Annales scientifiques de l'É.N.S.

Jules Tannery

Propriétés des intégrales des équations différentielles linéaires à coefficients variables

Annales scientifiques de l'É.N.S. 2e série, tome 4 (1875), p. 113-182

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1875_2_4__113_0>

PROPRIÉTÉS DES INTÉGRALES

DES

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

A COEFFICIENTS VARIABLES,

PAR M. JULES TANNERY,

AGRÉGÉ PRÉPARATEUR A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

INTRODUCTION.

1. L'étude des fonctions d'une variable imaginaire définies par une équation, étude qui s'est substituée à la recherche, souvent impraticable, de la forme explicite de ces fonctions, a, dans notre siècle, profondément renouvelé l'Analyse. C'est, comme on le sait, à Cauchy que revient la gloire d'avoir frayé cette voie nouvelle. Les travaux de M. Puiseux sur les racines des équations algébriques, ceux de MM. Briot et Bouquet sur les fonctions doublement périodiques et sur les équations différentielles ont, en France, amplement prouvé la fécondité de l'idée de Cauchy. En Allemagne, les belles découvertes de Riemann ont accéléré un mouvement scientifique qui, depuis lors, ne s'est pas ralenti.

Ceux qui aiment la science et qui ont trop de raisons pour se défier de leurs facultés d'invention, ont encore un rôle utile à jouer, celui d'élucider les recherches des autres et de les répandre : c'est ce que j'ai essayé de faire dans ce travail.

Les équations différentielles linéaires ont été l'objet des recherches de Sturm et de M. Liouville : c'est au point de vue des valeurs réelles de la variable et des solutions réelles de l'équation que se sont placés ces deux savants, et ils ont rencontré là une série de propositions extrêmement remarquables; mais l'étude de ces mêmes équations, lorsqu'on n'apporte aucune restriction aux valeurs de la variable, restait complètement à faire. Dans son Cours de l'année 1863, M. Weierstrass donna quelques indications sur ce sujet; en 1866, M. Fuchs publia un premier Mémoire [1] qui peut être considéré comme fondamental dans la théorie des équations différentielles linéaires; il compléta ses recherches dans un Mémoire qui parut deux ans après. Depuis lors, cette étude a été à l'ordre du jour en Allemagne : M. Thomé, entre autres, a retrouvé les principaux résultats de M. Fuchs par une autre méthode; mais celle de ce dernier m'a semblé plus lumineuse. Plus récemment, M. Fuchs a donné de ses principes une série d'applications qui en montrent la fécondité : ces applications sont liées à la théorie des fonctions abéliennes et je ne les aborderai point ici; j'ai cherché seulement à exposer, de la façon la plus claire et la plus rapide qu'il m'a été possible de le faire, les principes fondamentaux de la théorie des équations différentielles linéaires.

2. Les équations dont il s'agit sont de la forme

$$\frac{d^m y}{dx^m} = p_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + p_2 \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + \ldots + p_m.$$

On supposera, en général, que les quantités $p_1, p_2, \ldots, p_m$ sont des fonctions continues et uniformes de la variable, sauf pour des valeurs particulières. La première partie de ce travail a été consacrée à la définition précise de ce qu'il faut entendre par la solution d'une pareille équation; dans la deuxième on a rappelé quelques propriétés des équations différentielles, indispensables pour la suite; dans la troisième on s'est occupé des points singuliers et l'on a donné, pour les valeurs voisines de la variable, certaines formes sous lesquelles peuvent être mises les solutions de l'équation différentielle et qui font ressortir les causes de la multiplicité des valeurs de ces solutions; dans la quatrième partie on a étudié spécialement une classe particulière d'équations différentielles dont les solutions jouissent, relativement aux points criti-

(1) *Journal de Crelle*, t. LXVI, p. 121.

ques, de propriétés remarquables; enfin la cinquième partie contient quelques applications.

3. J'ai supposé connus les principes relatifs à la représentation des quantités imaginaires et à la théorie élémentaire des fonctions de ces quantités. J'ai constamment confondu la valeur de la variable et le point qui la représente (sur le plan ou la sphère), et ne les ai point distingués par des notations différentes. Je me suis permis d'introduire l'expression de *domaine d'un point* qui répond à l'allemand *Umgebung :* j'entends par là les environs de ce point, et plus précisément la portion du plan où certains développements en série de la fonction que l'on étudie sont convergents. S'il s'agit, par exemple, d'un point a et d'un développement en série suivant les puissances entières et positives de $x - a$, le domaine du point a sera le cercle de convergence de cette série.

I.

4. La définition précise des fonctions qui satisfont à une équation différentielle linéaire

$$\frac{d^m y}{dx^m} = p_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + p_2 \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + \ldots + p_m y \tag{1}$$

repose sur le théorème fondamental qui suit :

Soit a un point du plan des x, tel que dans son domaine les coefficients $p_1, p_2, \ldots, p_m$ de l'équation (1) soient des fonctions uniformes et continues de la variable x, on pourra satisfaire à cette équation par une fonction uniforme et continue dans le voisinage du point a, les valeurs de cette fonction et de ses $m - 1$ premières dérivées au point a étant arbitraires.

La démonstration de cette proposition repose sur les principes qu'ont employés MM. Briot et Bouquet pour établir l'existence d'une intégrale dans une équation différentielle ordinaire.

Remarquons d'abord que, s'il existe une fonction uniforme et continue satisfaisant à l'équation (1) et que l'on donne les valeurs y_0, $y'_0, \ldots, y_0^{(m-1)}$ de cette fonction et de ses $m - 1$ premières dérivées du point a, on pourra trouver aisément les valeurs des dérivées suivantes au même point : l'équation (1) donnera immédiatement la valeur de la dérivée $m^{ième}$ et celles qu'on en déduirait par la différentiation, les valeurs des dérivées suivantes $y_0^{(m+1)}, y_0^{(m+2)}, \ldots$. Remarquons encore que toutes ces valeurs se déduisent des valeurs $y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(m-1)}$ et des valeurs finies que prennent pour $x = a$ les coefficients $p_1, p_2, \ldots, p_m$ et leurs dérivées par les simples opérations d'addition et de multiplication.

Cela posé, si la série

$$y_0 + \frac{x-a}{1} y'_0 + \frac{(x-a)^2}{1.2} y''_0 + \ldots$$

est convergente, la fonction qu'elle représente satisfera évidemment à l'équation (1) : tout revient donc à établir la convergence de cette série, quelles que soient les valeurs choisies pour $y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(m-1)}$. Nous établirons pour cela la convergence d'une autre série dans laquelle les coefficients auront des valeurs positives respectivement plus grandes que les modules des coefficients correspondants de la série précédente.

Soit r le rayon d'un cercle décrit du point a comme centre et dans lequel les coefficients p restent des fonctions uniformes et continues; soient $M_1, M_2, \ldots, M_m$ les modules maximum de $p_1, p_2, \ldots, p_m$ dans l'intérieur de ce cercle. Posons en outre

$$\frac{M_1}{1 - \frac{x-a}{r}} = \varphi_1, \quad \frac{M_2}{1 - \frac{x-a}{r}} = \varphi_2, \ldots, \quad \frac{M_m}{1 - \frac{x-a}{r}} = \varphi_m;$$

on aura, d'après une proposition bien connue,

$$(2) \qquad \text{mod.}\left(\frac{d^\alpha \varphi_i}{dx^\alpha}\right)_a > \text{mod.}\left(\frac{d^\alpha p_i}{dx^\alpha}\right)_a, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

en représentant en général par $[f(x)]_a$ la valeur de $f(x)$ pour $x = a$.

Considérons maintenant l'équation

$$(3) \qquad \frac{d^m u}{dx^m} = \varphi_1 \frac{d^{m-1} u}{dx^{m-1}} + \varphi_2 \frac{d^{m-2} u}{dx^{m-2}} + \ldots + \varphi_m u,$$

et désignons par $u_0, u'_0, \ldots, u_0^{(m-1)}$ les modules de $y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(m-1)}$; formons les valeurs pour $x = a$ des dérivées successives d'une fonction qui satisferait à l'équation (3) et dont la valeur au point a serait u_0, ses $m-1$ premières dérivées admettant, au même point, les valeurs

$u'_0, u''_0, \ldots, u_0^{(m-1)}$. On aura à effectuer identiquement les mêmes calculs que pour l'équation (1); seulement les quantités $p_1, p_2, \ldots, p_m$ seront respectivement remplacées par $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$, et $y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(m-1)}$ par $u_0, u'_0, \ldots, u_0^{(m-1)}$. Toutes les quantités $u_0^m, u_0^{m+1}, \ldots$ que l'on obtiendra ainsi seront positives, et, à cause des inégalités (2), on aura en général

$$u_0^{(\alpha)} \geq \text{mod.}\, y_0^{(\alpha)}.$$

Si la série à coefficients positifs

$$u_0 + \frac{x-a}{1} u'_0 + \frac{(x-a)^2}{1.2} u''_0 + \ldots$$

est convergente, elle représentera une fonction satisfaisant à l'équation (3), et de plus la série

$$y_0 + \frac{x-a}{1} y'_0 + \frac{(x-a)^2}{1.2} y''_0 + \ldots$$

sera nécessairement convergente. Il suffit donc, pour notre objet, d'établir que l'équation (3) admet toujours comme solution une fonction uniforme et continue ayant au point a la valeur u_0, les valeurs de ses $m-1$ premières dérivées étant pour le même point $u'_0, u''_0, \ldots, u_0^{(m-1)}$; cette fonction, en effet, ne pourra différer de la série

$$u_0 + \frac{x-a}{1} u'_0 + \frac{(x-a)^2}{1.2} u''_0 + \ldots.$$

Posons

$$z = \frac{x-a}{r},$$

l'équation (3) deviendra

$$(3\ bis) \qquad (1-z)\frac{d^m u}{dz^m} = \mathrm{M}_1 r \frac{d^{m-1} u}{dz^{m-1}} + \mathrm{M}_2 r^2 \frac{d^{m-2} u}{dz^{m-2}} + \ldots + \mathrm{M}_m r^m u;$$

remplaçons-y u par $\sum_0^\infty {}_k b_k z^k$ et égalons, dans le résultat, les coefficients de z^k dans les deux membres, il viendra

$$\begin{aligned}
&(m+k)(m+k-1)\ldots(k+1)\, b_{m+k} \\
&\quad = (m+k-1)(m+k-2)\ldots(k+1)(k+\mathrm{M}_1 r)\, b_{m+k-1} \\
&\qquad + \mathrm{M}_2 r^2 (m+k-2)(m+k-3)\ldots(k+1)\, b_{m+k-2} + \ldots + \mathrm{M}_m r^m b_k.
\end{aligned}$$

Cette équation fournira pour les b des valeurs positives, si l'on a choisi $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_{m-1}$ plus grands que zéro; on en tirera d'ailleurs

$$b_{m+k} = \frac{k + M_1 r}{k+m} b_{m+k-1} + \ldots.$$

Si l'on suppose les quantités $b_0, b_1, \ldots, b_{m-1}$ positives, toutes les quantités b seront aussi positives, et l'on aura certainement

$$b_{m+k} > b_{m+k-1},$$

pourvu que l'on ait

$$M_1 r > m,$$

condition à laquelle on peut toujours satisfaire en remplaçant M_1 par une quantité plus grande; on aura dès lors

$$\frac{b_{m+k}}{b_{m+k-1}} = \frac{k + M_1 r}{k+m} + \frac{M_1 r^2}{(m+k)(m+k-1)} \frac{b_{m+k-2}}{b_{m+k-1}} + \ldots$$
$$+ \frac{M_m r^m}{(m+k)(m+k-1)\ldots(k+1)} \frac{b_k}{b_{m+k-1}}.$$

Il y a dans le second membre un nombre fini m de termes; les rapports

$$\frac{b_{m+k-2}}{b_{m+k-1}}, \ldots, \frac{b_k}{b_{m+k-1}}$$

sont tous inférieurs à l'unité : la limite de ce second membre pour k infini est donc l'unité, et si, par conséquent, le module de z est plus petit que 1, la série à coefficients positifs

$$\sum_0^\infty b_k z^k,$$

déterminée comme il a été expliqué, sera convergente, quelles que soient les valeurs positives que l'on a choisies pour $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_{m-1}$; donc, quelles que soient les valeurs positives que l'on choisira pour $u_0, u'_0, u_0^{(m-1)}$, il existera une fonction uniforme et continue u satisfaisant à l'équation (3) : notre proposition peut, par conséquent, être considérée comme établie.

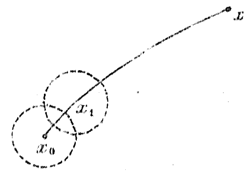
5. Il est, d'après cela, aisé de définir d'une façon très-précise ce qu'il faut entendre par une fonction satisfaisant à l'équation (1)

$$\frac{d^m y}{dx^m} = p_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + p_2 \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + \ldots + p_m y.$$

Soit T une portion du plan des x limitée par un contour simple et dans laquelle les coefficients $p_1, p_2, \ldots, p_m$ soient des fonctions de la variable x toujours uniformes et continues, à l'exception de points *singuliers* isolés les uns des autres.

Soient x_0 et x deux points quelconques non singuliers de la surface T; joignons-les par une courbe quelconque $x_0 x$ située entière-

Fig. 1.

