1d}Z_t dB_t \right] = E \left[\int_0^\infty Z_t dA_t \right], \\ E [{}^{d1}Z_\tau] &= E \left[\int_0^\infty {}^{d1}Z_t dB_t \right] = E \left[\int_0^\infty Z_t dA_t \right]. \end{aligned}$$

C. Q. F. D.

Remarque. — Nous avons montré que la projection prévisible d'une g -fonctionnelle était encore une g -fonctionnelle et que la projection bien mesurable d'une d -fonctionnelle était encore une d -fonctionnelle. Signalons, pour être complet, que Gettoor et Sharpe ont montré dans [13] que la projection bien mesurable d'une g -fonctionnelle d'un processus de Hunt est encore une g -fonctionnelle et donnent une caractérisation très intéressante de cette projection. Nous ne nous servons pas de ce résultat ici.

3. MESURES SUR E ET FONCTIONNELLES ADDITIVES. — On sait depuis longtemps qu'il y a correspondance entre les « potentiels » et les mesures sur l'espace d'état, tout au moins sous des hypothèses convenables qui se ramènent toutes, plus ou moins, à l'existence d'un processus dual ayant de bonnes propriétés : hypothèse (F) chez Hunt, affaiblie par Kunita et Watanabe [14]. Plus récemment, les travaux d'Azema-Kaplan-Revuz [4] et de Revuz [27] ont permis d'associer une mesure à une fonctionnelle additive, quand on dispose de deux processus standard en dualité sous hypothèses de régularité sur les résolvantes. Tous ces travaux supposent l'existence d'une bonne « densité potentiel » $g(x, y)$ et l'on cherche à identifier un potentiel donné u à une intégrale

$$\int_E g(x, y) \nu_u(dy).$$

Nous nous placerons ici d'un point de vue un peu différent : on se donne une loi initiale m ; à chaque fonctionnelle additive A on peut associer une mesure μ_A sur E , en posant

$$\mu_A(f) = E_m \left[\int_0^\infty f(X_t) dA_t \right].$$

Le problème que nous cherchons à résoudre est : réciproquement, si l'on se donne une mesure μ sur E , existe-t-il une « fonctionnelle » A telle que $\mu = \mu_A$? Nous allons voir que, si l'on ne fait pas d'hypothèse particulière la classe des fonctionnelles additives qui se prête bien à la résolution du problème est celle des d -fonctionnelles bien mesurables. En revanche, si l'on se place sous des hypothèses plus fortes, et qui, nous le verrons plus loin, reviennent à supposer que le processus retourné régularisé à droite est fortement markovien, on peut résoudre le problème en restant dans le cadre des g -fonctionnelles prévisibles, c'est-à-dire des fonctionnelles additives prévisibles au sens usuel. Si l'on ne veut pas faire d'hypothèses de dualité, ce sont donc les potentiels surmédians réguliers de la classe (Δ) [et non les potentiels excessifs de la classe (D) qui sont en correspondance avec les mesures sur E]; on rejoint là des résultats de Mokobodski [25].

L'HYPOTHÈSE (CMF). — Soit m une loi initiale et $(\Omega, k, \theta, \zeta, X, (P_x))$ un processus fortement markovien. Nous dirons que X satisfait à (CMF) relativement à m si

- X est limité à gauche sur $]0, \zeta[$;
- à tout processus $Z, \mathcal{H}_x^0 \cap \mathcal{F}_x^0$ -mesurable on peut associer une fonction f borélienne sur E telle que Z et $f(X_-)$ soient P_m -indistinguables.

Nous avons dit plus haut que les fonctionnelles que nous considérerons sont d'une part les d -fonctionnelles bien-mesurables et d'autre part, les g -fonctionnelles prévisibles. Nous appellerons fonctionnelles droites les premières et fonctionnelles gauches les secondes; plus précisément,

DÉFINITIONS. — Soit m une loi initiale sur E . Nous appellerons fonctionnelle droite un processus croissant positif continu à droite tel que

- a. A_t est $\mathcal{F}_t^m \cap \mathcal{F}^0$ -mesurable quel que soit $t \geq 0$.
- b. $\forall t \geq 0, \forall s \geq 0, \forall \omega, A_{t+s}(\omega) = A_{t-}(\omega) + A_s \circ \theta_t(\omega)$.
- c. $A_t(\omega) = A_{\zeta-}(\omega), \forall t \geq \zeta(\omega)$.

Nous appellerons fonctionnelle gauche un processus croissant prévisible continu à droite tel que

- a. A_t est $\mathcal{F}_t^m \cap \mathcal{F}^0$ -mesurable quel que soit $t \geq 0$.
- b. $\forall t \geq 0, \forall s \geq 0, \forall \omega, A_{t+s}(\omega) = A_t(\omega) + A_s \circ \theta_t(\omega)$.
- c. $A_0 = 0$ et $A_t(\omega) = A_{\zeta}(\omega), \forall t \geq \zeta(\omega)$.

On peut alors énoncer les deux résultats suivants :

THÉORÈME. — Soit m une loi initiale sur E .

1. Soit μ une mesure positive sur E , bornée, ne chargeant pas les ensembles m -évanescents, il existe une fonctionnelle droite A , unique à une P_m -évanescence près vérifiant

$$\mu(f) = E_m \left[\int_0^\infty f(X_t) dA_t \right],$$

quelle que soit f borélienne bornée.

A est continue si et seulement si μ ne charge pas les ensembles semi-polaires.

2. Supposons en outre que X satisfait à (CMF) relativement à m et prenons maintenant une mesure μ ne chargeant pas les ensembles m -polaires à gauche; il existe une fonctionnelle gauche unique A vérifiant

$$\mu(f) = E_m \left[\int_0^\infty f(X_{t-}) dA_t \right],$$

quelle que soit f borélienne bornée.

A est continue si et seulement si μ ne charge pas les semi-polaires.

Démonstration. — Si Z est un processus mesurable borné, il existe une fonction borélienne φ telle que 1dZ et $\varphi(X)$ soient P_m -indistinguables. Deux fonctions φ associées de cette manière à un même processus Z ne diffèrent que sur un ensemble m -évanescents, de sorte que l'on définit sans ambiguïté une mesure ν sur $\Omega \times \mathbf{R}_+$ en posant

$$\nu(Z) = \mu(\varphi).$$

La mesure ν vérifie les égalités

$$\nu({}^dZ) = \nu(Z) \quad \text{et} \quad \nu({}^1Z) = \nu(Z)$$

(la première égalité est triviale et la seconde provient des égalités

$${}^1dZ = {}^d{}^1Z = {}^dZ = {}^1dZ$$

qui sont valables à une P_m -évanescence près en vertu du deuxième théorème de dualité. L'égalité $\nu({}^dZ) = \nu(Z)$ montre qu'il est possible de choisir le processus croissant continu à droite A associé à ν selon les techniques usuelles de la (co)-théorie générale des processus, de manière à ce que A soit une d_0 -fonctionnelle. Mais l'égalité $\nu({}^1Z) = \nu(Z)$ prouve alors que A_t est \mathcal{F}_t^m -mesurable.

C. Q. F. D.

Montrons alors l'unicité de A : Si A et A' sont deux fonctionnelles droites vérifiant

$$E_m \left[\int_0^\infty f(X_t) dA_t \right] = E_m \left[\int_0^\infty f(X_t) dA'_t \right]$$

quelle que soit f borélienne bornée, on pourra écrire

$$\langle A, {}^1dZ \rangle_m = \langle A', {}^1dZ \rangle_m,$$

quel que soit le processus Z mesurable bornée; on aura donc $A^{1d} = A'^{1d}$; A et A' sont donc P_m -indistinguables. Supposons enfin que μ ne charge aucun ensemble semi-polaire; puisque l'ensemble $[A - A_- > 0]$ est $\mathcal{F}_1^m \cap \mathcal{A}_d^0$ -mesurable, il est P_m -indistinguishable d'un ensemble aléatoire $[X \in \Gamma]$ où Γ est un borélien de E ; et puisqu'il est P_m -mince, on peut supposer (théorème de Dellacherie) que Γ est semi-polaire. On aura alors

$$0 = \mu(\Gamma) = E_m \left[\int_0^\infty 1_{[A - A_- > 0]}(\omega, s) dA_s \right],$$

ce qui montre que A a P_m -presque toutes ses trajectoires continues.

L'hypothèse (CMF) est manifestement faite sur mesures pour qu'un raisonnement en tout point analogue montre la deuxième partie du théorème.

3.5. COMPLÉMENTS AU THÉORÈME PRÉCÉDENT :

1. Soit μ une mesure ne chargeant pas les ensembles m -évanescents et A la fonctionnelle droite associée à μ ; on a la formule

$$E_{\mu}[Z] = E_m \left[\int_0^{\infty} Z \circ \theta_s dA_s \right],$$

quelle que soit la variable aléatoire Z , \mathfrak{F}^0 -mesurable bornée; on peut en effet écrire

$$E_m \left[\int_0^{\infty} Z \circ \theta_s dA_s \right] = E_m \left[\int_0^{\infty} {}^1(Z \circ \theta_s) dA_s \right] = E_m \left[\int_0^{\infty} E_{X_s} [Z] dA_s \right] = \int_E \mu(dy) E_Y [Z].$$

2. Supposons en outre que X soit un processus de Hunt satisfaisant à (CMF), et soit μ la mesure introduite en 1. On sait (voir, par exemple, [2]) que pour un processus de Hunt tout ensemble m -polaire est m -polaire à gauche. Appelons B la fonctionnelle additive gauche associée à μ . On peut écrire de la même manière

$$E_m \left[\int_0^{\infty} Z \circ \theta_s dB_s \right] = E_m \left[\int_0^{\infty} {}^3(Z \circ \theta_s) dB_s \right] = E_m \left[\int_0^{\infty} E_{X_{s-}} [Z] dB_s \right] = \int_E \mu(dy) E_Y (Z)$$

de sorte que

$$E_{\mu}(Z) = E_m \int_0^{\infty} Z \circ \theta_s dB_s.$$

On peut donc écrire

$$E_m \left[\int_0^{\infty} Z \circ \theta_s dB_s \right] = E_m \left[\int_0^{\infty} Z \circ \theta_s dA_s \right]$$

on a donc $A = B^d$.

4. Le retournement du temps

4.1. Nous supposerons dans ce chapitre Ω lusinien; il peut paraître abusif dans ces conditions de continuer à considérer des processus fortement markoviens sans supposer l'existence de limites à gauche (on sait en effet que l'ensemble des fonctions de \mathbf{R}_+ dans un espace d'état E polonais, continues à droite et limitées à gauche est lusinien si on le munit de la topologie de Skohorod, mais on ne sait rien dire de tel si l'on supprime la condition « limitées à gauche »). Nous le ferons cependant, dans le but de montrer que l'obstacle principal à la généralisation des résultats qui vont suivre est la maladresse de l'auteur à manier des espaces un peu plus sophistiqués (en particulier les espaces dont le complémentaire est sous-linien). Dans la démonstration du théorème de Chung et Walsh par

exemple, l'existence de limites à gauche n'intervient nulle part explicitement.

