

# ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

J. G. M. MARS

**Sur l'approximation du nombre de solutions de certaines équations diophantiennes**

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 4<sup>e</sup> série*, tome 6, n° 3 (1973), p. 357-388

[http://www.numdam.org/item?id=ASENS\\_1973\\_4\\_6\\_3\\_357\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1973_4_6_3_357_0)

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## SUR L'APPROXIMATION DU NOMBRE DE SOLUTIONS DE CERTAINES ÉQUATIONS DIOPHANTIENNES

PAR J. G. M. MARS

---

Dans ce mémoire, je donne une version adélique de la méthode de Hardy et Littlewood pour l'approximation du nombre des solutions en entiers positifs de l'équation

$$x_1^k + x_2^k + \dots + x_m^k = n.$$

On verra que la « série singulière » est une intégrale adélique qui a été déjà introduite par Weil dans [7]. Le choix d'un domaine fondamental spécial pour  $A/k$  remplacera les fractions de Farey, et l'on retrouve, d'une façon assez naturelle, les « major arcs » et les « minor arcs » : la formule (20) correspond à l'approximation sur les major arcs et (21) est l'intégrale sur la réunion des minor arcs. Pour estimer (21), je dois recourir aux travaux de Vinogradov.

La méthode se généralise au cas d'un corps de nombres algébriques quelconque. Dans ce cas général, j'utilise les résultats de Körner généralisant Vinogradov. Les ensembles  $V_a$  qui seront définis au cours du n° 6 correspondent aux  $B_\gamma$  de Siegel [5].

Le résultat final, rédigé sous forme de théorème à la fin du n° 6, résume plusieurs problèmes classiques, et on désirerait le prouver pour d'autres polynômes....

1. — Soit  $k$  un corps de nombres algébriques,  $A$  l'anneau des adèles de  $k$  et  $\chi$  un caractère non-trivial de  $A/k$ . Soit  $F$  un polynôme en  $m$  variables à coefficients dans  $k$ . Je pose, suivant Weil [7],

$$(1) \quad F_\Phi^*(i) = \int_{A^m} \Phi(x) \chi(i F(x)) dx \quad (i \in A),$$

où  $dx$  est la mesure de Tamagawa sur  $A^m$  et où  $\Phi$  est une fonction intégrable sur  $A^m$ . Si  $\Phi$  est telle que  $F_\Phi^*$  soit intégrable sur  $A$  pour la mesure de Tamagawa  $dj$  sur  $A$ , je pose

$$(2) \quad F_\Phi(i) = \int_A F_\Phi^*(j) \chi(-ij) dj \quad (i \in A).$$

Le caractère  $\chi$  définit des caractères  $\chi_v$  des complétés  $k_v$  de  $k$  par la formule

$$\chi(x) = \prod_v \chi_v(x_v) \quad \text{pour } x = (x_v) \in A.$$

Quand on a à considérer des intégrales locales, le plus commode est de choisir, pour tout  $v$ , la mesure de Haar  $dj_v$  sur  $k_v$  autoduale par rapport à l'identification de  $k_v$  à son groupe dual au moyen du bicaractère  $\chi_v(xy)$ . La restriction de la mesure de Tamagawa de  $A$  à n'importe quel sous-ensemble de la forme

$$\prod_{v \in S} k_v \times \prod_{v \notin S} \mathfrak{o}_v$$

( $S$  un ensemble fini de places de  $k$  contenant les places à l'infini;  $\mathfrak{o}_v =$  l'anneau des entiers de  $k_v$ ) coïncide alors avec le produit des  $dj_v$ . Sur  $k_v^m$ , on choisira la mesure produit déterminée par la mesure  $dj_v$  sur chaque facteur. On pose alors

$$(3) \quad F_\Phi^*(i) = \int_{k_v^m} \Phi(x_v) \chi_v(iF(x_v)) dx_v \quad (i \in k_v),$$

$$(4) \quad F_\Phi(i) = \int_{k_v} F_\Phi^*(j_v) \chi_v(-ij_v) dj_v \quad (i \in k_v),$$

où  $\Phi$  est une fonction intégrable sur  $k_v^m$  telle que  $F_\Phi^*$  soit intégrable sur  $k_v$ .

Il y a lieu de considérer les conditions suivantes sur  $F$  :

(A) Quelle que soit  $\Phi \in \mathcal{S}(A^m)$  [resp.  $\mathcal{S}(k_v^m)$ ], la fonction  $F_\Phi^*$  définie par (1) [resp. (3)] est intégrable sur  $A$  (resp.  $k_v$ ); et l'intégrale  $\int |F_\Phi^*|$  converge uniformément sur toute partie compacte de  $\mathcal{S}(A^m)$  [resp.  $\mathcal{S}(k_v^m)$ ].

Ici,  $\mathcal{S}(\dots)$  désigne l'espace de Schwartz-Bruhat attaché au groupe abélien localement compact en question.

Supposons la condition (A) satisfaite pour  $k_v$ . Alors, d'après la proposition 1 de Weil [7],  $\Phi \rightarrow F_\Phi(i)$  est, pour tout  $i \in k_v$ , une mesure tempérée positive sur  $k_v^m$  de support contenu dans  $F^{-1}(\{i\})$ ; et, pour tout  $\Phi \in \mathcal{S}(k_v^m)$ ,  $F_\Phi$  est intégrable sur  $k_v$  et satisfait à  $\int_{k_v} F_\Phi(i_v) di_v = \int_{k_v^m} \Phi(x_v) dx_v$ .

EXEMPLES :

1. Prenons pour  $F$  une forme quadratique non dégénérée en  $m$  variables. Pour que la condition (A) soit satisfaite pour  $k_v$ , il faut et il suffit que  $m > 2$ . Pour que la condition (A) soit satisfaite pour les adèles, il faut et il suffit que  $m > 4$ .

2. Prenons  $F(x) = x_1^k + x_2^k + \dots + x_m^k$ . La condition (A) est satisfaite localement (resp. adéliquement) si  $m > k$  (resp.  $m > 2k$ ).

Désignons par  $Y$  la droite affine et par  $X = Y^m$  l'espace affine à  $m$  dimensions, et considérons  $F$  comme une application de  $X$  dans  $Y$ . L'ensemble  $X'$  des points où  $F$  est submersive, c'est-à-dire où la différentielle de  $F$  n'est pas nulle, est une partie  $k$ -ouverte non-vide de  $X$  (si  $F$  n'est pas une constante). Notons encore  $Y' = F(X')$ , et soit, pour tout  $i \in Y'$ ,  $U_i$  l'ensemble des  $x \in X'$  tels que  $F(x) = i$ .

Soit  $\eta$  une jauge sur  $Y$ , et soit  $\omega$  la puissance extérieure  $m$ -ième de  $\eta$ , de sorte que  $\omega$  est une jauge sur  $X$ . On définit, comme dans [7], n° 5, une jauge  $\theta_i$  sur  $U_i$  (pour tout  $i \in Y'$ ) donnée symboliquement par la formule

$$\theta_i(x) = \left( \frac{\omega(x)}{\eta(F(x))} \right)_i.$$

Si  $i \in Y'(k_v)$ , la jauge  $\theta_i$  détermine une mesure  $|\theta_i|_v$  sur  $U_i(k_v)$ , et, supposant que  $\eta$  détermine la mesure  $di_v$  sur  $k_v$ , on a

$$(5) \quad \int_{X'(k_v)} \Phi(x_v) dx_v = \int_{Y'(k_v)} di_v \int_{U_i(k_v)} \Phi | \theta_i |_v$$

pour toute fonction  $\Phi$  continue à support compact sur  $X'(k_v)$ .

Supposons maintenant que  $F$  satisfasse à la condition (A) pour  $k_v$ . Alors

$$(6) \quad \int_{X'(k_v)} \Phi(x_v) dx_v = \int_{Y'(k_v)} F_\Phi(i_v) di_v.$$

On déduit de (5) et (6) qu'on a

$$F_\Phi(i) = \int_{U_i(k_v)} \Phi | \theta_i |_v$$

pour tout  $i \in Y'(k_v)$  et toute fonction continue  $\Phi$  à support compact sur  $X'(k_v)$ ; autrement dit, la mesure sur  $F^{-1}(\{i\})$  définie par  $\Phi \rightarrow F_\Phi(i)$  coïncide avec  $|\theta_i|_v$  sur  $U_i(k_v)$ .

EXEMPLE. — Prenons  $F(x) = x_1^k + \dots + x_m^k$  avec  $m > k$ . Écrivons, pour  $i \in Y'(k_v)$ ,

$$(7) \quad F_\Phi(i) = \int_{U_i(k_v)} \Phi | \theta_i |_v + \mu_i(\Phi) \quad [\Phi \in C_c(X(k_v))],$$

où  $\mu_i$  est une mesure de support contenu dans l'ensemble

$$\{x \in X(k_v) : F(x) = i, dF_x = 0\}.$$

Cet ensemble est vide si  $i \neq 0$ . Pour déterminer  $\mu_0$ , on remplace, dans (7),  $\Phi(x)$  par  $\Phi(tx)$  avec  $t \in k_v^*$ . On voit facilement qu'alors  $F_\Phi(i)$  et l'intégrale sont multipliés par le facteur  $|t|^{k-m}$ , par conséquent  $\mu_0(\Phi)$  l'est aussi; comme le support de  $\mu_0$  est contenu dans  $\{0\}$ , on en conclut que  $\mu_0$  est nulle.

Si l'on suppose plus généralement que  $F$  est un polynôme homogène, on a  $F(x) = 0$  pour tout  $x \in X$  tel que  $dF_x = 0$ ; donc, si la condition (A) est satisfaite, on a, pour tout  $i \in k_v^*$ , la relation (7) avec  $\mu_i = 0$ .

Retournons au cas général.

LEMME. — Soit  $i$  un élément de  $k$  et soit, pour tout  $v$ ,  $\Phi_v$  une fonction de  $\mathcal{S}(k_v^m)$ ; on suppose que, pour presque tout  $v$ ,  $\Phi_v$  est la fonction caractéristique de  $\mathfrak{o}_v^m$ . Soit  $\Phi$  la fonction de  $\mathcal{S}(A^m)$  définie par

$$\Phi(x) = \prod_v \Phi_v(x_v) \quad \text{pour } x = (x_v) \in A^m.$$

On suppose les conditions suivantes satisfaites :

1° La condition (A) pour les adèles.

2°  $U_i$  admet les facteurs de convergence (1).

3°  $F_{\Phi_v}(i) = \int_{U_i(k_v)} \Phi_v | \theta_i |_v$  pour tout  $v$ .

Alors, on a

$$F_\Phi(i) = \int_{U_i(A)} \Phi | \theta_i |_A,$$

où  $| \theta_i |_A$  est la mesure de Tamagawa déterminée par la jauge  $\theta_i$ .

Démonstration. — Il est trivial que, pour tout  $j = (j_v) \in A$ , on a

$$F_\Phi^*(j) = \prod_v F_{\Phi_v}^*(j_v),$$

et il est facile d'en déduire qu'on a

$$F_\Phi(j) = \prod_v F_{\Phi_v}(j_v).$$

Sous les hypothèses faites, on a donc

$$F_\Phi(i) = \prod_v \int_{U_i(k_v)} \Phi_v | \theta_i |_v = \int_{U_i(A)} \Phi | \theta_i |_A.$$

Pour les détails, voir [7], nos 42-43.

COROLLAIRE. — Supposons  $F$  homogène. Soit  $i$  un élément de  $k^*$ . On suppose les conditions suivantes satisfaites :

1° La condition adélique (A).

2°  $U_i$  admet les facteurs de convergence (1).

Alors, on a, pour tout  $\Phi \in \mathcal{S}(A^m)$ ,

$$F_\Phi(i) = \int_{U_i(A)} \Phi | \theta_i |_A.$$

Exemple. — Pour  $F(x) = x_1^k + \dots + x_m^k$ , l'hypothèse 1° du lemme est satisfaite si  $m > 2k$ , l'hypothèse 2° est satisfaite si  $m > 4$  et l'hypothèse 3° si  $m > k$ .

2. — L'analogie « discret » de l'intégrale  $F_\Phi^*(i)$  donnée par la formule (1) est la série

$$(8) \quad f_\Phi^*(i) = \sum_{\xi \in k^m} \Phi(\xi) \chi(i F(\xi)) \quad (i \in A),$$

où  $\Phi$  est une fonction sur  $A^m$  telle que  $\sum_{\xi \in k^m} |\Phi(\xi)| < \infty$ .

On peut considérer  $f_\Phi^*$  comme une fonction continue sur le groupe compact  $A/k$ ; cette fonction a une transformée de Fourier donnée par

$$(9) \quad f_\Phi(i) = \int_{A/k} f_\Phi^*(j) \chi(-ij) dj \quad (i \in k).$$

On a évidemment

$$f_\Phi(i) = \sum_{\xi \in k^m} \int_{A/k} \Phi(\xi) \chi(j(F(\xi) - i)) dj = \sum_{\substack{\xi \in k^m \\ F(\xi) = i}} \Phi(\xi).$$

LEMME. — Supposons  $F$  homogène de degré  $k$ . Soient donnés une fonction  $\varphi$  de  $\mathcal{S}(A^m)$  et un élément  $i$  de  $A$ . On a

$$|t|^{-m} f_{\Phi_0 t^{-1}}^*(it^{-k}) = F_\Phi^*(i) + O(|t|^{-N}) \quad \text{pour } t \in A^*, |t| \rightarrow \infty,$$

où  $N$  est arbitraire [ $\Phi_0 t^{-1}$  désigne la fonction  $x \rightarrow \Phi(t^{-1}x)$ ].

