

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

ANDRÉ CERESO

FRANÇOIS ROUVIÈRE

Sur certains opérateurs différentiels invariants du groupe hyperbolique

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4^e série, tome 5, n° 4 (1972), p. 581-597

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1972_4_5_4_581_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR CERTAINS OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS INVARIANTS DU GROUPE HYPERBOLIQUE

PAR ANDRÉ CERÉZO ET FRANÇOIS ROUVIÈRE

Si G est un groupe de Lie réel et P un opérateur différentiel linéaire invariant à gauche sur G , on sait que l'on appelle *solution élémentaire* de P toute distribution $E \in \mathcal{D}'(G)$ telle que

$$PE - \delta = 0,$$

où δ est la mesure de Dirac portée par l'élément neutre 1 de G . La convolution à droite par E fournit alors un inverse à droite de P :

$$P(u \star E) = u \star PE = u,$$

par exemple lorsque u est à support compact.

Plus généralement, on appelle *paramétrix* de P toute distribution $E \in \mathcal{D}'(G)$ telle que

$$PE - \delta \in C^\infty(G).$$

Nous étudions ici la construction d'une paramétrix (qui sera une solution élémentaire dans certains cas) sur $G = \mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$, pour P invariant à gauche par G et à droite par un sous-groupe compact maximal. Nous utilisons de manière essentielle la formule de Plancherel donnée par Harish-Chandra [4].

La construction donnée ici sur G est inspirée de celle sur \mathbf{R}^n , pour la série continue de représentations, et de celle sur \mathbf{T}^n (cf. [1]), pour la série discrète.

1. NOTATIONS. — Soit $G = \mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$ le groupe des automorphismes de \mathbf{R}^2 de déterminant 1, c'est-à-dire le groupe des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, avec $a, b, c, d \in \mathbf{R}$, $ad - bc = 1$.

Les matrices

$$k = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad a = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad u = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

forment une base de l'algèbre de Lie \mathfrak{g} de G . Soient K, A, N les sous-groupes de G engendrés par k, a, u respectivement, dont les éléments génériques s'écrivent :

$$k_\theta = \exp \theta k = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & \sin \frac{\theta}{2} \\ -\sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \quad \left(\theta \in \frac{\mathbf{R}}{4\pi\mathbf{Z}} \right),$$

$$a_t = \exp t a = \begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbf{R}),$$

$$n_s = \exp s u = \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (s \in \mathbf{R}).$$

K est un sous-groupe compact maximal de G , A est abélien, et N ici aussi. Nous utiliserons aussi la base k, a, u' , avec

$$u' = u - k = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'algèbre $D(G)$ des opérateurs différentiels linéaires invariants à gauche sur G s'identifie canoniquement à l'algèbre enveloppante de \mathfrak{g} ; un opérateur de $D(G)$ est donc un polynôme (non commutatif) de k, a, u , à coefficients complexes, dont l'écriture comme combinaison linéaire des monômes ordonnés $k^\alpha a^\beta u^\gamma$ (α, β, γ entiers) est unique.

Les opérateurs du centre $Z(G)$ de $D(G)$ sont les opérateurs invariants à gauche et à droite (bi-invariants) sur G : comme G est de rang 1, ce sont les polynômes de l'un d'entre eux, l'opérateur de Casimir C , qui s'écrit

$$(1) \quad C = -k^2 + a^2 + u'^2.$$

[L'opérateur de Casimir usuel est $(1/2)C$. Nous prenons ici cette définition pour simplifier certaines formules.]

Plus généralement, nous considérons ici l'algèbre $D_k(G)$ formée des opérateurs de $D(G)$ qui sont invariants à droite par K ; c'est le commutant de k dans $D(G)$.

LEMME 1. — $D_k(G)$ est formée des polynômes (commutatifs) à coefficients complexes en G et k .

Démonstration. — Nous utilisons certains résultats et notations de Helgason ([7], § X.2). Au moyen de la symétrisation λ , qui est un

isomorphisme de $S_0(\mathfrak{g})$ sur $D_K(G)$ (lemma 2.4), on se ramène à déterminer les éléments de $S_0(\mathfrak{g})$, c'est-à-dire les éléments P de l'algèbre symétrique $S(\mathfrak{g})$ qui sont invariants par les $\text{Ad}_G(k)$, $k \in K$. Comme K est abélien, $\text{Ad}(k)k = k$, et il suffit de trouver les polynômes $P(k, \alpha, \alpha')$ tels que, pour tout $k \in K$,

$$P(k, \text{Ad}(k)\alpha, \text{Ad}(k)\alpha') = P(k, \alpha, \alpha').$$

Développons P suivant les puissances de k :

$$P(k, \alpha, \alpha') = \sum k^\alpha P_\alpha(\alpha, \alpha').$$

Les polynômes P_α doivent être invariants par les $\text{Ad}(k)$. Comme G est de rang 1, et comme α et α' sont orthogonaux et de même norme pour la forme de Killing du groupe, on en déduit (comme dans la démonstration de la proposition 2.10 de [7]) que les P_α sont des polynômes de $\alpha^2 + \alpha'^2 = C + k^2$, d'où le lemme.

2. CONDITION NÉCESSAIRE.

PROPOSITION 2. — Soit $P = P(C, k)$ dans $D_K(G)$. Pour que P admette une paramétrix, il est nécessaire qu'il n'existe aucun p , avec $2p \in \mathbf{Z}$, tel que le polynôme $P(\cdot, ip)$ soit identiquement nul ($i^2 = -1$).

Démonstration. — Soit p tel que $2p \in \mathbf{Z}$; nous dirons qu'une fonction $f \in C^\infty(G)$ est de type p si

$$f(gk_0) = e^{ip\theta} f(g)$$

pour tous $g \in G$, $\theta \in \mathbf{R}$. Si $P \in D_K(G)$, P est invariant à droite par K , donc conserve le type p . Enfin, il est clair que les fonctions de type p sont les fonctions propres de l'opérateur k pour la valeur propre $ip : kf = ipf$.