Ω est donc un borélien d'un certain compact métrisable; nous noterons $\bar{\Omega}$ la fermeture de Ω dans ce compact. Les théorèmes de dualité vont nous permettre de construire directement sur Ω la famille de probabilités relative au processus retourné sans passer par la construction d'un semi-groupe sur l'espace d'états, ce qui simplifie, nous allons le voir, notablement les choses.

Nous utiliserons un théorème de relèvement dû à Mokobodski [24] que nous réénoncerons ici pour plus de clarté.

THÉORÈME. — Soit $\mathcal{B}(\mathbb{E})$ l'ensemble des fonctions boréliennes bornées sur \mathbb{E} . Appelons \mathcal{U} (resp. \mathcal{U}') la famille des ensembles m -évanescents boréliens (resp. la famille des ensembles m -polaires à gauche boréliens); il existe une application linéaire φ (resp. φ') de $\mathcal{B}(\mathbb{E})$ dans $\mathcal{B}(\mathbb{E})$ vérifiant les propriétés suivantes :

- a. $[\varphi(f) \neq f] \in \mathcal{U}$ (resp. $[\varphi'(f) \neq f] \in \mathcal{U}'$).
- b. $\forall f \in \mathcal{B}(\mathbb{E}), \forall g \in \mathcal{B}(\mathbb{E}), [f \neq g] \in \mathcal{U} \Rightarrow \varphi(f) = \varphi(g)$
[resp. $[f \neq g] \in \mathcal{U}' \Rightarrow \varphi'(f) = \varphi'(g)$].
- c. $\varphi(1) = \varphi'(1) = 1; [f < g] \in \mathcal{U} \Rightarrow \varphi(f) \geq \varphi(g)$
[resp. $[f < g] \in \mathcal{U}' \Rightarrow \varphi'(f) \geq \varphi'(g)$].

4.2. UN THÉORÈME DE CHUNG ET WALSH [9], [22]. — Soit m une loi initiale sur l'espace d'état \mathbb{E} d'un processus fortement markovien; nous allons construire une famille de probabilités \hat{P}_y sur Ω telle que \hat{X} soit P_m -modérément markovien par rapport à la famille (\hat{P}_y) ; on a le théorème suivant :

THÉORÈME. — Il existe une famille $(\hat{P}_y)_{y \in \mathbb{E}}$ de probabilités sur Ω telle que le processus $(\Omega, \hat{\theta}, \hat{k}, \xi, \hat{X}, (\hat{P}_y), \mathbb{E})$ soit P_m -modérément markovien.

(Rappelons que $\hat{\theta}_t$ est un opérateur de meurtre et \hat{k}_t un opérateur de translation.)

Démonstration. — Soit Z une variable aléatoire \mathcal{F}^0 -mesurable bornée; le processus $s \rightarrow Z \circ k_s$ est alors prévisible, donc bien mesurable. Il existe donc une fonction $x \rightarrow \varphi(x, Z)$ borélienne telle que $\varphi(\hat{X}, Z)$ soit P_m -indistinguible de ${}^a(Z \circ k)$. On a : (1) $\varphi(\cdot, Z) + \varphi(\cdot, Z') = \varphi(\cdot, Z + Z')$ m -p. q. (i. e. sauf peut-être sur un ensemble m -évanescent); (2) $\varphi(\cdot, 1) = 1$ m -q. p. et (3) si $Z_n \uparrow Z$, $\varphi(\cdot, Z_n) \uparrow \varphi(\cdot, Z)$ m -q. p. Le théorème de relèvement de Mokobodski permet de choisir φ de manière à ce que la relation (1) ait

lieu partout et à ce que $\varphi(\cdot, 1) = 1$. Appelons maintenant $\mathcal{C}(\bar{\Omega})$ l'espace des fonctions continues bornées sur $\bar{\Omega}$; si $\bar{Z} \in \mathcal{C}(\bar{\Omega})$ et si y est un point de E , $\bar{Z} \rightarrow \varphi(y, \bar{Z} \uparrow \Omega)$ définit une forme linéaire ≥ 0 sur $\mathcal{C}(\bar{\Omega})$ donc une probabilité \hat{P}'_y sur $\bar{\Omega}$. On remarque alors que si ν est une mesure ne chargeant pas les ensembles de \mathcal{N} la mesure $\hat{P}_\nu = \int \hat{P}'_y \nu(dy)$ est portée par Ω : en effet, si $\mathcal{B}(\bar{\Omega})$ désigne l'espace des fonctions boréliennes bornées sur $\bar{\Omega}$, l'ensemble

$$\left\{ Y \in \mathcal{B}(\bar{\Omega}); \int \nu(dy) \varphi(y, Y \uparrow \Omega) = \hat{E}_\nu(Y) \right\}$$

est stable pour le passage à la limite monotone d'après (3) et contient $\mathcal{C}(\bar{\Omega})$; on a donc

$$\int \nu(dy) \varphi(y, Y \uparrow \Omega) = \hat{E}_\nu[Y]$$

quel que soit Y dans $\mathcal{B}(\bar{\Omega})$; le résultat cherché en découle en prenant $Y = 1_{\Omega}$.

Nous allons en déduire qu'il existe un ensemble m -évanescent borélien N tel que, si $y \notin N$, \hat{P}'_y est portée par Ω ; posons en effet

$$N = \{y; \hat{P}'_y(\Omega) < 1\}.$$

Si ν ne charge pas les ensembles m -évanescents, $\int \hat{P}'_y(\Omega) \nu(dy) = 1$ et, par conséquent $\nu(N) = 0$; d'après une conséquence facile du théorème de section, N , qui est de mesure nulle pour toute mesure ne chargeant pas les m -évanescents est lui-même m -évanescent. On posera alors $\hat{P}'_y = \hat{P}'_{\omega_0} \uparrow \Omega$ si $y \in N$, $\hat{P}'_y = \varepsilon_{\omega_0}$ [où ω_0 est un point quelconque de $k_{\omega_0}^+(\Omega)$], si $y \notin N$.

Nous allons voir alors qu'il est à peu près évident que le processus ainsi construit est modérément markovien. Pour toute variable aléatoire Z \mathcal{F}^0 -mesurable, $\hat{E}_x[Z]$ est projection sur \mathcal{H}_t^m du processus $Z \circ k$; autrement dit, on peut écrire pour tout temps de retour algébrique co-prévisible

$$E_m[Z \circ k_\tau; \tau \geq 0] = E_m[\hat{E}_{X_\tau}[Z]; \tau \geq 0];$$

ou, ce qui revient au même, on peut écrire pour tout temps d'arrêt prévisible algébrique T de la famille $(\hat{\theta}_t)$:

$$E_m[Z \circ \hat{k}_T; T \leq \zeta] = E_m[\hat{E}_{X_T}[Z]; T \leq \zeta].$$

C. Q. F. D.

4.3. L'HYPOTHÈSE (CMF) ET LE RETOURNEMENT DU TEMPS. — On a le théorème suivant :

THÉORÈME. — Soit m une loi initiale sur E ; supposons que le processus fortement markovien $(\Omega, k, \theta, \zeta, X, (P_x))$ satisfasse à (CMF) relativement à m .

Appelons \check{X} le retourné à ζ du processus X_- . Il existe une famille $(\check{P}_y)_{y \in E}$ de probabilités sur Ω telle que $(\Omega, \hat{\theta}, \hat{k}, \zeta, \check{X}, (\check{P}_y))$ soit P_m -fortement markovien.

La démonstration de ce théorème est en tout point analogue à celle du précédent : la famille (\check{P}_y) est obtenue en choisant une « bonne version » de la projection sur \mathcal{A}_g^m du processus $Z \circ k_-$; $(Z \circ k_-)$ étant en effet $\mathcal{A}_g^m \cap \mathcal{G}_g^m$ -mesurable est en effet indistinguable sous (CMF) d'un certain processus de la forme $\psi(X_-, Z)$; on continue comme dans la démonstration du théorème 4.2.

Remarques :

1. Le sigle (CMF) trouve ainsi sa justification : c'est une abréviation pour co-markovien-fort.

2. On peut rapprocher l'hypothèse (CMF) de la condition suivante : tout temps d'arrêt terminal prévisible est le début d'un ensemble aléatoire de la forme $[X_- \in \Gamma]$ où Γ est un borélien de E . Or il résulte des travaux de Weil que cette dernière condition est équivalente à l'existence d'une topologie cofine (hypothèse (CF) de Walsh et Weil [30]). Il paraît donc assez probable que le théorème 4.3 soit une autre formulation de résultats dus à Smythe et Walsh [28] selon lesquels on peut construire un processus dual fortement markovien, si l'on suppose l'existence d'une topologie cofine.

4.3. AMÉLIORATION DES PROBABILITÉS \hat{P}_y ET \check{P}_y . — Nous avons montré au paragraphe précédent que \hat{X} était P_m -modérément markovien et, sous (CMF), \check{X} était P_m -fortement markovien. La question se pose de savoir si \hat{X} (resp. \check{X}) est \hat{P}_y -modérément markovien (resp. \hat{P}_y -fortement markovien) pour chacune des probabilités \hat{P}_y (resp. \check{P}_y). Il est facile de voir qu'on ne peut pas espérer un tel résultat; en revanche nous allons montrer qu'il existe un sous-ensemble borélien E' de E tel que $E - E'$ soit m -évanescent (resp. m -polaire à gauche) et tel que pour tout y de E' le processus \hat{X} (resp. \check{X}) soit \hat{P}_y -modérément markovien (resp. \check{P}_y -fortement markovien). Cela résultera de la proposition suivante, que nous nous bornerons à énoncer dans le cas fortement markovien.

PROPOSITION. — Soit $(\Omega, k, \theta, \zeta, (P_x), X)$ un processus P_m -fortement markovien. Il existe un borélien N m -évanescent tel que pour tout x n'appartenant pas à N , le processus est P_x -fortement markovien.

Démonstration. — Nous ferons tout d'abord la remarque suivante : Si μ est une mesure ne chargeant pas les ensembles m -évanescents, X est

P_μ -fortement markovien; en effet, si S et T sont deux temps d'arrêt algébriques, on peut écrire

$$E_m [Z \circ \theta_{S+T, \theta_s}; S + T \circ \theta_s < \infty] = E_m [E_{X_{S+T, \theta_s}} [Z]],$$

ce qui s'écrit encore

$$E_{X_S} [Z \circ \theta_T; T < \infty] = E_{X_S} [E_{X_T} [Z]] \quad P_m\text{-p. s.}$$

Fixons T ; la relation précédente, vraie pour tout S , montre que les processus $E_X [Z \circ \theta_T]$ et $E_X [E_{X_T} [Z]]$ sont P_m -indistinguables; le résultat annoncé s'en déduit aisément.