Démonstration. — Montrons qu'on a, pour tout  $\Phi \in \mathcal{S}(A^m)$ ,

$$(10) \quad |t|^{-m} \sum_{\xi \in k^m} \Phi(t^{-1}\xi) = \int_{A^m} \Phi(x) dx + O(|t|^{-N}) \quad (|t| \rightarrow \infty).$$

Si la transformée de Fourier de  $\Phi$  est  $\hat{\Phi}$ , celle de  $x \rightarrow |t|^{-m} \Phi(t^{-1}x)$  est  $x \rightarrow \hat{\Phi}(tx)$ , et la formule de Poisson donne

$$|t|^{-m} \sum_{\xi \in k^m} \Phi(t^{-1}\xi) = \sum_{\xi \in k^m} \hat{\Phi}(t\xi) = \int_{A^m} \Phi(x) dx + \sum_{\xi \neq 0} \hat{\Phi}(t\xi).$$

Comme  $\hat{\Phi} \in \mathcal{S}(A^m)$ , la dernière somme est  $O(|t|^{-N})$  pour  $|t| \rightarrow \infty$ . Cela donne (10), et le lemme en résulte lorsque  $\Phi(x)$  est remplacé par  $\Phi(x) \chi(iF(x))$ .

Supposons que  $F$  soit homogène de degré  $k$  et qu'il satisfasse à la condition adélique (A) du n° 1. Soit  $\Phi \in \mathcal{S}(A^m)$ . D'après le lemme précédent, on a

$$|t|^{-m} f_{\Phi_0 t^{-1}}^*(it^{-k}) \chi(-ij) = F_{\Phi}^*(i) \chi(-ij) + O(|t|^{-N}).$$

Malheureusement  $O(|t|^{-N})$  dépend de  $i \dots$ ; écrivons pourtant

$$|t|^{-m} \int_{t^k D} f_{\Phi_0 t^{-1}}^*(it^{-k}) \chi(-ij) di = \int_{t^k D} F_{\Phi}^*(i) \chi(-ij) di + \text{reste.}$$

Si  $D$  est un domaine fondamental pour  $A/k$  et si l'on prend  $jt^k = \alpha \in k$ , cela donne

$$|t|^{k-m} f_{\Phi_0 t^{-1}}(\alpha) = \int_{t^k D} F_{\Phi}^*(i) \chi(-ij) di + \text{reste} = F_{\Phi}(t^{-k} \alpha) + R.$$

Il s'agit, bien entendu, d'estimer  $R$ .

EXEMPLE 1. — Supposons  $k = \mathbf{Q}$ ,  $F$  à coefficients entiers, et prenons  $\Phi$  de la forme  $\Phi(x) = \Phi_{\infty}(x_{\infty}) \prod_p \Phi_p(x_p)$ , où  $\Phi_{\infty} \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^m)$  et où  $\Phi_p$  est la fonction caractéristique de  $\mathbf{Z}_p^m$  pour tout  $p$ . Soit  $n \in \mathbf{Z}$ ,  $n > 0$ . Prenant  $\alpha = n$  et prenant pour  $t$  l'idèle défini par  $t_{\infty} = n^{1/k}$ ,  $t_p = 1$  pour tout  $p$ , on aura

$$(11) \quad n^{1-(m/k)} f_{\Phi_0 t^{-1}}(n) = F_{\Phi}(n') + R,$$

où  $n'$  est l'idèle dont la composante à l'infini est 1 et dont toutes les autres composantes sont  $n$ . Le premier membre de (11) est égal à

$$(12) \quad n^{1-(m/k)} \sum_{\substack{\xi \in \mathbf{Z}^m \\ F(\xi) = n}} \Phi_{\infty}(n^{-1/k} \xi).$$

Et, d'après le n° 1, on a

$$(13) \quad F_{\Phi}(n') = F_{\Phi_{\infty}}(1) \prod_p F_{\Phi_p}(n) = \int_{U_1(\mathbf{R})} \Phi_{\infty} | \theta_1 |_{\infty} \prod_p \int_{U_n(\mathbf{Q}_p)} \Phi_p | \theta_n |_p.$$

Si, en particulier,  $F(x) = x_1^k + \dots + x_m^k$ , avec  $k$  pair, on peut choisir  $\Phi_{\infty}$  de telle manière qu'on ait  $\Phi_{\infty}(x_{\infty}) = 1$  pour tous les  $x_{\infty}$  avec  $F(x_{\infty}) = 1$ . La somme dans (12) est alors égale au nombre  $r(n)$  des solutions entières de l'équation  $F(\xi) = n$ , et on voit facilement, en calculant les intégrales dans (13), que  $F_{\Phi}(n')$  est identique à la « série singulière » de Hardy et Littlewood. L'égalité (11) donne

$$r(n) = n^{(m/k)-1} F_{\Phi}(n') + n^{(m/k)-1} R,$$

et Hardy, Littlewood, Vinogradov ont montré qu'on a  $\lim_{n \rightarrow \infty} R = 0$  si  $m$  est suffisamment grand.

*Remarque.* — Soit  $F(x) = x_1^k + \dots + x_m^k$  avec  $k$  impair. Si l'on sait que, dans (11), on a  $\lim_{n \rightarrow \infty} R = 0$  pour tout  $\Phi \in \mathcal{S}(\mathbf{A}^m)$ , on en déduit immédiatement qu'on a encore  $\lim_{n \rightarrow \infty} R = 0$  lorsqu'on prend pour  $\Phi_x$  la fonction caractéristique de l'ensemble  $0 \leq x_1 \leq 1, \dots, 0 \leq x_m \leq 1$ . Cela donne la formule de Hardy-Littlewood pour le nombre des solutions en entiers positifs de l'équation  $F(\xi) = n$ .

EXEMPLE 2. — Soit toujours  $k = \mathbf{Q}$ ,  $F$  à coefficients entiers et  $\Phi$  comme au début de l'exemple 1, mais prenons  $\alpha = 0$  et  $t \in \mathbf{A}^*$  tel que  $t_x = \tau > 0$ ,  $t_p = 1$  pour tout  $p$ . Cela donne

$$(14) \quad \tau^{k-m} \sum_{\substack{\xi \in \mathbf{Z}^m \\ F(\xi)=0}} \Phi_x(\tau^{-1} \xi) = F_\Phi(0) + R.$$

C'est un autre problème classique que de démontrer que  $\lim_{\tau \rightarrow \infty} R = 0$ .

3. — On suppose que  $F$  est homogène de degré  $k$  et qu'il satisfait à la condition adélique (A) du n° 1. Soient  $t \in \mathbf{A}^*$ ,  $\nu \in k$  et  $\Phi \in \mathcal{S}(\mathbf{A}^m)$ . Si l'on pose

$$(15) \quad |t|^{k-m} f_{\Phi, t^{-1}}(\nu) = F_\Phi(t^{-k} \nu) + R,$$

on a  $R = R_1 + R_2$  avec

$$(16) \quad R_1 = - \int_{\mathbf{A} \setminus t^k \mathbf{D}} F_\Phi^*(i) \chi(-it^{-k} \nu) di,$$

$$(17) \quad R_2 = \int_{t^k \mathbf{D}} \{ |t|^{-m} f_{\Phi, t^{-1}}^*(it^{-k}) - F_\Phi^*(i) \} \chi(-it^{-k} \nu) di,$$

où  $\mathbf{D}$  est un domaine fondamental pour  $\mathbf{A}/k$ .

On a évidemment

$$|R_1| \leq \int_{\mathbf{A} \setminus t^k \mathbf{D}} |F_\Phi^*(i)| di,$$

donc  $\lim R_1 = 0$  si  $t$  et  $\mathbf{D}$  varient de telle manière que  $t^k \mathbf{D}$  devienne arbitrairement grand.

Utilisant les définitions (1) et (8) et la formule de Poisson on trouve la formule suivante, qui sera utile dans l'estimation de  $R_2$  :

$$(18) \quad |t|^{-m} f_{\Phi, t^{-1}}^*(it^{-k}) - F_\Phi^*(i) = \sum_{\substack{\xi \in k^m \\ \xi \neq 0}} \int_{\mathbf{A}^m} \Phi(x) \chi(i F(x) + t[x, \xi]) dx;$$

ici,  $[x, \xi]$  désigne le produit scalaire.



4. — On suppose que  $F(x) = x_1^k + x_2^k + \dots + x_m^k$  et que  $m > 2k$ . Pour estimer  $R_2$  [défini par (17) au n° 3] on utilisera la formule (18) et les majorations suivantes, qui seront démontrées au n° 7. On se donne, pour tout  $v$ , une fonction  $\Phi_v$  de  $\mathcal{S}(k_v^m)$  de telle manière que, pour presque tout  $v$ ,  $\Phi_v$  soit la fonction caractéristique de  $\mathfrak{o}_v^m$ . Posant, pour  $i_v \in k_v$ ,  $y \in k_v^m$ ,

$$I_v(i_v, y) = \int_{k_v^m} \Phi_v(x_v) \chi_v(i_v F(x_v) + [x_v, y]) dx_v,$$

on a, pour presque tout  $v$ ,

$$\begin{aligned} I_v(i_v, y) &= 0 && \text{si } i_v \in \mathfrak{o}_v, \quad y \notin \mathfrak{o}_v^m, \\ &= 1 && \text{si } i_v \in \mathfrak{o}_v, \quad y \in \mathfrak{o}_v^m, \\ &= 0 && \text{si } i_v \notin \mathfrak{o}_v, \quad y \notin (i_v \mathfrak{o}_v)^m, \\ |I_v(i_v, y)| &\leq |i_v|^{-m/k} && \text{si } i_v \notin \mathfrak{o}_v, \quad y \in (i_v \mathfrak{o}_v)^m. \end{aligned}$$

Et pour tout  $v$ , il existe une fonction  $\psi_v \in \mathcal{S}(k_v^m)$  telle qu'on ait

$$\begin{aligned} |I_v(i_v, y)| &\leq \psi_v(y) && \text{si } |i_v| \leq 1, \\ |I_v(i_v, y)| &\leq |i_v|^{-m/k} \psi_v(i_v^{-1} y) && \text{si } |i_v| \geq 1. \end{aligned}$$

5. — Conservant les hypothèses du n° 4, je traite d'abord le cas où le corps de base  $k$  est  $\mathbf{Q}$ . Il faut d'abord choisir un domaine fondamental pour  $\mathbf{A}/k$ .

Soit  $\tau$  un nombre réel  $> 1$ . Pour tout entier  $\alpha \geq 1$ , on définit un sous-ensemble  $V_\alpha$  de  $\mathbf{A}$  par

$$V_\alpha = \left[ -\frac{1}{\tau\alpha}, \frac{1}{\tau\alpha} \right] \times \prod_{p|\alpha} \alpha^{-1} \mathbf{Z}_p^* \times \prod_{p \nmid \alpha} \mathbf{Z}_p,$$

et on pose

$$D_\tau = \bigcup_{\alpha \leq \tau} V_\alpha.$$

On a alors  $\mathbf{A} = D_\tau + \mathbf{Q}$ .

*Démonstration.* — Soit  $x \in \mathbf{A}$ . Additionnant à  $x$  un élément convenable de  $\mathbf{Q}$ , on peut supposer que  $x_p \in \mathbf{Z}_p$  pour tout  $p$ . Il faut montrer l'existence de  $\alpha \in \mathbf{Z}$  et  $\xi \in \mathbf{Q}$  tels que  $1 \leq \alpha \leq \tau$  et  $x - \xi \in V_\alpha$ ; c'est-à-dire, il faut trouver

$$\xi = \frac{\beta}{\alpha} \quad \text{avec } \alpha \in \mathbf{Z}, \quad \beta \in \mathbf{Z}, \quad (\alpha, \beta) = 1, \quad |x_\alpha - \xi| \leq \frac{1}{\tau\alpha}, \quad 1 \leq \alpha \leq \tau.$$

On sait que c'est possible.

Les propriétés suivantes des  $V_\alpha$  sont faciles à démontrer.

1° Supposons  $\tau > 2$  et  $\alpha \leq \tau$ . Si  $x \in V_\alpha$ ,  $y \in V_\alpha$ ,  $x \neq y$ , alors  $x - y \notin \mathbf{Q}$ .

2° Supposons  $\alpha \neq \beta$ ,  $\alpha + \beta < \tau$ . Si  $x \in V_\alpha$ ,  $y \in V_\beta$ , alors  $x - y \notin \mathbf{Q}$ .

Pour  $\tau > 2$ , on pourra donc choisir un domaine fondamental  $D$  (dépendant de  $\tau$ ) pour  $\mathbf{A}/\mathbf{Q}$  tel qu'on ait

$$(19) \quad \bigcup_{\alpha \leq \tau/2} V_\alpha \subset D \subset D^-.$$

LEMME. — Dans les notations du n° 3, on suppose que  $D$  est un domaine fondamental satisfaisant à (19) et que  $t_p = 1$  pour tout  $p$ . On a

$$\lim R_1 = 0$$

si  $t$  et  $\tau$  varient de telle manière que  $\tau$  et  $t_x^k \tau^{-1}$  deviennent arbitrairement grands.