La décomposition de la représentation régulière droite de K sur $L^2(G)$ permet de décomposer de manière unique toute fonction $f \in C_c^\infty(G)$ en somme de fonctions de type p :

$$f = \sum_{2p \in \mathbf{Z}} f_p, \quad \text{où } f_p(g) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{4\pi} e^{-ip\theta} f(gk_0) d\theta,$$

avec convergence dans $L^2(G)$. La convergence a même lieu dans $C_c^\infty(G)$, ce qui permet d'obtenir une décomposition analogue pour une distribution $T \in \mathcal{D}'(G)$:

$$T = \sum_{2p \in \mathbf{Z}} T_p,$$

avec $\langle T_p, f \rangle = \langle T, f_{-p} \rangle$; la série converge faiblement dans $\mathcal{O}'(G)$. Si T est C^∞ , les T_p le sont aussi. Si δ est la mesure de Dirac de G en 1 , on a

$$\delta_p = e^{ip_0} \delta_K,$$

où δ_K est la mesure de Haar de K de masse 1 (distribution de Dirac portée par K). On a encore $k T_p = ip T_p$, d'où

$$P(C, k) T_p = P(C, ip) T_p.$$

Supposons que P admette une paramétrix $E \in \mathcal{O}'(G)$ et que $P(\cdot, ip_0)$ soit identiquement nul pour un certain p_0 . Alors

$$P(C, k) E - \delta \in C^\infty(G),$$

d'où en prenant les composantes de type p_0 :

$$P(C, ip_0) E_{p_0} - \delta_{p_0} \in C^\infty(G),$$

soit $-\delta_{p_0} \in C^\infty(G)$, ce qui est impossible d'après l'expression de δ_{p_0} . La proposition en résulte.

Pour continuer, nous avons besoin de calculer explicitement les « coefficients de Fourier » des opérateurs de $D_K(G)$, dans la transformation de Fourier telle qu'elle a été étudiée par Harish-Chandra [4]. Nous commençons par en rappeler les résultats.

3. LA TRANSFORMATION DE FOURIER. — Rappelons le théorème d'Iwasawa : l'application $(k, a, n) \mapsto kan$ est un difféomorphisme de $K \times A \times N$ sur G . Le groupe adjoint G^* de G est isomorphe au quotient de G par son centre

$$\left\{ k_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, k_{2\pi} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\} \quad (\text{cf. Helgason, [7], II.5.2}).$$

Nous identifions G^* au groupe des matrices de G « au signe près », de même K^* , groupe adjoint de K , s'identifie au groupe des matrices k_0 « au signe près »; K^* est paramétré par θ variant de 0 à 2π . G^* est encore difféomorphe à $K^* \times A \times N$ par l'application

$$(k^* = \pm k, a, n) \mapsto g^* = \pm g = \pm kan.$$

Soit η_j , pour $j = 0$ ou $j = 1/2$ le caractère de K défini par

$$\eta_j(k_0) = e^{ij\theta} \quad (i^2 = -1).$$

Posons $\mathbf{H} = L^2(K^*)$.

Pour tout nombre complexe ν , on définit deux représentations $\pi_{\nu, j}$ ($j = 0, 1/2$) de G sur l'espace hilbertien \mathbf{H} comme suit :

— pour $g \in G, k \in K$, on pose

$$(2) \quad gk = k_g \exp t(g, k) \alpha \exp s(g, k) \alpha,$$

avec $k_g \in K, t(g, k) \in \mathbf{R}, s(g, k) \in \mathbf{R}$. Si on change k en $-k$, seul le signe de k_g est changé dans (2); on aura donc dans G^* :

$$(2') \quad gk^* = k_g^* \exp t(g, k^*) \alpha \exp s(g, k^*) \alpha$$

en notant $k_g^* = (k_g)^*$. On pose encore $h(g, k^*) = k^{-1} k_g$ (qui ne dépend pas du signe de k).

Finalement, si $\varphi \in \mathbf{H}$ et $g \in G$, on définit $\pi_{\nu, j}(g) \varphi$ par

$$(3) \quad (\pi_{\nu, j}(g) \varphi)(k^*) = \eta_j(h(g^{-1}, k^*)) e^{-\nu t(g^{-1}, k^*)} \varphi(k_{g^{-1}}^*).$$

Posons, pour $\lambda \in \mathbf{C}$, $\pi_{\lambda}^+ = \pi_{i\lambda+(1/2), 0}$ et $\pi_{\lambda}^- = \pi_{i\lambda+(1/2), (1/2)}$.

Si $\lambda \in \mathbf{R}$, ce sont des représentations unitaires de \mathbf{H} , irréductibles pour presque tout λ .

Les représentations $\pi_{n+j, j}$, pour $n \in \mathbf{N}$, ne sont pas irréductibles. Cependant, si l'on note (e_m) , $m \in \mathbf{Z}$, la base orthonormale de \mathbf{H}

$$e_m(k_{\theta}^*) = e^{im\theta},$$

le sous-espace $V_{n, j}$ de \mathbf{H} engendré par les e_m , pour $|m + j| \leq n + k$, et son orthogonal $W_{n, j}$ dans \mathbf{H} sont stables par $\pi_{n+j, j}$. Soient $\rho_{n, j}$ et $\sigma'_{n, j}$ les restrictions de $\pi_{n+j, j}$ à $V_{n, j}$ et $W_{n, j}$ respectivement. Il existe une représentation unitaire $\sigma_{n, j}$ infinitésimalement équivalente à $\sigma'_{n, j}$ (cf. Harish-Chandra [3]). Nous posons, pour $k \in \mathbf{N}$,

$$\sigma_k^+ = \sigma_{k, 0} \quad \text{et} \quad \sigma_k^- = \sigma_{k, 1/2}.$$

Si π désigne l'une des représentations $\pi_{\nu, j}$ ($\nu \in \mathbf{C}, j = 0, 1/2$) ou l'une des σ_k^{\pm} ($k \in \mathbf{N}$), et π^* l'adjointe de π , alors pour $f \in C_c^{\infty}(G)$ (indéfiniment différentiable à support compact dans G), les opérateurs

$$\hat{f}(\pi) = \int_G f(g) \pi^*(g) dg,$$

où dg est la mesure de Haar de G , sont des opérateurs à trace. De plus, l'application $f \mapsto \text{tr} \hat{f}(\pi)$ est une distribution sur G ; plus précisément, Harish-Chandra a démontré la majoration suivante ([5], III, 3.4.5) :

$$(4) \quad \left| \text{tr} \hat{f}(\pi) \right| \leq C, N \left\| \int_G (Df)(g) \pi^*(g) dg \right\|.$$