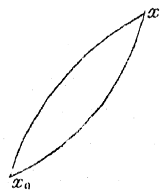


ment dans la surface T et ne passant par aucun des points singuliers; choisissons arbitrairement pour les valeurs de y et de ses $m-1$ premières dérivées au point x_0 des quantités quelconques $y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(m-1)}$. Au moyen de la continuité, on pourra en déduire les valeurs de la fonction y tout le long de la courbe $x_0 x$. On pourra en effet décrire de x_0 comme centre un cercle de rayon suffisamment petit pour qu'il soit situé entièrement dans la surface T et pour qu'il existe une fonction uniforme et continue dans son intérieur, satisfaisant à l'équation (1) et telle que les valeurs au point x_0 de cette fonction et de ses $m-1$ premières dérivées soient $y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(m-1)}$. Tout le long de la portion de courbe comprise dans le petit cercle les valeurs de y et de ses dérivées seront parfaitement déterminées; on arrivera ainsi à un point x_1, pour lequel y et ses $m-1$ premières dérivées auront les valeurs $y_1, y'_1, \ldots, y_1^{(m-1)}$, et que l'on traitera comme le point x_0; en procédant ainsi de proche en proche, on arrivera ainsi avec des valeurs toujours déterminées et variant d'une façon continue, jusqu'au point x.

6. A la fonction ainsi définie on pourra évidemment appliquer les théorèmes relatifs aux fonctions continues.

Ainsi, si deux chemins situés dans l'intérieur de T conduisent du point x_0 au point x (*fig.* 2), et si l'on peut les ramener l'un à l'autre

Fig. 2.



sans passer par aucun des points singuliers, on arrivera à la même valeur en x, si l'on a choisi les mêmes valeurs initiales en x_0, que l'on suive l'un ou l'autre des deux chemins.

La fonction y satisfaisant à l'équation (1), ayant en x_0 avec ses $m-1$ premières dérivées les valeurs arbitraires $y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(m-1)}$, est développable en une série convergente procédant suivant les puissances entières et positives de $x - x_0$ dans tout cercle ayant le point x_0 pour centre et ne contenant dans son intérieur ni point singulier ni portion du contour de T.

Si l'on décrit autour de chaque point singulier un petit cercle et qu'on supprime les portions de la surface T contenues dans ces petits cercles, puis que l'on pratique un système de coupures allant du premier cercle au deuxième, du deuxième au troisième, etc., du dernier enfin au contour de T, assujetties en outre à ne pas se croiser et à ne pas rencontrer, sauf la dernière, le contour de T, on déduira ainsi de la surface T une nouvelle surface T' à contour simple, dans l'intérieur de laquelle toute fonction satisfaisant à l'équation (1), et définie comme précédemment, restera finie, uniforme et continue.

Ces diverses propositions s'étendent évidemment au cas où la surface T embrasse tout le plan (ou toute la sphère) des x. Seulement le contour de T doit alors être remplacé par une circonférence de cercle décrite de l'origine comme centre avec un rayon infiniment grand (ou par un cercle infiniment petit entourant sur la sphère le point ∞).

II.

7. Nous allons maintenant établir et rappeler quelques propriétés importantes des intégrales d'une équation différentielle linéaire

$$\text{(1)} \qquad \frac{d^m y}{dx^m} = p_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + p^2 \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + \ldots + p_m y,$$

définies comme précédemment. Nous conserverons nos hypothèses relativement aux coefficients $p_1, p_2, \ldots, p_m$; nous supposerons, en outre, que les chemins suivis par la variable ne passent pas par les points singuliers et ne rencontrent pas le contour de la surface T. Lorsque nous considérerons simultanément diverses solutions de l'équation, nous supposerons que les chemins suivis par la variable aient même origine et coïncident constamment ou au moins puissent se ramener au même chemin sans passer par aucun des points singuliers : les diverses solutions ne seront distinctes que par les valeurs initiales choisies, tant pour les fonctions elles-mêmes que pour leurs $m-1$ premières dérivées.

8. Nous commencerons par établir deux lemmes dont nous aurons besoin plus tard.

1° *Si les m fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_m$ sont telles que le déterminant*

$$D = \begin{vmatrix} \frac{d^{m-1} y_1}{dx^{m-1}} & \frac{d^{m-2} y_1}{dx^{m-2}} & \cdots & y_1 \\ \frac{d^{m-1} y_2}{dx^{m-1}} & \frac{d^{m-2} y_2}{dx^{m-2}} & \cdots & y_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{d^{m-1} y_m}{dx^{m-1}} & \frac{d^{m-2} y_m}{dx^{m-2}} & \cdots & y_m \end{vmatrix}$$

soit identiquement nul, il existera entre ces fonctions une relation linéaire à coefficients constants, telle que

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_m y_m = 0.$$

La réciproque de cette proposition est évidente.

Remarquons d'abord que le déterminant

$$D' = \begin{vmatrix} \dfrac{d^m y_1}{dx^m} & \dfrac{d^{m-2} y_1}{dx^{m-2}} & \cdots & y_1 \\ \dfrac{d^m y_2}{dx^m} & \dfrac{d^{m-2} y_2}{dx^{m-2}} & \cdots & y_2 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{d^m y_m}{dx^m} & \dfrac{d^{m-2} y_m}{dx^{m-2}} & \cdots & y_m \end{vmatrix},$$

qui ne diffère du précédent qu'en ce que les éléments de la première colonne ont été respectivement remplacés par leurs dérivées, est la dérivée de D. En effet, si dans ce dernier déterminant on donne à x l'accroissement dx, il deviendra, en ne tenant compte que des accroissements du premier ordre,

$$\begin{vmatrix} \dfrac{d^{m-1} y_1}{dx^{m-1}} + \dfrac{d^m y_1}{dx^m}\,dx & \dfrac{d^{m-2} y_1}{dx^{m-2}} + \dfrac{d^{m-1} y_1}{dx^{m-1}}\,dx & \cdots & y_1 + \dfrac{dy_1}{dx}\,dx \\ \dfrac{d^{m-1} y_2}{dx^{m-1}} + \dfrac{d^m y_2}{dx^m}\,dx & \dfrac{d^{m-2} y_2}{dx^{m-2}} + \dfrac{d^{m-1} y_2}{dx^{m-1}}\,dx & \cdots & y_2 + \dfrac{dy_2}{dx}\,dx \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \dfrac{d^{m-1} y_m}{dx^{m-1}} + \dfrac{d^m y_m}{dx^m}\,dx & \dfrac{d^{m-2} y_m}{dx^{m-2}} + \dfrac{d^{m-1} y_m}{dx^{m-1}}\,dx & \cdots & y_m + \dfrac{dy_m}{dx}\,dx \end{vmatrix},$$

ou, en développant en somme de déterminants, supprimant, comme étant au moins du second ordre, ceux dont deux colonnes, au moins, contiennent dx en facteur et faisant attention à ceux qui sont identiquement nuls,

$$D + D'\,dx.$$

D' est donc bien la dérivée de D.

Par suite, si D est identiquement nul, il en sera de même de D'. Désignons maintenant par $C_1, C_2, \ldots, C_m$; $C'_1, C'_2, \ldots, C'_m$ les mineurs respectifs de ces deux déterminants relatifs aux colonnes extrêmes de droite, on aura les deux séries de $m-1$ identités qui suivent :

$$C_1\,y_1 + C_2\,y_2 + \ldots + C_m\,y_m = 0,$$

$$C_1\,\frac{dy_1}{dx} + C_2\,\frac{dy_2}{dx} + \ldots + C_m\,\frac{dy_m}{dx} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$C_2\,\frac{d^{m-2} y_1}{dx^{m-2}} + C_2\,\frac{d^{m-2} y_2}{dx^{m-2}} + \ldots + C_m\,\frac{d^{m-2} y_m}{dx^{m-2}} = 0;$$

et

$$C'_1\, y_1 + C'_2\, y_2 + \ldots + C'_m\, y_m = 0,$$
$$C'_1 \frac{dy_1}{dx} + C'_2 \frac{dy_2}{dx} + \ldots + C'_m \frac{dy_m}{dx} = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$C'_1 \frac{d^{m-2}y_1}{dx^{m-2}} + C'_2 \frac{d^{m-2}y_2}{dx^{m-2}} + \ldots + C'_m \frac{d^{m-2}y_m}{dx^{m-2}} = 0.$$

Elles montrent que l'on a

$$\frac{C_1}{C'_1} = \frac{C_2}{C'_2} = \ldots = \frac{C_m}{C'_m},$$

ou, en général,

$$\frac{C_i C'_j - C_j C'_i}{(C_j)^2} = 0;$$

mais C'_i, C'_j étant les dérivées de C_i, C_j, ce rapport est la dérivée de

$$\frac{C_i}{C_j};$$

ce dernier rapport est donc une constante : il suffit de diviser la première de nos identités par l'une quelconque des quantités C pour apercevoir la vérité de la proposition annoncée.

2° *Si $y_1, y_2, \ldots, y_m$ sont m solutions de l'équation différentielle* (1)

$$\frac{d^m y}{dx^m} = p_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + p_2 \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + \ldots + p_m y,$$

et si l'on désigne par D *le même déterminant que précédemment, on aura,* C *étant une constante* (1),

$$D = C e^{\int p_1 dx}.$$

Si dans le déterminant D', dérivée de D, on remplace les éléments de

(1) Cette proposition est due à M. Liouville.

la première colonne verticale de gauche par les quantités égales

$$p_1 \frac{d^{m-1} y_1}{dx^{m-1}} + p_2 \frac{d^{m-2} y_1}{dx^{m-2}} + \ldots + p_m y_1,$$

$$p_1 \frac{d^{m-1} y_2}{dx^{m-1}} + p_2 \frac{d^{m-2} y_2}{dx^{m-2}} + \ldots + p_m y_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$p_1 \frac{d^{m-1} y_m}{dx^{m-1}} + p_2 \frac{d^{m-2} y_m}{dx^{m-2}} + \ldots + p_m y_m,$$

que l'on développe le déterminant résultant en somme de déterminants et qu'on fasse attention aux déterminants nuls, on tombera sur l'identité

$$D' = D p,$$

d'où, en intégrant

$$D = C e^{\int p_1 dx}.$$

Si la constante C est nulle, il y aura, d'après la proposition précédente, une relation linéaire à coefficients constants entre les quantités $y_1, y_2, \ldots, y_m$.

9. Soient $y_1, y_2, \ldots, y_m$, m fonctions satisfaisant à l'équation (1) du paragraphe précédent et telles que, pour le point initial x_0, le déterminant désigné ci-dessus par D ne soit pas nul; de telles fonctions existeront évidemment toujours; le déterminant D, d'après le lemme précédent ne sera jamais nul, sauf aux points singuliers. Nous donnerons à l'ensemble de ces m fonctions le nom de *système fondamental d'intégrales*. On aperçoit de suite qu'entre les m éléments d'un système fondamental n'existe aucune relation linéaire à coefficients constants et que réciproquement tout système de m fonctions satisfaisant à l'équation différentielle et n'étant reliées par aucune relation linéaire à coefficients constants forme un système fondamental.

10. *Toute solution de l'équation différentielle peut s'exprimer linéairement au moyen des éléments d'un système fondamental quelconque; en d'autres termes, entre $m+1$ solutions de l'équation différentielle existe toujours une relation linéaire à coefficients constants.*

Si l'on substitue en effet dans l'équation différentielle (1) les $m+1$ solutions considérées $y_1, y_2, \ldots, y_{m+1}$, on obtiendra $m+1$ équations d'où l'on déduira que le déterminant

$$\begin{vmatrix} \dfrac{d^m y_1}{dx^m} & \dfrac{d^{m-1} y_1}{dx^{m-1}} & \cdots & y_1 \\ \dfrac{d^m y_2}{dx^m} & \dfrac{d^{m-1} y_2}{dx^{m-1}} & \cdots & y_2 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{d^m y_{m+1}}{dx^m} & \dfrac{d^{m-1} y_{m+1}}{dx^{m-1}} & \cdots & y_m \end{vmatrix}$$

est identiquement nul : d'où résulte la proposition énoncée.

On peut encore remarquer que, si l'on pose

$$y_{m+1} = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_m y_m,$$

on pourra déterminer les coefficients constants $C_1, C_2, \ldots, C_m$ de manière que, pour $x = x_0$, la fonction qui constitue le second membre soit égale à la fonction y_{m+1}, cette égalité subsistant pour les $m-1$ premières dérivées des deux fonctions; on aura pour cela à résoudre m équations du premier degré dont le déterminant, qui n'est autre que le déterminant D pour $x = x_0$, est, par hypothèse, différent de zéro. Les dérivées suivantes seront aussi égales pour $x = x_0$, à cause de l'équation différentielle même. Les deux séries représentant les deux membres de l'égalité posée seront donc identiques pour des valeurs convenables des coefficients C : c'est précisément ce qu'il fallait établir.

11. *Soient $y_1, y_2, \ldots, y_m$ les éléments d'un système fondamental et soient $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$, m intégrales s'exprimant au moyen des y_1, éléments $y_2, \ldots, y_m$ par les équations*

$$\begin{aligned} Y_1 &= C_{11} y_1 + C_{12} y_2 + \ldots + C_{1m} y_m, \\ Y_2 &= C_{21} y_1 + C_{22} y_2 + \ldots + C_{2m} y_m, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ Y_m &= C_{m1} y_1 + C_{m2} y_2 + \ldots + C_{mm} y_m; \end{aligned}$$

$Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ *formeront ou non un système fondamental selon que le dé-*

terminant

$$\delta = \begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1m} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{m1} & C_{m2} & \dots & C_{mm} \end{vmatrix}$$

sera différent de zéro ou égal à zéro.