Démonstration. — Soient  $b$  un nombre réel  $> 0$ ,  $c$  un entier  $> 0$  et  $\Omega$  un compact de  $\mathbf{A}$  contenu dans l'ensemble

$$[-b, b] \times \prod_p c^{-1} \mathbf{Z}_p.$$

Cherchons une condition suffisante pour que  $t^k D \supset \Omega$ . Soit  $x \in \Omega$ . Il existe un entier positif  $\alpha$ , et un seul, tel qu'on ait

$$x_p \in \alpha^{-1} \mathbf{Z}_p^* \text{ pour } p \mid \alpha \quad \text{et} \quad x_p \in \mathbf{Z}_p \text{ pour } p \nmid \alpha.$$

Cet entier  $\alpha$  est un diviseur de  $c$ , donc  $\leq c$ . Si  $\tau \geq 2c$  et si  $t_x^k \tau^{-1} \geq bc$ , on aura

$$\alpha \leq \frac{\tau}{2} \quad \text{et} \quad |x_\infty| \leq t_x^k \tau^{-1} \alpha^{-1},$$

donc  $x \in t^k V_\alpha \subset t^k D$ , d'après (19).

Utilisant les notations du n° 3, on va maintenant estimer  $R_2$ . On suppose que  $t_p = 1$  pour tout  $p$ , et on prend  $\Phi \in \mathcal{S}(\mathbf{A}^m)$  de la forme

$$\Phi(x) = \Phi_\infty(x_\infty) \prod_p \Phi_p(x_p).$$

On choisit  $D$  de telle façon que la condition (19) soit satisfaite.

D'après les formules (17), (18), (19) et les définitions du n° 4, on a évidemment

$$|R_2| \leq \int_{t^k D} di \left| \sum_{\substack{\xi \in \mathbf{Q}^m \\ \xi \neq 0}} \prod_v I_v(i_v, t_v \xi) \right|.$$

D'après le n° 4, il existe un ensemble fini  $S$  de nombres premiers et, pour tout  $p \in S$ , une fonction  $\psi_p$  de  $\mathcal{S}(\mathbf{Q}_p^m)$ , tels qu'on ait, pour tout  $p \in S$  :

$$\begin{aligned} |I_p(i_p, \xi)| &\leq \psi_p(\xi) && \text{si } i_p \in \mathbf{Z}_p, \\ |I_p(i_p, \xi)| &\leq |i_p|^{-m/k} \psi_p(i_p^{-1} \xi) && \text{si } i_p \notin \mathbf{Z}_p; \end{aligned}$$

et pour tout  $p \notin S$  :

$$\begin{aligned} I_p(i_p, \xi) &= 1 && \text{si } i_p \in \mathbf{Z}_p, \quad \xi \in \mathbf{Z}_p^m, \\ |I_p(i_p, \xi)| &\leq |i_p|^{-m/k} && \text{si } i_p \notin \mathbf{Z}_p, \quad \xi \in i_p \mathbf{Z}_p^m, \\ I_p(i_p, \xi) &= 0 && \text{dans les autres cas.} \end{aligned}$$

On peut évidemment supposer que  $\psi_p$  est, à un facteur constant près, la fonction caractéristique d'un ensemble de la forme  $p^{-\nu(p)} \mathbf{Z}_p^m$  avec  $\nu(p) \in \mathbf{Z}$ . Posons alors

$$\gamma = \prod_{p \in S} p^{\nu(p)} \in \mathbf{Q},$$

et soit  $i \in t^k V_\alpha$ . Les résultats précédents se résument alors ainsi :

$$\begin{aligned} I_p(i_p, \xi) &= 0 && \text{si } \xi \notin \alpha^{-1} \gamma^{-1} \mathbf{Z}_p^m, \\ |I_p(i_p, \xi)| &\leq c_p |i_p|^{m/k} && \text{si } \xi \in \alpha^{-1} \gamma^{-1} \mathbf{Z}_p^m, \end{aligned}$$

où  $c_p$  sont des constantes,  $c_p = 1$  pour  $p \notin S$ . Si l'on pose

$$J(i) = \left| \sum_{\substack{\xi \in \mathbf{Q}^m \\ \xi \neq 0}} \prod_v I_v(i_v, t_v \xi) \right|,$$

cela donne immédiatement

$$J(i) \leq c \alpha^{-m/k} \sum_{\substack{\xi \in \alpha^{-1} \gamma^{-1} \mathbf{Z}^m \\ \xi \neq 0}} |I_\infty(i_\infty, t_\infty \xi)|,$$

avec  $c = \prod_{p \in S} c_p$ .

Soit  $\psi_\infty$  une fonction de  $\mathfrak{S}(\mathbf{R}^m)$  telle que

$$\begin{aligned} |I_\infty(i_\infty, t_\infty \xi)| &\leq \psi_\infty(t_\infty \xi) && \text{si } |i_\infty| \leq 1, \\ |I_\infty(i_\infty, t_\infty \xi)| &\leq |i_\infty|^{-m/k} \psi_\infty(i_\infty^{-1} t_\infty \xi) && \text{si } |i_\infty| \geq 1. \end{aligned}$$

Alors

$$J(i) \leq c \alpha^{-m/k} \sum_{\substack{\xi \in \mathbf{Z}^m \\ \xi \neq 0}} \psi_\infty(t_\infty \alpha^{-1} \gamma^{-1} \xi) \quad \text{si } |i_\infty| \leq 1,$$

$$J(i) \leq c \alpha^{-m/k} |i_\infty|^{-m/k} \sum_{\substack{\xi \in \mathbf{Z}^m \\ \xi \neq 0}} \psi_\infty(i_\infty^{-1} t_\infty \alpha^{-1} \gamma^{-1} \xi) \quad \text{si } |i_\infty| \geq 1.$$

Comme  $i \in t^k V_\alpha$ , on a  $|i_\infty| \leq t_\infty^k \tau^{-1} \alpha^{-1}$ . Je considère d'abord les  $\alpha$  satisfaisant à  $t_\infty^k \tau^{-1} \alpha^{-1} \geq 1$ . Pour un tel  $\alpha$  on a

$$t_\infty \alpha^{-1} \geq t_\infty^{1-k} \tau \gamma > 1 \quad \text{si } \tau \gamma > t_\infty^{k-1};$$

et

$$|i_\infty^{-1} t_\infty \alpha^{-1}| \geq t_\infty^{1-k} \tau \gamma > 1 \quad \text{si } \tau \gamma > t_\infty^{k-1}.$$

Donc, si  $\tau \succ t_\infty^{k-1}$ , on a

$$\begin{aligned} J(i) &\asymp \alpha^{-m/k} \alpha (t_\infty^{-1} \alpha)^N && \text{si } |i_\infty| \leq 1, \\ J(i) &\asymp \alpha^{-m/k} |i_\infty|^{-m/k} (|i_\infty| t_\infty^{-1} \alpha)^N && \text{si } |i_\infty| \geq 1, \end{aligned}$$

où  $N$  peut être pris arbitrairement grand. Intégration sur  $t^k V_\alpha$  donne ensuite

$$\int_{t^k V_\alpha} J(i) di \asymp E(\alpha) \alpha^{-m/k} (t_\infty^{-1} \alpha)^N (t_\infty^k \tau^{-1} \alpha^{-1})^{N-(m/k)+1},$$

où  $E$  désigne la fonction d'Euler qu'on note habituellement  $\varphi$  [ $E(\alpha)$  est le volume de la « partie finie » de  $V_\alpha$ ]. Par conséquent,

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha \leq t_\infty^k \tau^{-1}} \int_{t^k V_\alpha} J(i) di &\asymp \sum_{\alpha \leq t_\infty^k \tau^{-1}} t_\infty^{-N} (t_\infty^k \tau^{-1})^{N-(m/k)+1} \\ &\asymp t_\infty^{-N} (t_\infty^k \tau^{-1})^{N-(m/k)+2}, \end{aligned}$$

pourvu que  $\tau \succ t_\infty^{k-1}$ . En particulier

$$(20) \quad \sum_{\alpha \leq t_\infty} \int_{t^k V_\alpha} J(i) di \asymp t_\infty^{-(m/k)+2} \quad \text{si } \tau = t_\infty^{k-1}.$$

*Remarque.* — Pour  $\tau = t_\infty^{k-1+\delta}$ ,  $0 < \delta < 1$ , on trouve

$$\sum_{\alpha \leq t_\infty^{k-\delta}} \int_{t^k V_\alpha} J(i) di \asymp t^{-M}, \quad M \text{ arbitraire.}$$

Prenant  $\tau = t_\infty^{k-1}$ , il nous reste à estimer

$$\sum_{t_\infty < \alpha \leq t_\infty^{k-1}} \int_{t^k V_\alpha} J(i) di = \sum_{t_\infty < \alpha \leq t_\infty^{k-1}} \int_{t^k V_\alpha} \left| |t|^{-m} f_{\Phi_0, t^{-1}}^*(it^k) - F_\Phi^*(i) \right| di$$

(pour  $k \geq 3$ ). Soit

$$G_1(t_\infty) = \bigcup_{\alpha \leq t_\infty^{k-1}} t^k V_\alpha, \quad G_2(t_\infty) = \bigcup_{\alpha \leq t_\infty} t^k V_\alpha.$$

$G_1(t_\infty)$  et  $G_2(t_\infty)$  deviennent arbitrairement grands lorsque  $t_\infty$  tend vers  $+\infty$  (cf. la démonstration de  $\lim R_1 = 0$  plus haut). Par conséquent,

$$\sum_{t_\infty < \alpha \leq t_\infty^{k-1}} \int_{t^k V_\alpha} |F_\Phi^*(i)| di = \int_{G_1(t_\infty)} |F_\Phi^*(i)| di - \int_{G_2(t_\infty)} |F_\Phi^*(i)| di$$

tend vers zéro quand  $t_\infty \rightarrow \infty$ . Il reste donc à considérer

$$(21) \quad |t|^{k-m} \int_{G(t_\infty)} |f_{\Phi_0, t^{-1}}^*(i)| di,$$

où  $G(t_\infty) = \bigcup_{t_\infty < \alpha \leq t_\infty^{k-1}} V_\alpha$ . Comme le volume de  $G(t_\infty)$  est borné, (21)

est majoré par

$$(22) \quad |t|^{k-m} \sup_{i \in G(t_\infty)} |f_{\Phi_0, t^{-1}}^*(i)|.$$

Pour estimer (22) on doit recourir aux travaux de Vinogradov sur la majoration de sommes trigonométriques.

Si

$$\Phi(x) = \varphi_1(x_1) \varphi_2(x_2) \dots \varphi_m(x_m), \quad \varphi_l \in \mathcal{S}(\mathbf{A}),$$

on a

$$f_{\Phi, t^{-1}}^*(i) = \sum_{\xi \in \mathbf{Q}^m} \Phi(t^{-1}\xi) \chi(i F(\xi)) = \prod_{1 \leq l \leq m} S_{\varphi_l}(i),$$

où j'ai posé

$$(23) \quad S_{\varphi}(i) = \sum_{\xi \in \mathbf{Q}} \varphi(t^{-1}\xi) \chi(i \xi^k) \quad [\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{A})].$$

C'est  $S_{\varphi}(i)$  que nous allons estimer d'abord. Notons  $\mathbf{A}'$  le produit restreint des  $\mathbf{Q}_p$ , de sorte que  $\mathbf{A} = \mathbf{R} \times \mathbf{A}'$ . Soit  $\mathbf{K}$  un sous-groupe de  $\mathbf{A}'$  de la forme

$\mathbf{K} = \prod_{\sigma \in \mathbf{Z}} \sigma \mathbf{Z}_p$  avec  $\sigma \in \mathbf{Z}$ ,  $\sigma \neq 0$ , et soit  $\mathbf{H}$  un sous-groupe compact de  $\mathbf{A}'$

contenant  $\mathbf{K}$ . Désignons par  $\mathcal{S}(\mathbf{H}, \mathbf{K})$  le sous-espace de  $\mathcal{S}(\mathbf{A})$  formé des fonctions dont le support est contenu dans  $\mathbf{R} \times \mathbf{H}$  et qui sont constantes sur les classes suivant  $\{0\} \times \mathbf{K}$ . L'espace  $\mathcal{S}(\mathbf{H}, \mathbf{K})$  est engendré par les fonctions  $\varphi$  de la forme  $\varphi(x) = \varphi_{\infty}(x_{\infty}) \varphi'(x')$  où  $\varphi_{\infty} \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$  et où  $\varphi'$  est la fonction caractéristique d'une classe  $\rho + \mathbf{K}$  de  $\mathbf{H}$  suivant  $\mathbf{K}$ ; on peut choisir  $\rho$  dans  $\mathbf{Q}$ . Pour une telle fonction  $\varphi$  on a

$$S_{\varphi}(i) = \sum_{\xi \in \rho + \sigma \mathbf{Z}} \varphi_{\infty}(t_{\infty}^{-1}\xi) \chi(i \xi^k).$$