Dans (4), C_1 est une constante positive et D un opérateur de $D_K(G)$, dont on trouvera l'expression précise dans [5], II et III; C_1 et D sont indépendants de π et de f ; enfin si M est une classe d'équivalence de représentations irréductibles de K et \mathbf{H}_M le sous-espace de \mathbf{H} qui se transforme par $\pi(K)$ suivant M , N est un entier tel que $\dim \mathbf{H}_M \leq N (\dim M)^2$, dont l'existence résulte du théorème 3 de [3]. Dans notre cas, la restriction $\pi(K)$ de π à K est toujours la représentation régulière gauche de K , on peut donc choisir $N = 1$. On déduit alors de (4) :

$$(4) \quad |\operatorname{tr} \hat{f}(\pi)| \leq C_1 \int_G |Df(g)| \cdot \|\pi^*(g)\| dg$$

(avec la norme usuelle d'opérateur), ce qui se réduit à

$$(4'') \quad |\operatorname{tr} \hat{f}(\pi)| \leq C_1 \|Df\|_{L^1(G)}$$

lorsque la représentation π considérée est unitaire.

On a alors la *décomposition de la mesure de Dirac* :

$$(5) \quad 8\pi f(1) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{tr} \hat{f}(\pi_{\lambda}^+) \cdot \lambda \operatorname{th} \pi \lambda d\lambda + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{tr} \hat{f}(\pi_{\lambda}^-) \cdot \lambda \operatorname{coth} \pi \lambda d\lambda \\ + \sum_{k \in \mathbf{N}} \left(k + \frac{1}{2}\right) \operatorname{tr} \hat{f}(\sigma_k^+) + \sum_{k \in \mathbf{N}} (k+1) \operatorname{tr} \hat{f}(\sigma_k^-),$$

pour $f \in C_c^\infty(G)$; on en déduit aussitôt la *formule d'inversion de Fourier*

$$(5') \quad 8\pi f(g) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{tr} [\hat{f}(\pi_{\lambda}^+) \pi_{\lambda}^+(g)] \cdot \lambda \operatorname{th} \pi \lambda d\lambda + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{tr} [\hat{f}(\pi_{\lambda}^-) \pi_{\lambda}^-(g)] \cdot \lambda \operatorname{coth} \pi \lambda d\lambda \\ + \sum_{k \in \mathbf{N}} \left(k + \frac{1}{2}\right) \operatorname{tr} [\hat{f}(\sigma_k^+) \sigma_k^+(g)] + \sum_{k \in \mathbf{N}} (k+1) \operatorname{tr} [\hat{f}(\sigma_k^-) \sigma_k^-(g)],$$

pour $f \in C_c^\infty(G)$ et $g \in G$. Enfin de l'application de (5) à la fonction

$$F(g) = \int_G \overline{f(g')} f(gg') dg',$$

qui vérifie $F \in C_c^\infty(G)$ et $\hat{F}(\pi) = \hat{f}(\pi)^* f(\pi)$, on déduit la *formule de Plancherel*

$$(5'') \quad 8\pi \int_G |f(g)|^2 dg = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \|\hat{f}(\pi_{\lambda}^+)\|^2 \lambda \operatorname{th} \pi \lambda d\lambda + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \|\hat{f}(\pi_{\lambda}^-)\|^2 \lambda \operatorname{coth} \pi \lambda d\lambda \\ + \sum_{k \in \mathbf{N}} \left(k + \frac{1}{2}\right) \|\hat{f}(\sigma_k^+)\|^2 + \sum_{k \in \mathbf{N}} (k+1) \|\hat{f}(\sigma_k^-)\|^2$$

pour $f \in L^2(G)$, en notant $\|\hat{f}(\pi)\|^2 = \operatorname{tr} \hat{f}(\pi)^* f(\pi)$.

4. CALCUL DES COEFFICIENTS DE FOURIER. — Soient $f \in C_c^\infty(G)$ et $X \in \mathfrak{g}$, considéré comme opérateur différentiel. On a :

$$\int_G X f(g) dg = \int_G \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f(g \exp t X) dg = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \int_G f(g) dg = 0.$$

Cela permet « d'intégrer par parties » sur G . Si π est une représentation de G dans un espace hilbertien, on a

$$\begin{aligned} \widehat{X} f(\pi) &= \int_G X f(g) \pi^*(g) dg = - \int_G f(g) X \pi^*(g) dg \\ &= - X \pi^*(1) \int_G f(g) \pi^*(g) dg = - X \pi^*(1) \hat{f}(\pi), \end{aligned}$$

car $(X \pi)(g_0 g) = X_g(\pi(g_0 g)) = \pi(g_0)(X \pi)(g)$, et donc

$$X \pi^*(g_0) = X \pi^*(1) \pi^*(g_0).$$

Si, de plus, π est unitaire, $-X \pi^*(1) = X \pi(1)$. Nous noterons dorénavant $\pi(X)$ cet opérateur (représentation de l'algèbre \mathfrak{g} associée à π). Si $P \in D(G)$, posons de même $\pi(P) = P \pi(1)$. $\pi(P)$ est un opérateur non borné de \mathfrak{H} , dont le domaine contient $C^\infty(K^*)$. Si π est unitaire, on a donc pour $f \in C_c^\infty(G)$

$$(6) \quad \widehat{P} f(\pi) = \pi(P) \hat{f}(\pi).$$

Nous calculons maintenant explicitement les coefficients de Fourier $\pi(P)$ des opérateurs de $D_K(G)$ pour les représentations $\pi_{\nu,j}$ et σ_k^\pm .