En effet, si l'on désigne, comme ci-dessus, par D le déterminant formé avec les quantités $y_1, y_2, \dots, y_m$ et leurs $m-1$ premières dérivées et par D_1 le déterminant analogue relatif aux quantités $Y_1, Y_2, \dots, Y_m$, on aura

$$D_1 = \delta . D.$$

12. *Soient $y_1, y_2, \dots, y_m$ les éléments d'un système fondamental et $v_1, v_2, \dots, v_n$, n fonctions linéaires à coefficients constants des n éléments $y_1, y_2, \dots, y_n$, définies par les équations*

$$v_\alpha = \sum_{\beta=1}^{\beta=n} C_{\alpha\beta} y_\alpha;$$

$v_1, v_2, \dots, v_n$; $y_{n+1}, y_{n+2}, \dots, y_m$ formeront un système fondametal si le déterminant

$$\begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{nn} \end{vmatrix}$$

est différent de zéro.

En effet, il est bien aisé de voir qu'il n'existera alors aucune relation linéaire à coefficients constants entre $v_1, v_2, \dots, v_n$; $y_{n+1}, y_{n+2}, \dots, y_m$. C'est d'ailleurs un cas particulier de la proposition précédente.

13. On obtiendra en particulier un système fondamental par le procédé suivant, bien connu pour la résolution des équations linéaires.

Soit y_1 une intégrale de l'équation

$$(1) \qquad \frac{d^m y}{dx^m} = p_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + p_2 \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + \dots + p_m y.$$

On fera

$$(2) \qquad y = y_1 \int z\,dx,$$

et, en substituant dans l'équation (1), on obtiendra l'équation linéaire d'ordre $m-1$

$$(3) \qquad \frac{d^{m-1}z}{dx^{m-1}} = q_1 \frac{d^{m-2}z}{dx^{m-2}} + q_2 \frac{d^{m-3}z}{dx^{m-3}} + \ldots + q_{m-1} z,$$

où

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} q_1 &= \frac{1}{y_1}\left(-\frac{m}{1}\frac{dy_1}{dx} + p_1 y_1\right), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ q_r &= \frac{1}{y_1}\left[-\frac{m(m-1)\ldots(m-r+1)}{1.2\ldots r}\frac{d^r y_1}{dx^r}\right. \\ &\quad + p_1 \frac{(m-1)(m-2)\ldots(m-r+1)}{1.2\ldots(r-1)}\frac{d^{r-1}y_1}{dx^{r-1}} + \ldots, \\ &\quad \left. + p_j \frac{(m-j)(m-j-1)\ldots(m-r+1)}{1.2\ldots(r-j)}\frac{d^{r-j}y_1}{dx^{r-j}} + \ldots + p_r y_1\right]. \end{aligned} \right.$$

Soit maintenant z_1 une solution de cette équation et faisons

$$(5) \qquad y_2 = y_1 \int z_1\,dx.$$

Posons de même

$$z = z_1 \int t\,dx,$$

nous formerons une équation différentielle en t d'ordre $m-2$, dont je désignerai par t_1 une intégrale; faisons encore

$$(6) \qquad y_3 = y_1 \int z_1\,dx \int t_1\,dx;$$

continuons ainsi jusqu'à ce que nous soyons arrivés à une équation du premier ordre dont je désignerai par w_1 l'intégrale. Soit

$$(7) \qquad y_m = y_1 \int z_1\,dx \int t_1\,dx \int u_1\,dx \ldots \int w_1\,dx;$$

je dis que le système d'intégrales $y_1, y_2, \ldots, y_m$ est un système fondamental. Pour le prouver, il faut montrer qu'il ne peut exister de relation à coefficients constants de la forme

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_m y_m.$$

Si une pareille relation existait, on pourrait la diviser par y_1 qui est différent de zéro ; on obtiendrait ainsi

$$C_1 + C_2 \int z_1\, dx + \ldots + C_m \int z_1\, dx \int v_1\, dx \ldots \int w_1\, dx = 0 ;$$

différentiant cette dernière identité, divisant par z_1 et continuant de la sorte, on arriverait à prouver que C_m est nul ; puis, en remontant, qu'il en est de même de $C_{m-1}, C_{m-2}, \ldots, C_1$.

14. Le déterminant que nous avons désigné jusqu'à présent par D, formé au moyen du système fondamental précédent $y_1, y_2, \ldots, y_m$, s'exprime d'une façon remarquable au moyen des solutions $y_1, z_1, \ldots, w_1$ des équations linéaires successivement employées.

Désignons, en effet, par D' le déterminant analogue relatif à un système fondamental de solutions de l'équation (3) en z ; on aura, d'après un théorème précédent,

$$D' = C e^{\int q_1 dx},$$

ou, en vertu de la première des équations (4),

$$D' = C e^{\int p_1 dx - \int \frac{m}{1} \frac{dy_1}{y_1}} = C' D y_1^{-m},$$

où C, C' désignent des constantes ; de là

$$D = C'' D' y_1^m,$$

de même

$$D' = C''' D'' z_1^{m-1}, \ldots$$

et finalement, en multipliant toutes ces identités,

$$D = C y_1^m z_1^{m-1} t_1^{m-1} \ldots w_1,$$

C désignant encore une constante.

III.

15. Nous allons maintenant nous occuper des points singuliers : nous supposerons désormais que les coefficients $p_1, p_2, \ldots, p_m$ de l'équation différentielle

$$(1) \qquad \frac{d^m y}{dx^m} = p_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + p^2 \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + \ldots + p_m y,$$

sont uniformes dans tout le plan des x (ou sur toute la sphère) et qu'ils n'y présentent qu'un nombre fini de points de discontinuité isolés les uns des autres. Parmi les propositions que nous établirons, plusieurs s'appliquent au cas où les conditions d'uniformité et de continuité ne sont satisfaites que pour une portion limitée T du plan ou de la sphère; mais il sera trop aisé de les reconnaître et, au besoin, d'en modifier l'énoncé, pour que nous y insistions.

Dès lors, à cause du théorème fondamental, une solution quelconque y de l'équation (1) sera une fonction de x continue, excepté pour les points de discontinuité des coefficients et pour le point ∞ de la sphère : on ramènera l'étude de ce dernier à celle d'un point singulier à distance finie au moyen d'un changement de la variable indépendante. Par exemple, on le ramènera au cas d'un point singulier situé à l'origine des coordonnées, en faisant

$$x = \frac{1}{t},$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{dy}{dt}t^2,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2}t^4 + 2\frac{dy}{dt}t^3,$$

et, en général,

$$\begin{aligned}(-1)^n\frac{d^ny}{dx^n} = t^{2n}\frac{d^ny}{dt^n} + \frac{n}{1}(n-1)\,t^{2n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \ldots \\ + \frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{1.2\ldots p}(n-1)(n-2)\ldots(n-p)\,t^{2n-p}\frac{d^{n-p}y}{dt^{n-p}} + \ldots \\ + 2.3\ldots n t^{n+1}\frac{dy}{dt}.\end{aligned}$$

16. Soit maintenant a un point singulier quelconque et soient y_1, $y_2, \ldots, y_m$ les éléments d'un système fondamental d'intégrales de l'équation

$$(1)\qquad \frac{d^my}{dx^m} = p_1\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + p_2\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} + \ldots + p_m y.$$

Supposons que la variable fasse le tour du point a et soient

$$[y_1]', \quad [y_2]', \ldots, \quad [y_m]'$$

les nouvelles valeurs des intégrales quand le tour est accompli : ces nouvelles fonctions sont encore des solutions de l'équation (1) et forment, d'après ce qui a été établi précédemment, un système fondamental : *elles pourront donc s'exprimer en fonctions linéaires à coefficients constants des anciens éléments $y_1, y_2, \ldots, y_m$ au moyen d'équations telles que*

$$(2) \qquad \begin{cases} [y_1]' = \alpha_{11} y_1 + \alpha_{12} y^2 + \ldots + \alpha_{1m} y_m, \\ [y_2]' = \alpha_{21} y_1 + \alpha_{22} y_2 + \ldots + \alpha_{2m} y_m, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ [y_m]' = \alpha_{m1} y_1 + \alpha_{m2} y_2 + \ldots + \alpha_{mm} y_m, \end{cases}$$

le déterminant

$$R = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_m \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_m \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \ldots & \alpha_{mm} \end{vmatrix}$$

étant différent de zéro.

17. J'insisterai dès à présent sur cette propriété si simple, relativement à leurs points singuliers, des fonctions qui satisfont à une équation différentielle linéaire à coefficients uniformes; elle est caractéristique de ces fonctions et permet de les reconnaître, absolument comme la nature de leurs points critiques permet de reconnaître les fonctions algébriques. Nous allons, en effet, établir la proposition suivante :

Soient

$$y_1, \quad y_2, \ldots, \quad y_m$$

m fonctions de x continues, sauf pour des points singuliers isolés les uns des autres, uniformes dans les portions de plan (ou de sphère) à contour simple qui ne contiennent pas de points singuliers : si, lorsque la variable fait le tour d'un point singulier, les nouvelles valeurs

$$[y_1]', \quad [y_2]', \ldots, \quad [y_m]'$$

de ces fonctions sont liées aux premières par des équations linéaires à coefficients constants telles que les équations (2) du paragraphe précédent, ces fonctions sont les intégrales d'une équation différentielle linéaire à coefficients uniformes.

Cherchons, en effet, une équation linéaire

$$\frac{d^m y}{dx^m} = p_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + p_2 \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + \ldots + p_m y,$$

à laquelle satisfassent ces m fonctions; nous aurons, pour en déterminer les coefficients $p_1, p_2, \ldots, p_m$, à résoudre le système de m équations du premier degré

$$\begin{aligned}
\frac{d^m y_1}{dx^m} &= p_1 \frac{d^{m-1} y_1}{dx^{m-1}} + p_2 \frac{d^{m-2} y_1}{dx^{m-2}} + \ldots + p_m y_1,\\
\frac{d^m y_2}{dx^m} &= p_1 \frac{d^{m-1} y_2}{dx^{m-1}} + p_2 \frac{d^{m-2} y_2}{dx^{m-2}} + \ldots + p_m y_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\frac{d^m y_m}{dx^m} &= p_1 \frac{d^{m-1} y_m}{dx^{m-1}} + p_2 \frac{d^{m-2} y_m}{dx^{m-2}} + \ldots + p_m y_m;
\end{aligned}$$

le déterminant de ces équations

$$D = \begin{vmatrix}
\frac{d^{m-1} y_1}{dx^{m-1}} & \frac{d^{m-2} y_1}{dx^{m-2}} & \ldots & y_1 \\
\frac{d^{m-1} y_2}{dx^{m-1}} & \frac{d^{m-2} y_2}{dx^{m-2}} & \ldots & y_2 \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\
\frac{d^{m-1} y_m}{dx^{m-1}} & \frac{d^{m-2} y_m}{dx^{m-2}} & \ldots & y_m
\end{vmatrix}$$

ne peut être identiquement nul que si les fonctions y sont liées par une relation linéaire à coefficients constants. Supposons qu'il n'existe pas de pareille relation, ce que l'on peut toujours faire en ramenant, s'il en est besoin, les fonctions y à être en moindre nombre : le déterminant D jouira, relativement à la continuité et à l'uniformité, des mêmes propriétés que les fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_m$ elles-mêmes.

Soit D_α le déterminant obtenu en y remplaçant les éléments de la $\alpha^{ième}$ colonne à partir de la gauche par

$$\frac{d^m y_1}{dx^m}, \quad \frac{d^m y_2}{dx^m}, \ldots, \quad \frac{d^m y_m}{dx^m}.$$

On aura, en général,

$$p_\alpha = \frac{D_\alpha}{D};$$

les points où p_α peut cesser d'être uniforme sont les points singuliers des fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_m$. Or, lorsque la variable tourne autour d'un de ces points, p_α ne change pas, car D_α et D sont multipliés tous les deux par le déterminant désigné par R dans le paragraphe précédent.

En particulier, lorsque chaque point singulier a de l'une quelconque y_r des fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_m$ sera tel qu'on puisse toujours trouver un nombre ρ tel que $(x-a)^\rho y_r$ soit dans le domaine de a une fonction uniforme finie et continue, il en sera de même pour chacune des quantités D_α, D, et le point a sera pour p_α un zéro ou un infini d'ordre entier, ou même un point ordinaire. Si la même circonstance se présente pour le point ∞ de la sphère, ramené, comme il a été expliqué, à distance finie, la fonction p_α, uniforme sur toute la sphère, y présentera un certain nombre de pôles séparés les uns des autres par des espaces finis, par suite, en nombre fini, et sera, par conséquent, une fonction rationnelle.

Pour donner de suite un exemple, considérons le cas d'une fonction y de x définie par une équation algébrique entière en x et y, du degré m en y. Les m racines de cette équation seront des fonctions de x qui, relativement à la continuité et à la nature de leurs points singuliers, satisfont aux conditions ci-dessus mentionnées. De plus, quand la variable tourne autour d'un point singulier, elles ne font que s'échanger entre elles, ce qui est un cas particulier des relations (2) du paragraphe précédent : on en conclut qu'elles satisferont à une équation différentielle linéaire qui sera d'ordre m s'il n'existe entre les racines aucune relation linéaire à coefficients constants, et d'ordre moindre dans le cas contraire; si la somme des racines n'est pas nulle, l'équation différentielle admettra une solution rationnelle.

