

# ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

ANDRÉ GRAMAIN

## **Le type d'homotopie du groupe des difféomorphismes d'une surface compacte**

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 4<sup>e</sup> série*, tome 6, n° 1 (1973), p. 53-66

[http://www.numdam.org/item?id=ASENS\\_1973\\_4\\_6\\_1\\_53\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1973_4_6_1_53_0)

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## LE TYPE D'HOMOTOPIE DU GROUPE DES DIFFÉOMORPHISMES D'UNE SURFACE COMPACTE

PAR ANDRÉ GRAMAIN

---

Dans [6], C. Earle et J. Eells calculent le type d'homotopie du groupe  $\mathcal{O}_0(V)$  des difféomorphismes, homotopes à l'identité, d'une surface compacte  $V$ . Soit  $\mathcal{M}(V)$  l'espace des structures analytiques complexes de  $V$ , compatibles avec sa structure différentiable. Si  $V$  est orientable et de genre au moins 2, à l'aide d'un théorème de variation continue des solutions d'équations de Beltrami, les auteurs démontrent que l'opération de  $\mathcal{O}_0(V)$  dans  $\mathcal{M}(V)$  définit une fibration principale dont la base est l'espace de Teichmüller  $\mathfrak{T}(V)$ . Comme  $\mathcal{M}(V)$  est contractile, la contractilité de  $\mathcal{O}_0(V)$  est équivalente à celle de  $\mathfrak{T}(V)$ ; cette dernière résulte du théorème de Teichmüller. Cette méthode, convenablement adaptée, permet aux auteurs de calculer  $\mathcal{O}_0(V)$  pour toute surface  $V$  compacte sans bord, orientable ou non.

Le présent article est consacré à un calcul direct (c'est-à-dire utilisant uniquement des méthodes de topologie différentielle) du type d'homotopie du groupe  $\mathcal{O}_0(V)$  pour toute surface compacte connexe  $V$ , orientable ou non, avec ou sans bord. Il en résulte, en particulier, compte tenu de [6], une nouvelle démonstration de la contractilité des espaces de Teichmüller. C'est une contribution « à éliminer un jour complètement l'Analyse de la théorie de l'espace de Teichmüller qui devrait être purement géométrique » ([8]).

La liste des résultats est la suivante :

**THÉORÈME 1.** — *Soient  $V$  une surface compacte connexe (orientable ou non avec ou sans bord) et  $\mathcal{O}_0(V)$  le groupe des difféomorphismes de classe  $C^\infty$  de  $V$  qui sont homotopes à l'identité, muni de la topologie  $C^\infty$ .*

Si  $V$  est la sphère  $\mathbf{S}_2$  ou le plan projectif  $\mathbf{P}_2$ , le groupe  $\mathcal{O}_0(V)$  a le type d'homotopie de  $\mathbf{SO}(3)$ .

Si  $V$  est le tore  $\mathbf{T}$ , le groupe  $\mathcal{O}_0(V)$  a le type d'homotopie de  $\mathbf{T}$ .

Si  $V$  est la bouteille de Klein  $\mathbf{T}'$  ou la bande de Moebius  $\mathbf{M}$ , le groupe  $\mathcal{O}_0(V)$  a le type d'homotopie de  $\mathbf{SO}(2)$ .

Si  $V$  est le cylindre  $\mathbf{C}$  ou le disque  $\mathbf{D}_2$ , le groupe  $\mathcal{O}_0(V)$  a le type d'homotopie de  $\mathbf{O}(2)$ .

Dans tous les autres cas, le groupe  $\mathcal{O}_0(V)$  est contractile.

Le fait que  $\mathcal{O}_0(V)$  soit connexe, hormis pour le cylindre et le disque pour lesquels ce groupe a deux composantes, a été démontré par D. Epstein ([7], th. 6.4). Il s'agit d'une généralisation d'un théorème de R. Baer ([1]) valable seulement pour les surfaces orientables de genre au moins 2. A vrai dire, D. Epstein s'occupe d'homéomorphismes et démontre que deux homéomorphismes homotopes sont isotopes (sauf pour le disque et le cylindre). Mais les démonstrations qu'il donne sont valables pour les difféomorphismes. On se bornera donc à calculer le type d'homotopie de la composante neutre du groupe  $\mathcal{O}(V)$  des difféomorphismes de  $V$ . En outre, les groupes de difféomorphismes considérés sont des variétés topologiques localement homéomorphes à des espaces de Fréchet (cf. [3], I.4.4). Il suffit donc, d'après le théorème 15 de [10], de calculer le type faible d'homotopie de ces espaces.

Le cas de la sphère a déjà été traité par une méthode topologique (S. Smale [11], voir aussi [4]). On utilise ici une méthode un peu différente : on déduit le théorème 1 du théorème suivant :

**THÉORÈME 2.** — Soient  $V$  une surface compacte connexe (orientable ou non, avec ou sans bord) et  $v$  un point intérieur à  $V$ . Soit  $\mathcal{O}(V, v)$  le groupe topologique des difféomorphismes de classe  $C^\infty$  de  $V$  qui sont tangents en  $v$  à l'identité, muni de la topologie  $C^\infty$ . Les composantes connexes de  $\mathcal{O}(V, v)$  sont (faiblement) contractiles.

Le paragraphe 1 est consacré à déduire le théorème 1 du théorème 2. La démonstration proprement dite du théorème 2 est donnée au paragraphe 4. Elle utilise la contractilité de certains espaces de plongements du cercle ou du segment dans une surface. Ces résultats sont démontrés dans les paragraphes 2 et 3.

### 1. Difféomorphismes avec ou sans jet-base

Soit  $V$  une surface différentiable de classe  $C^\infty$ , compacte et connexe, avec ou sans bord, orientable ou non. On note  $\mathcal{O}$  le groupe des difféomorphismes de  $V$ , muni de la topologie  $C^\infty$ . Soit  $v$  un point intérieur à  $V$ ; on note  $\mathcal{O}''$  (resp.  $\mathcal{O}'$ ) le sous-groupe de  $\mathcal{O}$  constitué des difféomorphismes qui laissent  $v$  fixe (resp. qui sont tangents d'ordre 1 à l'identité au point  $v$ ).