Posant

$$T_{\eta}(i) = \sum_{\substack{1 \leq \xi \leq \eta \\ \xi \equiv 0 \pmod{\sigma}}} \chi(i (\xi + \rho)^k),$$

on a pour tout nombre réel positif  $P$  :

$$(24) \quad \begin{aligned} & \sum_{\substack{\xi \in \sigma \mathbf{Z} \\ 0 < \xi \leq P}} \varphi_{\infty}(t_{\infty}^{-1}(\xi + \rho)) \chi(i (\xi + \rho)^k) \\ &= \sum_{\substack{\xi \in \mathbf{Z} \\ 0 < \xi \leq P}} \{ \varphi_{\infty}(t_{\infty}^{-1}(\xi + \rho)) - \varphi_{\infty}(t_{\infty}^{-1}(\xi + 1 + \rho)) \} T_{\xi}(i) \\ & \quad + \varphi_{\infty}(t_{\infty}^{-1}([P] + 1 + \rho)) T_{[P]}(i). \end{aligned}$$

Supposons que le caractère  $\chi$  de  $\mathbf{A}$  soit celui défini par

$$\chi(i) = e \left( \sum_p \langle i_p \rangle - i_{\infty} \right),$$

où  $\langle i_p \rangle$  désigne la « partie principale » de  $i_p$ , c'est-à-dire  $\langle i_p \rangle \in \mathbf{Z} [p^{-1}]$ ,  $i_p - \langle i_p \rangle \in \mathbf{Z}_p$  (seule la classe de  $\langle i_p \rangle$  modulo  $\mathbf{Z}$  est déterminée), et où  $e(x) = e^{2\pi\sqrt{-1}x}$ . Alors

$$\chi(i(\xi + \rho)^k) = e(a_k \xi^k + a_{k-1} \xi^{k-1} + \dots + a_0),$$

avec

$$a_l \in \mathbf{R} \quad (0 \leq l \leq k) \quad \text{et} \quad a_k = \sum_p \langle i_p \rangle - i_\infty.$$

Rappelons que  $i \in G(t_\infty)$ , c'est-à-dire  $i \in V_\alpha$  pour un  $\alpha$  satisfaisant à  $t_\infty < \alpha \leq t_\infty^{k-1}$ . Mais  $i \in V_\alpha$  signifie qu'on a

$$\sum_p \langle i_p \rangle = \frac{\beta}{\alpha} \quad \text{avec} \quad \beta \in \mathbf{Z}, \quad (\alpha, \beta) = 1, \quad \text{et} \quad |i_\infty| \leq \frac{1}{\tau\alpha};$$

donc

$$\left| a_k - \frac{\beta}{\alpha} \right| \leq \frac{1}{\alpha^2}, \quad (\alpha, \beta) = 1, \quad t_\infty < \alpha \leq t_\infty^{k-1}.$$

Les majorations classiques nous donnent une majoration pour  $T_\xi(i)$  valable lorsque  $\xi$  reste borné par  $t_\infty$ . Je veux cependant prendre  $P = t_\infty^{1+\delta}$  dans (24). Alors  $P^{1/(1+\delta)} < \alpha \leq P^{k-1}$ , et en examinant la démonstration du théorème 9 de [2] on trouve qu'il y a une majoration de la forme

$$|T_\xi(i)| \prec t_\infty^{-\varepsilon_k + \varepsilon} \quad \text{pour} \quad \xi \prec t_\infty^{1+\delta};$$

$\varepsilon_k$  est déterminé par  $k$  et est strictement positif [par exemple

$$\varepsilon_k = \{2k^2(2 \log k + \log \log k + 3)\}^{-1} \quad \text{si} \quad k \geq 12],$$

$\varepsilon$  dépend de  $\delta$  et tend vers zéro lorsque  $\delta \rightarrow 0$ . Cela donne

$$\left| \sum_{\substack{\xi \in \rho + \sigma\mathbf{Z} \\ \xi > \rho}} \varphi_\infty(t_\infty^{-1}\xi) \chi(i\xi^k) \right| \prec \sum_{\substack{\xi \in \rho + \sigma\mathbf{Z} \\ \xi > \rho + t_\infty^{1+\delta}}} |\varphi_\infty(t_\infty^{-1}\xi)| + \left( \sum_{\substack{\xi \in \mathbf{Z} \\ \xi > 0}} |\varphi_\infty(t_\infty^{-1}(\xi + \rho)) - \varphi_\infty(t_\infty^{-1}(\xi + 1 + \rho))| + \max |\varphi_\infty| \right) t_\infty^{-\varepsilon_k + \varepsilon}.$$

Appiquant la même méthode aux termes avec  $\xi \leq \rho$  dans la série pour  $S_\varphi(i)$ , on trouve

$$|S_\varphi(i)| \prec g_1(\varphi, t) t_\infty^{-\varepsilon_k + \varepsilon} + g_2(\varphi, t),$$

où

$$g_1(\varphi, t) = \sum_{\xi \in \mathbf{Z}} |\varphi_\infty(t_\infty^{-1}(\xi + \rho)) - \varphi_\infty(t_\infty^{-1}(\xi + 1 + \rho))| + \max |\varphi_\infty|,$$

$$g_2(\varphi, t) = \sum_{\substack{\xi \in \rho + \sigma\mathbf{Z} \\ |\xi - \rho| > t_\infty^{1+\delta}}} |\varphi_\infty(t_\infty^{-1}\xi)|.$$

On a évidemment

$$g_1(\varphi, t) \leq \sum_{\xi \in \mathbf{Z}} t_\infty^{-1} \int_{\xi}^{\xi+1} |\varphi'_\infty(t_\infty^{-1}(x+\rho))| dx + \max |\varphi_\infty|$$

$$= \int_{\mathbf{R}} |\varphi'_\infty(x)| dx + \max |\varphi_\infty|;$$

et, pour  $N = 1 + \varepsilon_k \delta^{-1}$ ,

$$g_2(\varphi, t) \leq \sum_{\substack{\xi \in \mathbf{Z} \\ |\xi| > t_\infty^{1+\delta}}} |\varphi_\infty(t_\infty^{-1}(\xi+\rho))|$$

$$\leq \max |x^N \varphi_\infty(x)| \sum_{\substack{\xi \in \mathbf{Z} \\ |\xi| > t_\infty^{1+\delta}}} t_\infty^N |\xi+\rho|^{-N}$$

$$\prec \max |x^N \varphi_\infty(x)| t_\infty^{1-\varepsilon_k}.$$

Posant

$$g(\varphi_\infty) = \int_{\mathbf{R}} |\varphi'_\infty(x)| dx + \max |\varphi_\infty| + \max |x^N \varphi_\infty(x)|,$$

on a finalement

$$|S_\varphi(i)| \prec g(\varphi_\infty) t_\infty^{1-\varepsilon_k+\varepsilon}.$$

Nous avons montré que les formes linéaires

$$\varphi \mapsto t_\infty^{-1+\varepsilon_k-\varepsilon} S_\varphi(i) \quad [i \in G(t_\infty), t_\infty > 1]$$

sont équicontinues sur  $\mathcal{S}(H, K)$ .

Revenons à  $f_{\Phi_0, t^{-1}}^*(i)$ . Pour

$$\Phi(x) = \varphi_1(x_1) \dots \varphi_m(x_m) \quad \text{avec } \varphi_l \in \mathcal{S}(H, K),$$

on a

$$t_\infty^{-m(1-\varepsilon_k+\varepsilon)} f_{\Phi_0, t^{-1}}^*(i) = \prod_{1 \leq l \leq m} t_\infty^{-1+\varepsilon_k-\varepsilon} S_{\varphi_l}(i).$$

Comme le sous-espace  $\mathcal{S}(H^m, K^m)$  de  $\mathcal{S}(\mathbf{A}^m)$  formé des fonctions dont le support est contenu dans  $\mathbf{R}^m \times H^m$  et qui sont constantes sur les classes suivant  $\{0\} \times K^m$  s'identifie à la puissance tensorielle topologique  $m$ -ième de  $\mathcal{S}(H, K)$ , il résulte de ce qu'on vient de démontrer que les formes linéaires

$$\Phi \mapsto t_\infty^{-m(1-\varepsilon_k+\varepsilon)} f_{\Phi_0, t^{-1}}^*(i) \quad [i \in G(t_\infty), t_\infty > 1]$$

sont équicontinues sur  $\mathcal{S}(H^m, K^m)$ . Autrement dit, nous avons démontré que, pour tout  $\Phi \in \mathcal{S}(\mathbf{A}^m)$ , on a

$$|f_{\Phi_0, t^{-1}}^*(i)| \prec t_\infty^{m(1-\varepsilon_k+\varepsilon)}$$

[la constante dans  $\prec$  dépend de  $\Phi$ , mais est indépendante de  $i \in G(t_\infty)$  et de  $t_\infty$ ]. Donc

$$|t|^{k-m} \sup_{i \in G(t_\infty)} |f_{\Phi_0, t^{-1}}^*(i)| \prec t_\infty^{k-m(\varepsilon_k-\varepsilon)},$$

et (22) tend vers zéro si  $m > k \varepsilon_k^{-1}$ .

On a donc

$$\lim_{t \rightarrow \infty} R = 0$$

pour toute fonction  $\Phi$  de  $\mathcal{S}(\mathbf{A}^m)$  si  $m$  est suffisamment grand.

*Remarques :*

1. L'élément  $\nu$  de  $k$  qui paraît dans la formule (15) définissant  $R$  a disparu dans nos approximations : celles-ci sont uniformes en  $\nu$ .

2. Les mêmes approximations sont valables quand on prend

$$F(x) = c_1 x_1^k + c_2 x_2^k + \dots + c_m x_m^k \quad \text{avec } c_i \in \mathbf{Q}^* \text{ et } m > 2k.$$

Dans ce cas, on peut prendre  $\nu = 0$  dans la formule (15), cf. l'exemple 2 du n° 2.

3. La condition

$$m > k \varepsilon_k^{-1} \quad [= 2k^3 (2 \log k + \log \log k + 3) \text{ si } k \geq 12]$$

peut être affaiblie en appliquant une astuce de Vinogradov, cf. [3] n° 25; on gagne un facteur  $k$ . Il me paraît invraisemblable qu'on ait  $\lim R = 0$  pour  $m > 2k$ .

6. — Je vais maintenant indiquer comment la méthode du n° 5 se généralise à un corps de nombres algébriques quelconque. Les hypothèses sont celles du n° 4 :

$$F(x) = x_1^k + x_2^k + \dots + x_m^k \quad \text{et} \quad m > 2k.$$

On va d'abord choisir un domaine fondamental pour  $A/k$ . Soit  $\tau$  un nombre réel  $> 0$ , et, pour toute place  $\nu$  à l'infini de  $k$ , soit  $c_\nu$  un nombre réel  $> 0$ .

DÉFINITION :

$$D((c_\nu), \tau) = \bigcup_{N\mathfrak{a} \leq \tau} V_{\mathfrak{a}},$$

où  $\mathfrak{a}$  parcourt l'ensemble des idéaux entiers non nuls de  $k$  et où

$$V_{\mathfrak{a}} = B_{\mathfrak{a}} \times \prod_{\mathfrak{p} | \mathfrak{a}} \{ x \in k_{\mathfrak{p}} : v_{\mathfrak{p}}(x) = -v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a}) \} \times \prod_{\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{a}} \sigma_{\mathfrak{p}}$$

avec

$$B_{\mathfrak{a}} = \left\{ x \in A_{\infty} : \prod_{\nu \in S} c_{\nu} | x_{\nu} |_{\nu} \leq \frac{\tau}{N\mathfrak{a}} \text{ pour tout } S \subset S_{\infty} \right\}.$$

(On a utilisé les notations suivantes :  $S_{\infty}$  = ensemble des places à l'infini de  $k$ ;  $A_{\infty} = \prod_{\nu \in S_{\infty}} k_{\nu}$ ;  $A = A_{\infty} \times \prod'_{\mathfrak{p}} k_{\mathfrak{p}}$ ;  $v_{\mathfrak{p}}$  = valuation.)



PROPOSITION. — Soit  $d_2$  le nombre des  $v \in S_x$  tels que  $k_v = \mathbf{C}$ , et posons

$$c = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{d_2} |\text{discr } k|^{1/2}.$$

Si les nombres  $c_v$  et  $\tau$  satisfont à

$$\prod_{v \in S_x} c_v = \frac{\tau^2}{c^2},$$

on a

$$A = k + D((c_v), \tau) \quad \text{pour } \tau \geq \tau_0,$$

$\tau_0$  étant une constante déterminée par le corps  $k$ .

*Démonstration.* — Soit  $x \in A$  et cherchons  $\xi \in k$  tel que  $x - \xi \in D((c_v), \tau)$ . On peut supposer que  $x_{\mathfrak{p}} \in \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$  pour tout  $\mathfrak{p}$ . Alors  $x - \xi \in V_{\mathfrak{a}}$  signifie :  $x_{\infty} - \xi \in B_{\mathfrak{a}}$  et  $(\xi) = \mathfrak{a}^{-1} \mathfrak{b}$  avec  $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = (1)$ . Il suffit de montrer l'existence d'entiers  $\alpha, \beta$  de  $k$  tels que  $\alpha \neq 0$ ,  $N(\alpha) \leq \tau$ ,  $x_{\infty} - \alpha^{-1} \beta \in B_{(\alpha)}$  [on prendra  $\xi = \alpha^{-1} \beta$  et on écrira ensuite  $(\xi) = \mathfrak{a}^{-1} \mathfrak{b}$  avec  $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = (1)$ ]. C'est-à-dire qu'il suffit de montrer l'existence d'entiers  $\alpha \neq 0$  et  $\beta$  tels qu'on ait

$$(25) \quad \prod_{v \in S_x \setminus S} |\alpha|_v \prod_{v \in S} c_v |\alpha x_v - \beta|_v \leq \tau \quad \text{pour tout } S \subset S_x.$$

Or, si, pour tout  $v \in S_x$ ,  $\lambda_v$  et  $\mu_v$  sont des nombres réels positifs, il existe des entiers  $\alpha, \beta$  de  $k$ , non tous les deux nuls, tels que  $|\alpha|_v \leq \lambda_v$ ,  $|\alpha x_v - \beta|_v \leq \mu_v$  ( $v \in S_x$ ), pourvu que  $\prod_{v \in S_x} \lambda_v \mu_v \geq c^2$ .