Il est aisé de former effectivement cette équation :

Soit $f(x, y) = 0$ l'équation proposée, du degré m en y et admettons pour simplifier que le coefficient de y^m soit une constante; soit, en outre, $\varphi(x) = 0$ le résultat de l'élimination de y entre les deux équations

$$f(x, y) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

On pourra poser identiquement

$$\varphi(x) = f(x, y)\,\mathrm{A} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{B},$$

où A et B sont des polynômes en x, y dont les degrés sont respectivement $m-2$ et $m-1$ par rapport à y. Or on a

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{B\frac{\partial f}{\partial x}}{B\frac{\partial f}{\partial y}} = -\frac{B\frac{\partial f}{\partial x}}{\varphi(x)},$$

à cause de l'équation $f(x, y) = 0$; on ramènera $-B\frac{\partial f}{\partial x}$ à ne contenir y qu'à la puissance $m-1$ au moyen de cette même équation et l'on aura mis $\frac{dy}{dx}$ sous la forme $\frac{P_1}{\varphi(x)}$, où P_1 est un polynôme entier en x, y, ne contenant y qu'au degré $m-1$; en désignant par $P_2, P_3, \ldots, P_m$ des polynômes analogues, on pourra faire

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{P_2}{[\varphi(x)]^2}, \quad \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{P_3}{[\varphi(x)]^3}, \ldots, \quad \frac{d^my}{dx^m} = \frac{P_m}{[\varphi(x)]^m}.$$

En éliminant $y^2, y^3, \ldots, y^{m-1}$ entre les $m-1$ équations

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P_1}{\varphi(x)}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{P_2}{[\varphi(x)]^2}, \ldots, \quad \frac{d^my}{dx^m} = \frac{P_m}{[\varphi(x)]^m},$$

on tombera visiblement sur une équation linéaire de la forme

$$\frac{d^my}{dx^m} + \frac{Q_1}{\varphi(x)}\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \frac{Q^2}{[\varphi(x)]^2}\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} + \ldots + \frac{Q_m}{[\varphi(x)]^m}y = 0,$$

où les quantités $Q_1, Q_2, \ldots, Q_m$ sont des polynômes entiers en x.

Nous aurons plus tard l'occasion d'étudier des équations ayant précisément cette forme : on voit que les points singuliers sont, comme on devait bien s'y attendre, les racines de l'équation

$$\varphi(x) = 0.$$

A ces points singuliers s'ajouteraient, si le coefficient de y^m n'était pas une constante, les points correspondant aux valeurs de x qui annuleraient ce coefficient.

On reconnaîtra sans difficulté que, réciproquement, si une équation différentielle linéaire à coefficients rationnels admet une solution algébrique y, racine de l'équation irréductible et entière

$$f(x, y) = 0,$$

elle admettra comme solutions toutes les autres racines de cette équation.

18. Revenons maintenant à la théorie générale. Puisque toute solution d'une équation différentielle linéaire s'exprime en fonction linéaire à coefficients constants des éléments d'un système fondamental, il suffit évidemment de savoir comment se comportent les éléments d'un système particulier dans le domaine d'un point singulier, pour être renseigné relativement à toutes les intégrales de l'équation différentielle donnée.

Or, pour chaque point singulier donné, il existe un système fondamental dont les éléments se comportent d'une façon simple, ainsi que nous allons le mettre en lumière.

Soient, comme ci-dessus,

$$y_1, \quad y_2, \ldots, \quad y_m$$

les éléments d'un système fondamental quelconque de solutions, et

$$[y_1]', \quad [y_2]', \ldots, \quad [y_m]'$$

les nouvelles valeurs de ces éléments quand la variable a fait le tour complet d'un point singulier a; supposons ces nouvelles valeurs liées aux anciennes par les relations suivantes, où les α représentent des constantes :

$$(2) \qquad \begin{cases} [y_1]' = \alpha_{11}\, y_1 + \alpha_{12}\, y_2 + \ldots + \alpha_{1m}\, y_m, \\ [y_2]' = \alpha_{21}\, y_1 + \alpha_{22}\, y_2 + \ldots + \alpha_{2m}\, y_m, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ [y_m]' = \alpha_{m1}\, y_1 + \alpha_{m2}\, y_2 + \ldots + \alpha_{mm}\, y_m. \end{cases}$$

Posons

$$u = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_m y_m,$$

$x_1, x_2, \ldots, x_m$ étant des constantes que nous allons chercher à déterminer de manière que

$$(3) \qquad [u]' = \omega\, u,$$

$[u]'$ désignant la valeur de u après un tour de la variable autour du point a et ω étant une constante; on devra avoir

$$\begin{aligned}[u]' = \quad & y_1(\alpha_{11}x_1 + \alpha_{21}x_2 + \ldots + \alpha_{m1}x_m) \\ & + y_2(\alpha_{12}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{m2}x_m) \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + y_m(\alpha_{1m}x_1 + \alpha_{2m}x_2 + \ldots + \alpha_{mm}x_m) \\ = \; & \omega(x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_my_m).\end{aligned}$$

On satisfera à cette condition en déterminant ω, x_1, $x_2, \ldots, x_m$ par les équations

$$\begin{aligned}(\alpha_{11} - \omega)x_1 + \alpha_{21}x_2 + \ldots + \alpha_{m1}x_m &= 0, \\ \alpha_{12}x_1 + (\alpha_{22} - \omega)x_2 + \ldots + \alpha_{m2}x_m &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&, \\ \alpha_{1m}x_1 + \alpha_{2m}x_2 + \ldots + (\alpha_{mm} - \omega)x_m &= 0,\end{aligned}$$

qui entraînent la suivante :

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} - \omega & \alpha_{21} & \ldots & \alpha_{m1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} - \omega & \ldots & \alpha_{m2} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \alpha_{1m} & \alpha_{2m} & \ldots & \alpha_{mm} - \omega \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation, à laquelle, vu son importance, nous donnerons désormais le nom d'*équation fondamentale relative au point a*, fournira en général m valeurs pour ω : chacune de ces valeurs portée dans les équations (4) permettra de déterminer des quantités proportionnelles à $x_1, x_2, \ldots, x_m$, et donnera par conséquent une fonction u [1].

19. Les racines de l'équation fondamentale sont indépendantes du choix du système fondamental : cela résulte de ce que les fonctions u qu'elle permet de trouver et les quantités ω qui en dépendent sont, d'après ce que l'on a vu, parfaitement déterminées. Il reste toutefois une légère difficulté lorsqu'elle admet des racines multiples : on aperçoit bien que deux équations relatives à deux systèmes différents ont

[1] En particulier, si cette équation admettait comme racine une solution de l'équation binôme $t^p - 1 = 0$, on obtiendrait une fonction qui reprendrait la même valeur après p tout autour du point singulier, comme une fonction algébrique.

les mêmes racines, mais on ne voit pas que les degrés de multiplicité de ces racines soient les mêmes. On peut d'ailleurs, et dans tous les cas, démontrer directement cette propriété en se fondant sur ce que, dans cette équation, le coefficient de ω^k est la somme des déterminants mineurs principaux du $k^{\text{ième}}$ ordre du déterminant

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \dots & \alpha_{m1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{1m} & \alpha_{2m} & \dots & \alpha_{mm} \end{vmatrix}.$$

On prendra un second système fondamental dont on exprimera les éléments linéairement en $y_1, y_2, \dots, y_m$, puis on calculera les quantités qui, dans la nouvelle équation, remplacent les α, et l'on constatera que les sommes susdites ne changent pas par la substitution (Brioschi, § 7, formule 61).

20. Supposons d'abord les racines de l'équation fondamentale toutes différentes entre elles et désignons-les par $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$: on en déduira, comme il a été expliqué, m fonctions $u_1, u_2, \dots, u_m$ telles que, en général,

$$[u_p]' = \omega_p u_p.$$

Ces m fonctions forment un système fondamental, car s'il existait entre elles une relation à coefficients constants, telle que

$$C_1 u_1 + C_2 u_2 + \dots + C_m u_m = 0,$$

on en conclurait, en faisant tourner la variable autour de a,

$$\begin{gathered} C_1 \omega_1 u_1 + C_2 \omega_2 u_2 + \dots + C_m \omega_m u_m = 0, \\ C_1 \omega_1^2 u_1 + C_2 \omega_2^2 u_2 + \dots + C_m \omega_m^2 u_m = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ C_1 \omega_1^{m-1} u_1 + C_2 \omega_2^{m-1} u_2 + \dots + C_m \omega_m^{m-1} u_m = 0, \end{gathered}$$

d'où

$$\begin{vmatrix} 1 & \omega_1 & \omega_1^2 & \dots & \omega_1^{m-1} \\ 1 & \omega_2 & \omega_2^2 & \dots & \omega_2^{m-1} \\ \cdot & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \omega_m & \omega_m^2 & \dots & \omega_m^{m-1} \end{vmatrix} = 0,$$

ce qui est impossible.

21. Considérons maintenant le cas où ω_1 est une racine multiple : on pourra toujours déterminer une intégrale jouissant de la propriété indiquée par l'équation

$$[u_1]' = \omega_1 u_1.$$

Substituons au système fondamental $y_1, y_2, \ldots, y_m$ celui que l'on en déduit en remplaçant l'une de ces fonctions, y_1 par exemple, par u_1; il suffit pour cela que x_1 ne soit pas nul. Or, en général, les quantités $x_1, x_2, \ldots, x_m$ ne sont pas nulles simultanément, et soient

$$(2)' \quad \left\{\begin{array}{l} [u_1]' = \omega_1 u_1, \\ [y_2]' = \beta_{21} u_1 + \beta_{22} y_2 + \ldots + \beta_{2m} y_m, \\ [y_3]' = \beta_{31} u_1 + \beta_{33} y_2 + \ldots + \beta_{3m} y_m, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ [y_m]' = \beta_{m1} u_1 + \beta_{m2} y_2 + \ldots + \beta_{mm} y_m \end{array}\right.$$

les formules analogues aux formules (2) du § 18; l'équation fondamentale

$$\begin{vmatrix} \omega_1 - \omega & \beta_{21} & \beta_{31} & \ldots & \beta_{m1} \\ 0 & \beta_{22} - \omega & \beta_{32} & \ldots & \beta_{m2} \\ 0 & \beta_{23} & \beta_{33} - \omega & \ldots & \beta_{m3} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \beta_{2m} & \beta_{3m} & \ldots & \beta_{mm} - \omega \end{vmatrix} = 0$$

aura (§ 19) les mêmes racines que celle qui est relative au système $y_1, y_2, \ldots, y_m$: on en conclut que l'équation

$$\begin{vmatrix} \beta_{22} - \omega & \beta_{32} & \ldots & \beta_{m2} \\ \beta_{23} & \beta_{33} - \omega & \ldots & \beta_{m3} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \beta_{2m} & \beta_{3m} & \ldots & \beta_{mm} - \omega \end{vmatrix} = 0$$

admet encore la racine ω_1 et que, par suite, les équations du premier degré en $X_2, X_3, \ldots, X_m$,

$$\begin{array}{l} \beta_{22} X_2 + \beta_{23} X_3 + \ldots + \beta_{2m} X_m = \omega_1 X_2, \\ \beta_{32} X_2 + \beta_{33} X_3 + \ldots + \beta_{3m} X_m = \omega_1 X_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \beta_{m2} X_2 + \beta_{m3} X_3 + \ldots + \beta_{mm} X_m = \omega_1 X_m, \end{array}$$

sont compatibles ; si d'après cela on pose

$$u_2 = X_2 y_2 + X_3 y_3 + \ldots + X_m y_m,$$

on aura pour la valeur que prend u_2 lorsque la variable a fait le tour du point singulier a

$$[u_2]' = (\beta_{21} X_2 + \beta_{31} X_3 + \ldots + \beta_{m1} X_m) u_1 + \omega_1 u_2,$$

ou

$$[u_2]' = \omega_{21} u_1 + \omega_1 u_2,$$

ω_{21} étant une constante. Si ω_1 est une racine triple de l'équation fondamentale primitive, on remarquera qu'au système fondamental $u_1, y_2, \ldots, y_m$ on peut en substituer un autre, obtenu en remplaçant par u_2 l'une des fonctions y, y_2 par exemple. On répétera le raisonnement qui précède pour le système fondamental $u_1, u_2, y_3, \ldots, y_m$; on arrivera ainsi aisément à la proposition suivante :

Si ω_1 est une racine multiple d'ordre λ de l'équation fondamentale, il existera un groupe de λ intégrales $u_1, u_2, \ldots, u_\lambda$ jouissant des propriétés exprimées par les égalités qui suivent :

$$(6) \quad \begin{cases} [u_1]' = \omega_1 u_1, \\ [u_2]' = \omega_{2,1} u_1 + \omega_1 u_2, \\ [u_3]' = \omega_{3,1} u_1 + \omega_{3,2} u_2 + \omega_1 u_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ [u_\lambda]' = \omega_{\lambda,1} u_1 + \omega_{\lambda,2} u_2 + \ldots + \omega_{\lambda,\lambda-1} u_{\lambda-1} + \omega_1 u_\lambda. \end{cases}$$

Si les racines distinctes de l'équation fondamentale sont $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$, et qu'elles soient respectivement d'ordres de multiplicité égaux à $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, on formera ainsi n groupes comprenant en tout $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = m$ intégrales qui, d'après ce qui a été exposé précédemment, constituent un système fondamental d'intégrales de l'équation proposée.