Posant $gk_0 = k_\psi a_t n_s$, $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, avec $ad - bc = 1$, il vient :

$$(7) \quad \begin{cases} \cos \frac{\psi}{2} = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \left(a \cos \frac{\theta}{2} - b \sin \frac{\theta}{2} \right), \\ \sin \frac{\psi}{2} = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \left(-c \cos \frac{\theta}{2} + d \sin \frac{\theta}{2} \right), \\ e^t = \Delta = \left(a \cos \frac{\theta}{2} - b \sin \frac{\theta}{2} \right)^2 + \left(c \cos \frac{\theta}{2} - d \sin \frac{\theta}{2} \right)^2 > 0. \end{cases}$$

Ensuite, d'après (3),

$$\begin{aligned} \pi_{\nu,j}(\exp u k) \varphi(k_0^*) &= e^{-ij u} \varphi(k_{0-u}^*), \\ \pi_{\nu,j}(\exp u a) \varphi(k_0^*) &= e^{-ij(\psi-\theta)} \left(e^{-u} \cos^2 \frac{\theta}{2} + e^u \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)^{-\nu} \varphi(k_\psi^*); \end{aligned}$$

dans cette dernière formule, ψ est donné par (7) pour $a = e^{-u/2}$, $d = e^{u/2}$, $b = c = 0$. On en déduit

$$\frac{\partial \psi}{\partial u} \Big|_{u=0} = \sin \theta.$$

En prenant les dérivées pour $u = 0$, on trouve

$$\begin{aligned}\pi_{\nu, j}(\mathbf{k}) &= -\left(ij + \frac{d}{d\theta}\right), \\ \pi_{\nu, j}(\mathbf{a}) &= \sin \theta \left(ij + \frac{d}{d\theta}\right) + \nu \cos \theta.\end{aligned}$$

Comme $[\mathbf{a}, \mathbf{k}] = \mathbf{n}'$, on a $\pi(\mathbf{n}') = [\pi(\mathbf{a}), \pi(\mathbf{k})]$, d'où

$$\pi_{\nu, j}(\mathbf{n}') = \cos \theta \left(ij + \frac{d}{d\theta}\right) - \nu \sin \theta, \quad \text{et donc } \pi_{\nu, j}(\mathbf{C}) = \nu(\nu - 1).$$

Ces calculs sont valables pour ν complexe, $j = 0$ ou $1/2$. Comme les représentations σ_k^\pm considérées sont infinitésimalement équivalentes à des restrictions de $\pi_{k+j, j}$, on a finalement, pour $\lambda \in \mathbf{C}$, $k \in \mathbf{N}$:

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} \pi_k^+(\mathbf{C}) &= \pi_k^-(\mathbf{C}) = -\left(\lambda^2 + \frac{1}{4}\right), \\ \pi_+(\mathbf{k}) &= \pi_k^-(\mathbf{k}) + \frac{i}{2} = -\frac{d}{d\theta}, \\ \sigma_k^+(\mathbf{C}) &= k(k-1), \quad \sigma_k^-(\mathbf{C}) = \left(k + \frac{1}{2}\right)\left(k - \frac{1}{2}\right), \\ \sigma_k^+(\mathbf{k}) &= \sigma_k^-(\mathbf{k}) + \frac{i}{2} = -\frac{d}{d\theta}. \end{aligned} \right.$$

Les coefficients de Fourier d'un opérateur $P(\mathbf{C}, \mathbf{k})$ de $D_{\mathbf{K}}(\mathbf{G})$ sont les opérateurs (en général non bornés) $\pi(P) = P(\pi(\mathbf{C}), \pi(\mathbf{k}))$, où $\pi(\mathbf{C})$ et $\pi(\mathbf{k})$ sont les opérateurs (non tous bornés) de \mathbf{H} donnés par (8).

Dans la base (e_m) ($m \in \mathbf{Z}$) de \mathbf{H} , les $\pi(\mathbf{C})$ sont des matrices scalaires; les $\pi(\mathbf{k})$ sont des matrices diagonales dont les éléments sont de la forme ip , avec $2p \in \mathbf{Z}$.

5. INVERSION DE LA SÉRIE CONTINUE. — Pour construire une paramétrix de l'opérateur P , le problème principal est d'inverser tous les opérateurs $\pi(P)$. Pour ceux de la série continue de représentations, $\pi_k^\pm(P)$, le résultat est fondé sur le lemme suivant :

LEMME 3. — Soit $Q(\zeta, \gamma)$ un polynôme de deux indéterminées à coefficients complexes tel que $Q(\cdot, p)$ ne soit identiquement nul pour aucun $p \in \mathbf{Z}$. Alors pour chaque intervalle non vide I de \mathbf{R} , il existe $t_0 \in I$ et $\varepsilon > 0$ tels que

$$|Q(s + it_0, p)| \geq \varepsilon$$

pour tous $s \in \mathbf{R}$ et $p \in \mathbf{Z}$,

Démonstration. — On ordonne Q suivant les puissances décroissantes de ξ :

$$Q(\xi, p) = a_0(p)\xi^m + a_1(p)\xi^{m-1} + \dots + a_m(p),$$

où a_0, a_1, \dots, a_m sont des polynômes. On peut oublier sans inconvénient les valeurs de p , en nombre fini, pour lesquelles $a_0(p)$ s'annule; Q se factorise alors suivant

$$Q(\xi, p) = a_0(p) \prod_{j=1}^m (\xi - \alpha_j(p)),$$

d'où, pour s et t_0 réels,

$$|Q(s + it_0, p)| = |a_0(p)| \prod_{j=1}^m |s + it_0 - \alpha_j(p)| \geq |a_0(p)| \prod_{j=1}^m |t_0 - \operatorname{Im} \alpha_j(p)|.$$

Pour les valeurs de p considérées ici, $|a_0(p)|$ est minoré par un nombre > 0 . Finalement, il suffit pour montrer le lemme de montrer l'existence d'un nombre $t_0 \in \mathbf{I}$ tel que la distance de t_0 aux parties imaginaires des racines de $Q(\cdot, p)$ soit minorée par un nombre > 0 indépendant de $p \in \mathbf{Z}$ (et de j). Nous démontrons pour cela que les $\operatorname{Im} \alpha_j(p)$ n'ont qu'un nombre fini de points d'accumulation.