Un tel couple  $(\alpha, \beta)$  satisfait à (25), par exemple si

$$(26) \quad \lambda_v = c_v \mu_v \quad (v \in S_x), \quad \prod_{v \in S_x} \lambda_v = \tau.$$

Les relations (26) et l'hypothèse  $\prod_{v \in S_x} c_v = \tau^2 c^{-2}$  impliquent  $\prod_{v \in S_x} \lambda_v \mu_v = c^2$ .

On a  $\alpha \neq 0$  si les  $\mu_v$  sont tels que

$$(27) \quad \beta \text{ entier}, \quad |\beta|_v \leq \mu_v \quad (v \in S_x) \Rightarrow \beta = 0.$$

Soit  $\varepsilon > 0$  tel que  $\beta$  entier,  $|\beta|_v \leq \varepsilon$  ( $v \in S_x$ )  $\Rightarrow \beta = 0$ . Il y a  $\lambda_v, \mu_v$  satisfaisant à (26) et (27) si  $\tau \leq \prod_{v \in S_x} (c_v \varepsilon)$ , c'est-à-dire si  $\tau \geq c^2 \varepsilon^{-1 S_x}$ . Cela démontre la proposition.

Dans les notations du n° 3, je vais d'abord estimer  $R_2$ . On suppose que  $t_{\mathfrak{p}} = 1$  pour tout  $\mathfrak{p}$ , et on prend  $\Phi \in \mathfrak{S}(A^m)$  de la forme  $\Phi(x) = \prod_{v \in S_x} \Phi_v(x_v)$ . On suppose provisoirement que  $D \subset D((c_v), \tau)$  pour certains  $c_v$  et  $\tau$ .

D'après les formules (17), (18) et les définitions du n° 4, on a alors

$$|R_2| \leq \int_{t^k D((c_v), \tau)} di \left| \sum_{\substack{\xi \in k^m \\ \xi \neq 0}} \prod_v I_v(i_v, t_v \xi) \right|.$$

Soit  $i \in t^k V_\alpha$ . On peut appliquer les résultats énoncés au n° 4, exactement comme on l'a fait au n° 5 pour  $k = \mathbb{Q}$ . Cela donne

$$\left| \prod_p I_p(i_p, \xi) \right| = 0 \quad \text{si } \xi \notin \mathfrak{a}^{-1} \mathfrak{c}^{-1} \mathfrak{o}^m,$$

$$\prec (N \mathfrak{a})^{-m/k} \quad \text{si } \xi \in \mathfrak{a}^{-1} \mathfrak{c}^{-1} \mathfrak{o}^m;$$

ici,  $\mathfrak{c}$  est un idéal de  $k$  dépendant de  $\Phi$ , et  $\mathfrak{o}$  est l'anneau des entiers de  $k$ . Posant

$$J(i) = \left| \sum_{\substack{\xi \in k^m \\ \xi \neq 0}} \prod_v I_v(i_v, t_v \xi) \right|,$$

on a donc

$$(28) \quad J(i) \prec (N \mathfrak{a})^{-m/k} \sum_{\substack{\xi \in \mathfrak{a}^{-1} \mathfrak{c}^{-1} \mathfrak{o}^m \\ \xi \neq 0}} \prod_{v \in S_\infty} |I_v(i_v, t_v \xi)|.$$

Soit  $S_1$  (resp.  $S_2$ ) l'ensemble des  $v \in S_\infty$  tels que  $|i_v| \leq 1$  (resp.  $|i_v| > 1$ ). D'après le n° 4, on a

$$(29) \quad \prod_{v \in S_\infty} |I_v(i_v, t_v \xi)| \leq \prod_{v \in S_1} \psi_v(t_v \xi) \prod_{v \in S_2} |i_v|^{-m/k} \psi_v(i_v^{-1} t_v \xi)$$

$$= |i_{S_2}|^{-m/k} \psi_\infty(i_{S_2}^{-1} t_\infty \xi),$$

avec

$$\psi_\infty = \bigotimes_{v \in S_\infty} \psi_v \in \mathcal{S}(A_\infty^m)$$

(on note, pour tout  $S \subset S_\infty$ ,  $i_S = (i_v)_{v \in S}$  et  $|i_S| = \prod_{v \in S} |i_v|$ ;  $i_\infty = i_{S_\infty}$ ).

On déduit de (28) et (29) qu'on a, pour tout  $M$ ,

$$(30) \quad J(i) \prec (N \mathfrak{a})^{-m/k} |i_{S_2}|^{-m/k} (|i_{S_2}| \cdot |t_\infty|^{-1} N \mathfrak{a})^M,$$

pourvu que  $|i_{S_2}| \prec |t_\infty| N \mathfrak{a}^{-1}$ . Cela veut dire que les approximations qu'on vient d'effectuer ne seront utiles que dans l'intégration sur la partie de  $t^k D((c_v), \tau)$  où l'on a  $|i_S| \prec |t_\infty| N \mathfrak{a}^{-1}$  pour tout  $S \subset S_\infty$  (l'ensemble  $S$  vide compris).

Nous allons maintenant fixer les  $c_v$  et  $\tau$ . Soit  $\sigma > 0$  tel que

$$\sigma^d = |t_\infty|^{k-2} \quad (d = [k : \mathbb{Q}]).$$

Nous prenons  $c_v = |t_v|^k |\sigma|_v$  et  $\tau = c |t_\infty|^{k-1}$ , de sorte que  $\prod_{v \in S_\infty} c_v = \tau^2 c^{-2}$  ( $c$  est la constante définie dans la proposition au début de ce numéro).

Outre les ensembles  $V_\alpha$  il sera nécessaire de considérer les ensembles  $V'_\alpha$  définis par

$$V'_\alpha = B'_\alpha \times \prod_{p|\alpha} \{x \in k_p : v_p(x) = -v_p(\alpha)\} \times \prod_{p \nmid \alpha} a_p$$

avec

$$B'_\alpha = \left\{ x \in A_\infty : \prod_{v \in S} |t_v|^k |x_v| \leq \frac{c |t_\infty|}{N \alpha} \text{ pour tout } S \subset S_\infty \right\}.$$

Pour notre choix de  $(c_v)$  et de  $\tau$  on a  $V'_\alpha \subset V_\alpha$  si  $|t_\infty| \geq 1$ . Remarquons que les inégalités

$$|t_\infty|^k |x_\infty| \leq c |t_\infty| N \alpha^{-1} \quad \text{et} \quad \prod_{v \in S_\infty} c_v |x_v| \leq \tau N \alpha^{-1}$$

intervenant dans les définitions de  $B'_\alpha$  et  $B_\alpha$  respectivement (pour  $S = S_\infty$ ) sont les mêmes; en particulier, si  $k = \mathbf{Q}$  ou si  $k$  est un corps quadratique imaginaire, on a  $V'_\alpha = V_\alpha$  pour  $N \alpha \leq c |t_\infty|$  et  $V'_\alpha$  est vide pour  $c |t_\infty| < N \alpha \leq \tau$ .

Considérons maintenant  $\int_{t^k V'_\alpha} J(i) di$ . Soit  $S_\infty = S_1 \cup S_2$  une partition de  $S_\infty$ , et désignons par  $W(S_2)$  l'ensemble des éléments  $i$  de  $t^k V'_\alpha$  tels que  $|i_v| \leq 1$  pour  $v \in S_1$ ,  $|i_v| > 1$  pour  $v \in S_2$ . Comme  $i_\infty \in t^k B'_\alpha$ , on a  $|i_{S_2}| \leq c |t_\infty| N \alpha^{-1}$ , et la formule (30) donne

$$(31) \quad \int_{W(S_2)} J(i) di \prec (N \alpha)^{-m/k} \int_{W(S_2)} |i_{S_2}|^{-m/k} (|i_{S_2}| \cdot |t_\infty|^{-1} N \alpha)^M di \\ \prec (N \alpha)^{M-(m/k)+1} \prod_{p|\alpha} (1 - N p^{-1}) |t_\infty|^{-M} \int_{W_\infty(S_2)} |i_{S_2}|^{M-(m/k)} di_\infty,$$

où  $W_\infty(S_2)$  est la projection sur  $A_\infty$  de  $W(S_2)$ . Il résulte aussitôt des définitions qu'on a

$$W_\infty(S_2) = \left\{ i_\infty \in A_\infty : |i_v| \leq 1 (v \in S_1), |i_v| > 1 (v \in S_2), |i_{S_2}| \leq \frac{c |t_\infty|}{N \alpha} \right\}.$$

Un calcul élémentaire prouve que

$$\int_{\substack{x_i \geq 1 \\ \prod x_i \leq A}} x_1^N x_2^N \dots x_s^N dx_1 \dots dx_s \leq A^{N+1} \frac{\log^{s-1} A}{(s-1)!}$$

pour  $A \geq 1$ ,  $N \geq 0$ ,  $s \geq 1$ ; et cette inégalité entraîne la suivante :

$$\int_{\substack{|x_i| \geq 1, x_i \in \mathbf{R} \\ |z_i| \geq 1, z_i \in \mathbf{C} \\ |x_1 \dots x_r| \cdot |z_1 \dots z_s|^2 \leq A}} |x_1|^N \dots |x_r|^N |z_1|^{2N} \dots |z_s|^{2N} dx_1 \dots dx_r dz_1 \dots dz_s \leq 2^r \pi^s A^{N+1} \frac{\log^{r+s-1} A}{(r+s-1)!}$$

pour  $A \geq 1$ ,  $N \geq 0$ ,  $r + s \geq 1$  (j'ai écrit  $dx_i$  resp.  $dz_i$  pour la mesure de Haar usuelle sur  $\mathbf{R}$  resp.  $\mathbf{C}$ ). Appliquant cette formule à l'intégrale sur  $W_\infty(S_2)$ , on déduit de (31) :

$$\int_{W(S_2)} J(i) di \prec |t_\infty|^{-(m/k)+1} \left( \log \frac{c|t_\infty|}{N\mathfrak{a}} \right)^{|S_2|-1}$$

si  $S_2$  n'est pas vide,

$$\int_{W(\emptyset)} J(i) di \prec (N\mathfrak{a})^{M-(m/k)+1} |t_\infty|^{-M} \prec |t_\infty|^{-(m/k)+1}.$$

Par conséquent,

$$\int_{V'_\mathfrak{a}} J(i) di \prec |t_\infty|^{-(m/k)+1} \left\{ \max \left( 1, \log \frac{c|t_\infty|}{N\mathfrak{a}} \right) \right\}^{|S_\infty|-1} \prec |t_\infty|^{-(m/k)+1} (\log |t_\infty|)^{|S_\infty|-1},$$

et

$$(32) \quad \sum_{N\mathfrak{a} \leq c|t_\infty|} \int_{V'_\mathfrak{a}} J(i) di \prec |t_\infty|^{-(m/k)+2} (\log |t_\infty|)^{|S_\infty|-1}.$$

Cette formule généralise la formule (20) du n° 5. Pour  $k = 2$ , la formule (32) montre déjà qu'on a  $\lim_{|t_\infty| \rightarrow \infty} R_2 = 0$ , puisque, dans ce cas,  $V'_\mathfrak{a} = V_\mathfrak{a}$  pour tout  $\mathfrak{a}$  et  $c|t_\infty| = \tau$ .

Avant d'aller plus loin, il faut préciser un peu le choix du domaine fondamental  $D$ .

LEMME. — Supposons  $k \geq 3$ . Si  $|t_\infty|$  est suffisamment grand, les relations  $x \in V'_\mathfrak{a}$ ,  $y \in V'_\mathfrak{b}$ ,  $x \neq y$  entraînent  $x - y \notin k$ ,

Démonstration. — Soient  $x \in V'_\mathfrak{a}$ ,  $y \in V'_\mathfrak{b}$  tels que  $x - y = \xi \in k$ . L'idéal  $\xi \mathfrak{a} \mathfrak{b}$  est alors entier, et l'on a

$$\begin{aligned} N(\xi \mathfrak{a} \mathfrak{b}) &= N(\mathfrak{a} \mathfrak{b}) \prod_{v \in S_\infty} |\xi|_v \leq N(\mathfrak{a} \mathfrak{b}) 2^{d^2} \prod_{v \in S_\infty} (|x_v| + |y_v|) \\ &= 2^{d^2} N(\mathfrak{a} \mathfrak{b}) \sum_{S \subset S_\infty} |x_S| \cdot |y_{S^c}| \leq 2^d c^2 |t_\infty|^{2-k} < 1 \end{aligned}$$

si  $|t_\infty|$  est plus grand qu'une constante déterminée par  $k$  et  $k$ . Donc  $\xi = 0$ ,  $x = y$ .