Les tribus \mathcal{H}_u^0 et \mathcal{F}_s^0 étant de type dénombrable, il est possible de choisir une suite $(Z^n)_{n \geq 0}$ de processus continus à droite bornés engendrant \mathcal{H}_u^0 , et une suite $(Y^m)_{m \geq 0}$ de processus bornés engendrant \mathcal{F}_s^0 . Posons alors

$$g_{n,p}(x) = E_x \left[\int_0^\infty p e^{-ps} Z_s^n ds \right]$$

et soit μ une mesure ne chargeant pas les ensembles m -évanescents; on peut écrire, en vertu de la remarque faite plus haut,

$$(1) \quad g_{n,p}(X_T) = E_\mu \left[\int_T^\infty e^{\rho T} p e^{-\rho s} Z_s^n ds \mid \mathcal{F}_T^0 \right]$$

quel que soit le temps d'arrêt T ; il en résulte que pour P_μ presque tout ω les trajectoires $t \rightarrow g_{n,p}(X_t(\omega))$ sont continues à droite et limitées à gauche. Si nous appelons $H_{n,p}$ l'événement formé des ω pour lesquels $t \rightarrow g_{n,p}(X_t(\omega))$ soit continue à droite et limitée à gauche, il est connu (ou tout au moins connu de Meyer [22], p. 235, remarque) que $H_{n,p}$ est \mathcal{F}^0 -mesurable; d'autre part, puisque $P_\mu [H_{n,p}^c]$ est nul quel que soit μ ne chargeant pas les ensembles m -évanescents, il résulte d'un raisonnement déjà fait que

$$N_{n,p} = \{ x; P_x [H_{n,p}^c] > 0 \}$$

est un borélien m -évanescents. Posons

$$E_1 = E \setminus \bigcup_{n,p} N_{n,p};$$

pour tout x de E_1 les processus $g_{n,p}(X)$ sont P_x -p. s. à trajectoires continues à droite et limitées à gauche. Dans toute la suite nous nous bornerons à considérer les probabilités P_x où x parcourt E_1 . Soit toujours μ une mesure ne chargeant pas les ensembles m -évanescents, on a en vertu de (1) pour $t \geq 0$ fixé,

$$g_{n,p}(X_t)_- = E_\mu \left[\int_0^\infty e^{\rho t} p e^{-\rho s} Z_s^n ds \mid \mathcal{F}_{t-}^0 \right]$$

et, par conséquent,

$$E_{\mu} [g_{n,p} (X_t)_-; Y_t^m] = E_{\mu} \left[Y_t^m \int_t^{\infty} e^{\rho t} p e^{-\rho s} Z_s^n ds \right].$$

Cette relation étant vraie quel que soit μ ne chargeant pas les m -évanescents, on peut en déduire, toujours en invoquant le même argument, l'existence d'un borélien m -évanescents $N_{n,p,t,m}$ tel que

$$\forall x \notin N_{n,p,t,m}, \quad E_x [g_{n,p} (X_t)_- Y_t^m] = E_x \left[Y_t^m \int_t^{\infty} e^{\rho t} p e^{-\rho s} Z_s^n ds \right].$$

Posons alors

$$E_2 = E_1 - \bigcup_{n \geq 0, p \geq 0, t \in \mathbf{Q}_+, m \geq 0} N_{n,p,t,m}$$

on aura quel que soit x dans E_2 ,

$$\forall t \in \mathbf{Q}_+, \quad g_{n,p} (X_t)_- = E_x \left[\int_t^{\infty} e^{\rho t} p e^{-\rho s} Z_s^n ds \mid \mathcal{F}_t^0 \right]$$

(en faisant varier m), puis

$$\forall u \in \mathbf{R}_+, \quad g_{n,p} (X_u) = E_x \left[\int_u^{\infty} e^{\rho u} p e^{-\rho s} Z_s^n ds \mid \mathcal{F}_u^0 \right]$$

(en faisant décroître t vers u). Mais alors, les processus $g_{n,p} (X)$ d'une part, et la projection bien mesurable relativement à P_x du processus

$$\int_u^{\infty} e^{\rho u} p e^{-\rho s} Z_s^n ds$$

d'autre part étant continus à droite, sont indistinguables : on pourra donc écrire

$$g_{n,p} (X_T) = E_x \left[\int_T^{\infty} e^{\rho T} p e^{-\rho s} Z_s^n ds \mid \mathcal{F}_T^0 \right]$$

quel que soit le temps d'arrêt algébrique T , $p \geq 0$, $n \geq 0$ et x dans E_2 .

Faisons tendre p vers l'infini, il vient

$$E_{x_T} [Z_0^n] = E_x [Z_T^n \mid \mathcal{F}_T^0] \quad \text{p. s.}$$

Cette égalité étant vraie pour tout n , on en tire l'égalité

$$E_x [Z_T \mid \mathcal{F}_T^0] = E_{x_T} [Z_0] \quad \text{P}_x\text{-p. s.,}$$

quel que soit x dans E_2 et Z \mathcal{B}_d^0 -mesurable, ce qui est le résultat cherché.

On aurait un résultat analogue dans le cas modérément markovien, la démonstration étant parallèle à la précédente.

Si l'on applique la proposition précédente au processus \check{X} qui est P_m -fortement markovien sous l'hypothèse (CMF), on voit qu'il existe un ensemble borélien E' dont la complémentaire est m -polaire à gauche, et tel que \check{X} soit \check{P}_t -fortement markovien quel que soit y dans E' . Si nous posons alors

$$\check{P}_t f(y) = \begin{cases} \check{E}_y [f(\check{X}_t)] & \text{si } y \in E', \\ e^{-t} f(y) & \text{si } y \in E'^c, \end{cases}$$

$(\check{P}_t)_{t \geq 0}$ sera un semi-groupe fortement markovien au sens de Meyer [19]. Nous allons voir que (CMF) est en fait nécessaire et suffisante pour qu'il existe un tel semi-groupe, on a le

THÉORÈME. — *Supposons que Ω soit l'ensemble des fonctions continues à droite et limitées à gauche de \mathbf{R}_+ dans E , admettant une durée de vie finie (X, k, θ, ζ , ayant alors leurs significations usuelles). Supposons X fortement markovien et soit m une loi initiale. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *Le processus X satisfait à l'hypothèse (CMF) relativement à m .*
2. *Il existe un semi-groupe fortement markovien $(\check{P}_t)_{t \geq 0}$ tel que $(\Omega, (\check{X}_t)_{t \geq 0}, P_m)$ soit une réalisation du semi-groupe (\check{P}_t) .*

Le fait que (1) \Rightarrow (2) a déjà été vu.

Pour démontrer que (2) \Rightarrow (1), nous introduirons l'opérateur de retournement r sur Ω défini par $X_t(r(\omega)) = \check{X}_t(\omega)$ et nous énoncerons le lemme suivant dont nous laisserons la démonstration au lecteur

LEMME. — *On a les égalités suivantes :*

$$k_t \circ r = r \circ \hat{\theta}_t; \quad r \circ k_t = \hat{\theta}_t \circ r; \quad \theta_t \circ r = r \circ \hat{k}_t; \quad r \circ \theta_t = \hat{k}_t \circ r;$$

on en déduit l'équivalence suivante :

$$\begin{aligned} \tau \text{ est un temps de retour algébrique relatif à la famille } (\theta_t) \\ \Leftrightarrow \hat{\tau} \circ r \text{ est un temps d'arrêt algébrique relatif à } (k_t). \end{aligned}$$

On remarque d'autre part que

$$\hat{\tau} \circ r = \widehat{\tau \circ r}.$$

Retournons alors à la démonstration de notre réciproque; on construit à l'aide du théorème de Kolmogorov la réalisation canonique sur Ω du semi-groupe (\check{P}_t) ; on dispose ainsi d'une famille $(Q_x)_{x \in E}$ de probabilités sur Ω . Si nous appelons ν la mesure définie par

$$\nu(\Gamma) = P_m [X_{\tau^-} \in \Gamma],$$

il est clair que $r(Q_\nu) = P_m$ d'après l'hypothèse. Posons alors $\check{P}_x = r(Q_x)$ et montrons que pour tout temps de retour algébrique τ ,

$$E_m[Z \circ k_\tau] = E_m[\check{E}_{X_{\tau-}}[Z]].$$

Pour cela appliquons la propriété de Markov forte vérifiée par Q_ν ,

$$(Q_\nu[Y \circ \theta_\tau] = Q_\nu[Q_{X_\tau}[Y]])$$

à la variable aléatoire $Y = Z \circ r$ et au temps d'arrêt algébrique $T = \hat{\tau} \circ r$; il vient :

$$Q_\nu[Z \circ r \circ \hat{\theta}_{\tau \circ r}] = Q_\nu[Q_{\check{X}_{\tau \circ r}}[Z \circ r]] = Q_\nu[\check{P}_{\check{X}_{\tau \circ r}}[Z]],$$

soit encore

$$Q_\nu[(Z \circ k_\tau) \circ r] = Q_\nu[\check{P}_{X_{\tau-}}[Z] \circ r],$$

soit enfin

$$E_m[Z \circ k_\tau] = E_m[\check{P}_{X_{\tau-}}[Z]].$$

C. Q. F. D.

Supposons alors qu'un processus Y soit $\mathcal{H}_g^0 \cap \mathcal{F}_3^0$ -mesurable; on aura pour tout temps de retour algébrique τ ,

$$E_m[Y_\tau] = E_m[Y_\tau \circ k_\tau] = E_m[\check{E}_{X_{\tau-}}[Y_\tau]];$$

les processus Y et $\check{E}_{X_{\tau-}}(Y_\tau)$ seront alors P_m -indistinguables.

C. Q. F. D.

4.5. LA FORMULE DE DUALITÉ DE HUNT. — Nous allons montrer qu'un certain nombre de résultats connus sous des hypothèses plus ou moins fortes de dualité, s'interprètent commodément si l'on adopte le point de vue exposé précédemment. C'est le cas de la formule de dualité de Hunt. Auparavant, donnons brièvement un rappel de quelques définitions sur les balayés de processus croissants (*cf.* [2]).