Soit t un point d'accumulation des $\operatorname{Im} \alpha_j(p)$. Il existe une suite infinie (t_n) et une suite (s_n) dans \mathbf{R} , une suite (p_n) dans \mathbf{Z} telles que, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$Q(s_n + it_n, p_n) = 0 \quad \text{et} \quad t_n \rightarrow t \quad \text{quand} \quad n \rightarrow +\infty.$$

La suite (p_n) n'est pas bornée, sinon l'un des $Q(\cdot, p)$ aurait une infinité de racines distinctes et serait identiquement nul contrairement à l'hypothèse. On peut supposer que $p_n \rightarrow +\infty$ quand $n \rightarrow +\infty$. s_n est une racine réelle commune aux deux polynômes

$$A(s) = Q(s + it_n, p_n) \quad \text{et} \quad B(s) = \overline{Q}(s - it_n, p_n).$$

Donc le résultant R de A et B est nul. R est un polynôme par rapport aux coefficients de A et de B . En particulier, R est un polynôme en t_n et p_n ; pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a

$$R(t_n, p_n) = 0.$$

Les termes de plus haut degré en t_n dans $R(t_n, p_n)$ s'obtiennent en considérant seulement les termes de plus haut degré en t_n dans l'écriture de $A(s)$ et $B(s)$; cela revient à remplacer $A(s)$ et $B(s)$ par les polynômes $a_0(p_n)(s + it_n)^m$ et $\bar{a}_0(p_n)(s - it_n)^m$ respectivement, dont le résultant est

$$|a_0(p_n)|^{2m} (2it_n)^m.$$

C'est le terme de plus haut degré en t_n dans $R(t_n, p_n)$, qui n'est donc pas identiquement nul. Si on l'ordonne en p_n :

$$0 = R(t_n, p_n) = R_0(t_n) p_n^r + \dots + R_r(t_n),$$

avec $R_0 \not\equiv 0$. Lorsque $n \rightarrow +\infty$, $p_n \rightarrow +\infty$, $t_n \rightarrow t$, d'où la condition

$$R_0(t) = 0.$$

Puisque t est racine d'une équation algébrique, il ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs.

C. Q. F. D.

Soit $D'_k(G)$ l'ensemble des opérateurs $P \in D_k(G)$ qui satisfont à la condition nécessaire de la proposition 2 : $P(\cdot, ip)$ n'est identiquement nul pour aucun p tel que $2p \in \mathbf{Z}$. Les coefficients de P pour la série continue sont

$$\pi_\lambda^+(P) = P\left(-\lambda^2 - \frac{1}{4}, -\frac{d}{d\theta}\right), \quad \text{resp. } \pi_\lambda^-(P) = P\left(-\lambda^2 - \frac{1}{4}, -\frac{d}{d\theta} - \frac{i}{2}\right).$$

Dans la base (e_m) ($m \in \mathbf{Z}$) de \mathbf{H} , ce sont les matrices diagonales de coefficients

$$P\left(-\lambda^2 - \frac{1}{4}, -im\right), \quad \text{resp. } P\left(-\lambda^2 - \frac{1}{4}, -i\left(m + \frac{1}{2}\right)\right).$$

Si $P \in D'_k(G)$, le lemme 3 s'applique au polynôme

$$Q(\xi, \eta) = P\left(-\xi^2 - \frac{1}{4}, \frac{i}{2}\eta\right).$$

On en déduit qu'il existe $\varepsilon > 0$ et $t_0 \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[$ tel que $\pi_{\lambda+it_0}^\pm(P)$ soit inversible, pour tout λ réel, en une matrice diagonale dont tous les éléments diagonaux sont de module $\frac{1}{\varepsilon}$ au plus.

Enfin, nous aurons besoin de la remarque suivante : soit $f \in C_c^\infty(G)$, de type p ($2p \in \mathbf{Z}$) : $f(gk_0) = e^{ip\theta}(g)$ pour $g \in G$, $\theta \in \mathbf{R}$; alors la matrice $\hat{f}(\pi_{\nu,j})$, dans la base (e_m) , n'a qu'une ligne non nulle, pour chaque $\nu \in \mathbf{C}$, $j = 0$ ou $1/2$. En effet, on a $\mathbf{k}f = ipf$, d'où $\pi_{\nu,j}(\mathbf{k})\hat{f}(\pi_{\nu,j}) = ip\hat{f}(\pi_{\nu,j})$, soit en utilisant l'expression de $\pi_{\nu,j}(\mathbf{k})$:

$$\left(\frac{d}{d\theta} + i(j+p)\right)\hat{f}(\pi_{\nu,j}) = 0.$$

Passons aux adjoints; comme $\left(\frac{d}{d\theta} + i(j+p)\right)^* e_m = -i(m+j+p)e_m$,

on a

$$(m + j + p) \hat{f}(\pi_{\nu, j})^* e_m = 0,$$

donc les colonnes de $\hat{f}(\pi_{\nu, j})^*$ sont nulles, sauf peut-être celle pour laquelle $m + j + p = 0$, d'où le résultat en revenant à $\hat{f}(\pi_{\nu, j})$.

On déduit de là que, si f est de type p , la trace du produit de $\hat{f}(\pi_{\nu, j})$ par une matrice diagonale ne fait intervenir qu'un seul des coefficients de chaque matrice.

PROPOSITION 4. — Si $P \in D'_k(G)$, il existe $t_0 \in \mathbf{R}$ tel que l'application $T : C_c^\infty(G) \ni f \mapsto T(f) \in \mathbf{C}$ définie par

$$(9) \quad 16 \pi T(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{tr} [\pi_{\lambda+i_0}^+ (P)^{-1} \hat{f}(\pi_{\lambda+i_0}^+)] (\lambda + it_0) \text{th } \pi (\lambda + it_0) d\lambda \\ + \int_{-\infty}^{+\infty} \text{tr} [\pi_{\lambda+i_0}^- (P)^{-1} \hat{f}(\pi_{\lambda+i_0}^-)] (\lambda + it_0) \text{coth } \pi (\lambda + it_0) d\lambda$$

soit une distribution sur G , d'ordre fini et indépendant de P .