Il résulte de ce lemme qu'on peut choisir un domaine fondamental  $D$  pour  $A/k$  tel qu'on ait

$$(33) \quad \bigcup_{N\mathfrak{a} \leq c|t_\infty|} V'_\mathfrak{a} \subset D \subset \bigcup_{N\mathfrak{a} \leq \tau} V_\mathfrak{a}$$

( $D$  dépend de  $t$ , bien entendu, et l'on suppose  $k \geq 3$ ).

LEMME. — Soit  $D$  un domaine fondamental satisfaisant à (33). Alors  $t^k D$  devient arbitrairement grand lorsque  $|t_\infty| \rightarrow \infty$ .

Démonstration. — Soient  $\Omega_\infty$  un sous-ensemble compact de  $A_\infty$  et  $\mathfrak{c}$  un idéal entier non nul de  $k$ . Soit

$$\Omega = \Omega_\infty \times \prod_{\mathfrak{p}} \mathfrak{c}_\mathfrak{p}^{-1},$$

et cherchons une condition suffisante pour que  $t^k D \supset \Omega$ . Soit  $x \in \Omega$ , et soit  $\mathfrak{a}$  l'idéal défini par  $v_\mathfrak{p}(\mathfrak{a}) = \max(-v_\mathfrak{p}(x_\mathfrak{p}), 0)$  pour tout  $\mathfrak{p}$ . L'idéal  $\mathfrak{a}$  est entier et divise  $\mathfrak{c}$ . Pour que  $x \in t^k V'_\mathfrak{a}$ , il faut et il suffit qu'on ait

$$|x_s| \leq c |t_\infty| N\mathfrak{a}^{-1} \quad \text{pour tout } S \subset S_\infty,$$

et il suffit qu'on ait

$$|x_s| \leq c |t_\infty| N\mathfrak{c}^{-1} \quad \text{pour tout } S \subset S_\infty.$$

On aura donc  $\Omega \subset t^k D$  si  $|t_\infty|$  est suffisamment grand.

COROLLAIRE. —  $\lim_{|t_\infty| \rightarrow \infty} R_t = 0$ .

Cela résulte tout de suite de ce qu'on a dit au n° 3.

Revenons à l'approximation de  $R_2$ . Nous supposons désormais que  $D$  satisfait à (33). Compte tenu de (32), il nous reste à estimer

$$\int_{t^k G(t_\infty)} | |t|^{-m} f_{\Phi_0 t^{-1}}^*(it^{-k}) - F_\Phi^*(i) | di,$$

où

$$G(t_\infty) = \bigcup_{N\mathfrak{a} \leq \tau} V_\mathfrak{a} \setminus \bigcup_{N\mathfrak{a} \leq c|t_\infty|} V'_\mathfrak{a}.$$

Nous avons montré que  $t^k \bigcup V'_\mathfrak{a}$  devient arbitrairement grand quand  $|t_\infty| \rightarrow \infty$ ; donc

$$\lim_{|t_\infty| \rightarrow \infty} \int_{t^k G(t_\infty)} |F_\Phi^*(i)| di = 0,$$

et il reste à considérer

$$(34) \quad |t|^{k-m} \int_{G(t_\infty)} |f_{\Phi_0 t^{-1}}^*(i)| di.$$

Afin d'estimer (34) on utilisera le travail de Körner sur la majoration de sommes trigonométriques attachées aux corps de nombres algébriques. Nous supposons maintenant que  $t_\infty$  est défini comme suit. Soit  $u \in \mathbf{R}$ ; on pose

$$t_v = u \text{ pour tout } v \in S_\infty,$$

et on fait tendre  $u$  vers  $+\infty$ . Le résultat principal de Körner [4] nous donne alors :

SATZ. — Soit  $\delta > 0$ , et posons  $P = u^{1+\delta}$ . Pour tout  $v \in S_\infty$ , soit  $0 < Q_v \leq |P|_v$ ; soient  $a_0, a_1, \dots, a_{k-1} \in \mathbf{A}$ ,  $i \in G(t_\infty)$ . Alors on a

$$(35) \quad \left| \sum \chi(i \zeta^k + a_{k-1} \zeta^{k-1} + \dots + a_0) \right| \prec u^{d-\varepsilon_k+\varepsilon},$$

la sommation est étendue aux entiers  $\zeta$  de  $k$  de signe donné à chaque place réelle de  $k$  et tels que  $|\zeta|_v \leq Q_v$  pour tout  $v \in S_\infty$ . La constante dans  $\prec$  dépend seulement du corps  $k$ , de l'exposant  $k$ , de  $\chi$  et de  $\delta$ ;  $\varepsilon$  est une fonction de  $\delta$ ,  $d$  et  $k$  qui tend vers zéro lorsque  $\delta \rightarrow 0$  ( $d$  et  $k$  étant fixés);  $\varepsilon_k$  est donné par

$$\varepsilon_k^{-1} = 2k^2 \left( 2 \log k + \log(d^2 + d \log k) + \frac{d}{3} + 2 \right).$$

Comme le langage de Körner est assez différent du nôtre, je noterai ci-dessous quelques observations qui permettront au lecteur de vérifier que ma proposition est, en effet, une application directe du Satz 4 de [4].

1° Désignons par  $\text{tr}$  la trace  $k \rightarrow \mathbf{Q}$ , ainsi que ses extensions  $\mathbf{A}_\infty \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}$ , etc., et soit  $\chi$  le caractère de  $\mathbf{A}$  défini par

$$\chi(x) = \chi_{\mathbf{A}}(\text{tr}(x)) \quad (x \in \mathbf{A}),$$

où  $\chi_{\mathbf{A}}$  est le caractère de  $\mathbf{A}$  qu'on a utilisé au n° 5. Tout autre caractère non-trivial de  $\mathbf{A}/k$  est de la forme  $\chi(\alpha x)$  avec  $\alpha \in k^*$ , et il suffit de considérer le cas  $\alpha = 1$  (pour obtenir le cas général on prendra  $\sigma = \alpha$  dans le Satz 4).

2° Soit  $\chi$  comme sub 1°, et soit  $i \in \mathbf{A}$ . Choisissons un élément  $\gamma$  de  $k$  tel qu'on ait  $\gamma \in i_v + \mathfrak{d}_v^{-1}$  pour toute place finie  $v$ ,  $\mathfrak{d}$  étant la différentielle de  $k$ , et posons  $a = \gamma - i_\infty \in \mathbf{A}_\infty$ . On voit facilement qu'alors  $\chi(i \eta) = e(\text{tr}(a \eta))$  pour tout  $\eta \in \mathfrak{o}$  ( $e(x) = e^{2\pi\sqrt{-1}x}$ ), c'est-à-dire,  $\chi(i \eta) = E(a \eta)$  dans la notation de [4].

3° Soit  $i \in \mathbf{V}_\mathfrak{a}$ . Si  $\gamma$  est choisi comme sous 2°, le dénominateur de  $\gamma \mathfrak{d}$  est égal au numérateur de  $\mathfrak{a} \mathfrak{d}^{-1}$ .

4° Soit  $c_1 > 0$  tel que

$$c_1^d = c |\text{discr } k|^{-1} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{d_2} |\text{discr } k|^{-1/2}.$$

Soit, pour tout  $\gamma \in k$ ,  $B_\gamma$  le sous-ensemble de  $A_x$  défini dans [4] (II, § 1), où l'on prend

$$t = c_1 u, \quad h = u^{k-1+\delta}, \quad \delta > 0.$$

On a donc

$$B_\gamma = \left\{ x \in A_x : \prod_{v \in S} |h(x_v - \gamma)|_v \prod_{v \in S_x \setminus S} |c_1 u|_v^{-1} \leq \frac{1}{N a'}, \text{ pour tout } S \subset S_x \right\},$$

où  $a'$  est le dénominateur de  $\gamma \mathfrak{d}$ .

LEMME. — Soit  $i \in V_a$ , et soient  $\gamma$  et  $a$  comme sous 2°. Si  $a \in B_\xi$ , on a  $\xi = \gamma$  et  $i \in V_a'$ .

Démonstration. — Supposons que  $a \in B_\xi$ . Si  $a'$  est le dénominateur de  $\xi \mathfrak{d}$ , les idéaux  $\xi \mathfrak{d} a'$  et  $\gamma \mathfrak{d} a$  sont entiers;  $(\gamma - \xi) \mathfrak{d} a' a$  est donc un idéal entier. D'autre part, en écrivant

$$\gamma - \xi = (a_v - \xi) + i_v \quad (v \in S_x),$$

on vérifie facilement à partir des définitions qu'on a  $N((\gamma - \xi) \mathfrak{d} a' a) \prec u^{-\delta d}$ , où la constante dans  $\prec$  est déterminée par le corps  $k$ . Si  $u$  est suffisamment grand, on en conclut que  $\xi = \gamma$ . Pour démontrer que  $a \in B_\gamma$  entraîne  $i \in V_a'$ , il suffit de vérifier qu'on a, pour tout  $S \subset S_x$ ,

$$\frac{1}{N a'} \prod_{v \in S} |h|_v^{-1} \prod_{v \in S_x \setminus S} |c_1 u|_v \leq \frac{c u^d}{N a} \prod_{v \in S} |u|_v^{-k}.$$

Comme  $a'$  est un multiple de  $a \mathfrak{d}^{-1}$  (cf. 3°), on a  $c N(a' a^{-1}) \geq c_1^d$ , et l'inégalité à prouver est valable si  $u^{-\delta} \leq c_1$ .

5° D'après 4°, la relation  $i \in G(t_x)$  entraîne que  $a$  n'appartient à aucun  $B_\xi$ . L'application du Satz 4 ne présente plus de problèmes.

Soit  $\sigma$  un entier non nul de  $k$ . Désignons par  $T$  la somme dans (35), et par  $T_\eta$  la somme des termes de  $T$  avec  $\xi \equiv \eta \pmod{\sigma}$  ( $\eta \in \mathfrak{o}$ ). Posons, pour tout caractère  $\psi$  de  $\mathfrak{o}/(\sigma)$ ,

$$\hat{T}_\psi = \sum_{\eta \in \mathfrak{o}/(\sigma)} T_\eta \psi(\eta),$$

de sorte qu'on a

$$T_\eta = \frac{1}{N(\sigma)} \sum_{\psi \in \widehat{\mathfrak{o}/(\sigma)}} \hat{T}_\psi \overline{\psi(\eta)}.$$

Pour tout caractère  $\psi$  de  $\mathfrak{o}/(\sigma)$ , on peut trouver un élément  $b$  de  $A$  tel que  $\psi(\xi) = \chi(b \xi)$  pour tout  $\xi \in \mathfrak{o}$ . La somme  $\hat{T}_\psi$  est donc égale à la somme  $T$  avec  $a_1 + b$  au lieu de  $a_1$ . On en conclut que la majoration (35) est valable pour tous les  $\hat{T}_\psi$ , donc aussi pour  $T_\eta$  (avec la même constante).

Ceci dit, on peut appliquer la même méthode qu'à la fin du n° 5 (utilisant une sommation par parties en  $d$  variables), pour montrer que

$$|f_{\Phi_0, t^{-1}}^*(i)| \prec u^{m(d-\varepsilon_k+\varepsilon)} \quad \text{pour } i \in G(t_\infty).$$

On a donc

$$(36) \quad |t|^{k-m} \sup_{i \in G(t_\infty)} |f_{\Phi_0, t^{-1}}^*(i)| \prec u^{dk-m(\varepsilon_k-\varepsilon)}.$$

Un calcul élémentaire montre qu'on a

$$\text{vol } B_{\mathfrak{a}} \prec \frac{1}{N_{\mathfrak{a}}} u^{-d(k-1)} (\log u)^{|S_{\mathfrak{a}}|-1};$$

d'où

$$\begin{aligned} \text{vol } G(t_\infty) &\leq \sum_{N_{\mathfrak{a}} \leq \tau} \text{vol } V_{\mathfrak{a}} \\ &= \sum_{N_{\mathfrak{a}} \leq \tau} N_{\mathfrak{a}} \prod_{\mathfrak{p} | \mathfrak{a}} \left(1 - \frac{1}{N_{\mathfrak{p}}}\right) \text{vol } B_{\mathfrak{a}} \\ &\prec \sum_{N_{\mathfrak{a}} \leq \tau} u^{-d(k-1)} (\log u)^{|S_{\mathfrak{a}}|-1} \prec (\log u)^{|S_{\mathfrak{a}}|-1}. \end{aligned}$$

Cette majoration et (36) entraînent que (34) est majoré par

$$u^{dk-m(\varepsilon_k-\varepsilon)} (\log u)^{|S_{\mathfrak{a}}|-1},$$

et (34) tend vers zéro pour  $u \rightarrow \infty$  si  $m > dk \varepsilon_k^{-1}$ . On a donc

$$\lim_{u \rightarrow \infty} R = 0$$

si  $m$  est suffisamment grand.

*Remarques :*

1. Il est clair que nous avons démontré que  $\lim_{u \rightarrow \infty} R = 0$  uniformément en  $\nu$ .

2. En examinant de plus près nos approximations on constate que celles-ci sont uniformes en  $\Phi$  sur tout compact de  $\mathfrak{S}(A^m)$ . Cette observation et la convergence uniforme de  $\int |F_{\Phi}^*|$  [condition (A)] impliquent qu'on a  $\lim_{u \rightarrow \infty} R = 0$  uniformément en  $\Phi$  sur tout compact de  $\mathfrak{S}(A^m)$ .