DÉFINITIONS. — Soit τ un temps de retour algébrique, on posera

$$L(\omega, s) = \tau \circ k_s(\omega).$$

Si m est une loi initiale et A une fonctionnelle gauche P_m -intégrable, on appellera A^L le processus croissant opérant sur les processus mesurables bornés suivant la formule

$$\langle A^L, Z \rangle_m = \langle A, ({}^3Z)_L \rangle_m.$$

(Dans cette formule 3Z désignera le processus prévisible algébrique donné par le théorème 1.5; en particulier ${}^3Z_0 = 0$). On dira que A^L est le balayé de A suivant τ .

Il est clair que A^L est prévisible; montrons que A^L est une g_m -fonctionnelle : on a

$$\langle A^L, {}^gZ \rangle_m = \langle A, ({}^gZ)_L \rangle_m ;$$

on remarque alors que $({}^3Z)_L$ et $({}^3gZ)_L$ ont la même projection sur \mathfrak{H}_g^m , puisque

$$E [{}^3gZ_{L,\tau'}] = E [{}^3Z_{L,\tau'}]$$

pour tout temps de retour τ' , du fait que $L_{\tau'}$ est alors encore un temps de retour.

Donnons-nous maintenant un processus fortement markovien, une loi initiale m , et supposons que le processus satisfasse à (CMF) relativement à m . Il existe alors d'après 4.4 un semi-groupe fortement markovien (\check{P}_t) et une famille de probabilité (\check{P}_r) sur Ω , tels que

$$\check{P}_t f(x) = \hat{E}_r f(\check{X}_t).$$

Soit τ un temps de retour algébrique; appelons T la variable aléatoire $\zeta - \tau$; T est un temps d'arrêt algébrique relativement à la famille d'opérateurs de meurtre (\hat{h}_t) ; on posera

$$\check{P}_T f(x) = \check{E}_r [f(\check{X}_T)] = \check{E}_r [f(X_{T-})].$$

On peut alors énoncer sous ces hypothèses :

THÉORÈME. — Soient τ un temps de retour algébrique, A une fonctionnelle gauche P_m -intégrable et ν_A la mesure sur E associée à A . La fonctionnelle gauche associée à $\nu_A \check{P}_T$ est la balayée de A suivant τ .

Démonstration. — Soit f une fonction borélienne bornée; on peut écrire

$$\langle \nu_A \check{P}_T, f \rangle = \langle \nu_A, E. [f(X_{T-})] \rangle = E_m \left[\int_0^\infty \check{E}_{X_{s-}} [f(X_{T-})] dA_s \right].$$

Mais, puisque $\check{E}_{X_{s-}} [f(X_{T-})]$ est (par construction) la projection sur \mathfrak{H}_g^m du processus $f(X_{T-}) \circ k_s$, le dernier membre peut encore s'écrire

$$E_m \left[\int_0^\infty f(X_{T-}) \circ k_s dA_s \right] = E_m \left[\int_0^\infty f(X_{L_{s-}}) dA_s \right] = E_m \left[\int_0^\infty f(X_{s-}) dA_s^L \right].$$

(L désignant, comme au début de ce paragraphe, le processus $\tau \circ k_s$.)

Remarque. — Nous verrons, à la fin de cet article, que, sous les hypothèses de dualité où l'on démontre la formule de Hunt, l'hypothèse (CMF) est vérifiée. La formule de Hunt n'est d'ailleurs pas tout à fait un cas particulier du théorème énoncé ci-dessus : elle le serait si le dernier temps de visite

$\tau_\Gamma = \sup \{ t < 0; X_t \in \Gamma \}$ d'un borélien Γ par le processus X était un temps de retour algébrique, ce qui n'est pas le cas en général. On se tire d'affaire en construisant, à l'aide de techniques analogues à celles que l'on a vu en 2.2 un temps de retour algébrique τ' tel que $\tau' \circ k$ soit indistinguable de $\tau_\Gamma \circ k$. La deuxième petite difficulté réside dans le fait que $\zeta - \tau_\Gamma$ est le temps d'entrée dans Γ du processus \hat{X} , et non pas du processus fortement markovien \check{X} ; Mais sous les hypothèses de dualité de Hunt (ou plus généralement si l'on dispose de deux processus standard en dualité, au sens de [6]), les semi-groupes P_t et \check{P}_t satisfont à l'hypothèse (B), et les temps d'entrée de \hat{X} et de \check{X} dans Γ sont les mêmes. On retrouve alors le fait que si un potentiel u est associé à une mesure ν , la réduite $P_\Gamma u$ de u sur un borélien Γ est associée à la mesure $\nu \check{P}_\Gamma$.

4.6. BALAYAGE DROIT D'UNE FONCTIONNELLE DROITE; UN « THÉORÈME DE HUNT » SANS HYPOTHÈSE DE DUALITÉ. — Supprimons l'hypothèse (CMF); la tentation vient naturellement d'utiliser les techniques du paragraphe précédent en remplaçant les fonctionnelles gauches par les fonctionnelles droites, et le semi-groupe (\check{P}_t) par le semi-groupe (\hat{P}_t) ; auparavant, il nous faut définir une notion de balayage conservant les fonctionnelles droites.

DÉFINITION. — Soient τ un temps de retour algébriquement co-prévisible, m une loi initiale, A une fonctionnelle droite P_m -intégrable. Posons

$$L(\omega, s) = \tau \circ k_s.$$

Définissons un nouveau processus croissant B par la formule

$$\langle B, Z \rangle_m = \langle A, ({}^1Z)_t \rangle_m;$$

B vérifie les relations $B = B^1$ et $B = B^d$; il est donc possible de choisir B de manière à ce qu'il soit une fonctionnelle droite; nous dirons que B , ainsi défini, est la balayée droite de A suivant τ .

La relation $B = B^d$ se montre de la manière suivante : on écrit

$$\langle B, {}^dZ \rangle_m = \langle A, ({}^dZ)_t \rangle_m;$$

on remarque alors que $({}^1Z)_t$ et $({}^dZ)_t$ ont même projection sur \mathfrak{A}_d^m , puisque

$$E_m [{}^dZ_{t,\sigma}] = E_m [{}^dZ_{t,\sigma}] = E_m [{}^1Z_{t,\sigma}],$$

quel que soit le d_0 -temps de retour; [le lecteur se sera souvenu (§ 1.5) que L_σ est alors un d_0 -temps de retour].

On pourrait alors définir, une notion de réduite régulière d'un potentiel régulier de la classe (Δ) . Les processus de la forme $\sigma \circ k_s$ où σ est un temps

de retour co-prévisible semblent donc être les « opérateurs de réduite » à considérer si l'on veut transformer les fonctions surmédianes régulières en fonctions surmédianes régulières. Il serait sans doute bon de faire le lien entre cette notion de balayage « bien mesurable » et les notions voisines introduites par Gettoor et Sharpe [13] d'une part, Mokobodzki [25] d'autre part.

On peut maintenant énoncer

THÉORÈME. — Soient τ un temps de retour algébriquement co-prévisible, A une fonctionnelle droite P_m -intégrable, ν_A la mesure sur E associée à A . Posons

$$T = \zeta - \tau;$$

la fonctionnelle droite associée à la mesure $\nu_A \hat{P}_T$ est la balayée droite de A suivant τ .

(Les notations sont, une fois de plus, excécrables; on n'a pas dit ce que voulait dire l'expression « la mesure ν_A est associée à A », et pour cause : cette expression à deux sens distincts suivant que A est une fonctionnelle gauche ou droite. Dans l'énoncé du théorème 4.5 cela signifie que

$$\nu_A(f) = E_m \left[\int_0^\infty f(X_{s-}) dA_s \right],$$

tandis que dans l'énoncé du théorème 4.6 cela veut dire

$$\nu_A(f) = E_m \left[\int_0^\infty f(X_s) dA_s \right];$$

si l'on tient absolument à déceler une apparence de logique à ce qui vient d'être écrit, il faut se reporter au théorème 3.4). Ceci étant précisé, la démonstration du théorème se fait de façon absolument parallèle à celle du théorème 4.5.

4.7. CHANGEMENT DE LOI INITIALE. — Nous avons travaillé jusqu'ici en fixant une loi initiale m ; on peut se demander ce que deviennent les semi-groupes \hat{P}_t et \check{P}_t si l'on change de loi initiale. On sait dans quelle direction chercher grâce aux travaux de Kunita et Watanabe [15]. Sous des hypothèses de dualité, ils ont en effet montré que le fait de changer la loi initiale du processus X changeait la fonction de transition du processus retourné : le nouveau processus retourné est un « h -processus » de l'ancien processus retourné, où h est une fonction co-excessive convenable. Le théorème qui va suivre est une généralisation de ce résultat; l'utilisation

de la théorie générale des processus permet, là encore une démonstration agréable.

THÉORÈME. — Soit $(\Omega, k, \theta, \zeta, X, (P_x))$ un processus fortement markovien, et supposons que ce processus satisfait à l'hypothèse (CMF) relativement à une loi initiale m ; désignons par (\check{P}_t) et (\hat{P}_t) les semi-groupes associés respectivement à (\check{X}_t) et (\hat{X}_t) relativement à la probabilité P_m . Soit m' une probabilité sur E ne chargeant pas les ensembles m -évanescents; alors

1. X satisfait à (CMF) relativement à m' .

2. Il existe une fonction co-excessive h telle que $(\Omega, \check{X}, P_{m'})$ soit une réalisation du semi-groupe fortement markovien \check{P}_t^h .

3. Supposons maintenant que X soit de Hunt et que m' ne charge pas les ensembles m -polaires à gauche; il existe une fonction co-surmédiane régulière \bar{h} telle que $(\Omega, \hat{X}, P_{m'})$ soit une réalisation du semi-groupe modérément markovien $(\hat{P}_t^{\bar{h}})$; de plus h et la régularisée co-excessive de \bar{h} ne diffèrent que sur un ensemble m -évanescent.

Démonstration. — D'après le théorème 3.4, il existe une fonctionnelle additive droite A telle que

$$m'(f) = E_m \left[\int_0^\infty f(X_t) dA_t \right]$$

quelle que soit f borélienne bornée; on a vu au paragraphe 3.5 que l'on avait alors

$$E_{m'} [Z] = E_m \left[\int_0^\infty Z \circ \theta_t dA_t \right]$$

quelle que soit la variable aléatoire Z \mathcal{F}^0 -mesurable. Cette dernière égalité s'écrit encore

$$E_{m'} [Z] = E_m \left[\int_0^\infty Z \circ \hat{\theta}_t d\check{A}_t \right];$$

on voit alors que l'on se retrouve dans la situation du paragraphe 2.7: $P_{m'}$ n'est autre que la probabilité P_m relativisée à l'aide du processus croissant \check{A} [relativement aux opérateurs de meurtre $(\hat{\theta}_t)_{t \geq 0}$]. Le processus \check{X} est donc $P_{m'}$ -fortement markovien; et par conséquent X satisfait à (CMF) relativement à m' . La fonction h est alors facile à construire: soit A' un processus croissant algébriquement bien-mesurable P_m -indistinguable de A ; A' est alors une fonctionnelle additive relativement aux opérateurs de translation (\hat{k}_t) ; la fonction h définie par

$$h(y) = \begin{cases} \check{E}_y A'_\infty & \text{si } y \in E', \\ 0 & \text{si } y \notin E' \end{cases}$$

E' étant le borélien qui intervient en 4.4), est excessive et répond à la question.