#### 1.1. COMPARAISON DE $\mathcal{O}$ ET $\mathcal{O}''$ (CAS GÉNÉRAL).

**PROPOSITION 1.** — *Supposons que  $V$  ne soit pas difféomorphe à  $\mathbf{S}_2$ ,  $\mathbf{P}_2$ ,  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{T}'$ ,  $\mathbf{C}$  ou  $\mathbf{M}$ . Alors, l'injection canonique induit des isomorphismes  $\pi_i(\mathcal{O}'') \xrightarrow{\sim} \pi_i(\mathcal{O})$ , pour  $i \geq 1$ . On a, en outre, une suite exacte*

$$1 \rightarrow \pi_1(V, v) \rightarrow \pi_0(\mathcal{O}'') \rightarrow \pi_0(\mathcal{O}) \rightarrow 1.$$

L'application  $\mathcal{O} \rightarrow V$  qui, à  $f \in \mathcal{O}$  associe  $f(v) \in V$ , est une fibration localement triviale ([3], II.2) de fibre  $\mathcal{O}''$ . Si  $V$  n'est pas difféomorphe à  $\mathbf{S}_2$  ou à  $\mathbf{P}_2$ , les groupes d'homotopie  $\pi_i(V)$  sont nuls pour  $i \geq 2$ . La suite exacte d'homotopie de la fibration se décompose alors en des isomorphismes

$$\pi_i(\mathcal{O}'') \xrightarrow{\sim} \pi_i(\mathcal{O}) \quad \text{pour } i \geq 2,$$

et une suite exacte

$$(1) \quad 1 \rightarrow \pi_1(\mathcal{O}'') \rightarrow \pi_1(\mathcal{O}) \rightarrow \pi_1(V, v) \rightarrow \pi_0(\mathcal{O}'', \text{id}) \rightarrow \pi_0(\mathcal{O}, \text{id}) \rightarrow 1.$$

**LEMME 1.** — *L'image de  $\pi_1(\mathcal{O})$  est contenue dans le centre de  $\pi_1(V, v)$ .*

La proposition 1 résulte du lemme 1 puisque, excepté pour  $\mathbf{S}_2$ ,  $\mathbf{P}_2$ ,  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{T}'$ ,  $\mathbf{C}$  ou  $\mathbf{M}$ , le centre du groupe fondamental d'une surface est trivial.

Comme  $\mathcal{O}$  et  $\mathcal{O}''$  sont des groupes topologiques, la suite (1) est une suite exacte de groupes; de plus,  $\pi_1(\mathcal{O})$  est commutatif; par suite, son image est un sous-groupe commutatif et distingué de  $\pi_1(V, v)$ . Montrons qu'en fait tout élément  $\alpha$  de cette image est stable par les automorphismes intérieurs de  $\pi_1(V, v)$ . L'élément  $\alpha$  est la classe d'un lacet  $f_t(v)$  ( $t \in [0, 1]$ ), où  $t \mapsto f_t$  est un lacet de  $\mathcal{O}$  en id. Soit  $\beta \in \pi_1(V, v)$  la classe d'un lacet  $b : [0, 1] \rightarrow V$ . L'application  $(t, u) \rightarrow f_t(b(u))$  peut être considérée comme une homotopie entre des lacets de classe  $\alpha$  et  $\beta \cdot \alpha \cdot \beta^{-1}$  respectivement; d'où le lemme.

1.2. COMPARAISON DE  $\mathcal{O}'$  ET  $\mathcal{O}''$  (CAS GÉNÉRAL).

PROPOSITION 2. — *Supposons que  $V$  ne soit pas difféomorphe à  $\mathbf{P}_2$ ,  $\mathbf{S}_2$  ou  $\mathbf{D}_2$ . Alors, l'injection canonique induit des isomorphismes*

$$\pi_i(\mathcal{O}') \xrightarrow{\sim} \pi_i(\mathcal{O}''),$$

pour  $i \geq 1$ . On a, en outre, une suite exacte

$$1 \rightarrow \pi_1(\mathbf{O}(2)) \rightarrow \pi_0(\mathcal{O}') \rightarrow \pi_0(\mathcal{O}'') \rightarrow \pi_0(\mathbf{O}(2)) \rightarrow 1.$$

Soit  $J_v^1 \mathcal{O}''$  l'espace des jets en  $v$  des difféomorphismes de  $V$  respectant  $v$ . L'application canonique  $\mathcal{O}'' \rightarrow J_v^1 \mathcal{O}''$  est une fibration localement triviale ([3], II.3) de fibre  $\mathcal{O}'$ . L'injection évidente de  $\mathbf{O}(2)$  dans  $J_v^1 \mathcal{O}''$  (obtenue à l'aide de coordonnées locales en  $v$ ) est une équivalence d'homotopie. La suite exacte d'homotopie de la fibration fournit donc des isomorphismes

$$\pi_i(\mathcal{O}') \xrightarrow{\sim} \pi_i(\mathcal{O}'') \quad \text{pour } i \geq 2,$$

et une suite exacte

$$(2) \quad 1 \rightarrow \pi_1(\mathcal{O}') \rightarrow \pi_1(\mathcal{O}'') \rightarrow \pi_1(\mathbf{O}(2)) \rightarrow \pi_0(\mathcal{O}') \rightarrow \pi_0(\mathcal{O}'') \rightarrow \pi_0(\mathbf{O}(2)) \rightarrow 1.$$

Soit  $f_t (t \in [0, 1])$  un lacet de  $\mathcal{O}''$  en  $\text{id}$ , et soit  $U$  un petit disque de centre  $v$  dans  $V$ . Si  $x$  est un point de  $U - \{v\}$  assez voisin de  $v$ , l'application  $t \mapsto f_t(x)$  est un lacet en  $x$  dans  $U - \{v\}$ . Notons  $\alpha$  (resp.  $\alpha'$ ) la classe de ce lacet dans  $\pi_1(U - \{v\}, x)$  [resp.  $\pi_1(V - \{v\}, x)$ ]. Une démonstration analogue à celle du lemme 1 prouve que  $\alpha'$  est dans le centre de  $\pi_1(V - \{v\}, x)$ . Si  $V$  n'est pas difféomorphe à  $\mathbf{P}_2$ ,  $\mathbf{S}_2$  ou  $\mathbf{D}_2$ , le centre de  $\pi_1(V - \{v\}, x)$  est trivial. En outre, si  $V$  n'est pas difféomorphe à  $\mathbf{S}_2$  l'homomorphisme canonique  $\pi_1(U - \{v\}, x) \rightarrow \pi_1(V - \{v\}, x)$  est injectif. Par suite, sous les hypothèses de la proposition 2,  $\alpha$  est trivial. Montrons qu'il en résulte que l'image dans  $\pi_1(\mathbf{O}(2))$  de la classe du lacet  $f_t$  est triviale. En effet, le lacet  $t \mapsto f_t(x)$  dans  $U - \{v\}$  est voisin du lacet  $t \mapsto f_t(v) \cdot (x - v)$  et ce dernier est donc homotope à un point. Ceci démontre que l'homomorphisme  $\pi_1(\mathcal{O}'') \rightarrow \pi_1(\mathbf{O}(2))$  de la suite exacte (2) est trivial, d'où la proposition 2.