3. Les mêmes approximations sont valables pour

$$F(x) = \gamma_1 x_1^k + \dots + \gamma_m x_m^k,$$

où les  $\gamma_i$  sont des éléments fixés de  $k^*$ .

4. La condition  $m > dk \varepsilon_k^{-1}$  peut être affaiblie, cf. [4], Satz 7. Finalement, nous avons le théorème suivant.



THÉORÈME. — Soit  $F(x) = \gamma_1 x_1^k + \gamma_2 x_2^k + \dots + \gamma_m x_m^k$ , avec  $\gamma_i \in k^*$ . Soient  $t \in A^*$ ,  $\nu \in k$  et  $\Phi \in \mathcal{S}(A^m)$ , et soit  $R$  défini par la formule (15) du n° 3. Alors on a

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} R = 0$$

uniformément en  $\nu$ , si  $m$  est suffisamment grand.

Démonstration. — Désignons par  $A_1$  l'ensemble des  $t \in A^*$  tels que  $|t| = 1$ . Soit  $C$  un sous-ensemble compact de  $A_1$  tel qu'on ait  $A_1 = C k^*$ . Pour tout  $u \in \mathbf{R}_+^*$ , notons  $i_u$  l'idèle dont toutes les composantes à l'infini sont  $u$  et dont toutes les autres composantes sont 1. Alors tout  $t \in A^*$  peut se mettre sous la forme  $t = i_u c \lambda$  avec  $u \in \mathbf{R}_+^*$ ,  $c \in C$ ,  $\lambda \in k^*$ .

Il résulte aussitôt des définitions des nos 1 et 2 que, pour  $t = i_u c \lambda$ , on a

$$\begin{aligned} |t|^{k-m} f_{\Phi_0 t^{-1}}(\nu) &= u^{d(k-m)} f_{\Phi_0 i_u^{-1}}(\nu \lambda^{-k}), \\ F_\Phi(t^{-k} \nu) &= F_{\Phi'}(i_u^{-k} \nu \lambda^{-k}), \end{aligned}$$

où  $\Phi' = \Phi_0 c^{-1}$ . Appliquant le résultat déjà obtenu avec  $\Phi'$  au lieu de  $\Phi$  et  $\nu \lambda^{-k}$  au lieu de  $\nu$  et tenant compte des remarques ci-dessus, on obtient le résultat annoncé.

7. — Voici la démonstration des assertions du n° 4. Comme  $\mathcal{S}(k_v^m)$  est la puissance tensorielle topologique  $m$ -ième de  $\mathcal{S}(k_v)$ , il suffit de prouver la proposition suivante.

PROPOSITION. — Soit  $K$  un corps localement compact non-discret de caractéristique 0. Soient  $\chi$  un caractère non trivial de  $K$  et  $dx$  une mesure de Haar sur  $K$ . Fixons une fonction  $\varphi$  de  $\mathcal{S}(K)$  et posons, pour  $a$  et  $b \in K$ ,

$$I(a, b) = \int_K \varphi(x) \chi(ax^k + bx) dx.$$

Il existe une fonction  $\psi \in \mathcal{S}(K)$  telle qu'on ait

$$(37) \quad |I(a, b)| \leq \psi(b) \quad \text{pour } |a| \prec 1,$$

$$(38) \quad |I(a, b)| \leq |a|^{-1/k} \psi(a^{-1} b) \quad \text{pour } |a| \succ 1.$$

De plus, si  $K = k_v$ ,  $\chi = \chi_v$ ,  $dx = dx_v$ , et si  $\varphi$  est la fonction caractéristique de  $\mathfrak{o}_v$ , on a, pour presque tout  $v$ ,

$$(39) \quad I(a, b) = 0 \quad \text{pour } a \in \mathfrak{o}_v, \quad b \notin \mathfrak{o}_v,$$

$$(40) \quad I(a, b) = 1 \quad \text{pour } a \in \mathfrak{o}_v, \quad b \in \mathfrak{o}_v,$$

$$(41) \quad I(a, b) = 0 \quad \text{pour } a \notin \mathfrak{o}_v, \quad b \notin a \mathfrak{o}_v,$$

$$(42) \quad |I(a, b)| \leq |a|^{-1/k} \quad \text{pour } a \notin \mathfrak{o}_v, \quad b \in a \mathfrak{o}_v.$$

Démonstration. — 1° Si  $a$  reste dans un compact de  $K$ , la fonction  $x \rightarrow \varphi(x) \chi(ax^k)$  reste dans un compact de  $\mathcal{S}(K)$ , donc sa transformée de Fourier aussi. Cela donne (37) (voir [6], lemme 5). 2° Soit  $E$  un sous-

ensemble fini de  $K^*$  tel que  $K^* = K^{*k} E$ . Nous montrerons ci-après que, quel que soit  $\chi$ , la transformée de Fourier de la fonction  $x \mapsto \chi(x^k)$  est une fonction bornée. Admettant ce résultat, soit  $a \in K^*$ ,  $a = t^k a_0$ ,  $a_0 \in E$ , et soit  $g$  la transformée de Fourier de  $x \mapsto \chi(a_0 x^k)$ . Alors, la transformée de Fourier de  $x \mapsto \chi(ax^k)$  est la fonction  $y \rightarrow |t|^{-1} g(t^{-1} y)$ ; celle-ci est majorée par  $|a|^{-1/k}$ , de sorte que la transformée de Fourier de  $\varphi(x) \chi(ax^k)$  est majorée par  $|a|^{-1/k} \int |\varphi(y)| dy$ , c'est-à-dire par  $|a|^{-1/k}$ . Cela donne déjà

$$(43) \quad |I(a, b)| \prec |a|^{-1/k}.$$

Distinguons trois cas.

a. Si  $K$  est à valuation discrète, il existe un nombre entier  $N$  tel que la fonction  $x \mapsto \varphi(x) \chi(ax^k)$  soit constante sur les classes suivant  $a^{-1} \mathfrak{p}^N$  si  $|a| \succ 1$  ( $\mathfrak{p}$  est l'idéal maximal de l'anneau  $\mathfrak{O}$  des entiers de  $K$ ). La transformée de Fourier de  $x \mapsto \varphi(x) \chi(ax^k)$  est alors nulle en dehors de l'ensemble  $a \mathfrak{p}^{-N} \mathfrak{O}^\perp$ . Cela donne (38) avec  $\psi =$  fonction caractéristique de  $\mathfrak{p}^{-N} \mathfrak{O}^\perp$ , multipliée par une constante.

b. Si  $K = \mathbf{R}$ , la fonction  $x \mapsto \varphi(x) \chi(ax^k)$  est indéfiniment dérivable et sa dérivée d'ordre  $N$  est de la forme

$$\sum_{0 \leq i \leq N} a^i \varphi_i(x) \chi(ax^k),$$

où les  $\varphi_i$  sont des fonctions de  $\mathcal{S}(K)$  déterminées par  $\varphi$ . On en déduit, utilisant (43) pour  $\varphi_i$ , que la transformée de Fourier de  $x \mapsto \varphi(x) \chi(ax^k)$  est majorée par  $|a|^{-1/k} |a/b|^N$  pour  $|a| \succ 1$  ( $N$  quelconque). La majoration (38) en résulte, compte tenu du lemme 4 de [6].

c. Si  $K = \mathbf{C}$ , la démonstration est analogue à celle du cas  $b$ .

3° La transformée de Fourier de la fonction  $x \mapsto \chi(x^k)$  est une fonction bornée  $g$ ; de plus on a

$$(44) \quad |g(y)| \prec |y|^{-[(k-2)/2(k-1)]}.$$

Pour la démonstration, nous distinguons trois cas.

a.  $K$  est à valuation discrète. Soient  $v$  la valuation de  $K$ ,  $\mathfrak{O}$  l'anneau des entiers de  $K$ ,  $\mathfrak{p}$  l'idéal maximal de  $\mathfrak{O}$ ,  $e$  l'entier rationnel tel que  $\mathfrak{O}^\perp = \mathfrak{p}^{-e}$ . Quels que soient  $y \in K$  et  $n \in \mathbf{Z}$ , on a

$$\begin{aligned} & \int_{v(x)=n} \chi(x^k + xy) dx \\ &= q^{-n-\alpha} \sum_{\substack{u \in \mathfrak{O}^* \\ u \bmod \mathfrak{p}^\alpha}} \chi(\pi^{nk} u^k + \pi^n uy) \int_{\mathfrak{O}} \chi(\pi^{n+\alpha} z [k \pi^{n(k-1)} u^{k-1} + y]) dz, \end{aligned}$$

si  $\alpha > 0$ ,  $nk + 2\alpha \geq -e$  ( $\pi$  est une uniformisante de  $K$ , et  $q = N\mathfrak{p}$ ).

Supposons  $n < \frac{v(y) - v(k)}{k-1}$ . Alors

$$v(k\pi^{n(k-1)}u^{k-1}) < v(y)$$

et

$$v(\pi^{n+\alpha}[k\pi^{n(k-1)}u^{k-1} + y]) = nk + v(k) + \alpha.$$

Il existe un entier  $\alpha$  tel qu'on ait

$$\alpha \geq 1, \quad nk + 2\alpha \geq -e, \quad nk + v(k) + \alpha < -e, \quad \text{si } nk \leq -2v(k) - e - 2.$$

Cela donne

$$(45) \quad \int_{v(x)=n} \chi(x^k + xy) dx = 0 \quad \text{si } n < \frac{v(y) - v(k)}{k-1}, \quad nk \leq -2v(k) - e - 2.$$

Si  $\Omega$  est un sous-ensemble compact de  $K$ , on peut donc trouver une constante  $n_0(\Omega)$  telle que

$$\int_{v(x)=n} \chi(x^k + xy) dx = 0 \quad \text{pour } n < n_0(\Omega), \quad y \in \Omega.$$

Par conséquent, la transformée de Fourier de  $x \mapsto \chi(x^k)$  est la fonction  $g$  définie par

$$g(y) = \lim_{n \rightarrow -\infty} \int_{v(x) \geq n} \chi(x^k + xy) dx.$$

Il est évident que la fonction  $g$  est localement constante sur  $K$ .

Quels que soient  $y \in K$  et  $n \in \mathbf{Z}$ , on a

$$\begin{aligned} & \int_{v(x) \geq n} \chi(x^k + xy) dx \\ &= q^{-n-\alpha} \sum_{u \in \mathfrak{O}/\mathfrak{p}^\alpha} \chi(\pi^{nk}u^k + \pi^n uy) \int_{\mathfrak{O}} \chi(\pi^{n+\alpha}z[k\pi^{n(k-1)}u^{k-1} + y]) dz, \end{aligned}$$

si

$$\alpha \geq 0, \quad nk + 2\alpha \geq -e.$$

Supposons maintenant que  $n > \frac{v(y) - v(k)}{k-1}$ . Alors

$$v(\pi^{n+\alpha}[k\pi^{n(k-1)}u^{k-1} + y]) = n + \alpha + v(y).$$

Il existe un entier  $\alpha$  tel qu'on ait

$$\alpha \geq 0, \quad nk + 2\alpha \geq -e, \quad n + \alpha + v(y) < -e,$$

si

$$n \leq -v(y) - e - 1, \quad n(k-2) \geq 2v(y) + e + 2.$$

On a donc

$$(46) \quad \begin{cases} \int_{v(x) \geq n} \chi(x^k + xy) dx = 0 & \text{si } n > \frac{v(y) - v(k)}{k-1}, \\ n \leq -v(y) - e - 1, \quad n(k-2) \geq 2v(y) + e + 2. \end{cases}$$

Soit  $n_0$  le plus petit entier  $> \frac{v(y) - v(k)}{k - 1}$ . On aura  $n_0 \leq -v(y) - e - 1$ ,  $n_0(k - 2) \geq 2v(y) + e + 2$  dès que  $v(y)$  est suffisamment petit; c'est-à-dire, il y a une constante  $c_1$  telle qu'on ait

$$\int_{v(x) > [v(y) - v(k)] / (k - 1)} \chi(x^k + xy) dx = 0 \quad \text{pour } v(y) < c_1.$$

Et, d'après (45), on a

$$\int_{v(x) = n} \chi(x^k + xy) dx = 0 \quad \text{pour tout } n < \frac{v(y) - v(k)}{k - 1},$$

si  $v(y) < c_2$ ,  $c_2$  étant une constante. Par conséquent,

$$(47) \quad g(y) = \int_{v(x) = [v(y) - v(k)] / (k - 1)} \chi(x^k + xy) dx \quad \text{pour } v(y) < c \quad [c = \min(c_1, c_2)].$$

En particulier,  $g(y) = 0$  si  $v(y) < c$  et si  $v(y) \not\equiv v(k) \pmod{k - 1}$ . Si  $v(y) = v(k) - n(k - 1) < c$ , on a

$$g(y) = \int_{v(x) = -n} \chi(x^k + xy) dx = q^n \int_{\mathfrak{O}^*} \chi(\pi^{-nk} x^k + \pi^{-n} xy) dx,$$

de sorte que (44) résultera immédiatement du lemme suivant.