Montrons enfin le point 3 : soit B la fonctionnelle gauche telle que

$$m'(f) = E_m \left[\int_0^\infty f(X_{t-}) dB_t \right];$$

nous avons vu au paragraphe 3.5 que, sous nos hypothèses, on avait encore

$$E_{m'}[Z] = E_m \left[\int_0^\infty Z \circ \theta_s dB_s \right]$$

et que A et B' étaient indistinguables; on écrit comme précédemment

$$E_{m'}[Z] = E_m \left[\int_0^\infty Z \circ \check{\theta}_s d\check{B}_s \right];$$

on se trouve maintenant dans la situation du paragraphe 2.8 : on relativise en effet le processus modérément markovien \check{X} à l'aide du processus croissant \check{B} qui est maintenant bien-mesurable et co-prévisible relativement aux opérateurs de meurtre $(\hat{\theta}_t)$. La proposition 2.8 nous conduit alors au résultat suivant : appelons B' un processus croissant algébriquement co-prévisible P_m -indistinguable de B ; la fonction h définie par $\bar{h}(y) = \hat{E}_y B'_z$ est une fonction co-surmédiane régulière et le semi-groupe du processus X relativement à $P_{m'}$ est

$$\hat{P}_t^{\bar{h}} f(y) = \frac{1}{\bar{h}(y)} \hat{P}_t [\bar{h}f](y)$$

sur $[0 < \bar{h} < \infty]$. Le fait que h et la corégularisée de h ne diffèrent que sur un ensemble m -polaire se déduit facilement du fait que A et B' sont P_m -indistinguables.

4.8. RETOURNÉ D'UN PROCESSUS RELATIF. — On peut s'attendre, au vu des résultats que nous venons de démontrer à ce que le processus retourné change de loi initiale, mais conserve le même semi-groupe quand on relativise le processus initial; c'est ce qu'énonce le théorème suivant. Comme dans le théorème précédent, nous appellerons m une loi initiale d'un processus fortement markovien $(\Omega, k, \theta, \zeta, X, (P_x))$; nous noterons (\hat{P}_y) la famille de probabilités construite en 4.4 et $(\check{P}_t)_{t>0}$ le semi-groupe associé; sous (CMF) on définit de même (\check{P}_y) et $(\check{P}_t)_{t\geq 0}$. Donnons-nous alors une g_m -fonctionnelle A vérifiant $E_m[A_x] = 1$, et appelons ν_A la mesure définie par

$$\nu_A(f) = E_m \left[\int_0^\infty f(X_{s-}) dA_s \right].$$

Rappelons enfin que l'on a défini le processus relativisé à l'aide de A en construisant une probabilité \tilde{P}_m par la formule

$$\tilde{E}_m [Z] = E_m \left[\int_0^\infty Z \circ k_s dA_s \right].$$

Avec ces notations, on peut énoncer

THÉORÈME :

1. $(\Omega, \hat{X}, \tilde{P}_m)$ est une réalisation modérément markovienne du semi-groupe $(\hat{P}_t)_{t>0}$, relativement à la loi d'entrée $(\hat{X}_t, (\tilde{P}_m))_{t>0}$.

2. Plaçons-nous sous l'hypothèse (CMF) relativement à m ; $(\Omega, \check{X}, \check{P}_m)$ est une réalisation fortement markovienne du semi-groupe $(\check{P}_t)_{t \geq 0}$ relativement à la loi initiale ν_A .

Démonstration :

1. Nous allons montrer que pour tout d -temps de retour σ , on a

$$\tilde{E}_m [Z \circ k_\sigma; \sigma \geq 0] = \tilde{E}_m [\hat{E}_{X_\sigma} [Z]; \sigma \geq 0]$$

ce qui montrera le premier point. Le premier membre s'écrit

$$E_m \left[\int_0^\infty Z \circ k_{\sigma \circ k_s(\omega)}(\omega) dA_s(\omega) \right],$$

et le second

$$E_m \left[\int_0^\infty \hat{E}_{X_{\sigma \circ k_s(\omega)}(\omega)} [Z] dA_s(\omega) \right].$$

Le résultat sera donc acquis si l'on montre que les processus

$$(\omega, s) \rightarrow Z \circ k_{\sigma \circ k_s(\omega)}(\omega) \quad \text{et} \quad (\omega, s) \rightarrow \hat{E}_{X_{\sigma \circ k_s(\omega)}(\omega)} [Z]$$

ont même projection sur \mathcal{H}_g^m . Tout revient donc à montrer que l'on a

$$E_m [Z \circ k_{\sigma \circ k_\tau}; \tau > 0] = E_m [\hat{E}_{X_{\sigma \circ k_\tau}} [Z]]$$

quel que soit le temps de retour algébrique τ . Mais si l'on veut bien se souvenir encore une fois que $\sigma \circ k_\tau$ est un d_0 -temps de retour, cette relation résulte de la définition même de \hat{E} .

2. Posons

$$\check{\nu}_A = \int_E \check{P}_y \nu_A(dy);$$

on peut écrire, si Z est \mathcal{F}^0 -mesurable bornée,

$$\check{E}_{\nu_A}(Z) = \int_E \nu_A(dy) \check{E}_y[Z] = E_m \left[\int_0^\infty \check{E}_{X_{s-}}[Z] dA_s \right] = E_m \left[\int_0^\infty Z \circ k_s dA_s \right]$$

on a donc $\check{P}_{\nu_A} = P_m$, d'où le résultat.

Comme corollaire de ce dernier théorème, on retrouve un fait bien connu : le retourné d'un processus fortement markovien à un temps de retour τ a une fonction de transition qui ne dépend pas de τ . Il en est de même du retourné régularisé à droite (il suffit de prendre pour fonctionnelle A , le processus $A_t = 1_{\{t > \tau > 0\}}$).

Les deux théorèmes précédents nous fournissent donc les interprétations probabilistes des fonctionnelles additives associées à une mesure par le théorème 3.4.

5. Compléments divers

5.1. QUASI CONTINUITÉ A GAUCHE DE X ET HYPOTHÈSE (B). — Supposons que X soit standard. Quoique la limite $X_{\zeta-}$ n'existe pas nécessairement nous continuerons à appeler \check{X} le processus retourné régularisé à droite de X [on posera alors $\check{X}_0(\omega) = \delta, \forall \omega$]. Nous cherchons à quelles conditions \check{X} est quasi continu à gauche, c'est-à-dire à quelles conditions

$$\lim_n \check{X}_{T_n} = \check{X}_T \quad \text{sur } [T < \zeta] \quad P_m\text{-p. s.},$$

quel que soit m et quelle que soit la suite T_n de temps d'arrêt de la famille $(\hat{\theta}_t)$ tendant en croissant vers T . On a le résultat suivant :

PROPOSITION. — \check{X} est quasi continu à gauche si et seulement si X satisfait à l'hypothèse (B) de Hunt.

(On remarquera qu'on ne suppose pas que \check{X} est fortement markovien.)

Démonstration. — Dire que \check{X} est quasi continu à gauche est équivalent à la propriété suivante :

Quelle que soit la loi initiale m , si T est un temps d'arrêt accessible de la famille $(\hat{\theta}_t)$ dont le graphe est inclus dans $]0, \zeta[$, alors $\check{X}_T = \check{X}_{T-}$. Supposons alors X quasi continu à gauche et soit Γ un borélien semi-polaire; on peut écrire à une P_m -indistinguabilité près

$$[X \in \Gamma] = \sum_n [\tau_n],$$

où les τ_n sont m -coprévisibles; on a alors

$$P_m [\exists t > 0; X_t \neq X_{t-} \text{ et } X_t \in \Gamma] = \sum_n P_m [X_{\tau_n} \neq X_{\tau_n-}; \tau_n > 0] = 0$$

et cette dernière propriété (cf. [19]) est équivalente à l'hypothèse (B). Réciproquement supposons vérifiée l'hypothèse (B) de Hunt. Soit τ un temps de retour co-accessible : $[\tau]$ est contenu dans un ensemble \mathcal{A}_n -mesurable mince H ; appelons u la fonction borélienne telle que $u(X)$ et 1H soient P_m -indistinguables; on sait que $\Gamma = [u > 0]$ est semi-polaire. Soit alors (T_n) une suite de temps d'arrêts de la famille (F_t^m) épuisant les sauts de X sur $]0, \zeta[$; on peut écrire

$$\begin{aligned} P_m [X_t \neq X_{\tau-}; \tau > 0] &= \sum_n P_m [X_{T_n} \neq X_{T_n-}; \tau = T_n] \\ &= \sum_n P_m [X_{T_n} \neq X_{T_n-}; u(X_{T_n})] = \sum_n P_m [(X_{T_n} \neq X_{T_n-}); (X_{T_n} \in \Gamma); u(X_{T_n})]. \end{aligned}$$

Sous l'hypothèse (B) cette dernière quantité est nulle.

C. Q. F. D.

5.2. POTENTIELS SEMI-RÉGULIERS. — Nous avons vu que, si l'on ne fait pas l'hypothèse (CMF), les potentiels auxquels on peut associer naturellement une mesure sont les potentiels de la classe (Δ) . Comme les fonctions surmédianes ne sont pas d'un usage courant, il est naturel de considérer les régularisées de ces Δ -potentiels. Nous allons voir, qu'à beaucoup d'égards, ils se comportent comme des potentiels de fonctionnelle additive continue. Auparavant, montrons qu'il y a suffisamment de ces fonctions pour être assuré de ne pas faire une théorie à peu près vide.

DÉFINITIONS. — Nous dirons qu'un potentiel de la classe (D) u est semi-régulier s'il existe un potentiel de la classe (Δ) \bar{u} tel que $u = \text{reg}(\bar{u})$.

Il est à peu près évident que la limite d'une suite décroissante de Δ -potentiels est encore un Δ -potentiel; il en résulte aisément que la régularisée de la limite d'une suite décroissante de potentiels semi-réguliers est semi-régulière.

En particulier, si u_n est une suite décroissante de potentiels réguliers de la classe (D), $\text{reg}[\inf_n u_n]$ est semi-régulière.