22. Les propriétés que nous venons d'établir, relativement à un système fondamental particulier, nous permettent de trouver des formes sous lesquelles on peut mettre les éléments de ce système dans le domaine du point singulier a.

Soit d'abord une intégrale u_1, telle que l'on ait, après que la variable a fait le tour du point a,

$$[u_1]' = \omega_1 u_1.$$

Posons

$$e^{2\pi r_1\sqrt{-1}} = \omega_1, \quad r_1 = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\log\omega_1,$$

en prenant pour $\log\omega_1$ une quelconque de ses valeurs; la fonction

$$u_1(x-a)^{-r_1}$$

reste uniforme dans le domaine du point a; en la désignant par $\varphi_1(x)$, on pourra poser

$$u_1 = (x-a)^{r_1}\varphi_1(x).$$

Si donc l'équation fondamentale admet m racines distinctes $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$, *il existera un système fondamental dont les éléments pourront être mis sous la forme*

$$u_\alpha = (x-a)^{r_\alpha}\varphi_\alpha(x), \quad \alpha = 1, 2, \ldots, m,$$

où

$$r_\alpha = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\log\omega_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, m.$$

les différences mutuelles des nombres r_a *ne pouvant jamais être entières et les quantités* $\varphi_\alpha(x)$ *représentant des fonctions uniformes de* x *dans le domaine de* a, *développables en doubles séries procédant suivant les puissances entières positives et négatives de* $x - a$ *et convergentes dans le domaine du point* a.

23. Considérons maintenant le cas d'une racine ω_1 multiple, d'ordre λ; il existera alors un groupe d'intégrales $u_1, u_2, \ldots, u_\lambda$, jouissant des propriétés exprimées par les équations (6) du § **21** : la première u_1 sera de la forme

$$u_1 = (x-a)^{r_1}\varphi_{11}(x),$$

où

$$r_1 = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\log\omega_1,$$

et où $\varphi_{11}(x)$ est une fonction uniforme de x. Considérons maintenant la seconde; on a

$$[u_2]' = \omega_{21}u_1 + \omega_1 u_2$$

et, par suite,

$$\left[\frac{u_2}{u_1}\right]' = \frac{\omega_{21}}{\omega_1} + \frac{u_2}{u_1}.$$

(Nous désignerons désormais, comme nous l'avons fait jusqu'ici, par $[f(x)]'$ ce que devient $f(x)$ quand la variable x a fait le tour du point singulier a). Ce point singulier a a, d'après cette dernière égalité, le caractère d'un point singulier *logarithmique* pour la fonction $\frac{u_2}{u_1}$, c'est-à-dire qu'à chaque tour de la variable elle est augmentée d'une quantité constante $\frac{\omega_{21}}{\omega_2}$. Il suit de là que la fonction

$$\frac{u_2}{u_1} - \frac{\omega_{21}}{\omega_1 . 2\pi\sqrt{-1}} \log(x-a)$$

est uniforme dans le domaine du point a; si on la désigne pour un instant par $f(x)$, on pourra poser

$$(8) \qquad \frac{u_3}{u_1} = \frac{\omega_{21}}{\omega_1 . 2\pi\sqrt{-1}} \log(x-a) + f(x).$$

La fonction

$$(x-a)^{-r_1} u_1 f(x)$$

est aussi uniforme; on devra donc prendre u_2 de la forme

$$(9) \qquad u_2 = (x-a)^{r_1}[\varphi_{21}(x) + \varphi_{22}\log(x-a)],$$

les deux fonctions $\varphi_{21}(x)$ et $\varphi_{22}(x)$ étant uniformes et la dernière ne différant de $\varphi_{11}(x)$ que par un facteur constant.

On aura de même, pour la troisième fonction,

$$\left[\frac{u_3}{u_1}\right]' = \frac{\omega_{31}}{\omega_1} + \frac{\omega_{32}}{\omega_1}\frac{u_2}{u_1} + \frac{u_3}{\omega_1},$$

ou, en vertu de l'équation (8),

$$\left[\frac{u_3}{u_1}\right]' = \frac{\omega_{31}}{\omega_1} + \frac{\omega_{32}\,\omega_{21}}{\omega_1^2 . 2\pi\sqrt{-1}} \log(x-a) + \frac{u_3}{u_1} + \frac{\omega_{32}}{\omega_1} f(x).$$

On conclut de là que la fonction $\frac{u_3}{u_1}$ se comporte dans le domaine du point a comme la fonction

$$k[\log(x-a)]^2 + \psi(x)\,[\log(x-a)],$$

où k est une constante et $\psi(x)$ une fonction uniforme qu'il serait aisé de déterminer; on est ainsi amené à mettre u_3 sous la forme

$$(10) \qquad u_3 = (x-a)^{r_1}\left\{\varphi_{31}(x) + \varphi_{32}(x)\log(x-a) + \varphi_{33}[\log(x-a)]^2\right\},$$

où $\varphi_{31}(x)$, $\varphi_{32}(x)$, $\varphi_{33}(x)$ représentent des fonctions uniformes dans le domaine du point a. On pourrait continuer de la sorte; mais les formules (7), (9), (10) font pressentir la loi cherchée et l'on est amené à énoncer le théorème suivant, que nous n'aurons plus qu'à vérifier :

Si ω_1 est une racine multiple d'ordre λ de l'équation fondamentale, il existera un groupe d'intégrales u_1, $u_2, \ldots,$ u_λ jouissant des propriétés définies par les égalités (6) *du* § 21 *et pouvant se mettre sous les formes*

$$(11) \quad \begin{cases} u_1 = (x-a)^{r_1}\varphi_{11}, \\ u_2 = (x-a)^{r_1}[\varphi_{21} + \varphi_{22}\log(x-a)], \\ u_3 = (x-a)^{r_1}\{\varphi_{31} + \varphi_{32}\log(x-a) + \varphi_{32}[\log(x-a)^2\}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ u_\lambda = (x-a)^{r_1}\{\varphi_{\lambda 1} + \varphi_{\lambda 2}\log(x-a) + \ldots + \varphi_{\lambda\lambda}[\log(x-a)]^{\lambda-1}\}, \end{cases}$$

où

$$r_1 = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\log\omega_1,$$

et où φ_{11}, $\varphi_{21}, \ldots,$ $\varphi_{\lambda\lambda}$ sont des fonctions uniformes dans le domaine du point a.

On verra de plus que ces quantités peuvent s'exprimer linéairement au moyen de celles d'entre elles dans lesquelles le second indice est 1 *et que, en particulier, les fonctions φ_{11}, $\varphi_{22}, \ldots,$ $\varphi_{\lambda\lambda}$ ne diffèrent que par des facteurs constants.*

Pour vérifier cette proposition, nous la supposerons vraie lorsqu'on se borne aux $n-1$ premières intégrales u_1, $u_2, \ldots,$ u_{n-1} et nous établirons que la forme considérée subsiste pour u_n.

On a, par les équations (6) du § 21,

$$(12) \qquad [u_n]' = \omega_{n1}u_1 + \omega_{n2}u_2 + \ldots + \omega_{n,n-1}u_{n-1} + \omega_1 u_n;$$

maintenant on peut toujours poser

$$(13) \qquad u_n = (x-a)^{r_1}\left\{\varphi_{n1} + \varphi_{n2}\log(x-a) + \ldots + \varphi_{nn}[\log(x-a)]^{n-1}\right\},$$

en donnant aux fonctions $\varphi_{n2}, \varphi_{n3}, \ldots, \varphi_{nn}$ telles formes que l'on voudra, pourvu que l'on détermine convenablement φ_{n1} : nous allons les exprimer en fonctions linéaires des fonctions φ, dont le premier indice est inférieur à n; elles seront par suite uniformes dans le domaine du point a.

Dans ce but, nous égalerons les coefficients des puissances $1, 2, \ldots, n-1$ de $\log(x-a)$ dans les deux fonctions obtenues : la première en remplaçant dans le second membre de l'équation (12) $u_1, u_2, \ldots, u_n$ par les valeurs que fournissent les équations (11), la seconde en supposant que dans le second membre de l'équation (13) la variable fasse le tour du point a, φ_{n1} se changeant alors en $[\varphi_{n1}]'$ et $\varphi_{n2}, \ldots, \varphi_{nn}$ gardant leurs valeurs primitives : on obtient ainsi, après avoir divisé par $(x-a)^{r_1}$, une équation identique et $n-2$ équations dont le type est le suivant :

$$(14) \qquad \sum_{p=k+2}^{p=n} \omega_1 \frac{(k+1)(k+2)\ldots(p-1)}{1.2\ldots(p-k-1)} (2\pi\sqrt{-1})^{p-k-1} \varphi_{np} = \sum_{p=k+1}^{p=n-1} \omega_{np} \varphi_{p,k+1},$$

pour les valeurs $1, 2, \ldots, n-2$ de k. Ces $n-2$ équations permettent de déterminer $\varphi_{n3}, \varphi_{n4}, \ldots, \varphi_{nn}$ en fonction linéaire des quantités φ, dont le premier indice est inférieur à n, quantités qui sont connues.

Ces équations étant satisfaites, les parties restantes des deux valeurs de $[u_n]'$ doivent être identiques, c'est-à-dire que l'on doit avoir

$$\begin{aligned} &\omega_{n1}\varphi_{11} + \omega_{n2}\varphi_{21} + \ldots + \omega_{n,n-1}\varphi_{n-1,1} + \omega_1\varphi_{n1} \\ &\quad = \left\{[\varphi_{n1}]' + 2\pi\sqrt{-1}\,\varphi_{n2} + (2\pi\sqrt{-1})^2\varphi_{n3} + \ldots + (2\pi\sqrt{-1})^{n-1}\varphi_{nn}\right\}\omega_1; \end{aligned}$$

nous déterminerons φ_{n2} par l'équation

$$\begin{aligned} &\left[2\pi\sqrt{-1}\,\varphi_{n2} + (2\pi\sqrt{-1})^2\varphi_{n3} + \ldots + (2\pi\sqrt{-1})^{n-1}\varphi_{nn}\right]\omega_1 \\ &\quad = \omega_{n1}\varphi_{11} + \omega_{n2}\varphi_{21} + \ldots + \omega_{n,n-1}\varphi_{n-1,1}, \end{aligned}$$

et il restera

$$\varphi_{n1} = [\varphi_{n1}]' :$$

ce qui montre que la fonction φ_{n1} doit être uniforme, ainsi que nous l'avions annoncé.

On voit aussi que les fonctions φ peuvent toutes s'exprimer en fonction linéaire à coefficients constants de celles d'entre elles dont le second indice est l'unité.

En particulier, celle des équations (14) qui correspond au cas où l'on prend $k = n - 2$ donne

$$\omega_1 (n - 1)\, 2\pi \sqrt{-1}\, \varphi_{nn} = \omega_{n,n-1}\, \varphi_{n-1,n-1},$$

d'où

$$\varphi_{nn} = \frac{\omega_{n,n-1} \cdot \omega_{n-1,n-2} \cdots \omega_{21}}{(n-1)(n-2)\ldots 1 \left(\omega_1 2\pi\sqrt{-1}\right)^{n-1}}\, \varphi_{11}:$$

ce sont là les propriétés que nous avons annoncées.

Il y a lieu de remarquer que, si les fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_\lambda$ jouissent des propriétés qu'expriment les équations (6) du paragraphe précédent, on obtiendra un groupe de fonctions jouissant des mêmes propriétés, en remplaçant l'une quelconque u_k de ces fonctions par une combinaison linéaire

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_k u_k$$

de cette fonction et de celles dont l'indice est moindre. Cette remarque nous sera utile.

On peut arriver aux formules (11) d'une façon bien plus rapide, mais moins rigoureuse, en employant un procédé bien connu et qui consiste à passer du cas des racines simples à celui des racines multiples.

Soient, en effet, r le logarithme, divisé par $2\pi\sqrt{-1}$, d'une racine simple de l'équation fondamentale, et

$$(x - a)^r \varphi(x)$$

l'intégrale correspondante : la fonction φ dépend évidemment de r; représentons-la par

$$\varphi(x, r).$$

Supposons qu'une seconde racine de l'équation fondamentale tende vers la première; il existera une seconde intégrale que nous pouvons représenter par

$$(x - a)^{r+h} \varphi(x, r + h),$$

h étant une quantité infiniment petite. La fonction

$$\frac{(x-a)^{r+h}\varphi(x, r+h) - (x-a)^r \varphi(x, r)}{h}$$

est aussi une intégrale; or, lorsque h s'annule, c'est-à-dire lorsque les deux racines deviennent égales, cette quantité devient

$$\frac{\partial}{\partial r}[(x-a)^r \varphi(x, r)] = (x-a)^r \left[\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \varphi \log(x-a)\right].$$

On démontrerait de même que, si une troisième racine devient égale à la première,

$$(x-a)^r \left\{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + 2\frac{\partial \varphi}{\partial r}\log(x-a) + \varphi[\log(x-a)]^2\right\}$$

est encore une intégrale, etc. Nous devions mentionner ce procédé, quand ce ne serait que pour montrer de quelle façon on pouvait découvrir immédiatement les formules (11); il y a lieu de remarquer aussi la façon extrêmement simple dont sont liées entre elles les fonctions qui, dans nos dernières formules, remplacent les quantités $\varphi_{11}, \varphi_{12}, \ldots, \varphi_{nn}$.