Les propositions 1 et 2 montrent que, exception faite des surfaces de basse caractéristique d'Euler  $\mathbf{P}_2$ ,  $\mathbf{S}_2$ ,  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{T}'$ ,  $\mathbf{D}_2$ ,  $\mathbf{G}$  et  $\mathbf{M}$ , la contractilité de la composante neutre de  $\mathcal{O}'$  (th. 2) implique la contractilité de la composante neutre de  $\mathcal{O}$  (th. 1).

1.3. ÉTUDE DES CAS PARTICULIERS. — Il reste à étudier, cas par cas, les sept surfaces exceptionnelles. Commençons par celles qui satisfont à la proposition 2, et examinons la suite exacte (1).

*Le tore.* — Le tore  $\mathbf{T}$  possède une structure de groupe de Lie. Pour tout  $x \in \mathbf{T}$ , la translation  $t_x$  définie par  $x$  est un difféomorphisme de  $\mathbf{T}$  et l'application  $x \mapsto t_x$  est une section de la fibration  $\mathcal{O} \rightarrow \mathbf{T}$ . On déduit de la suite exacte (1), de la proposition 2 et du théorème 2, que cette fibration induit une équivalence d'homotopie entre la composante neutre de  $\mathcal{O}$  et  $\mathbf{T}$ , et qu'on a un isomorphisme  $\pi_0(\mathcal{O}'') \rightarrow \pi_0(\mathcal{O})$ .

*La bouteille de Klein.* — Le groupe  $\pi_1(\mathbf{T}', v)$  est présenté par deux générateurs  $\alpha$  et  $\beta$ , et le relateur  $\alpha.\beta.\alpha^{-1}.\beta$ . Le centre de  $\pi_1(\mathbf{T}', v)$  est le sous-groupe engendré par  $\alpha^2$ . L'image de  $\pi_1(\mathcal{O})$  est contenue dans le centre de  $\pi_1(\mathbf{T}', v)$ ; montrons qu'elle contient  $\alpha^2$ . On peut considérer  $\mathbf{T}'$  comme le quotient du tore  $\mathbf{T} = \mathbf{S}_1 \times \mathbf{S}_1$  par l'identification de  $(x, y)$  et de  $(x + \pi, -y)$ . Notons  $p : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}'$  l'application canonique (revêtement à deux feuilletés) et supposons que  $v = p(0, 0)$ . On peut supposer que la classe du lacet  $p(\mathbf{S}_1 \times 0)$  [resp.  $p(0 \times \mathbf{S}_1)$ ] est  $\alpha^2$  (resp.  $\beta$ ). La translation  $g_t$  dans  $\mathbf{T}$  définie par  $(2\pi t, 0)$  est un difféomorphisme qui passe au quotient et induit un difféomorphisme  $f_t$  de  $\mathbf{T}'$ . Il est clair que la classe du lacet  $f_t(t \in [0, 1])$  de  $\mathcal{O}$  a pour image  $\alpha^2$  dans  $\pi_1(\mathbf{T}', v)$ . Il résulte de ce qui précède, de la proposition 2 et du théorème 2, que tous les groupes d'homotopie  $\pi_i(\mathcal{O})$  ( $i \geq 2$ ) sont nuls et que  $\pi_1(\mathcal{O})$  est cyclique infini. La composante neutre de  $\mathcal{O}$  a donc le type d'homotopie de  $\mathbf{SO}(2)$ .

*Le cylindre.* — Dans ce cas aussi, l'image de  $\pi_1(\mathcal{O})$  est le centre de  $\pi_1(\mathbf{C})$ . En effet,  $\pi_1(\mathbf{C})$  est libre à un générateur et la rotation autour de l'axe de  $\mathbf{C}$  fournit un lacet dans  $\mathcal{O}$  dont l'image a pour classe un générateur de  $\pi_1(\mathbf{C})$ . On déduit, comme ci-dessus, que la composante neutre de  $\mathcal{O}$  a le type d'homotopie de  $\mathbf{SO}(2)$ .

*Le ruban de Moebius.* — Le groupe  $\pi_1(\mathbf{M}, v)$  est libre à un générateur  $\alpha$ . Lorsqu'on parcourt dans  $\mathbf{M}$  un lacet de classe  $\alpha$ , on revient en  $v$  avec une orientation opposée à l'orientation du départ. L'image de  $\pi_1(\mathcal{O})$  ne peut donc contenir  $\alpha$ . On montre qu'elle contient  $\alpha^2$  en utilisant le revêtement de  $\mathbf{M}$  par  $\mathbf{C}$  et en raisonnant comme pour la bouteille de Klein. On a donc une équivalence d'homotopie de  $\mathcal{O}$  à  $\mathbf{SO}(2)$  et une suite exacte

$$1 \rightarrow \{-1, 1\} \rightarrow \pi_0(\mathcal{O}'', \text{id}) \rightarrow \pi_0(\mathcal{O}, \text{id}) \rightarrow 1,$$

scindée par l'orientation au point-base.

Il reste à étudier les trois surfaces qui ne satisfont pas à la proposition 2. On utilise directement la fibration localement triviale  $\mathcal{O} \rightarrow J_v^1 \mathcal{O}$  de fibre  $\mathcal{O}'$  (cf. [3], II.3).

*La sphère et le plan projectif.* — Dans ces deux cas, le groupe  $\mathcal{O}$  contient  $\mathbf{SO}(3)$  comme sous-groupe. La restriction  $\mathbf{SO}(3) \rightarrow J_v^1 \mathcal{O}$  de la

fibration est une équivalence d'homotopie pour  $\mathbf{P}_2$ . Ceci vaut pour  $\mathbf{S}_2$  si l'on remplace  $J_v^1 \mathcal{O}$  par sa composante connexe formée des repères orientés tangents à  $\mathbf{S}_2$ . La contractilité des composantes de la fibre  $\mathcal{O}'$  entraîne l'équivalence d'homotopie de  $\mathbf{SO}(3)$  à la composante neutre de  $\mathcal{O}$ .

*Le disque.* — De même, le groupe  $\mathcal{O}$  admet  $\mathbf{SO}(2)$  pour sous-groupe. La restriction  $\mathbf{SO}(2) \rightarrow J_v^1 \mathcal{O}$  de la fibration est une équivalence d'homotopie de  $\mathbf{SO}(2)$  à l'une des deux composantes connexes de  $J_v^1 \mathcal{O}$ . D'où l'équivalence d'homotopie de  $\mathbf{SO}(2)$  à la composante neutre de  $\mathcal{O}$ .