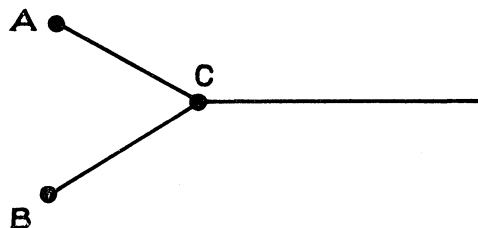
On remarquera enfin que si u est un potentiel de la classe (D) fini et h un réel > 0 , alors $P_h u$ est semi-régulière; on vérifie en effet que la fonction

$$V = \lim_{t \nearrow h} P_t u$$

est surmédiane régulière et admet $P_h u$ pour régularisée.

Exemple d'un potentiel qui n'est pas semi-régulier. — L'exemple est le même que celui qui montre que le théorème de Motoo ne peut pas s'étendre

aux fonctionnelles non continues (nous allons voir ci-dessous que ce n'est pas par hasard). Le processus de Markov considéré est une translation à vitesse uniforme vers la droite sur l'espace d'état figuré ci-contre. Considérons le potentiel excessif $u = 1_{[A, C]}$. Toute fonction surmédiane régulière majorant u vaut 1 en C ; il en résulte qu'elle est ≥ 1 sur $[BC]$ et ne peut donc avoir une régularisée égale à u .



Nous allons montrer maintenant que sous les hypothèses (L) et (B) le théorème de Motoo s'étend aux potentiels semi-réguliers.

THÉORÈME. — *Donnons-nous un processus de Hunt satisfaisant aux hypothèses (L) et (B). Soient u et v deux potentiels semi-réguliers, engendrés respectivement par les fonctionnelles additives prévisibles A et B . Supposons que u soit fortement majoré par v ; il existe alors une fonction f borélienne telle que A_t et $\int_0^t (f X_s) dB_s$ soient indistinguables.*

Démonstration. — On peut toujours supposer que la mesure de base ξ ne charge pas les semi-polaires (s'il n'en est pas ainsi on remplacera ξ par ξU^h). Nous énoncerons alors le lemme suivant :

LEMME. — *Soit u' un Δ -potentiel fini et u son régularisé. Appelons A la fonctionnelle additive gauche engendrant u et A' la fonctionnelle droite engendrant u' . On a alors les égalités suivantes (les projections duales étant calculées relativement à la probabilité P_ξ) :*

$$A = A'^3, \quad A' = A^d.$$

Démonstration du lemme. — On remarquera tout d'abord que, sous les hypothèses faites, ζ est totalement inaccessible (puisque nous avons un processus de Hunt) que 0 est totalement co-inaccessible (puisque ξ ne charge aucun semi-polaire). A ne charge donc pas ζ et A' ne charge pas 0 (pour la mesure P_ξ); il est alors facile de voir que la projection sur \mathcal{H}_t^ξ de X_- est X ; l'égalité $A = A'^3$ provient alors de ce que A et A' engendrent le même

potentiel de la classe (D). Pour montrer l'égalité $A' = A^d$ il suffit de montrer que pour toute fonction borélienne bornée

$$E_{\xi} \left[\int_0^{\infty} f(X_t) dA_t \right] = E_{\xi} \left[\int_0^{\infty} f(X_t) dA_t \right].$$

Or on peut écrire

$$\begin{aligned} E_{\xi} \left[\int_0^{\infty} f(X_t) dA_t \right] &= E_{\xi} \left[\int_0^{\infty} f(X_{t-}) dA_t \right] \\ &= E_{\xi} \left[\int_0^{\infty} f(X_{t-}) dA_t \right] = E_{\xi} \left[\int_0^{\infty} f(X_t) dA_t \right]. \end{aligned}$$

[La première égalité provient de ce que ${}^d[f(X_-)] = f(X)$ la seconde du fait que A et A' sont associées, la troisième du fait que ${}^3[f(X)] = f(X_-)$.]

Retour à la démonstration du théorème. — Revenons à nos potentiels semi-réguliers u et v .

• On peut écrire $B = A + C$ où C est une fonctionnelle gauche; projetons cette égalité sur \mathcal{H}_{ξ}^2 ; il vient $B^d = A^d + C^d$; si l'on a pris la précaution de prendre une mesure de base ξ qui intègre v , appelons μ et η les mesures bornées définies par

$$\mu(\varphi) = E_{\xi} \left[\int_0^{\infty} \varphi(X_t) dB_t^d \right] \quad \text{et} \quad \eta(\varphi) = E_{\xi} \left[\int_0^{\infty} \varphi(X_t) dA_t \right].$$

On a $\eta \leq \mu$; il existe donc une fonction borélienne ≤ 1 sur E telle que $\eta = f\mu$ et il résulte immédiatement de l'unicité de la fonctionnelle droite associée à une mesure, que

$$A_t^d = \int_0^t f(X_s) dB_s^d$$

à une P_{ξ} -évanescence près. On a aussi

$$A_t^d = \int_0^t f(X_{s-}) dB_s^d$$

[toujours en vertu de la relation ${}^d[f(X_-)] = f(X)$]. Projetons cette dernière égalité sur T_{ξ}^2 : il vient

$$A_t = \int_0^t f(X_{s-}) dB_s.$$

Les fonctionnelles additives A_t et $\int_0^t f(X_{s-}) dB_s$ étant P_{ξ} -indistinguables, sont P_m -indistinguables quelle que soit la mesure initiale.

C. Q. F. D.

Remarques :

1. Contrairement à ce qui se passe dans le théorème de Motoo classique, il est nécessaire de supposer u et v semi-régulières. La semi-régularité de v n'entraîne pas celle de u .

2. Si u et v sont deux potentiels de la classe (D) quelconques, avec u fortement majoré par v , on pourra appliquer ce théorème à $P_h u$ et $P_h v$ ($h > 0$).

5.3. Nous allons voir maintenant que l'hypothèse (CMF) est à peu près équivalente au fait que tous les potentiels bornés soient semi-réguliers.

Nous dirons qu'un processus satisfait à l'hypothèse (CMF) si, quelle que soit la loi initiale m il satisfait à (CMF) relativement à m . On a le résultat suivant :

THÉORÈME. — *Supposons que X soit un processus de Hunt.*

1. *Si tout potentiel borné est semi-régulier alors X satisfait à (CMF).*

2. *Si X satisfait à (L), (B) et (CMF) alors tout potentiel borné est semi-régulier.*

Montrons le point 1 : soit m une loi initiale; il suffit de montrer que la projection prévisible de tout co-intervalle $]0, \tau]$ est de la forme $f(X_-)$. Appelons u le potentiel borné borélien $P_\cdot[\tau > 0]$; on a

$${}^3]0, \tau] = u(X_-),$$

et comme u est semi-régulier, il existe un Δ -potentiel v tel que $u = \text{reg } v$; il est alors facile de voir que $u(X_-) = v(X_-)$.

C. Q. F. D.

2. Plaçons-nous sous les hypothèses (L), (B) et (CMF); choisissons une mesure de base ξ ne chargeant pas les semi-polaires. Soit u un potentiel borné de la classe (D), et A la fonctionnelle gauche telle que $u = E_\cdot A_\cdot$. Appelons A^d la projection duale de A sur \mathcal{H}_d^{ξ} ; il est possible de choisir pour A^d une d -fonctionnelle; posons

$$v = E A_\cdot^d;$$

v est surmédiane régulière borélienne, et on remarquera que A et A^d ne chargent ni 0 ni ξ pour la probabilité P_ξ . On peut alors écrire, quelle que soit f borélienne bornée,

$$\begin{aligned} E_\xi \left[\int_0^\infty f(X_{t-}) dA_t \right] &= E_\xi \left[\int_0^\infty f(X_t) dA_t \right] \\ &= E_\xi \left[\int_0^\infty f(X_t) dA_t^d \right] = E_\xi \left[\int_0^\infty f(X_{t-}) dA_t^d \right]. \end{aligned}$$

On a donc quel que soit Z prévisible,

$$\begin{aligned} E_{\xi} \left[\int_0^{\infty} Z_t dA_t \right] &= E_{\xi} \left[\int_0^{\infty} Z_t {}^s dA_t \right] = E_{\xi} \left[\int_0^{\infty} g(X_{t-}) dA_t \right] \\ &= E_{\xi} \left[\int_0^{\infty} g(X_{t-}) dA_t' \right] = E_{\xi} \left[\int_0^{\infty} Z_t dA_t' \right] \end{aligned}$$

[g désignant la fonction borélienne telle que ${}^s Z$ et $g(X_{-})$ soient P_{ξ} -indistinguables]. Les processus croissants A et A' sont donc associés relativement à P_{ξ} ; ils engendrent donc la même surmartingale et l'on a donc, pour tout temps d'arrêt T , P_{ξ} -p. s.,

$$(\text{reg } v)(X_T) = E_{\xi} [A_T' - A_T' | F_T] = E_{\xi} [A_T - A_T | F_T] = u(x_T),$$

u et $\text{reg } v$ ne diffèrent donc que sur un ensemble ξ -évanescent; comme on est sous (L) , on a $u = \text{reg } v$.

6. L'hypothèse (CMF) et la dualité

6.1. L'hypothèse (CMF) a de belles conséquences, mais nous sommes encore incapables, au point où nous en sommes d'exhiber un processus satisfaisant à cette hypothèse. Nous allons, dans ce chapitre, montrer que (CMF) est à peu près équivalente à l'existence d'un semi-groupe fortement markovien, en dualité avec (P_t) . Commençons par un résultat facile.