Démonstration. — Prenons t_0 donné par le lemme 2, $|t_0| < \frac{1}{4}$. Au second membre de (9), le premier terme peut s'écrire, en utilisant les coefficients de Fourier (8) de C :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \text{tr} [\pi_{\lambda+i_0}^+ (P)^{-1} \widehat{C^2 f}(\pi_{\lambda+i_0}^+)] \frac{(\lambda + it_0) \text{th } \pi (\lambda + it_0)}{(\lambda + it_0)^2 + \frac{1}{4}} d\lambda.$$

Décomposons f en fonctions de type p :

$$f = \sum_{2p \in \mathbf{Z}} f_p.$$

Comme $C^2 f_p$ est de type p , il vient, en se servant de la remarque ci-dessus :

$$\begin{aligned} & \left| \text{tr} \pi_{\lambda+i_0}^+ (P)^{-1} \widehat{C^2 f}(\pi_{\lambda+i_0}^+) \right| \\ & \leq \sum_{2p \in \mathbf{Z}} \left| \text{tr} \pi_{\lambda+i_0}^+ (P)^{-1} \widehat{C^2 f_p}(\pi_{\lambda+i_0}^+) \right| \\ & \leq \frac{1}{\varepsilon} \sum_{2p \in \mathbf{Z}} \left| \text{tr} \widehat{C^2 f_p}(\pi_{\lambda+i_0}^+) \right| \quad \text{d'après le lemme 3} \\ & \leq \frac{C_1}{\varepsilon} \sum_{2p \in \mathbf{Z}} \int_G |DC^2 f_p(g)| \cdot \|\pi_{\lambda+i_0}^+(g)^*\| dg \quad \text{d'après (4').} \end{aligned}$$

Soit $\mathbf{H} = L^2(K^*)$, on a

$$(\pi_{\lambda+it_0}^{\pm}(g)\varphi)(k^*) = e^{t_0 t(g^{-1}, k^*)} (\pi_{\lambda}^{\pm}(g)\varphi)(k^*).$$

Soit L un compact contenant le support de tous les f_p , et

$$C_2 = \sup_{g \in L, k^* \in K^*} |e^{t_0 t(g^{-1}, k^*)}|;$$

de

$$|(\pi_{\lambda+it_0}^{\pm}(g)\varphi)(k^*)| \leq C_2 |(\pi_{\lambda}^{\pm}(g)\varphi)(k^*)|$$

on déduit

$$(10) \quad \|\pi_{\lambda+it_0}^{\pm}(g)^*\| \leq C_2 \|\pi_{\lambda}^{\pm}(g)^*\| = C_2 \quad \text{pour } g \in L, \lambda \in \mathbf{R}.$$

Finalement,

$$\left| \text{tr } \pi_{\lambda+it_0}^{\pm}(\mathbf{P})^{-1} \widehat{C^2 f}(\pi_{\lambda+it_0}^{\pm}) \right| \leq \frac{C_1 C_2}{\varepsilon} \sum_{2p \in \mathbf{Z}} \|\text{DC}^2 f_p\|_{L^1(G)},$$

et la première intégrale au second membre de (9) peut être majorée par

$$\frac{C_1 C_2}{\varepsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\lambda + it_0| \text{th } \pi(\lambda + it_0)}{\left(\lambda^2 - t_0^2 + \frac{1}{4}\right)^2} d\lambda \sum_{2p \in \mathbf{Z}} \|\text{DC}^2 f_p\|_{L^1(G)},$$

où l'intégrale converge, puisque $|t_0| < \frac{1}{4}$.

Le deuxième terme de (9) se traite de manière analogue; il reste à majorer la série. Comme DC^2 est invariant à droite par K , il conserve le type p , d'où

$$\text{DC}^2 f_p = \frac{1}{(1+ip)^2} ((1+k)^2 \text{DC}^2 f)_p,$$

et

$$\sum_{2p \in \mathbf{Z}} \|\text{DC}^2 f_p\|_{L^1(G)} \leq \|(1+k)^2 \text{DC}^2 f\|_{L^1(G)} \sum_{2p \in \mathbf{Z}} \frac{1}{|1+ip|^2}.$$

Donc $|T(f)| \leq C_3 \|(1+k)^2 \text{DC}^2 f\|_{L^1(G)}$ (où C_3 dépend du support de f) et T est une distribution dont l'ordre est celui de l'opérateur $(1+k)^2 \text{DC}^2$.

6. INVERSION DE LA SÉRIE DISCRÈTE POUR CERTAINS OPÉRATEURS. — Reprenons maintenant les opérateurs $\sigma_k^{\pm}(\mathbf{P})$, $k \in \mathbf{N}$. Dans la base des (e_m) , ce sont des matrices diagonales, dont les éléments diagonaux sont

$$\begin{aligned} (\sigma_k^+(\mathbf{P}))_{mm} &= P(k(k-1), -im), \\ (\sigma_k^-(\mathbf{P}))_{mm} &= P\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)\left(k-\frac{1}{2}\right), -i\left(m+\frac{1}{2}\right)\right), \end{aligned}$$

où $k \in \mathbf{N}$ et où m prend seulement les valeurs $\pm(k+1), \pm(k+2), \dots$. Chacune de ces matrices a , au plus, un nombre fini d'éléments diagonaux nuls. Introduisons la condition :

$$(11) \left\{ \begin{array}{l} \text{Il existe } A > 0 \text{ et } \alpha, \beta \in \mathbf{N} \text{ tels que, pour tout } k \text{ sauf un nombre} \\ \text{fini, et pour tout } m = \pm(k+1), \pm(k+2), \dots, \text{ on ait} \\ \\ |P(k(k-1), -im)| \geq \frac{A}{(1+k)^\alpha (1+|m|)^\beta} \\ \\ \text{et} \\ \\ |P\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)\left(k-\frac{1}{2}\right), -i\left(m+\frac{1}{2}\right)\right)| \geq \frac{A}{(1+k)^\alpha (1+|m|)^\beta}. \end{array} \right.$$

Soit $D''_k(G)$ l'ensemble des opérateurs $P \in D'_k(G)$ qui vérifient la condition (11). Cette condition va nous permettre d'inverser la série discrète pour P . Si $P \in D''_k(G)$, notons E l'ensemble exceptionnel de valeurs de k , pour lesquelles il existe m tel que $(\sigma_k^+(P))_{mm} = 0$ ou $(\sigma_k^-(P))_{mm} = 0$; si $k \notin E$, $\sigma_k^+(P)$ et $\sigma_k^-(P)$ sont inversibles, et on peut supposer que E est l'ensemble en dehors duquel on a les inégalités (11).