## 2. Plongements d'un segment dans une somme connexe

2.1. Soit  $M$  une surface connexe, à bord non vide (et non nécessairement compact); soit  $K$  un segment plongé dans  $M$ , rencontrant  $\partial M$  transversalement en ses extrémités. On suppose que  $M - K$  possède deux composantes; leurs adhérences  $C$  et  $D$  sont des surfaces à bord (anguleux), et  $M$  s'identifie (fig. 1) à la somme connexe au bord de  $C$  et  $D$ .

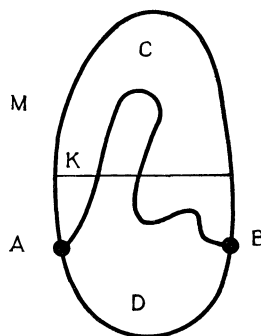


Fig. 1

Soient  $A$  et  $B$  deux points de  $\partial D - K$ , et  $I$  le segment  $[0, 1]$ . On note  $\mathcal{X}_1 = \text{Pl}((I, 0, 1), (D, A, B))$  [resp.  $\mathcal{X}'_2 = \text{Pl}((I, 0, 1), (M, A, B))$ ] l'espace des plongements  $f$  de  $I$  dans  $D$  (resp.  $M$ ), de classe  $C^\infty$ , tels que  $f(0) = A$ ,  $f(1) = B$  et  $f(]0, 1[) \subset \text{int } D$  (resp.  $\text{int } M$ ), muni de la topologie  $C^\infty$ . On note  $\mathcal{X}_2$  l'ouvert de  $\mathcal{X}'_2$  constitué des plongements homotopes (avec extrémités  $A$  et  $B$  fixes) à un élément de  $\mathcal{X}_1$ .

**THÉORÈME 3.** — Avec les notations ci-dessus, pour tout  $i \geq 0$ , les applications canoniques  $\pi_i(\mathcal{X}_1) \rightarrow \pi_i(\mathcal{X}_2)$  sont injectives.

Pour démontrer ce théorème <sup>(1)</sup>, l'idéal serait de trouver une rétraction continue  $r : \mathcal{X}_2 \rightarrow \mathcal{X}_1$  de l'injection canonique. On va se contenter de construire, pour tout compact  $\mathcal{K} \subset \mathcal{X}_2$ , une application continue

$$r : \mathcal{K} \cup \mathcal{X}_1 \rightarrow \mathcal{X}_1 \quad \text{telle que} \quad r|_{\mathcal{X}_1} : \mathcal{X}_1 \rightarrow \mathcal{X}_1$$

soit homotope à l'identité. Supposons cette construction réalisée, et démontrons le théorème 3. Soit  $F : \mathbf{S}_n \rightarrow \mathcal{X}_1$  une application continue, homotope à 0 dans  $\mathcal{X}_2$ ; soit  $\mathcal{K}$  l'image de cette homotopie et soit  $r : \mathcal{K} \cup \mathcal{X}_1 \rightarrow \mathcal{X}_1$  l'application associée. L'application  $r \circ F$  est homotope à 0 dans  $\mathcal{X}_1$ , donc  $F$  aussi. Le théorème 3 en résulte.

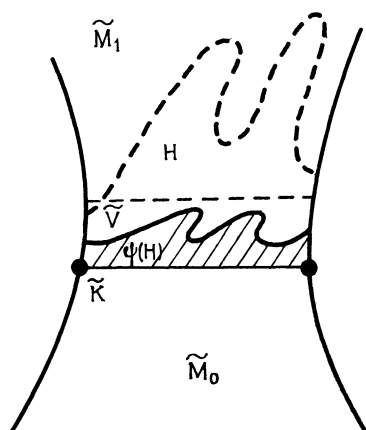


Fig. 2

2.2. CONSTRUCTION DE L'APPLICATION  $r : \mathcal{K} \cup \mathcal{X}_1 \rightarrow \mathcal{X}_1$ . — Soit  $p : \hat{M} \rightarrow M$  un revêtement universel de  $M$  et soit  $\hat{D}_0$  une composante de  $\bar{p}^{-1}(D)$ . Dans  $M$ , prenons le segment  $K$  pour « point-base ». D'après le théorème de Van Kampen, le groupe  $\pi_1(M, K)$  est la somme des groupes  $\pi_1(C, K)$  et  $\pi_1(D, K)$ ; en particulier, l'application canonique  $\pi_1(D, K) \rightarrow \pi_1(M, K)$  est injective (cf. [2], p. 81). Il en résulte que  $p|_{\hat{D}_0}$  est un revêtement universel de  $D$ . Soit  $H$  le groupe des automorphismes de  $p$  qui envoient  $\hat{D}_0$  dans  $\hat{D}_0$ . Posons  $\tilde{M} = \hat{M}/H$ ,  $\tilde{M}_0 = \hat{D}_0/H$  et soient  $u : \hat{M} \rightarrow \tilde{M}$  et  $q : \tilde{M} \rightarrow M$  les applications canoniques. Comme  $H$  s'identifie au groupe des automorphismes de  $p|_{\hat{D}_0}$ , le revêtement  $q$  induit un homéomorphisme de  $\tilde{M}_0$

<sup>(1)</sup> La démonstration du théorème 3 a été changée sur épreuves. La présente démonstration m'a été indiquée par John Hubbard et constitue une amélioration très notable de la démonstration originale.



sur  $D$ . Soient  $\tilde{M}_1$  l'adhérence du complémentaire de  $\tilde{M}_0$  dans  $\tilde{M}$  et  $\tilde{K}$  le relèvement de  $K$  dans  $\tilde{M}_0$ ; on a  $\tilde{K} = \tilde{M}_0 \cap \tilde{M}_1$  et  $\tilde{M}$  est la somme connexe le long de  $\tilde{K}$  de  $\tilde{M}_0$  et  $\tilde{M}_1$ . Enfin  $\tilde{M}_1$  est connexe et simplement connexe d'après le théorème de Van Kampen, puisque  $u$  est un revêtement universel de  $\tilde{M}$ .

Soit  $f: [0, 1] \rightarrow M$  un chemin tel que  $f(0) = A$ ,  $f(1) = B$ . Si  $f$  est homotope (à extrémités  $A$  et  $B$  fixes) à un chemin dans  $D$ , son relèvement  $\tilde{f}: [0, 1] \rightarrow \tilde{M}$  d'origine  $\tilde{A} \in \tilde{M}_0$  est homotope à un chemin dans  $\tilde{M}_0$  et son extrémité  $\tilde{f}(1)$  est le relèvement  $\tilde{B}$  de  $B$  dans  $\tilde{M}_0$ .