PROPOSITION. — *Supposons que X satisfasse à (CMF) relativement à une loi initiale m ; les semi-groupes $(P_t)_{t \geq 0}$ et $(\check{P}_t)_{t \geq 0}$ sont alors en dualité par rapport à la mesure $m \cup$ ⁽²⁾.*

Démonstration. — Nous avons à montrer que

$$\langle P_t f, g \rangle_{m \cup} = \langle f, \check{P}_t g \rangle_{m \cup}$$

quelles que soient f et g boréliennes bornées et $t \geq 0$. Le membre de gauche s'écrit

$$\begin{aligned} E_m \left[\int_0^{\infty} (P_t f)(X_{s-}) g(X_{s-}) ds \right] \\ = E_m \left[\int_0^{\infty} f(X_{(s-t)+}) g(X_{s-}) ds \right] = E_m \left[\int_t^{\infty} f(X_{u-}) g(X_{(u-t)-}) du \right]. \end{aligned}$$

Appelons alors Z le processus défini par

$$Z_u(\omega) = \begin{cases} g(X_{(u-t)-})(\omega) & \text{si } u \geq t, \\ 0 & \text{si } u < t; \end{cases}$$

⁽²⁾ Nous supposons, dans tout ce chapitre, que le noyau est borné, ce qui, compte-tenu du fait que nous avons déjà supposé ξ fini, n'est pas un surcroît très important d'hypothèse.

on a

$$Z_u = g(\check{X}_t) \circ k_u$$

et d'après la définition même des probabilités \check{P}_y (§ 4.3), on peut écrire

$$\check{P}_t g(X_-) = \check{E}_{x_-} [g(\check{X}_t)] = \# [g(\check{X}_t) \circ k.] = \# Z$$

à une P_m -évanescence près. On a alors

$$\begin{aligned} E_m \left[\int_t^\infty f(X_{u-}) g(X_{(u-t)-}) du \right] &= E_m \left[\int_0^\infty f(X_{u-}) Z_u du \right] = E_m \left[\int_0^\infty f(X_{u-}) \# Z_u du \right] \\ &= E_m \left[\int_0^\infty f(X_{u-}) (\check{P}_t g)(X_{u-}) du \right] \end{aligned}$$

C. Q. F. D.

6.2. Nous allons maintenant essayer de montrer la réciproque; disons tout de suite qu'elle est inexacte; il faut prendre une hypothèse un peu moins forte que (CMF) que nous énoncerons ainsi :

L'HYPOTHÈSE (CMF- ζ). — Soit m une loi initiale; nous dirons que X satisfait à l'hypothèse (CMF- ζ) relativement à m si

a. Le processus X possède des limites à gauche sur $]0, \zeta[$.

b. Si Z est une fonction $\mathcal{B} \otimes \mathcal{C}_3^0$ -mesurable, il existe une fonction borélienne f telle que Z et $f(X_-)$ soient P_m -indistinguables sur $]0, \zeta[$.

Nous aurons besoin d'une autre définition :

Un sous-ensemble borélien B de E sera dit m -polaire à gauche si

$$P_m [\omega; \exists t; 0 < t < \zeta(\omega); X_{t-} \in B] = 0.$$

Nous avons alors le théorème suivant :

THÉORÈME. — Soit A l'espace des fonctions de \mathbf{R}_+ dans E continues à droite et limitées à gauche de durée de vie finie. Soit $(\Omega, k, \theta, \zeta, X, (P_x))$ un processus fortement markovien (k, θ, X ayant leur signification canonique). Appelons $(P_t)_{t \geq 0}$ la fonction de transition de X , et soit m une loi initiale; les conditions suivantes sont équivalentes :

1. Il existe un semi-groupe fortement markovien borélien $(\check{P}_t)_{t \geq 0}$ en dualité avec $(P_t)_{t \geq 0}$ par rapport à la mesure $m U$.

2. $\forall h > 0$, le processus $((\hat{X}_{t+h})_{t \geq 0}, (\hat{F}_{t+h}), P_m)$ est fortement markovien de fonction de transition $(\check{P}_t)_{t \geq 0}$.

3. Le processus X satisfait à l'hypothèse (CMF- ζ) relativement à m .

Démonstration :

(1 \Rightarrow 2) est pratiquement déjà connu. D'après un théorème de Nagasawa généralisé par Cartier-Meyer-Weil (cf. [17], [19]), on sait que $(\check{X}_t)_{t > 0}$ est

markovien par rapport aux tribus $(\hat{\mathcal{F}}_t)_{t \geq 0}$ et admet $(\check{P}_t)_{t \geq 0}$ comme fonction de transition; il est alors clair que $(\check{X}_{h+t})_{t \geq 0}$ est fortement markovien de fonction de transition $(\check{P}_t)_{t \geq 0}$ et de loi initiale $\check{X}_h(P_m)$.

(2 \Rightarrow 3) Pour démontrer cette implication nous aurons besoin du lemme suivant dont nous laisserons la démonstration au lecteur

LEMME A. — Soit $(Y_t)_{t \geq 0}$ un processus défini sur un espace de probabilité (W, \mathcal{G}, P) muni d'une famille $(\mathcal{G}_t)_{t \geq 0}$ de tribus continue à droite et tel que $\forall h > 0$, $(Y_{t+h})_{t \geq 0}$ est fortement markovien par rapport à la tribu $(\mathcal{G}_{t+h})_{t \geq 0}$ et admet $(Q_t)_{t \geq 0}$ comme fonction de transition. On peut alors énoncer :

Si T est un temps d'arrêt strictement positif de la famille $(\mathcal{G}_t)_{t \geq 0}$ le processus $(Y_{T+t})_{t \geq 0}$ est fortement markovien par rapport à la famille $(\mathcal{G}_{T+t})_{t \geq 0}$ et admet $(Q_t)_{t \geq 0}$ comme fonction de transition.

Revenons alors à la démonstration de (2) \Rightarrow (3). Soit τ un temps de retour algébrique tel que $[\tau] \subset]0, \zeta[$; appelons P_m^τ la probabilité sur Ω définie par

$$E_m^\tau[Z] = \frac{1}{P_m[\tau > 0]} E_m[Z \circ k_\tau],$$

où Z est \mathcal{F}^0 -mesurable bornée. On sait alors (2.7) que les processus continus à droite $(\Omega, P_m^\tau, (X_t))$ et $(\Omega, P_m, (X_t^\tau))$ (où X^τ désigne le processus X tué à l'instant τ) sont équivalents. Appelons alors \check{X}_t^τ le processus défini sur $\Omega' = [\tau > 0]$ par

$$\check{X}_t^\tau(\omega) = \begin{cases} X_{(\tau-t)_-}(\omega) & \text{si } \tau(\omega) > t, \\ \delta & \text{si } \tau(\omega) \leq t \end{cases}$$

et appelons P_m' la probabilité sur Ω' définie par

$$P_m'(\mathbf{A}) = \frac{P_m[\mathbf{A} \cap \{\tau > 0\}]}{P_m[\tau > 0]},$$

on a si f_1, f_2, \dots, f_n sont boréliennes bornées de E dans \mathbf{R}_+ et si

$$\begin{aligned} 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n, \\ E_m^\tau[f_1(\check{X}_{t_1}) \dots f_n(\check{X}_{t_n})] &= \frac{1}{P_m[\tau > 0]} E_m[(\tau > 0); f_1(\check{X}_{t_1}) \circ k_\tau \dots f_n(\check{X}_{t_n}) \circ k_\tau] \\ &= E_m'[f_1(\check{X}_{t_1}^\tau) \dots f_n(\check{X}_{t_n}^\tau)]. \end{aligned}$$

Les processus $(\Omega', (\check{X}_t^\tau)_{t \geq 0}, P_m')$ et $(\Omega, (\check{X}_t)_{t \geq 0}, P_m^\tau)$ sont donc équivalents; comme le premier est fortement markovien de semi-groupe $(\check{P}_t)_{t \geq 0}$ d'après le lemme A, le second a la même propriété; le processus X satisfait donc à l'hypothèse (CMF) relativement à P_m^τ : Si Z est un processus $\mathcal{A}_s^0 \cap \mathcal{G}_s^0$ -mesurable il existe une fonction borélienne g telle que Z et $g(X_-)$ soient

P_m^τ -indistinguables. De plus si l'on regarde dans la démonstration du théorème 4.4 le procédé de construction de g , l'on s'aperçoit que g ne dépend que du semi-groupe $(\check{P}_t)_{t \geq 0}$ et non pas de τ ; on pourra donc écrire

$$E_m^\tau [g(X_{\zeta-})] = E_m^\tau [Z_\zeta]$$

quel que soit τ tel que $[\tau] \subset]0, \zeta[$ soit encore

$$E_m [g(X_{\zeta-})] = E_m [Z_\zeta].$$

C. Q. F. D.

(3 \Rightarrow 1) La construction d'un semi-groupe $(\check{P}_t)_{t \geq 0}$ se fait comme en 4.3 et 4.4 : on construit d'abord une famille (\check{P}_y) de probabilités sur Ω de la manière suivante :

Si Z est \mathcal{F}^0 -mesurable bornée $g(Z \circ k_\tau)$ est indistinguable sur $]0, \zeta[$ d'un processus de la forme $\psi(X_-, Z)$; on construit comme en 4.2 un relèvement des fonctions $\psi(\cdot, Z)$ (la classe des ensembles négligeables étant maintenant les boréliens m_τ -polaires à gauche), ce qui nous fournit une famille de probabilités $(\check{P}_y)_{y \in E}$ sur Ω vérifiant :

$$E_m [Z \circ k_\tau] = E_m [\check{E}_{X_\tau} [Z]]$$

quel que soit le temps de retour algébrique strictement inférieur à ζ . Pour obtenir un semi-groupe $(\check{P}_t)_{t \geq 0}$ on démontrera une version améliorée de la proposition 4.4.

LEMME B. — Soit $(\Omega, k, \theta, \zeta, X, (P_x))$ un processus vérifiant pour une loi initiale m sur E :

$$E_m [Z \circ \theta_T; T < \zeta] = E_m [E_{X_T} [Z]]$$

quel que soit le temps d'arrêt algébrique strictement positif T . Il existe un ensemble m -polaire N , borélien, tel que $(\Omega, k, \theta, \zeta, (P_x), X)$ soit P_ν fortement markovien pour toute loi initiale ν ne chargeant pas N .

Pour démontrer ce lemme on modifie la première remarque de la démonstration de la proposition 4.4 comme suit :

Si μ ne charge pas les ensembles m -polaires X est P_μ -fortement markovien; si, en effet S est un temps d'arrêt algébrique strictement positif et si T est algébrique quelconque, on a

$$E_m [Z \circ \theta_{S+T} \circ \theta_S] = E_m [E_{X_{S+T} \circ \theta_S} [Z]],$$

soit encore

$$E_{X_S} [Z \circ \theta_T] = E_{X_S} [E_{X_T} [Z]]$$

quel que soit $S > 0$, ce qui entraîne que les processus $E_X [Z \circ \theta_T]$ et $E_X [E_{X_T} [Z]]$ sont indistinguables sur $]0, \zeta[$ d'où le résultat. On peut alors

recopier la suite de la démonstration de 4.4 en remplaçant simplement « ensembles m -évanescents » par « ensembles m -polaires ».

En posant alors

$$\check{P}_t f(x) = \begin{cases} \check{E}_x f(\check{X}_t) & \text{si } x \in E - N, \\ e^{-t} f(x) & \text{si } x \in N, \end{cases}$$

on obtient un semi-groupe $(\check{P}_t)_{t \geq 0}$ fortement markovien; de plus $(\check{P}_t)_{t > 0}$ est la fonction de transition de $(\check{X}_t)_{t > 0}$; la proposition 4.1 [dont la démonstration reste valable sous (CMF- ζ)] prouve alors que P_t et \check{P}_t sont en dualité par rapport à $m U$.