PROPOSITION 5. — Si $P \in D''_k(G)$, l'application $S : C_c^\infty(G) \ni f \mapsto S(f) \in \mathbf{C}$ définie par

$$(12) \quad \begin{aligned} 8\pi S(f) = & \sum_{k \in \mathbf{N}-E} \left(k + \frac{1}{2}\right) \text{tr} [\sigma_k^+(P)^{-1} \hat{f}(\sigma_k^+)] \\ & + \sum_{k \in \mathbf{N}-E} (k+1) \text{tr} [\sigma_k^-(P)^{-1} \hat{f}(\sigma_k^-)] \end{aligned}$$

est une distribution d'ordre fini sur G .

Démonstration. — Comme pour la proposition précédente, nous décomposons f en fonctions de type p , $2p \in \mathbf{Z}$. D'après la remarque précédant la proposition 4, $\hat{f}_p(\sigma_k^+)$ et $\hat{f}_p(\sigma_k^-)$ sont des matrices lignes; de plus, $\hat{f}_p(\sigma_k^+) = 0$ sauf si $p = -m$ avec $m \in \mathbf{Z}$ et $|m| > k$, et $\hat{f}_p(\sigma_k^-) = 0$ sauf si $p = -(m+1/2)$ avec $m \in \mathbf{Z}$ et $|m| > k$. Soit λ un nombre tel que les $\sigma_k^\pm(C - \lambda)$ soient inversibles, c'est-à-dire tel que les $k(k-1) - \lambda$ et $(k+1/2)(k-1/2) - \lambda$ soient tous différents de 0. On peut écrire, pour $k \notin E$,

$$\begin{aligned} \text{tr} [\sigma_k^+(P)^{-1} \hat{f}_p(\sigma_k^+)] &= \frac{1}{P(k(k-1), ip)} \text{tr} \hat{f}_p(\sigma_k^+) \\ &= \frac{1}{P(k(k-1), ip)} \frac{1}{(k(k-1) - \lambda)^r (1+ip)^s} \text{tr} ((C - \lambda)^r (1+k)^s f)_p(\sigma_k^+), \end{aligned}$$

où r et s sont deux entiers naturels. Si on choisit $2r \geq \alpha + 3$ et $s \geq \beta + 2$, on a aussitôt la majoration de la première somme de (12) par

$$\sum_{k \in \mathbf{N} - E} \sum_{2p \in \mathbf{Z}} \frac{\binom{k + \frac{1}{2}}{p} (1 + k)^\alpha (1 + |p|)^\beta}{A |k(k-1) - \lambda|^r |1 + ip|^s} |\text{tr}((G - \lambda)^r (1 + k)^s f)_\rho(\sigma_k^-)|,$$

où les traces se majorent par $C_1 \|D(C - \lambda)^r (1 + k)^s f\|_{L^1(G)}$, d'après (4''). On traite de même la deuxième somme de (12).

Pour inverser les termes qui manquent dans (12), en nombre fini, nous nous servirons du lemme suivant :

LEMME 6. — Soient $P \in D'_k(G)$ et $k \in \mathbf{N}$. Il existe $r > 0$ tel que l'application

$$f \mapsto \frac{1}{2i\pi} \int_{|z|=r} \text{tr}[\pi_{k+j+z, j}(P)^{-1} \hat{f}(\pi_{k+j+z, j})] dz$$

soit une distribution d'ordre fini sur G .

Démonstration. — Rappelons que, dans la base des (e_m) , les $\pi_{\nu, j}(P)$ sont diagonales, d'éléments diagonaux $P(\nu(\nu - 1), -i(j + m))$. Pour $\nu \in \mathbf{C}$, $m \in \mathbf{Z}$, ce polynôme n'a qu'une infinité dénombrable de zéros, donc il existe un cercle du plan complexe de centre $k + j$ et de rayon $r > 0$ sur lequel tous ces éléments sont supérieurs à $\varepsilon > 0$. Alors, pour une fonction de type p , on a

$$|\text{tr} \pi_{k+j+z, j}(P)^{-1} \hat{f}_\rho(\pi_{k+j+z, j})| \leq \frac{1}{\varepsilon} |\text{tr} \hat{f}_\rho(\pi_{k+j+z, j})|$$

et on termine comme pour la proposition 4, en utilisant (4') et (10).

A l'opérateur $P \in D''_k(G)$, nous associerons la distribution

$$R(f) = \sum_{k \in E} \binom{k + \frac{1}{2}}{2} \frac{1}{2i\pi} \int_{|z|=r} \text{tr}[\pi_{k+z, 0}(P)^{-1} \hat{f}(\pi_{k+z, 0})] dz + \sum_{k \in F} (k + 1) \frac{1}{2i\pi} \int_{|z|=r} \text{tr}[\pi_{k+1/2+z, 1/2}(P)^{-1} \hat{f}(\pi_{k+1/2+z, 1/2})] dz.$$

7. LA PARAMÉTRIX. — Soit $P = P(C, k) \in D_k(G)$, et ${}^tP = P(C, -k)$ son transposé pour la dualité $\langle \mathcal{O}'(G), C_c^\infty(G) \rangle$. P et tP sont simultanément dans $D'_k(G)$ et $D''_k(G)$.

PROPOSITION 7. — Soit $P \in D''_k(G)$. Si T, S, R sont les distributions associées à tP par les propositions 4, 5 et le lemme 6 respectivement, alors la distribution $T + S + R$ est une paramétrix de P .

Démonstration. — Soit $f \in C_c^\infty(\mathbb{G})$. On a

$$\begin{aligned} \langle \text{PT}, f \rangle &= \langle \text{T}, \text{P}f \rangle \\ &= \frac{1}{16\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{tr} \hat{f}(\pi_{\lambda+it_0}^+) (\lambda + it_0) \text{th} \pi (\lambda + it_0) d\lambda \\ &\quad + \frac{1}{16\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{tr} \hat{f}(\pi_{\lambda+it_0}^-) (\lambda + it_0) \text{coth} \pi (\lambda + it_0) d\lambda. \end{aligned}$$