IV.

24. Nous nous proposons maintenant d'étudier, parmi les équations différentielles linéaires

$$\frac{d^m y}{dx^m} = p_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + p_2 \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + \ldots + p_m y \tag{1}$$

à coefficients uniformes $p_1, p_2, \ldots, p_m$, celles dont toutes les intégrales jouissent de la propriété de rester finies pour chaque point singulier a, quand on les a préalablement multipliées par une puissance convenable de $x-a$, et aussi pour $x = \infty$, quand on les a multipliées par une puissance convenable de x; mais auparavant il convient d'étudier de plus près les fonctions que nous avons été amené précédemment à introduire comme formes des intégrales d'une équation linéaire à coefficients uniformes, surtout dans le cas où ces fonctions jouissent des propriétés dont nous venons de parler.

25. Nous établirons d'abord le théorème suivant:

Il ne peut exister aucune relation identique de la forme

$$\begin{aligned} &C_0(x-a)^{r_0}\left\{\varphi_{r_0,1} + \varphi_{r_0,2}\log(x-a) + \ldots + \varphi_{r_0,\alpha+1}[\log(x-a)]^{\alpha}\right\} \\ &+ C_1(x-a)^{r_1}\left\{\varphi_{r_1,1} + \varphi_{r_1,2}\log(x-a) + \ldots + \varphi_{r_1,\beta+1}[\log(x-a)]^{\beta}\right\} \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ C_k(x-a)^{r_k}\left\{\varphi_{r_k,1} + \varphi_{r_k,2}\log(x-a) + \ldots + \varphi_{r_k,\lambda+1}[\log(x-a)]^{\lambda}\right\} = 0. \end{aligned}$$

où les r sont des quantités fixes dont les différences ne sont ni nulles, ni entières, où les c sont des constantes et les φ sont des fonctions uniformes dans le voisinage du point a.

Posons, en général,

$$\omega_t = e^{2\pi r_t \sqrt{-1}}, \quad t = 0, 1, 2, \ldots, k;$$

les ω seront des quantités différentes les unes des autres. Supposons que l'on fasse faire à x $k-1$ tours autour de a, on aura k équations du premier degré en C_0, $C_1, \ldots, C_k$, dont le déterminant devra être identiquement nul ; or ce déterminant, développé suivant les puissances entières de $\log(x-a)$, peut se mettre sous la forme

$$(x-a)^{r_0+r_1+\ldots+r_k}\left\{P_0 + P_1 \log(x-a) + \ldots + P_\rho[\log(x-a)]^\rho\right\},$$

les P étant des fonctions uniformes dans le voisinage de a. Chacune de ces fonctions devra être identiquement nulle, sans quoi l'équation

$$P_0 + P_1 z + P_2 z^2 + \ldots + P_\rho z^\rho = 0$$

aurait une infinité de racines. Or la fonction P_ρ est égale, à un facteur constant près différent de zéro, au produit

$$\varphi_{r_0, \alpha+1} \times \varphi_{r_1, \beta+1} \times \ldots \times \varphi_{r_\mu, \lambda+1},$$

qui est différent de zéro ainsi que tous ses facteurs.

Par un raisonnement analogue, on voit que, si

$$V = (x-a)^r\left\{\varphi_0 + \varphi_1 \log(x-a) + \ldots + \varphi_r[\log(x-a)]^r\right\}$$

est une intégrale de l'équation (1), $(x-a)^r\varphi_r$ est aussi une intégrale; car, si l'on substitue dans cette équation que l'on divise par $(x-a)^r$, le coefficient de $[\log(x-a)]^r$ devra être nul dans le résultat. Cette propriété doit être rapprochée de la dernière partie du théorème énoncé dans le § 23.

26. Occupons-nous maintenant des fonctions de la forme

$$F = \left\{\varphi_0 + \varphi_1 \log(x-a) + \ldots + \varphi_n[\log(x-a)]^n\right\}(x-a)^r, \tag{2}$$

qui restent finies, pour $x = a$; quand on les a préalablement multipliées par une puissance convenable de $x-a$, φ_0, $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ sont, comme d'habitude, des fonctions uniformes de x dans le domaine du point a. Si l'on remarque que l'expression

$$(x-a)^p[\log(x-a)]^q,$$

où p est positif, est toujours nulle pour $x=a$, on voit que, pour que F jouisse de la propriété demandée, il faut et il suffit que les fonctions $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$, développées suivant les puissances de $x-a$, ne contiennent qu'un nombre fini de puissances négatives de $x-a$: dès lors, on pourra trouver un nombre r tel, que l'expression

$$(x-a)^{-r}\mathrm{F}$$

soit différente de zéro et ne soit infinie que comme une fonction

$$\mathrm{L}=\alpha+\beta\log(x-a)+\ldots+\lambda[\log(x-a)]^n \tag{3}$$

entière en $\log(x-a)$ et ayant ses coefficients $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ constants.

Dans ces conditions, nous dirons que la fonction F *appartient à l'exposant r.*

27. On aperçoit immédiatement que, si F, F_1 sont deux fonctions appartenant respectivement aux exposants r, r_1, le produit sera une fonction de même nature appartenant à l'exposant $r+r_1$; on aura de plus, en se servant d'une notation déjà expliquée,

$$[\mathrm{F}\times\mathrm{F}_1]'=[\mathrm{F}]'\times[\mathrm{F}_1]', \quad \left[\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{F}_1}\right]'=\frac{[\mathrm{F}]'}{[\mathrm{F}_1]'}, \ldots.$$

Si F *appartient à l'exposant r, $\dfrac{d\mathrm{F}}{dx}$ sera une fonction de même nature, appartenant à l'exposant $r-1$; il y a exception dans le cas où, r étant nul,* F *n'est pas infini pour $x=a$.*

Soit, en effet,

$$\mathrm{F}=(x-a)^r\{\varphi_0+\varphi_1\log(x-a)+\ldots+\varphi_p[\log(x-a)]^p+\ldots+\varphi_n[\log(x-a)]^n\},$$

les fonctions $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ ne contenant dans leur développement que des puissances entières et positives de $x-a$, et ne s'annulant pas à la fois pour $x=a$, on aura

$$\begin{aligned}\frac{d\mathrm{F}}{dx}=\ldots&+(x-a)^{r-1}[r\varphi_p+(p+1)\varphi_{p+1}+(x-a)\varphi'_p][\log(x-a)]^p+\ldots\\&+(x-a)^{r-1}[r\varphi_n+(x-a)\varphi'_n][\log(x-a)]^n,\end{aligned}$$

φ'_p désignant la dérivée par rapport à x de φ_p; il s'agit d'établir que les coefficients des différentes puissances de $\log(x-a)$ ne sont pas nuls à la fois pour $x=a$; s'ils étaient tous nuls, on aurait, pour cette même valeur de x,

$$r\varphi_p + (p+1)\varphi_{p+1} = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$
$$r\varphi_n = 0.$$

L'ensemble de ces égalités montre clairement que toutes les fonctions $\varphi_n, \ldots, \varphi_p, \ldots, \varphi_0$ devraient être nulles à la fois, ce qui est contraire à l'hypothèse : cette conclusion, toutefois, ne subsiste pas dans le cas où r est nul; il suffit alors, pour que tous les coefficients des différentes puissances de $\log(x-a)$ soient nuls, que l'on ait

$$\varphi_n = 0, \quad \varphi_{n-1} = 0, \ldots, \quad \varphi_1 = 0,$$

pour $x=a$; si donc cette circonstance se présente, c'est-à-dire si, pour $x=a$, F se réduit à la valeur finie et non nulle de φ_0, il y aura bien exception à notre théorème; alors $\frac{dF}{dx}$ appartiendra à l'exposant zéro ou, dans certains cas, à un exposant entier positif.

En disposant convenablement de la constante introduite par l'intégration, on peut faire que l'expression

$$\int F\,dx,$$

où F *appartient à l'exposant* r, *soit une fonction de même nature que* F, *appartenant à l'exposant* $r+1$.

Il suffit de se reporter à la règle de l'intégration par parties pour reconnaître que $\int F\,dx$ est de même nature que F, au moins lorsque l'on choisit convenablement la constante d'intégration : maintenant, que cette fonction appartienne à l'exposant $r+1$, cela résulte du théorème précédent; il ne peut y avoir de difficulté que dans le cas où la fonction $\int F dx$, de même nature que F, se trouverait dans le cas d'exception; mais alors, en modifiant la constante de manière que $\int F dx$ s'annule pour $x=a$, cette fonction appartiendra nécessairement à un exposant entier positif, et F à l'exposant moindre d'une unité.

Remarquons encore que l'on a

$$\left[\frac{dF}{dx}\right]' = \frac{d[F]'}{dx} \quad \int[F\,dx]' = \int [F]'dx + \text{const.}$$

28. Supposons que, dans le domaine du point singulier $x = a$, toutes les intégrales $y_1, y_2, \ldots, y_m$ de l'équation

$$(1) \qquad \frac{d^m y}{dx^m} = p_1 \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + p_2 \frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} + \ldots + p_m y$$

soient de même nature que la fonction F [§ 26, équation (2)] et appartiennent respectivement aux exposants $r_1, r_2, \ldots, r_m$; supposons de plus ces intégrales groupées comme il a été expliqué dans le § 23, chaque groupe correspondant à une racine distincte de l'équation fondamentale.

Reprenons maintenant la méthode et les notations expliquées dans le § 13; on peut évidemment diriger le calcul et choisir les intégrales $y_1, z_1, t_1, \ldots, w_1$ des équations successives de manière à tomber sur le système fondamental $y_1, y_2, \ldots, y_m$. On reconnaîtra aisément que les diverses intégrales $y_1, z_1, t_1, \ldots, w_1$ sont des fonctions de même nature que F, mais ne contenant pas de logarithmes et appartenant, si l'on a convenablement choisi le système fondamental, aux exposants r_1, $r_2 - r_1 - 1$, $r_3 - r_2 - 1, \ldots$; si, par exemple, les λ premières intégrales $y_1, y_2, \ldots, y_\lambda$ coïncident avec le groupe $u_1, u_2, \ldots u_\lambda$ [§ 21, équation (6), et § 23, équation (11)], on aura

$$z_1 = \frac{d}{dx}\frac{u_2}{u_1},$$

d'où

$$[z_1]' = \frac{d}{dx}\left[\frac{u_2}{u_1}\right]' = \frac{d}{dx}\frac{\omega_{21}u_1 + \omega_1 u_2}{\omega_1 u_1} = \frac{d}{dx}\left[\frac{u_2}{u_1}\right] = z_1,$$

ce qui montre que z_1 est uniforme; de plus, l'équation qui définit cette quantité montre qu'elle appartient à l'exposant $r_2 - r_1 - 1$, sauf dans le cas où $\frac{u_2}{u_1}$ se trouverait être dans le cas d'exception signalé dans le paragraphe précédent; on devra alors substituer à u_2 une combinaison de u_2 et de u_1 telle, que

$$u_2 + Cu_1$$

(C étant une constante) appartienne à un exposant r'_2 supérieur à $r_1 = r_2$, ce qui est toujours possible; alors la nouvelle valeur de z_1 appartiendra bien à l'exposant $r'_2 - r_1 - 1$. Posons maintenant pour un instant

$$z_2 = \frac{d}{dx}\frac{u_3}{u_1} = z_1 \int t_1 dx,$$

$$z_3 = \frac{d}{dx}\frac{u_4}{u_1} = z_1 \int t_1 dx \int u_1 dx,$$

$$\ldots\ldots \ldots\ldots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$z_{\lambda-1} = \frac{d}{dx}\frac{u_\lambda}{u_1} = z_1 \int t_1 dx \int u_1 dx, \ldots;$$

les fonctions $z_2, z_3, \ldots, z_{\lambda-1}$ sont de même nature que F [§ **26**, équation (2)], jouissent de propriétés analogues à celles de $u_1, u_2, \ldots, u_\lambda$ [§ **21**, équation (6)] et appartiennent aux exposants respectifs $r_3 - r_1 - 1$, $r_4 - r_1 - 1, \ldots, r_\lambda - r_1 - 1$, au moins si l'on a choisi convenablement les intégrales $u_1, u_2, \ldots, u_\lambda$; rien donc n'empêche de raisonner sur $z_1, z_2, \ldots, z_{\lambda-1}$ comme sur $u_1, u_2, \ldots, u_\lambda$. Ainsi on aura

$$t_1 = \frac{d}{dx}\frac{z_2}{z_1},$$

et t_1 sera une fonction uniforme, appartenant à l'exposant

$$r_3 - r_1 - 1 - (r_2 - r_1 - 1) - 1 = r_3 - r_2 - 1,$$

à moins que l'on n'ait $r_3 = r_2$ et que $\frac{z_2}{z_1}$ se trouve dans le cas d'exception; alors on substituera à z_2 une combinaison linéaire à coefficients constants de z_1 et z_2 qui appartienne à un exposant supérieur à r_3 : cela reviendra à substituer à u_3 une combinaison linéaire de u_3, u_2 et u_1; ce qui (§ **23**, remarque finale) n'offre pas d'inconvénient. En continuant de la sorte, on reconnaîtra aisément les propriétés annoncées; on reconnaîtra de plus que, parmi les intégrales $y_1, z_1, \ldots, w_1$, qui correspondent à un même groupe d'intégrales du système fondamental, la première est la seule à ne pas être uniforme; cela résulte d'ailleurs de ce que ces fonctions ne contiennent pas de logarithmes et de ce que, en outre, les exposants auxquels elles appartiennent sont des nombres entiers.