Soit  $\mathcal{K}$  un compact de  $\mathcal{X}_2$ . La réunion des images des relèvements  $\tilde{f}$  d'origine  $\tilde{A}$  des plongements  $f \in \mathcal{K}$  est un compact  $Q$  de  $\tilde{M}$ . Comme  $\tilde{M}_1$  est simplement connexe, le compact  $Q \cap \tilde{M}_1$  est contenu dans un disque fermé  $H$  plongé dans  $\tilde{M}_1$ . On peut supposer que  $H$  contient un voisinage de  $\tilde{K}$  dans  $\tilde{M}_1$ . Soit, d'autre part  $(U, b U)$  un voisinage tubulaire de  $(K, b K)$  dans  $(M, b M)$ ; soient  $V = C \cap U$  et  $\tilde{V}$  le relèvement de  $V$  dans  $\tilde{M}_1$  qui contient  $\tilde{K}$ . Choisissons un plongement  $\psi: H \rightarrow \tilde{V}$  qui soit égal à l'identité dans un voisinage de  $\tilde{K}$  dans  $\tilde{M}_1$  (fig. 2). Le plongement  $\psi$  se prolonge par l'identité en un plongement (encore noté  $\psi$ ) de  $\tilde{M}_0 \cup H$  dans  $\tilde{M}_0 \cup \tilde{V}$ . Pour tout  $f \in \mathcal{K} \cup \mathcal{X}_1$ , posons  $R(f) = q \circ \psi \circ \tilde{f}$ . Il est clair que  $R(f)$  est un plongement de classe  $C^\infty$  de  $[0, 1]$  dans  $D' = D \cup V$ , que  $R$  est une application continue et que sa restriction à  $\mathcal{X}_1$  est l'application identique. Soit  $\mathcal{X}'_1 = \text{Pl}((I, 0, 1), (D', A, B))$ ; l'injection canonique  $\mathcal{X}_1 \rightarrow \mathcal{X}'_1$  est une équivalence d'homotopie. Soit  $S: \mathcal{X}'_1 \rightarrow \mathcal{X}_1$  une application réciproque à homotopie près de  $S$ . L'application  $r = S \circ R: \mathcal{K} \cup \mathcal{X}_1 \rightarrow \mathcal{X}_1$  répond clairement à la question.

Remarquons aussi que, d'après la construction,  $r(f)$  est homotope à  $f$ . D'après [7],  $r(f)$  est donc isotope à  $f$ , ce qui prouve la surjectivité de l'application  $\pi_0(\mathcal{X}_1) \rightarrow \pi_0(\mathcal{X}_2)$ .

### 3. Plongements du cercle ou du segment dans une surface

3.1. Ce paragraphe est consacré à démontrer les théorèmes suivants :

**THÉORÈME 4.** — Soient  $V$  une surface compacte et  $c$  un point du cercle  $\mathbf{S}_1$ . Soient  $j$  le 1-jet en  $c$  d'un plongement  $f_0$  de  $\mathbf{S}_1$  dans l'intérieur de  $V$ , et  $\text{Pl}(\mathbf{S}_1, V; j)$  l'espace des plongements de classe  $C^\infty$  de  $\mathbf{S}_1$  dans l'intérieur de  $V$  dont le 1-jet en  $c$  est  $j$ , muni de la topologie  $C^\infty$ . Les composantes connexes de  $\text{Pl}(\mathbf{S}_1, V; j)$  sont contractiles.

**THÉORÈME 5.** — Soient  $V$  une surface compacte à bord,  $A$  et  $B$  deux points du bord  $bV$  de  $V$  et  $\mathbf{I}$  le segment  $[0, 1]$ . On note  $\text{Pl}((\mathbf{I}, 0, 1), (V, A, B))$  l'espace des plongements  $f: \mathbf{I} \rightarrow V$ , de classe  $C^\infty$ , tels que  $f(0) = A$ ,  $f(1) = B$  et  $f(]0, 1[) \subset \text{int } V$ , muni de la topologie  $C^\infty$ . Les composantes connexes de  $\text{Pl}((\mathbf{I}, 0, 1), (V, A, B))$  sont contractiles.

**THÉORÈME 6.** — Sous les hypothèses du théorème 5, soit  $bV_1$  une composante du bord de  $V$ . On note  $\text{Pl}((\mathbf{I}, 0, 1), (V, A, bV_1))$  l'espace des plongements  $f: \mathbf{I} \rightarrow V$ , de classe  $C^\infty$ , tels que  $f(0) = A$ ,  $f(1) \in bV_1$  et  $f(]0, 1[) \subset \text{int } V$ . Les composantes connexes de l'espace  $\text{Pl}((\mathbf{I}, 0, 1), (V, A, bV_1))$  sont contractiles.

Avec les notations du théorème 5, soit  $g_0 \in \text{Pl}((\mathbf{I}, 0, 1), (V, A, B))$  et soient  $j_0$  et  $j_1$  les 1-jets de  $g_0$  en 0 et 1. Notons  $\text{Pl}(\mathbf{I}, V; j_0, j_1)$  le sous-espace de  $\text{Pl}((\mathbf{I}, 0, 1), (V, A, B))$  formé des plongements qui ont  $j_0$  et  $j_1$  pour jets en 0 et 1 respectivement. L'injection de  $\text{Pl}(\mathbf{I}, V; j_0, j_1)$  dans  $\text{Pl}((\mathbf{I}, 0, 1), (V, A, B))$  est une équivalence d'homotopie. C'est, en effet, l'injection de la fibre dans l'espace total d'une fibration à base contractile, à savoir le produit de l'espace des vecteurs tangents non nuls à  $V$  en  $A \in bV$  et de l'espace correspondant pour  $B \in bV$ . Avec des notations analogues pour les  $r$ -jets, et une démonstration analogue, on démontre la proposition suivante.

**PROPOSITION 3.** — Avec les notations ci-dessus, soient  $j_0, j_1$  les  $r$ -jets ( $1 \leq r \leq \infty$ ) de  $g_0$  en 0, 1. L'injection canonique de  $\text{Pl}(\mathbf{I}, V; j_0, j_1)$  dans  $\text{Pl}((\mathbf{I}, 0, 1), (V, A, B))$  est une équivalence d'homotopie.

On obtient donc des énoncés équivalents au théorème 5 en considérant des plongements dont le jet est imposé.