Donc

$$(13) \quad \begin{aligned} \langle \text{PT}, f \rangle &= \frac{1}{16\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{tr} \hat{f}(\pi_{\lambda}^+) \lambda \text{th} \pi \lambda d\lambda \\ &\quad + \frac{1}{16\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{tr} \hat{f}(\pi_{\lambda}^-) \lambda \text{coth} \pi \lambda d\lambda; \end{aligned}$$

en effet, la fonction $\text{tr} \hat{f}(\pi_{\mu}^+) \mu \text{th} \pi \mu + \text{tr} \hat{f}(\pi_{\mu}^-) \mu \text{coth} \pi \mu$ est analytique dans la bande $|\text{Im} \mu| < 2t_0$ (voir [2], I, II) et majorée en module dans la bande $|\text{Im} \mu| \leq t_0$ par un multiple de

$$\frac{|\mu| (|\text{th} \pi \mu| + |\text{coth} \pi \mu|)}{\left((\text{Re} \mu)^2 - t_0^2 + \frac{1}{4} \right)^2} \| (1+k)^2 \text{DC}^2 f \|_{L^1(\mathbb{G})}$$

(cf. démonstration de la proposition 4). De même :

$$(14) \quad \begin{aligned} \langle \text{PS}, f \rangle &= \langle \text{S}, \text{P}f \rangle = \frac{1}{8\pi} \sum_{k \in \mathbf{N-E}} \left(k + \frac{1}{2} \right) \text{tr} \hat{f}(\sigma_k^+) \\ &\quad + \frac{1}{8\pi} \sum_{k \in \mathbf{N-E}} (k+1) \text{tr} \hat{f}(\sigma_k^-). \end{aligned}$$

Enfin, on a sans difficulté :

$$(15) \quad \langle \text{PR}, f \rangle = \sum_{k \in \mathbf{E}} \left(k + \frac{1}{2} \right) \text{tr} \hat{f}(\pi_{k,0}) + \sum_{k \in \mathbf{E}} (k+1) \text{tr} \hat{f}(\pi_{k+1/2,1/2}).$$

Or les $\pi_{k+j,j}$ sont liées aux σ_k^\pm par

$$\pi_{k+j,j} = \rho_{k,j} \oplus \sigma'_{k,j} \quad (j = 0, 1/2),$$

avec $\rho_{k,j}$ de dimension finie et $\sigma'_{k,j}$ infinitésimalement équivalente à $\sigma_{k,j}$ (donc de même caractère, d'après [5]); d'où

$$(16) \quad \text{tr} \hat{f}(\pi_{k+j,j}) = \text{tr} \hat{f}(\rho_{k,j}) + \text{tr} \hat{f}(\sigma_{k,j}).$$

En rapprochant les relations (13) à (16) de la formule de Fourier (5), on obtient

$$\begin{aligned} \langle P(T + S + R), f \rangle &= \langle \delta, f \rangle + \sum_{k \in E} \left(k + \frac{1}{2} \right) \operatorname{tr} \hat{f}(\rho_{k,0}) \\ &\quad + \sum_{k \in E} (k + 1) \operatorname{tr} \hat{f}(\rho_{k,1/2}). \end{aligned}$$

Comme E est un ensemble fini, et comme les $\rho_{k,j}$ sont de dimension finie, cela montre que la distribution $P(T + S + R) - \delta$ est une fonction C^∞ .

C. Q. F. D.

Notons que, si $E = \emptyset$, on obtient une solution élémentaire : $P(T + S) = \delta$.

Enfin, on remarque sur l'expression de T, S, R , que ces distributions sont invariantes par les automorphismes intérieurs de K , et par tous ceux de G dans le cas où l'opérateur est bi-invariant; cela résulte de la construction.

Résumons les résultats :

THÉORÈME. — Soit $P = P(C, \mathfrak{k})$ un opérateur différentiel linéaire sur G invariant à gauche par G et à droite par K .

1° Si P admet une paramétrix, il n'existe aucun p , avec $2p \in \mathbf{Z}$, tel que le polynôme $P(\cdot, ip)$ soit identiquement nul.

2° Réciproquement, si cette condition est vérifiée, et si, de plus, P satisfait à (11), alors P admet une paramétrix U , qui est une distribution d'ordre fini sur G , invariante par les automorphismes intérieurs de K .

3° Sous les hypothèses du 2°, et si l'ensemble exceptionnel E est vide, U est une solution élémentaire de P .

On pourra rapprocher ces résultats de ceux obtenus sur un groupe compact dans les paragraphes 4 et 5 de [1].

Le cas des opérateurs bi-invariants est plus simple; ils s'écrivent $P(C)$. Tout opérateur bi-invariant non nul est dans $D'_K(G)$, et vérifie la condition (11), avec $\alpha = \beta = 0$. L'ordre de U est alors indépendant de P (cf. démonstration de la proposition 5) :

COROLLAIRE. — Tout opérateur bi-invariant non nul $P = P(C)$ sur G admet une paramétrix, qui est une distribution d'ordre fini et indépendant de P , invariante par les automorphismes intérieurs de G .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. CEREZO et F. ROUVIÈRE, *Solution élémentaire d'un opérateur différentiel linéaire invariant à gauche sur un groupe de Lie réel compact* (Ann. scient. Éc. Norm. Sup., t. 2, 1969, p. 561-581).
- [2] L. EHRENPREIS and F. I. MAUTNER, *Some properties of the Fourier transform on semi-simple Lie groups* (I. Ann. of Math., vol. 61, 1955, p. 406-439; II. Trans. Amer. Math. Soc., vol. 84, 1957, p. 1-55; III. Trans. Amer. Math. Soc., vol. 90, 1959, p. 431-484).
- [3] HARISH-CHANDRA, *Representations of semi-simple Lie groups* (Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., vol. 37, 1951 : I, p. 170-173; II, p. 362-365; III, p. 366-369; IV, p. 691-694).
- [4] HARISH-CHANDRA, *Plancherel formula for the 2×2 real unimodular group* (Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., vol. 38, 1952, p. 337-342).
- [5] HARISH-CHANDRA, *Representations of semi-simple Lie groups* (Trans. Amer. Math. Soc., vol. 76, 1954 : II, p. 26-65; III, p. 234-253).
- [6] HARISH-CHANDRA, *The Plancherel formula for complex semi-simple Lie groups* (Trans. Amer. Math. Soc., vol. 76, 1954, p. 485-528).
- [7] S. HELGASON, *Differential Geometry and Symmetric Spaces*, Academic Press, New York, 1962.

(Manuscrit reçu le 4 mai 1972.)

A. CEREZO et F. ROUVIÈRE,
Département de Mathématiques,
Faculté des Sciences,
Parc Valrose,
06100 Nice.