Remarquons encore que, d'après ce qui précède, les fonctions

$$y_1, \quad y_1 z_1, \quad y_1 z_1 t_1, \ldots, \quad y_1 z_1 t_1, \ldots, \quad w_1$$

appartiennent respectivement aux exposants

$$r_1,\ r_2 - 1,\ r_3 - 2, \ldots,\ r_m - (m-1),$$

et que, par suite, leur produit

$$y_1^m z_1^{m-2} \ldots w_1$$

appartient à l'exposant

$$r_1 + r_2 + \ldots + r_m - \frac{m(m-1)}{2}.$$

Or ce produit (§ 14) ne diffère que par un facteur constant, non nul, du déterminant

$$D = \begin{vmatrix} \dfrac{d^{m-1}y_1}{dx^{m-1}} & \dfrac{d^{m-2}y_1}{dx^{m-2}} & \ldots & y_1 \\ \dfrac{d^{m-1}y_2}{dx^{m-1}} & \dfrac{d^{m-2}y_2}{dx^{m-2}} & \ldots & y_2 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{d^{m-1}y_m}{dx^{m-1}} & \dfrac{d^{m-2}y_m}{dx^{m-2}} & \ldots & y_m \end{vmatrix}.$$

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Le déterminant D *peut toujours être mis sous la forme*

$$D = (x-a)^{r_1 + r_2 + \ldots + r_m - \frac{m(m-1)}{2}} \psi(x),$$

$\psi(x)$ *étant une fonction uniforme et continue dans le domaine du point et différente de zéro pour* $x = a$.

Nous avons insisté plusieurs fois, dans le courant de la démonstration, sur la nécessité de choisir convenablement le système fondamental y_1, $y_2, \ldots, y_m$ lorsque les exposants $r_1, r_2, \ldots, r_m$ ne sont pas tous différents : dans ce choix, en effet, la proposition cesserait d'être vraie. Ainsi l'équation

$$2x^2(x-2)\frac{d^2y}{dx^2} - x(x-4)\frac{dy}{dx} + (x-3)y = 0$$

admet comme solutions les deux fonctions $\sqrt{x}$ et $\sqrt{x^2 - 2x}$, qui appartiennent toutes les deux, relativement au point singulier O, à l'exposant $\frac{1}{2}$; et le déterminant

$$D = \frac{-x}{2\sqrt{x-2}}$$

appartient à l'exposant 1 et non à l'exposant zéro que donnerait la formule précédente imprudemment appliquée; mais si l'on choisit le système fondamental

$$\sqrt{x}, \quad \sqrt{x^2-2x}-\sqrt{-2}\sqrt{x}=\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x-2}+\sqrt{-2}\sqrt{x}},$$

dont les éléments appartiennent aux exposants $\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{2}$, le théorème s'appliquera sans difficulté.

Nous avons supposé jusqu'ici le point a à distance finie; on pourra toujours ramener le point ∞ de la sphère à coïncider avec l'origine au moyen d'un changement de variable (§ 15); on peut aussi le traiter directement : on trouvera alors une série de théorèmes analogues aux précédents et sur lesquels il est inutile d'insister. Ainsi :

Lorsqu'une fonction F *sera telle que l'on ait*

$$x^{-\alpha}F=\varphi_0+\varphi_1\log x+\varphi_2(\log x^2)+\ldots+\varphi_n(\log x)^n,$$

$\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ *étant dans le domaine du point* ∞ *des fonctions uniformes et continues qui ne sont pas toutes nulles à la fois, on dira que* F *appartient à l'exposant* α; $\frac{dF}{dx}$ *appartiendra à l'exposant* $\alpha-1$, *sauf les cas d'exception;* $\int F\,dx$, *si l'on choisit convenablement la constante, appartiendra à l'exposant* $\alpha+1$.

Si $y_1, y_2, \ldots, y_m$ *sont les éléments d'un système fondamental de solutions appartenant aux exposants* $r_1, r_2, \ldots, r_m$, *et si ce système est convenablement choisi, le déterminant* D *pourra être mis sous la forme*

$$D=x^{r_1+r_2+\ldots+r_m-\frac{m(m-1)}{2}}\chi(x),$$

$\chi(x)$ *étant, dans le domaine du point* ∞, *une fonction uniforme et continue, différente de zéro pour* $x=\infty$.

29. Il est maintenant bien aisé de découvrir la forme des équations différentielles linéaires dont toutes les intégrales sont dans le domaine du point singulier a, de la même nature que la fonction F [§ 26, équation (2)]. Nous appliquerons la même méthode qu'au § 17. Soient y_1, $y_2, \ldots, y_m$ les éléments d'un système fondamental d'intégrales, choisis et groupés comme il a été expliqué dans les paragraphes précédents : on résoudra par rapport à $p_1, p_2, \ldots, p_m$ le système d'équations du premier degré

$$\frac{d^m y_1}{dx^m} = p_1 \frac{d^{m-1} y_1}{dx^{m-1}} + p_2 \frac{d^{m-2} y_1}{dx^{m-2}} + \ldots + p_m y_1,$$
$$\frac{d^m y_2}{dx^m} = p_1 \frac{d^{m-1} y_2}{dx^{m-1}} + p_2 \frac{d^{m-2} y_2}{dx^{m-2}} + \ldots + p_m y_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$
$$\frac{d^m y_m}{dx^m} = p_1 \frac{d^{m-1} y_m}{dx^{m-1}} + p_2 \frac{d^{m-2} y_m}{dx^{m-2}} + \ldots + p_m y_m,$$

d'où l'on tirera, en conservant les notations du § 17,

$$p_\alpha = \frac{D_\alpha}{D}.$$

Or, lorsque la variable fait le tour du point singulier a, les déterminants D_α et D sont multipliés par un même déterminant R, dont les éléments sont les coefficients de la substitution linéaire qui permet d'exprimer les nouvelles valeurs de $y_1, y_2, \ldots, y_m$ au moyen des anciennes.

Il en résulte que, si l'on pose

$$\tau = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \log R,$$

D et D_α seront respectivement de la forme

$$D = (x-a)^{n+\tau}\psi(x),$$
$$D_\alpha = (x-a)^{n'+\tau}\psi'(x),$$

n et n' étant des nombres entiers, $\psi(x)$ et $\psi'(x)$ des fonctions uniformes dans le domaine du point a (ceci avait d'ailleurs été établi pour D). Si donc on développait les deux déterminants D_α et D, les logarithmes disparaîtraient complétement. Cela posé, soient $r_1, r_2, \ldots, r_m$ les exposants auxquels appartiennent respectivement $y_1, y_2, \ldots, y_m$; multiplions chacun des éléments des déterminants D_α et D par une puissance de $x - a$ égale à $-$ l'exposant auquel appartient cet élément : cet exposant étant calculé par le théorème du § 27, sans tenir compte du cas d'exception, cela reviendra à multiplier D_α par

$$(x-a)^{-\left[\sum\limits_{i=1}^{i=m} r_i - \frac{m(m-1)}{2} - \alpha\right]},$$

et D par

$$(x-a)^{-\left[\sum\limits_{i=1}^{i=m} r_i - \frac{m(m-1)}{2}\right]}.$$

Les deux déterminants ainsi modifiés et ne contenant pas de logarithmes seront nécessairement des fonctions uniformes et continues de x dans le domaine de a, car leurs éléments appartiennent (§ 27) aux exposants supposés ou à des exposants plus forts de nombres entiers positifs; de plus le second ne sera pas nul, pour $x=a$ en vertu du paragraphe précédent : il en résulte que le quotient $p_\alpha(x-a)^\alpha$ est une fonction de x uniforme et continue dans le domaine du point a; elle peut être nulle pour $x=a$, mais jamais infinie; représentons-la par $P_\alpha(x)$, on aura

$$p_\alpha = \frac{P_\alpha(x)}{(x-a)^\alpha}.$$

Donc :

Si toutes les intégrales d'une équation différentielle linéaire, dont les coefficients satisfont aux conditions d'uniformité et de continuité posées au commencement de ce chapitre, restent finies pour $x=a$, quand on les multiplie par une puissance convenable de $x-a$, cette équation est de la forme

$$\frac{d^m y}{dx^m} = \frac{P_1(x)}{x-a}\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \frac{P_2(x)}{(x-a)^2}\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} + \dots + \frac{P_m(x)}{(x-a)^m}y,$$

$P_1(x), P_2(x), \dots, P_m(x)$ *étant des fonctions uniformes et continues dans le domaine du point singulier a.*

Si cette propriété doit subsister pour tous les points singuliers a_1, $a_2, \dots, a_\rho$, l'équation devra d'après cela être de la forme

$$\frac{d^m y}{dx^m} = \frac{P_1(x)}{\psi(x)}\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \frac{P_2(x)}{[\psi(x)]^2}\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} + \dots + \frac{P_m(x)}{[\psi(x)]^m}y,$$

$P_1(x), P_2(x), \dots, P_m(x)$ étant des fonctions uniformes et continues dans tout le plan et $\psi(x)$ représentant le produit $(x-a_1), (x-a_2), \dots,$

$(x - a_\rho)$. Si l'on veut enfin que dans le domaine du point ∞ les intégrales multipliées par une puissance convenable de x restent finies, on reconnaîtra, par un procédé tout semblable à celui que nous avons employé, que $p_\alpha x^\alpha$ doit rester fini pour $x = \infty$; il en doit donc être de même de

$$\frac{P_\alpha(x)}{[\psi(x)]^\alpha} x^\alpha.$$

Or $[\psi(x)]^\alpha$ est du degré $\alpha\rho$: donc, pour $x = \infty$, $P_\alpha(x)$ doit être infini comme $x^{\alpha(\rho-1)}$; sur tout le reste de la sphère. $P_\alpha(x)$ étant une fonction continue et uniforme, on voit que $P_\alpha(x)$ est un polynôme entier en x de degré $\alpha(\rho - 1)$ au plus; on en conclut que :

Les équations différentielles linéaires à coefficients uniformes, dont les intégrales n'ont qu'un nombre fini de points singuliers $a_1, a_2, \ldots, a_\rho$, restent finies pour chacun de ces points singuliers a_i quand on les a préalablement multipliées par une puissance de $x - a_i$, et pour $x = \infty$, quand on les multiplie par une puissance convenable de x, elles sont de la forme

$$\frac{dy^m}{dx^m} = \frac{F_{\rho-1}(x)}{\psi(x)} \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \frac{F_{2(\rho-1)}(x)}{[\psi(x)]^2} \frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} + \ldots + \frac{F_{m(\rho-1)}(x)}{[\psi(x)]^m} y,$$

où

$$\psi(x) = (x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_\rho),$$

et où

$$F_{(\rho-1)}(x), \quad F_{2(\rho-1)}(x), \ldots, \quad F_{m(\rho-1)}(x)$$

désignent des polynômes entiers en x de degré marqué par l'indice, ou d'un degré moindre.

29. Nous allons maintenant établir la réciproque de cette importante proposition; nous l'énoncerons ainsi :

L'équation différentielle linéaire

$$(1) \qquad \frac{d^m y}{dx^m} = \frac{P_1(x)}{x - a} \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \frac{P_2(x)}{(x-a)^2} \frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} + \ldots + \frac{P_m(x)}{(x - a)^m} y,$$

où les fonctions $P_1(x)$, $P_2(x)$,..., $P_m(x)$ sont des fonctions uniformes et continues dans le domaine du point a, admet dans le domaine de ce même point un système fondamental d'intégrales dont tous les éléments restent *finis pour $x = a$ quand on les a préalablement multipliés par une puissance convenable de $x - a$.*

Il résulte de l'étude précédente que, s'il en est ainsi, l'équation différentielle (1) devra admettre une solution de la forme

$$y = (x - a)^r \varphi(x), \tag{2}$$

$\varphi(x)$ étant une fonction uniforme et continue dans le domaine du point a.