3.2. Montrons que le théorème 4 résulte du théorème 5. Avec les notations du théorème 4, soit  $J'$  un arc de  $\mathbf{S}_1$  de centre  $c$ ; soient  $a$  et  $b$  les extrémités de  $J'$  et  $J$  l'autre arc d'extrémités  $a$  et  $b$ . Soit  $\varphi$  un isomorphisme de  $J'$  sur le diamètre  $\mathbf{D}_1$  de  $\mathbf{D}_2$ . Si  $J'$  est assez petit, on peut supposer qu'il existe un plongement  $g: \mathbf{D}_2 \rightarrow V$  tel que  $f_0|J' = g \circ \varphi$  et qu'en outre, l'intersection de  $f_0(J)$  avec  $U = g(\mathbf{D}_2)$  soit réduite aux points  $A = f_0(a)$  et  $B = f_0(b)$ . Le complémentaire  $V'$  de l'intérieur de  $U$  dans  $V$  est une variété compacte à bord. Notons  $g_0: \mathbf{I} \rightarrow V'$  le plongement obtenu à partir de  $f_0|J$  en identifiant  $J$  et  $\mathbf{I}$  de telle sorte que  $g_0(0) = A$  [et  $g_0(1) = B$ ]. Notons enfin  $j_0$  (resp.  $j_1$ ) le jet d'ordre infini de  $g_0$  en 0 (resp. 1).

**PROPOSITION 4.** — Avec les notations précédentes, les espaces  $\text{Pl}(\mathbf{I}, V'; j_0, j_1)$  et  $\text{Pl}(\mathbf{S}_1, V; j)$  ont même type d'homotopie.

Soit  $\text{Pl}_J(\mathbf{S}_1, V; f_0)$  l'espace des plongements de  $\mathbf{S}_1$  dans l'intérieur de  $V$  qui coïncident avec  $f_0$  sur  $J'$ . On démontre aisément que l'application canonique  $\text{Pl}(\mathbf{I}, V'; j_0, j_1) \rightarrow \text{Pl}_J(\mathbf{S}_1, V; f_0)$  est une équivalence d'homotopie (cf. [4], p. 12). D'autre part, l'inclusion  $\text{Pl}_J(\mathbf{S}_1, V; f_0) \rightarrow \text{Pl}(\mathbf{S}_1, V; j)$  est une équivalence d'homotopie ([3], II.4), d'où la proposition.

3.3. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 5 DANS UN CAS PARTICULIER FACILE. — Reprenons les notations du théorème 5 et supposons que les points  $A$  et  $B$  soient dans deux composantes distinctes  $bV_0$  et  $bV_1$  de  $bV$ . Soit  $V''$  la

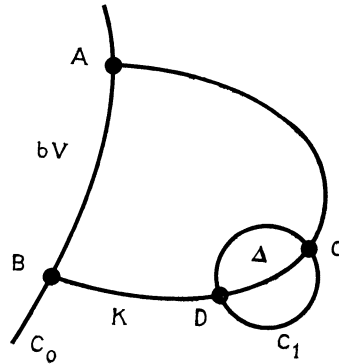


Fig. 3

variété (à bord) obtenue en collant un disque par son bord à  $bV_1$ . Notons  $I'$  (resp.  $J$ ) le segment  $[1, 2]$  (resp.  $[0, 2]$ ) et  $\mathcal{X}$  l'espace  $\text{Pl}(\mathbf{I}, V; j_0, j_1)$ .

LEMME 2. — *On a des isomorphismes*

$$\pi_{i+1}(\text{Pl}(I', V'')) \xrightarrow{\sim} \pi_i(\mathcal{X}) \quad \text{pour } i \geq 0.$$

Soit  $\mathcal{X}' = \text{Pl}(J, V''; j_0)$  l'espace des plongements de  $J$  dans  $V''$  qui ont  $j_0$  pour jet en 0. D'après [3] (II.5),  $\mathcal{X}'$  est contractile. L'application  $\mathcal{X}' \rightarrow \text{Pl}(I', V'')$  de restriction à  $I'$  est une fibration localement triviale. On démontre, comme dans la proposition 4, que la fibre a le type d'homotopie de  $\mathcal{X}$ . La suite exacte de la fibration donne les isomorphismes du lemme.

LEMME 3. — *Les groupes  $\pi_i(\text{Pl}(I', V''))$  sont triviaux pour  $i \geq 2$ .*

L'espace  $\text{Pl}(I', V'')$  a le type d'homotopie de l'espace  $T(V'')^0$  des vecteurs tangents non nuls à  $V''$ . L'espace  $T(V'')^0$  est un espace fibré de base  $V''$ , de fibre  $\mathbf{R}^2 - \{0\}$ . Comme  $V''$  est une surface connexe à bord non vide,

on a  $\pi_i(V'') = 0$ , pour  $i \geq 2$ . Le lemme résulte de l'examen de la suite exacte d'homotopie de  $T(V'')^0$ .

Les lemmes 2 et 3 impliquent la contractilité des composantes de  $\mathcal{X}$ . Ceci démontre le théorème 5 dans le cas où A et B sont dans deux composantes distinctes de  $bV$ .

3.4. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 5 (CAS DIFFICILE). — Soit V une surface compacte connexe à bord. Soit  $g_0 : \mathbf{I} \rightarrow V$  un plongement tel que les points  $A = g_0(0)$  et  $B = g_0(1)$  soient dans la même composante  $C_0$ .

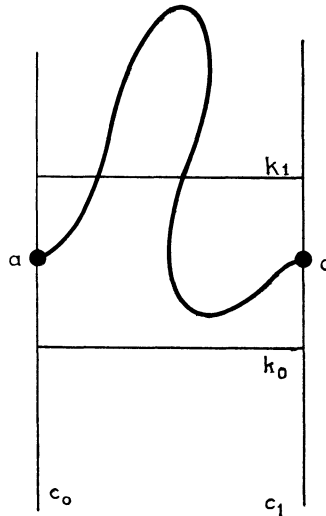


Fig. 4

de  $bV$ . Soit  $\Delta$  un disque plongé dans  $V$  comme voisinage tubulaire de  $g_0([1/3, 2/3])$  de telle sorte que  $\Delta \cap g_0(\mathbf{I}) = g_0([1/3, 2/3])$ . On note  $W$  le complémentaire de l'intérieur de  $\Delta$  dans  $V$ ; c'est une surface à bord; la frontière de  $\Delta$  est une composante  $C_1$  du bord  $bW$ . On note  $f_0 : \mathbf{I} \rightarrow W$  le plongement défini par  $f_0(3t) = g_0(t)$ ,  $t \in [0, 1/3]$ ; on note  $K$  l'arc  $g_0([2/3, 1])$ ; ses extrémités sont  $B \in C_0$  et  $D = g_0(2/3) \in C_1$  (fig. 3). L'image de  $f_0$  est disjointe de  $K$ . On voit facilement (par exemple comme dans 3.3) que l'espace des plongements  $g : \mathbf{I} \rightarrow V$  tels que  $g(0) = A$ ,  $g(1) = B$ , a même type d'homotopie que l'espace des plongements  $f : \mathbf{I} \rightarrow W$  tels que  $f(0) = A$ ,  $f(1) = C$  et dont l'image ne rencontre pas  $K$ . Pour démontrer le théorème 5, il suffit donc de montrer que la composante connexe  $\mathcal{X}_1$  de  $f_0$  dans  $\text{Pl}(\mathbf{I}, 0, 1, (W - K, A, C))$  est contractile.