Remarque. — Nous avons choisi de prendre comme hypothèse de travail le fait que X admette des limites à gauche sur $]0, \zeta]$, ce qui semble exclure le cas important des processus standard. C'est oublier qu'on peut toujours modifier l'espace d'état de manière à ce que tout processus standard (et même tout processus fortement markovien) admette des limites à gauche y compris en ζ . Cette manière de travailler fournit l'avantage de pouvoir considérer des semi-groupes $(\check{P}_t)_{t \geq 0}$ fortement markoviens (définis aussi pour $t = 0$) ce qui est plus agréable. Mais cela ne supprime en aucune manière une difficulté fondamentale : dans le théorème 6.2, on ne peut pas remplacer la condition 2 par la condition : le processus $((\check{X}_t)_{t \geq 0}, (\hat{F}_t)_{t \geq 0}, P_m)$ est fortement markovien. Si nous nous donnons un semi-groupe $(\check{P}_t)_{t \geq 0}$ fortement markovien en dualité avec $(P_t)_{t \geq 0}$ par rapport à $m U$, on sait dire que $(\check{X}_t)_{t > 0}$ est une réalisation continue à droite du semi-groupe $(\check{P}_t)_{t > 0}$ relativement aux lois d'entrée $(\check{X}_t(P_m))_{t > 0}$, mais il est inexact que $(\check{X}_t)_{t \geq 0}$ soit une réalisation de $(\check{P}_t)_{t \geq 0}$ relativement à la loi initiale $X_{\cdot-}(P_m)$ (il existe un contre exemple). Cependant ce phénomène pathologique disparaît si l'on suppose que $(P_t)_{t \geq 0}$ est un semi-groupe de Hunt comme le prouve le théorème suivant :

6.3. THÉORÈME. — *Les hypothèses et les notations étant celles du théorème 6.2, supposons en outre ζ totalement inaccessible relativement à la probabilité P_m [ce qui est en particulier le cas si $(P_t)_{t \geq 0}$ est un semi-groupe de Hunt]. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *Il existe un semi-groupe $(\check{P}_t)_{t \geq 0}$ fortement markovien borélien, en dualité avec $(P_t)_{t \geq 0}$ par rapport à la mesure $m U$.*
2. *Le processus $((\check{X}_t)_{t \geq 0}, (\hat{F}_t)_{t \geq 0}, P_m)$ est fortement markovien de fonction de transition $(\check{P}_t)_{t \geq 0}$.*
3. *Le processus X satisfait à (CMF) relativement à m .*

Démonstration. — Montrons que (1) \Rightarrow (3). D'après le théorème 6.2, si Z est un processus $\mathcal{H}_g^0 \cap \mathcal{F}_3^0$ -mesurable, il existe une fonction borélienne f telle que Z et $f(X_-)$ soient P_m -indistinguables sur $]0, \zeta[$; mais comme ζ est totalement inaccessible; l'ensemble aléatoire accessible $[Z = f(X_-)]$ contient la projection accessible de $]0, \zeta[$ qui est $]0, \zeta[$ X satisfait donc à (CMF). On a déjà vu que (3) \Leftrightarrow (2) (c'est le théorème 4.4) et que (3) \Rightarrow (1) (c'est la proposition 6.1).

6.4. CAS DE DEUX PROCESSUS EB DUALITÉ. — Prenons maintenant la situation classique de dualité : Supposons qu'il existe deux semi-groupes fortement markoviens $(P_t)_{t \geq 0}$ et $(\check{P}_t)_{t \geq 0}$ dont les résolvantes U^α et \check{U}^α sont en dualité relativement à une mesure de base ξ au sens de Blumenthal et Gettoor ([6], définition 1-2, p. 253). Nous supposons que les semi-groupes $(P_t)_{t \geq 0}$ et $(\check{P}_t)_{t \geq 0}$ sont réalisables sur l'espace des fonctions continues à droite limitées à gauche de \mathbf{R}_+ dans E admettant une durée de vie finie; nous supposons en outre $U 1$ bornée. On appellera $(X_t)_{t \geq 0}$ la réalisation canonique de $(P_t)_{t \geq 0}$, on a le théorème suivant :

THÉORÈME :

1. *Quelle que soit la loi initiale m , X satisfait à (CMF- ζ) relativement à m . Si (P_t) est de Hunt, X satisfait à (CMF).*
2. *Si (P_t) est de Hunt et si (\check{P}_t) est standard tout potentiel borné de fonctionnelle additive est semi-régulier.*

La première partie du théorème provient de la remarque classique suivante :

Si m est une loi initiale, posons

$$h(y) = \int u(x, y) m(dy),$$

les semi-groupes fortement markoviens (P_t) et (\check{P}_t^h) vérifient

$$\langle P_t f, g \rangle_{mU} = \langle f, \hat{P}_t^h g \rangle_{mU}$$

quelles que soient f et g boréliennes bornées (cela se montre en prenant d'abord f et g continues et en vérifiant que U^α et $\check{U}^{h, \alpha}$ sont en dualité par rapport à mU); on applique alors les théorèmes 6.2 et 6.3.

La deuxième assertion résulte alors des théorèmes 5.3 et 5.4.

6.5. L'hypothèse (CMF- ζ) se rencontrant plus souvent dans la nature que l'hypothèse (CMF), il est peut-être utile d'écrire comment il faut

affaiblir les énoncés de manière à ce qu'ils deviennent conséquence de l'hypothèse (CMF- ζ); on a le résultat suivant :

THÉORÈME. — *Les hypothèses et les notations sont celles du théorème 6.2; supposons qu'il existe un semi-groupe fortement markovien borélien $(\check{P}_t)_{t \geq 0}$ en dualité avec $(P_t)_{t \geq 0}$ par rapport à la mesure m_U , et soit μ une probabilité sur E ne chargeant pas les ensembles m -polaires à gauche. Il existe alors une fonctionnelle additive gauche A ne chargeant pas ζ , unique à une P_m -indistinguabilité près telle que*

$$\langle \mu, f \rangle = E_m \left[\int_0^\infty f(X_{t-}) dA_t \right]$$

quelle que soit f borélienne bornée.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] H. AIRAULT, *Théorème de Fatou et Frontière de Martin* (J. Funct. Anal., vol. 12, n° 4, 1973, p. 418-455).
- [2] J. AZÉMA, *Quelques applications de la théorie générale des processus*, I (Inventiones math., vol. 18, 1972, p. 293-336).
- [3] J. AZÉMA, *Une remarque sur les temps de retour; Séminaire de Probabilités VI (Lecture notes in Mathematics, vol. 258, Springer, 1972)*.
- [4] J. AZÉMA, M. KAPLAN-DUFLO et D. REVUZ, C. R. Acad. Sc., t. 267, série A, 1968, p. 313-315.
- [5] A. BENVENISTE, *Thèse de 3^e cycle*, Université Paris VI, 1972.
- [6] R. M. BLUMENTHAL et R. K. GETTOOR, *Markov processes and potential theory*, Academic press, 1968.
- [7] P. CARTIER, P. A. MEYER et M. WEIL, *Le retournement du temps : compléments à l'exposé de M. Weil; Séminaire de Probabilités II (Lecture notes in Mathematics, Springer Verlag, 1968)*.
- [8] K. L. CHUNG, *A simple proof of Doob's convergence theorem; Séminaire de Probabilités V (Lecture notes in Mathematics, vol. 191, Springer, 1971)*.
- [9] K. L. CHUNG et J. B. WALSH, *To reverse a Markov process* (Act. Math., vol. 123, 1969, p. 225-251).
- [10] P. COURREGE et P. PRIOURET, *Temps d'arrêt d'une fonction aléatoire* (Publ. Inst. Stat. univ. de Paris XIV, 1965, p. 245-274).
- [11] C. DELLACHERIE, *Capacités et processus stochastiques (Ergebnisse der Mathematik und Ihrer Greuzgebiete, Band 67, Springer, 1972)*.
- [12] R. K. GETTOOR et M. J. SHARPE, *Last exit times and additive functionals* (à paraître).
- [13] R. K. GETTOOR et M. J. SHARPE, *Last exit decompositions and distributions* (à paraître).
- [14] H. KUNITA et T. WATANABE, *Markov processes and Martin boundaries* (Ill. J. Math., vol. 9, 1965, p. 485-526).
- [15] H. KUNITA et T. WATANABE, *On certain reversed processes and their applications to boundary theory* (J. Math. and Mech., vol. 15, n° 3, 1966, p. 393-434).
- [16] H. F. MERTENS, Z. Wahrsch, Band 22, Heft 1, 1972.
- [17] J. F. MERTENS, *Strongly supermedian functions* (à paraître).
- [18] P. A. MEYER, *Processus de Markov (Lecture notes in Mathematics, vol. 26, Springer, 1967)*.
- [19] P. A. MEYER, *Processus de Markov : la frontière de Martin (Lecture notes in Mathematics, vol. 77, Springer, 1968)*.

- [20] P. A. MEYER, *Temps d'arrêt algébriquement prévisibles; Séminaire de probabilités VI (Lecture notes in Mathematics, vol. 258, Springer, 1972).*
- [21] P. A. MEYER, *Quelques autres applications de la méthode de Walsh; Séminaire de probabilités VI (Lecture notes in Mathematics, vol. 258, Springer, 1972).*
- [22] P. A. MEYER, *Le retournement du temps d'après Chung et Walsh; Séminaire de probabilités V (Lecture notes in Mathematics, vol. 191, Springer, 1971).*
- [23] P. A. MEYER, R.-T. SMYTHE et J. B. WALSH, *Birth and death of Markov processes, Proceedings of the 6th Berkeley symposium, 1970.*
- [24] G. MOKOBODZKI, *Relèvement borélien compatible avec une classe d'ensembles négligeables (Séminaire de théorie du potentiel, Université Paris VI, 1972).*
- [25] G. MOKOBODSKI (à paraître).
- [26] NAGASAWA, *Nagoya J. Math.*, t. 24, 1964, p. 177-204.
- [27] D. REVUZ, *Mesures associées aux fonctionnelles additives de Markov (Trans. Amer. Math. Soc., vol. 148, 1970, p. 501-531).*
- [28] R. T. SMYTHE et J. B. WALSH (à paraître).
- [29] J. B. WALSH, *Some topologies connected with Lebesgue-measure; Séminaire de probabilités V (Lecture notes in Mathematics, vol. 191, Springer, 1971, p. 290).*
- [30] J. B. WALSH et M. WEIL, *Représentation des temps terminaux et application aux fonctionnelles additives et aux systèmes de Lévy (Ann. scient. Éc. Norm. Sup., 4^e série, t. 5, fasc. 1, 1972, p. 121-155).*

(Manuscrit reçu le 28 mai 1973.)

Jacques AZÉMA,
Laboratoire de Calcul
des probabilités,
9, quai Saint-Bernard, Tour 56,
75005 Paris.