LEMME :

$$\left| \int_{\mathfrak{O}^*} \chi(z(x^k + ktx)) dx \right| \ll |z|^{-1/2} \quad \text{pour } z \in K, t \in \mathfrak{O}^*.$$

*Démonstration.* — On a évidemment

$$\int_{\mathfrak{O}^*} \chi(z(x^k + ktx)) dx = q^{-\alpha} \sum_{\substack{u \in \mathfrak{O}^* \\ u \pmod{\mathfrak{p}^\alpha}} \chi(z(u^k + ktu)) \int_{\mathfrak{O}} \chi(zk \pi^\alpha x(u^{k-1} + t)) dx$$

si

$$\alpha > 0, \quad 2\alpha \geq -v(z) - e.$$

Prenons  $\alpha$  minimal, et supposons  $v(z) \leq -2v(k) - e - 2$ . Posant

$$\beta = -v(z) - v(k) - e - \alpha,$$

on a alors  $\beta > 0$ , et

$$(48) \quad \int_{\mathfrak{O}^*} \chi(z(x^k + ktx)) dx = \text{vol}(\mathfrak{O}) q^{-\alpha} \sum_{\substack{u \in \mathfrak{O} / \mathfrak{p}^\alpha \\ u^{k-1} \equiv -t \pmod{\mathfrak{p}^\beta}} \chi(z(u^k + ktu)).$$

Remarquons que  $\alpha \geq \beta$  [ $\alpha - \beta = v(k)$  si  $v(z) + e$  est pair,  $\alpha - \beta = v(k) + 1$  si  $v(z) + e$  est impair]. La formule (48) entraîne tout de suite qu'on a

$$(49) \quad \left| \int_{\mathfrak{O}^*} \chi(z(x^k + ktx)) dx \right| \leq \text{vol}(\mathfrak{O}) q^{-\beta} A_\beta(t) \\ = \text{vol}(\mathfrak{O}) q^{\varepsilon + (e/2)} |k|^{-1} |z|^{-1/2} A_\beta(t),$$

où  $\varepsilon = 0$  (resp.  $1/2$ ) si  $v(z) + e$  est pair (resp. impair), et où

$$A_\beta(t) = \text{Card} \{ u \in \mathfrak{O}/\mathfrak{p}^\beta : u^{k-1} \equiv -t \pmod{\mathfrak{p}^\beta} \}.$$

Si l'on pose

$$(50) \quad B(t) = \text{Card} \{ u \in \mathfrak{O}/(k-1)\mathfrak{p} : u^{k-1} \equiv -t \pmod{(k-1)^2\mathfrak{p}} \},$$

on a, pour  $\beta > 2v(k-1)$ ,

$$(51) \quad A_\beta(t) = B(t) |k-1|^{-1},$$

donc

$$A_\beta(t) \leq q |k-1|^{-2} \quad \text{pour } t \in \mathfrak{O}^*, \beta > 0.$$

Le lemme résulte donc de (49).

*Remarque.* — Plus tard, nous aurons besoin du résultat plus précis suivant.

Supposons que  $\text{vol}(\mathfrak{O}) = 1$ ,  $v(k(k-1)) = 0$ ,  $e = 0$ . Alors

$$(52) \quad \left| \int_{\mathfrak{O}^*} \chi(z(x^k + ktx)) dx \right| \leq (k-1) |z|^{-1/2} \quad \text{pour } v(z) \leq -2, v(t) = 0.$$

*Démonstration.* — Sous les hypothèses faites, la formule (49) donne

$$(53) \quad \left| \int_{\mathfrak{O}^*} \chi(z(x^k + ktx)) dx \right| \leq q^\varepsilon |z|^{-1/2} A_\beta(t).$$

Il résulte maintenant de (50) et (51) qu'on a

$$A_\beta(t) = B(t) \leq k-1 \quad \text{pour } \beta > 0.$$

Si  $v(z)$  est pair, l'inégalité (53) entraîne (52). Si  $v(z)$  est impair, on écrit

$$(54) \quad \int_{\mathfrak{O}^*} \chi(z(x^k + ktx)) dx = q^{-\alpha} \sum_{\substack{u \in \mathfrak{O}/\mathfrak{p}^3 \\ u^{k-1} \equiv -t \pmod{\mathfrak{p}^3}}} \chi(z(u^k + ktu)) \sum_{w \in \mathfrak{O}/\mathfrak{p}} \\ \times \chi\left(z \pi^{2\beta} \left[ \binom{k}{2} u^{k-2} w^2 + k(u^{k-1} + t) \pi^{-\beta} w \right]\right).$$

La valeur absolue de la somme sur  $w$  est  $q^{1/2}$ , puisqu'on a

$$v(z \pi^{2\beta}) = -1, \quad \binom{k}{2} u^{k-2} \in \mathfrak{O}^*, \quad k(u^{k-1} + t) \pi^{-\beta} \in \mathfrak{O}, \quad v(2) = 0.$$

La formule (54) entraîne donc

$$\left| \int_{\mathfrak{O}^*} \chi(z(x^k + ktx)) dx \right| \leq q^{-\alpha+1/2} A_\beta(t) = |z|^{-1/2} B(t) \leq (k-1) |z|^{-1/2}.$$

b. Si  $K = \mathbf{R}$ , la transformée de Fourier de  $x \rightarrow \chi(x^k)$  est la fonction  $g$  donnée par

$$g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi(x^k + xy) dx = |y|^{1/(k-1)} \int_{-\infty}^{\infty} \chi(|y|^{k/(k-1)}(x^k + \operatorname{sgn}(y)x)) dx.$$

Un peu d'analyse facile montre qu'on a

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} \chi(z(x^k \pm x)) dx \right| \ll |z|^{-1/2} \quad \text{pour } z \rightarrow \infty.$$

Il s'ensuit qu'on a

$$|g(y)| \ll |y|^{-[(k-2)/2, (k-1)]} \quad \text{pour } |y| \rightarrow \infty.$$

La fonction  $g$  est, du reste, indéfiniment dérivable sur  $K$ .

c. Si  $K = \mathbf{C}$ , la transformée de Fourier de  $x \rightarrow \chi(x^k)$  est donnée par

$$g(y) = \nu p \int_{\mathbf{C}} \chi(x^k + xy) dx = |y|^{1/(k-1)} \nu p \int_{\mathbf{C}} \chi(|y|^{k/2(k-1)} \left( x^k + \frac{y}{|y|^{1/2}} x \right)) dx$$

( $|y|$  est le carré de la valeur absolue usuelle sur  $\mathbf{C}$ , de sorte que  $\frac{y}{|y|^{1/2}}$  a la valeur absolue 1). On peut montrer que

$$\left| \nu p \int_{\mathbf{C}} \chi(z(x^k + tx)) dx \right| \ll |z|^{-1/2} \quad \text{pour } z \text{ réel, } z \rightarrow \infty, \quad |t| = 1.$$

Cela entraîne (44).

4° Soit  $K = k_v$ ,  $\chi = \chi_v$ ,  $dx = dx_v$ , et supposons que  $\varphi$  soit la fonction caractéristique de  $\mathfrak{o}_v$ . Il est clair que (39) et (40) sont valables pour presque tout  $v$ . Si  $a \notin \mathfrak{o}_v$ , la fonction  $x \rightarrow \varphi(x) \chi_v(ax^k)$  est constante sur les classes suivant  $a^{-1} \mathfrak{o}_v$ ; sa transformée de Fourier est donc nulle en dehors de  $a \mathfrak{o}_v$ , ce qui donne (41). Supposons maintenant que  $a \in \mathfrak{o}_v$  et que  $b \in a \mathfrak{o}_v$ , et prouvons (42). Remplaçant, dans (45) et (46),  $\chi(x)$  par  $\chi_v(ax)$  et  $y$  par  $a^{-1}b$ , on trouve, pour presque tout  $v$  :

$$(55) \quad \int_{v(x)=n} \chi_v(ax^k + bx) dx = 0 \quad \text{si } n < \frac{v(a^{-1}b)}{k-1}, \quad nk \leq -v(a) - 2;$$

$$(56) \quad \int_{v(x) \geq n} \chi_v(ax^k + bx) dx = 0 \quad \text{si } n > \frac{v(a^{-1}b)}{k-1}, \quad n \leq -v(b) - 1,$$

$$n(k-2) \geq 2v(a^{-1}b) + v(a) + 2.$$

Soit  $l$  le plus petit entier  $\geq -\frac{v(a)}{k}$ . Distinguons trois cas.

I. Si  $v(a^{-1}b) \geq -v(a) - l$  et si  $-v(a) \not\equiv 1 \pmod k$ , on a

$$\int_{v(x)=n} \chi_v(ax^k + bx) dx = 0 \quad \text{pour } 0 \leq n < l,$$

d'après (55). Donc

$$\int_{\mathfrak{O}} \chi_v(ax^k + bx) dx = \int_{\mathfrak{p}^l} \chi_v(ax^k + bx) dx = \int_{\mathfrak{p}^l} dx = q^{-l}.$$

II. Si  $v(a^{-1}b) \geq -v(a) - l$  et si  $-v(a) \equiv 1 \pmod{k}$ , on a

$$\int_{v(x)=n} \chi_v(ax^k + bx) dx = 0 \quad \text{pour } 0 \leq n < l-1,$$

d'après (55). Donc

$$(57) \quad \int_{\mathfrak{O}} \chi_v(ax^k + bx) dx = \int_{\mathfrak{p}^{l-1}} \dots = q^{-l} \sum_{\mathfrak{p}^{l-1}/\mathfrak{p}^l} \chi_v(ax^k + bx).$$

La dernière somme est de la forme  $\sum_{x \in \mathbf{F}_q} \chi_{b_0}(x^k + b_0 x)$ , où  $\chi_{b_0}$  est un caractère non-trivial de  $\mathbf{F}_q$  et où  $b_0 \in \mathbf{F}_q$ ; il est connu (Weil-Carlitz-Uchiyama) que sa valeur absolue est plus petite que  $(k-1)q^{1/2}$  pour presque tout  $v$ .

III. Si  $v(a^{-1}b) < -v(a) - l$ , on a, d'après (55) et (56),

$$\int_{v(x)=n} \chi_v(ax^k + bx) dx = 0 \quad \text{pour } n < \frac{v(a^{-1}b)}{k-1},$$

$$\int_{v(x) > [v(a^{-1}b)/(k-1)]} \chi_v(ax^k + bx) dx = 0.$$

Donc

$$\int_{\mathfrak{O}} \chi_v(ax^k + bx) dx = 0 \quad \text{si } v(a^{-1}b) \not\equiv 0 \pmod{k-1};$$

et, si  $v(a^{-1}b) \equiv 0 \pmod{k-1}$ , (52) donne

$$\left| \int_{\mathfrak{O}} \chi_v(ax^k + bx) dx \right| \leq (k-1) |a|^{-1/2} |a^{-1}b|^{-[(k-2)/2(k-1)]}.$$

Dans tous les cas (I, II et III) on trouve

$$\left| \int_{\mathfrak{O}} \chi_v(ax^k + bx) dx \right| \leq |a|^{-1/k},$$

si  $q$  est suffisamment grand, et (42) est démontré.

REMARQUE. — Nous avons utilisé, dans II ci-dessus, le résultat profond de Weil-Carlitz-Uchiyama. Ce n'est pas tout à fait nécessaire. En effet,

dans le cas II, on a  $v(a) = -kl + k - 1$ , et, d'après (57), l'inégalité  $|I(a, b)| \leq |a|^{-1/k}$  équivaut à la suivante :

$$(58) \quad \left| \sum_{\mathbf{F}_q} \chi_0(x^k + b_0 x) \right| \leq q^{1-(1/k)}$$

pour tout caractère non-trivial  $\chi_0$  de  $\mathbf{F}_q$  et tout  $b_0 \in \mathbf{F}_q$ . Or, on montre élémentairement que le premier membre de (58) est plus petit que  $kq^{3/4}$  (cf. [1]). Cela suffit pour  $k \geq 5$ , mais pour  $k \leq 4$ , on a besoin d'une estimation plus précise.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] H. DAVENPORT et H. HEILBRONN, *On an exponential sum (Proceedings of the London Mathematical Society, Second Series, vol. 41, 1936, p. 449-453).*
- [2] LOO-KENG HUA, *Additive Primzahltheorie, Leipzig, 1959.*
- [3] LOO-KENG HUA, *Die Abschätzung von Exponentialsummen und ihre Anwendungen in der Zahlentheorie (Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Band I, 2 Teil, Heft 13, Teil I, 1959).*
- [4] O. KÖRNER, *Ueber Mittelwerte trigonometrischer Summen und ihre Anwendung in algebraischen Zahlkörpern (Math. Annalen, vol. 147, 1962, p. 205-239).*
- [5] C. L. SIEGEL, *Generalization of Waring's problem to algebraic number fields (Amer. J. Math., vol. 66, 1944, p. 122-136).*
- [6] A. WEIL, *Sur certains groupes d'opérateurs unitaires (Acta Mathematica, vol. 111, 1964, p. 143-211).*
- [7] A. WEIL, *Sur la formule de Siegel dans la théorie des groupes classiques (Acta Mathematica, vol. 113, 1965, p. 1-87).*

(Manuscrit reçu le 12 mars 1973.)

J. G. M. Mars,  
 Mathematisch Instituut,  
 Der Rijksuniversiteit,  
 Universiteitscentrum de Uithof,  
 Budapestlaan 6,  
 Utrecht,  
 Pays-Bas.