Soit  $p : \hat{W} \rightarrow W$  le revêtement de groupe  $\mathbf{Z}$  associé à la « coupure »  $K$  de  $W$  (fig. 4). Les relèvements  $c_0$  et  $c_1$  des cercles  $C_0$  et  $C_1$  sont des droites;

l'image réciproque  $\bar{p}^{-1}(K)$  est une famille  $(k_n)_{n \in \mathbf{Z}}$  de segments disjoints d'extrémités  $b_n \in c_0, d_n \in c_1$ . Les segments  $k_n$  et  $k_{n+1}$  sont la frontière d'une surface compacte  $W_n$  à bord anguleux (aux points  $b_n, d_n, b_{n+1}$ , et  $d_{n+1}$ ) difféomorphe à  $V$ . La restriction de  $p$  à  $W_n - (k_n \cup k_{n+1})$  est un homéomorphisme sur  $W - K$ . Notons  $a$  et  $c$  les relèvements de  $A$  et  $C$  dans  $W_0$ ,  $\hat{f}_0 : \mathbf{I} \rightarrow W_0$  le relèvement de  $f_0$  tel que  $\hat{f}_0(0) = a$  [et  $\hat{f}_0(1) = c$ ]. La composition avec  $p$  donne une application continue

$$p_* : \text{Hom}^\infty((\mathbf{I}, 0, 1), (\hat{W}, a, c)) \rightarrow \text{Hom}^\infty((\mathbf{I}, 0, 1), (W, A, C)).$$

La composante connexe  $\hat{\mathcal{X}}_1$  de  $\hat{f}_0$  dans  $\text{Pl}((\mathbf{I}, 0, 1), (W_0 - (k_0 \cup k_1), a, c))$  est un ouvert de  $\text{Hom}^\infty((\mathbf{I}, 0, 1), (\hat{W}, a, c))$  et  $p_*$  induit un homéomorphisme de  $\hat{\mathcal{X}}_1$  sur  $\mathcal{X}_1$ . Soit  $\mathcal{X}_2$  la composante connexe de  $f_0$  dans  $\text{Pl}((\mathbf{I}, 0, 1), (W, A, C))$  et  $\hat{\mathcal{X}}_2$  la composante de  $\hat{f}_0$  dans  $\bar{p}_*^{-1}(\mathcal{X}_2)$ . L'espace  $\hat{\mathcal{X}}_2$  est un ouvert de  $\text{Hom}^\infty((\mathbf{I}, 0, 1), (\hat{W}, a, c))$  et  $p_*$  induit un homéomorphisme de  $\hat{\mathcal{X}}_2$  sur  $\mathcal{X}_2$  (il y a une section évidente).

D'après le théorème 3 appliqué deux fois, les applications canoniques  $\pi_i(\hat{\mathcal{X}}_1) \rightarrow \pi_i(\hat{\mathcal{X}}_2)$  sont injectives pour  $i \geq 0$ . Par suite les applications  $\pi_i(\mathcal{X}_1) \rightarrow \pi_i(\mathcal{X}_2)$  sont injectives. D'après 3.3, l'espace  $\mathcal{X}_2$  est contractile puisque  $A$  et  $C$  sont dans les composantes distinctes  $C_0$  et  $C_1$  de  $bW$ . Le théorème 5 en résulte.

3.5. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 6. — Deux cas se présentent suivant que  $A$  appartient ou non à  $bV_1$ . Supposons d'abord que  $A$  est dans une composante  $bV_0$  de  $bV$  distincte de  $bV_1$  et reprenons les notations de 3.3. Considérons la fibration  $\mathcal{X}' \rightarrow V''$ , qui, à  $f \in \mathcal{X}'$ , associe  $f(2)$ . On démontre, comme dans 3.3, que la fibre est contractile. Cette fibre est l'espace des plongements  $f: J \rightarrow V''$  qui ont  $j_0$  pour jet en 0 et tels que  $f(2)$  soit un point donné de  $V''$ . Elle a même type d'homotopie que  $\text{Pl}((\mathbf{I}, 0, 1), (V, A, bV_1))$ , d'où le théorème 6 dans ce cas.

Supposons maintenant que  $A \in bV_1$  et soit  $X = bV_1 - A$ . L'application  $\text{Pl}((\mathbf{I}, 0, 1), (V, A, bV_1)) \rightarrow X$ , qui à un plongement  $f: \mathbf{I} \rightarrow V$  associe le point  $f(1) \in X$  est une fibration localement triviale. La base  $X$  est une droite, elle est contractile. La fibre a ses composantes contractiles d'après le théorème 5. Les composantes de l'espace total sont donc contractiles; d'où le théorème 6 dans ce cas.

#### 4. Groupes de difféomorphismes

PROPOSITION 5. — Soit  $\mathcal{O}(\mathbf{D}; b\mathbf{D})$  le groupe des difféomorphismes de classe  $C^\infty$  du disque  $\mathbf{D}$  qui induisent l'identité sur  $b\mathbf{D}$ , muni de la topologie  $C^\infty$ . L'espace  $\mathcal{O}(\mathbf{D}; b\mathbf{D})$  est contractile (cf. [4]).

Soit  $\mathbf{D}^+$  le demi-disque supérieur; son bord  $b\mathbf{D}^+$  est constitué d'un diamètre  $J$  et de  $\mathbf{S}^+ = \mathbf{S}_1 \cap b\mathbf{D}^+$ ; les points communs  $A$  et  $B$  à  $J$  et  $\mathbf{S}^+$  sont anguleux. L'espace  $\mathcal{E}$  des plongements de  $\mathbf{D}^+$  dans  $\mathbf{D}$  tangents à l'identité le long de  $\mathbf{S}^+$  est contractile (théorème du voisinage tubulaire). Soit  $\mathcal{X}$  l'espace des plongements de  $J$  dans  $\mathbf{D}$ , tangents à l'identité en  $A$  et  $B$ . Les composantes de  $\mathcal{X}$  sont contractiles (th. 5). La fibre de la fibration  $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{X}$  est donc contractile. Or c'est le groupe des difféomorphismes de  $\mathbf{D}^+$  qui sont l'identité sur  $J$  et tangents à l'identité sur  $\mathbf{S}^+$ ; il a même type d'homotopie que  $\mathcal{O}(\mathbf{D}; b\mathbf{D})$ .

**PROPOSITION 6.** — *Soient  $V$  une surface compacte connexe,  $M$  une partie non-vide de  $bV$  et  $P$  un point de  $M$ . Le groupe  $\mathcal{O}(V; M; P)$  des difféomorphismes de  $V$  induisant l'identité sur  $M$  et tangents à l'identité en  $P$ , a ses composantes connexes contractiles.*

Si  $V$  est le disque, la proposition 6 est un corollaire de la proposition 5. En effet,  $\mathcal{O}(V; M; P)$  est l'espace total d'une fibration de fibre  $\mathcal{O}(V; bV; P)$  et de base l'espace des difféomorphismes de  $\mathbf{S}_1$  qui induisent l'identité sur  $M$  et sont tangents à l'identité en  $P$ . Ce dernier espace est contractile ainsi que  $\mathcal{O}(V; bV; P)$  qui a le type d'homotopie de  $\mathcal{O}(V; bV)$  (prop. 5).

Dans le cas général, soit  $J$  un segment plongé dans  $V$ , d'origine  $P$  et d'extrémité  $Q \in bV$ . Soient  $bV_1$  la composante de  $Q$  dans  $bV$  et  $\mathcal{X}$  l'espace des plongements  $f: J \rightarrow V$  tangents à l'identité en  $P$  et tels que  $f(Q) \in bV_1$ . D'après le théorème 6, les composantes de  $\mathcal{X}$  sont contractiles.

Soit  $V_1$  la variété à bord obtenue en coupant  $V$  le long de  $J$ . Le point  $P$  (resp. le segment  $J$ ) éclate en  $P'$  et  $P''$  (resp.  $J'$  et  $J''$ ) dans  $V_1$ . Posons  $M_1 = (M \cup J' \cup J'') \subset V_1$ . La fibre de la fibration  $\mathcal{O}(V; M; P) \rightarrow \mathcal{X}$  est l'espace des difféomorphismes de  $V_1$  qui sont l'identité sur  $M_1$  et tangents à l'identité en  $P'$  et  $P''$ .

Si  $V_1$  est connexe, ce groupe a même type d'homotopie que  $\mathcal{O}(V_1; M_1; P')$ . Si  $V_1$  a deux composantes  $V'_1$  et  $V''_1$ , ce groupe a même type d'homotopie que  $\mathcal{O}(V'_1; M'_1; P') \times \mathcal{O}(V''_1; M''_1; P'')$ , avec  $M'_1 = M_1 \cap V'_1$ ,  $M''_1 = M_1 \cap V''_1$  et  $P' \in V'_1$ . Si les composantes de ces groupes sont contractiles, les composantes de  $\mathcal{O}(V; M; P)$  sont contractiles. La proposition en résulte par récurrence sur le genre de  $V$ .

*Démonstration du théorème 2.* — Soient  $V$  une surface compacte connexe et  $v$  un point intérieur à  $V$ . Soient  $S$  un cercle plongé dans  $V$  contenant  $v$  et  $\mathcal{X}$  l'espace des plongements de  $S$  qui sont tangents à l'injection canonique en  $v$ . L'espace  $\mathcal{O}(V, v)$  des difféomorphismes de  $V$  tangents à l'identité en  $v$  est l'espace total d'une fibration de base  $\mathcal{X}$ . Les composantes de  $\mathcal{X}$  sont contractiles (th. 4); montrons que les composantes de la fibre sont contractiles : le théorème en résultera.

Soient  $V_1$  la surface obtenue en coupant  $V$  le long de  $S$ ,  $S'$  et  $S''$  (resp.  $v'$  et  $v''$ ) le résultat de l'éclatement de  $S$  (resp.  $v$ ). Si  $V_1$  est connexe, la fibre a le type d'homotopie de  $\mathcal{O}(V_1; S' \cup S''; v')$ . Si  $V_1$  a deux composantes  $V'_1$  et  $V''_1$ , la fibre a le type d'homotopie de  $\mathcal{O}(V'_1; S'; v') \times \mathcal{O}(V''_1; S''; v'')$  avec des notations convenables. Dans les deux cas, la proposition 6 prouve que la fibre est contractile. Ceci achève la démonstration du théorème 2.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] R. BAER, *Isotopie von Kurven auf orientierbaren Flächen und ihr Zusammenhang mit der topologischen Deformation der Flächen* (*J. reine angew. Math.*, vol. 159, 1928, p. 101-111).
- [2] N. BOURBAKI, *Algèbre*, chap. 1, Hermann, Paris, 1970.
- [3] J. CERF, *Topologie de certains espaces de plongements* (*Bull. Soc. math. Fr.*, t. 89, 1961, p. 227-380).
- [4] J. CERF, *Théorèmes de fibration des espaces de plongements* (*Sém. Cartan*, vol. 15, 1962-1963, exp. n° 8).
- [5] A. DOUADY, *Arrondissement des arêtes* (*Sém. Cartan*, vol. 14, 1961-1962, exp. n° 3).
- [6] C. EARLE and J. EELLS, *A fibre bundle description of Teichmüller theory* (*J. Differential Geometry*, vol. 3, 1969, p. 19-43).
- [7] D. EPSTEIN, *Curves on 2-manifolds and isotopies* (*Acta Mathematica*, vol. 115, 1966, p. 83-107).
- [8] A. GROTHENDIECK, *Techniques de construction en géométrie analytique* (*Sém. Cartan*, vol. 13, 1960-1961, exp. nos 7-8).
- [9] C. MORLET, *Le lemme de Thom et les théorèmes de plongement de Whitney* (*Sém. Cartan*, vol. 14, 1961-1962, exp. n° 6).
- [10] R. PALAIS, *Homotopy theory of infinite dimensional manifolds* (*Topology*, vol. 5, 1966, p. 1-16).
- [11] S. SMALE, *Diffeomorphisms of the 2-sphere* (*Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. 10, 1959, p. 621-626).
- [12] R. THOM, *Quelques propriétés globales des variétés différentiables* (*Comment. Math. Helv.*, vol. 28, 1954, p. 17-86).

(Manuscrit reçu le 20 juillet 1972.)

André GRAMAIN,  
 Département de Mathématiques,  
 Faculté des Sciences,  
 Parc de Grandmont,  
 37-Tours (France).