Si nous faisons dans l'équation (1)

$$y = (r - a)^r u,$$

elle prendra la forme analogue

$$\frac{d^m u}{dx^m} = \frac{P'_1(x)}{x-a}\frac{d^{m-1}u}{dx^{m-1}} + \frac{P'_2(x)}{(x-a)^2}\frac{d^{m-2}u}{dx^{m-2}} + \ldots + \frac{P'_m(x)}{(x-a)^m}u, \tag{3}$$

en posant

$$\left\{\begin{aligned} P'_j(x) = &- \frac{m(m-1)\ldots(m-j+1)}{1.2.3\ldots j} r(r-1)\ldots(r-j+1) \\ &+ \frac{(m-1)(m-2)\ldots(m-j+1)}{1.2.3\ldots(j-2)} r(r-1)\ldots(r-j+2)P_1(x) \\ &+ \frac{(m-2)(m-3)\ldots(m-j+1)}{1.2.3\ldots(j-2)} r(r-1)\ldots(r-j+3)P_2(x) \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ \frac{m-j+1}{1} rP_{j-1}(x) + P_j(x). \end{aligned}\right. \tag{4}$$

Or, si l'équation (1) admet la solution (2), l'équation (3) devra admettre la solution

$$y = \varphi(x) = C_0 + C_1(x-a) + C_2(x-a)^2 + \ldots,$$

$C_0, C_1, C_2, \ldots$ étant des constantes dont la première est essentiellement différente de zéro : si l'on substitue cette valeur de y dans l'équation (3) et qu'on égale à zéro le coefficient de $(x - a)^{-m}$, on trouvera

$$P'_m(a)C_0 = 0, \quad \text{d'où} \quad P'_m(a) = 0,$$

c'est-à-dire que r doit être racine de l'équation

$$(5) \left\{ \begin{aligned} & r(r-1)(r-2)\ldots(r-m+1) - r(r-1)\ldots(r-m+2)\,P_1(a) \\ & \quad - r(r-1)\ldots(r-m+3)\,P_2(a) - \ldots - r\,P_{m-1}(a) - P_m(a) = 0. \end{aligned} \right.$$

Cette équation joue le plus grand rôle dans toute notre théorie; comme nous le verrons plus tard, ses racines sont les logarithmes divisés par $2\pi\sqrt{-1}$ des racines de l'équation fondamentale relative au point a.

Ce sont de plus les exposants auxquels appartiennent les éléments d'un système fondamental dont les groupes analogues au groupe (11) du § 23 jouissent des propriétés définies par les équations (6) du § 21. A ces titres, M. Fuchs a donné à cette équation le nom d'*équation fondamentale déterminante relative au point singulier a*.

Nous établirons immédiatement quelques propriétés de cette équation, propriétés qui nous serviront à démontrer la proposition fondamentale que nous venons d'énoncer.

Remarquons d'abord que si $P_m(x)$ et, par suite, $P_m(a$, sont nuls, l'équation (5) est divisible par r; si l'on opère cette division et que l'on change ensuite r en $r+1$, on obtiendra l'équation fondamentale déterminante relative à l'équation d'ordre $m-1$, obtenue en prenant pour inconnue $\frac{dy}{dx}$.

On aperçoit encore immédiatement que, si l'on pose dans l'équation différentielle

$$y = \varphi(x)\,u,$$

$\varphi(x)$ étant une fonction uniforme et continue de x, dans le domaine du point a, différente de zéro pour $x = a$, l'équation fondamentale déterminante relative à l'équation différentielle en u sera la même que celle relative à l'équation en y, car les quantités désignées par $P_1(a)$, $P_2(a), \ldots, P_m(a)$ ont les mêmes valeurs dans les deux équations.

Si dans l'équation (1) on fait

$$y = (x-a)^{r_1}u,$$

les racines de l'équation fondamentale déterminante relative à l'équation en u seront celles de l'équation fondamentale déterminante relative à l'équation en y, diminuées de r_1.

Désignons, en effet, par $f(r)$ le premier membre de l'équation (5), l'équation en ρ

$$(5\,bis) \qquad f(\rho + r_1) = 0$$

aura pour racines les racines de l'équation (5) diminuées de r_1. Effectuons l'opération indiquée sur un terme de l'équation (5), par exemple sur le terme

$$r(r-1)\ldots(r-m+i+1)\,\mathrm{P}_i(a),$$

que nous écrirons

$$\overset{m-i}{[r]}\,\mathrm{P}_i(a),$$

en faisant, en général,

$$\overset{p}{[u]} = u(u-1)\ldots(u-p+1);$$

en vertu d'une formule bien connue, on a toujours

$$\overset{p}{[u+v]} = \sum_{k=0}^{k=p} \frac{p(p-1)\ldots(p-k+1)}{1.2.3\ldots k} \overset{p-k}{[u]}\,\overset{k}{[v]}.$$

On aura donc

$$\overset{m-i}{[\rho+r_1]}\mathrm{P}_i(a) = \mathrm{P}_i(a) \sum_{k=0}^{k=m-i} \frac{(m-i)(m-i+1)\ldots(m-i-k+1)}{1.2.3\ldots k}$$
$$\times \rho(\rho-1)\ldots(\rho-m+i+k+1) \times r_1(r_1-1)\ldots(r_1-k+1).$$

Le premier membre de l'équation (5 *bis*) sera une somme de tels termes; or, si l'on réunit tous ceux dans lesquels

$$i + k = j,$$

on trouvera pour leur somme, en tenant compte de l'équation (4) du § 29,

$$\rho(\rho-1)\ldots(\rho-m+j+1)\,\mathrm{Q}_j(a),$$

en convenant de faire

$$\mathrm{Q}_0(a) = -1;$$

l'équation (5 *bis*) sera donc

$$\sum_{j=0}^{j=m} \rho(\rho-1)\ldots(\rho-m+j+1)\,\mathrm{Q}_j(a) = 0,$$

c'est-à-dire précisément l'équation fondamentale déterminante relative à l'équation différentielle en u.

Il suit de ces diverses propositions que si, dans l'équation (1), on fait

$$y = \varphi(x) \int z\, dx,$$

où $\varphi(x)$ est une intégrale de la forme $(x-a)^{r_1} f(x)$, $f(x)$ étant une fonction uniforme et continue de a, différente de zéro pour $x = a$, l'équation fondamentale déterminante relative à l'équation différentielle en z aura pour racines les diverses racines de l'équation fondamentale déterminante relative à l'équation différentielle en y diminuées de $r+1$.

30. Nous allons maintenant, relativement à l'équation fondamentale déterminante (5), établir la proposition suivante :

Soient $r_1, r_2, \ldots, r_m$ les m racines de cette équation rangées de manière qu'aucune des quantités $r_2 - r_1 - 1, r_3 - r_1 - 1, \ldots, r_m - r_1 - 1$ ne soit ni nulle, ni égale à un entier positif, condition qui sera remplie, en particulier, si les parties réelles ne vont jamais en croissant, quand on passe d'une racine à la suivante; l'équation différentielle (1) *admettra une solution de la forme*

$$y = (x-a)^{r_1} \varphi(x)$$

où $\varphi(x)$ représente une fonction uniforme et continue dans le domaine du point a, différente de zéro pour $x = a$.

Faisons, en effet, dans l'équation (1), la substitution

$$y = (x-a)^{r_1} u,$$

elle deviendra

$$(6)\quad \frac{d^m u}{dx^m} = \frac{Q_1(x)}{x-a}\frac{d^{m-1}u}{dx^{m-1}} + \frac{Q_2(x)}{(x-a)^2}\frac{d^{m-2}u}{dx^{m-2}} + \ldots + \frac{Q_{m-1}(x)}{(x-a)^{m-1}}\frac{du}{dx} + \frac{Q_m(x)}{(x-a)^{m-1}}u,$$

où $Q_1(x)$, $Q_2(x), \ldots, Q_{m-1}(x)$ se déduisent de $P'_1(x)$, $P'_2(x), \ldots, P'_{m-1}(x)$, en affectant r de l'indice 1, et où

$$Q_m(x) = \frac{P'_m(x)}{x-a}.$$

$Q_m(x)$ sera par hypothèse une fonction continue et uniforme de x

dans le domaine de a. Nous allons chercher à satisfaire à l'équation (6) par une série de la forme

$$u = C_0 + C_1(x-a) + C_2(x-a)^2 + \ldots.$$

Pour cela nous l'écrirons de la façon suivante :

$$(6\ bis)\quad \left\{\begin{aligned} &(x-1)^{m-1}\frac{d^m u}{dx^m} - Q_1(a)(x-a)^{m-2}\frac{d^{m-1}u}{dx^{m-1}} \\ &\qquad - Q_2(a)(x-a)^{m-3}\frac{d^{m-2}u}{dx^{m-2}} - \ldots - Q_{m-1}(a)\frac{du}{dx} \\ &= Q'_1(x)(x-a)^{m-1}\frac{d^{m-1}u}{dx^{m-1}} - Q'_2(x)(x-a)^{m-2}\frac{d^{m-2}u}{dx^{m-2}} - \ldots \\ &\qquad - Q'_{m-1}(x)(x-a)\frac{du}{dx} - Q_m(x)\,u, \end{aligned}\right.$$

en faisant, en général,

$$Q'_i(x) = \frac{Q_i(x) - Q_i(a)}{x-a}.$$

Si maintenant on substitue à la place de u dans l'équation (6 *bis*) la série

$$C_0 + C_1(x+a) - \ldots$$

et que l'on égale à zéro le coefficient de $(x-a)^k$, on trouvera l'équation

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} &[(k+1)k\ldots(k-m+2) - (k+1)k(k-1)\ldots(k-m+3)Q_1(a) \\ &\qquad -(k+1)k\ldots(k-m+4)Q_2(a) - \ldots - (k+1)Q_{m-1}(a)]C_{k+1} \\ &= A_{k0}C_k + A_{k1}C_{k-1} + \ldots + A_{kk}C_0, \end{aligned}\right.$$

les A étant formés au moyen de quantités numériques et des coefficients des développements des fonctions $Q'(x)$, suivant les puissances ascendantes de $x-a$, par les seules opérations d'addition et de multiplication.

Pour que cette équation puisse servir à déterminer successivement les coefficients de la série, il faut d'abord que le coefficient de C_{k+1} ne s'annule pour aucune valeur entière et positive de k. Or l'équation obtenue en annulant ce coefficient

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} &(k+1)k(k-1)\ldots(k-m+2) \\ &\qquad -(k+1)k\ldots(k-m+3)Q_1(a) - \ldots - (k+1)Q_{m-1}(a) = 0 \end{aligned}\right.$$

n'est autre que l'équation fondamentale déterminante relative à l'équation (6), divisée par r et dans laquelle on a changé r en $k+1$. Ces racines seront donc

$$r_2 - r_1 - 1, \quad r_3 - r_1 - 1, \ldots, \quad r_m - r_1 - 1,$$

et par conséquent ne seront ni nulles ni égales à un entier positif : le coefficient de C_{k+1} dans l'équation (7) ne pourra donc s'annuler pour aucune valeur entière et positive de k, et l'on pourra déterminer de proche en proche les coefficients d'une série qui, mise à la place de u dans le premier membre de l'équation (6), le rendrait identiquement nul; il reste à prouver la convergence de cette série dans le domaine du point a.

Pour cela, nous la comparerons à une autre série dont la convergence apparaîtra aisément et qui satisfera à l'équation analogue à l'équation (6 *bis*),

$$(9)\left\{\begin{aligned} &\gamma_1(x-a)^{m-2}\frac{d^{m-1}v}{dx^{m-1}} + \gamma_2(x-a)^{m-3}\frac{d^{m-2}v}{dx^{m-2}} + \ldots + \gamma_{m-1}\frac{dv}{dx} \\ &\quad = \frac{M_1}{1-\dfrac{x-a}{r}}(x-a)^{m-1}\frac{d^{m-1}v}{dx^{m-1}} + \frac{M_2}{1-\dfrac{x-a}{r}}(x-a)^{m-2}\frac{d^{m-2}v}{dx^{m-2}} + \ldots \\ &\qquad + \frac{M_m}{1-\dfrac{x-a}{r}}v. \end{aligned}\right.$$

Dans cette équation, $M_1, M_2, \ldots, M_m$ sont les modules maxima des fonctions $Q'_1(x), Q'_2(x), \ldots, Q_m(x)$ dans le domaine du point a, r le rayon du cercle qui limite ce domaine et $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m$ des constantes positives quelconques, telles cependant que l'équation en k

$$(k+1)k\ldots(k-m+3)\gamma_1 + (k+1)k\ldots(k-m+4)\gamma_2 + \ldots + (k+1)\gamma_{m-1} = 0$$

n'ait pas de racines entières positives.

Il est d'abord aisé de prouver que l'équation (9) admet comme solution une série à coefficients positifs

$$(10) \qquad v = \sum_0^\infty g_\alpha (x-a)^\alpha,$$

où g_0 est différent de zéro et qui est convergente dans les environs du point a.

Si, en effet, on substitue cette série à la place de r dans l'équation (9) multipliée par $1 - \frac{x-a}{r}$ et que l'on égale à zéro le coefficient de $(x-a)^k$, on trouvera

$$\begin{aligned}
&[(k+1)k\ldots(k-m+3)\gamma_1 + (k+1)k\ldots(k-m+4)\gamma_2 + \ldots + (k+1)\gamma_{m-1}]g_{k+1} \\
&\quad = \left[k(k-1)\ldots(k-m+2)\left(\frac{\gamma_1}{r}+\mathrm{M}_1\right) + k(k-1)\ldots(k-m+3)\left(\frac{\gamma_2}{r}+\mathrm{M}_2\right)\right. \\
&\qquad\qquad \left. + k\left(\frac{\gamma_{m-1}}{r}+\mathrm{M}_{m-1}\right) + \mathrm{M}_m\right]g_k,
\end{aligned}$$

d'où

$$\lim \frac{g_{k+1}}{g_k}\ (\text{pour } \mathrm{K} = \infty) = \frac{\gamma_1 + r\mathrm{M}_1}{\gamma_1 r}.$$

Si donc on prend

$$\text{mod.}\,(x-a) < \frac{r\gamma_1}{\gamma_1 + r\mathrm{M}_1},$$

la série sera convergente.

Si maintenant on substitue la même série (10) à la place de r dans l'équation (9) elle-même et que l'on égale à zéro le coefficient de $(x-a)^k$, on trouvera l'équation

$$(11)\quad \begin{cases} [(k+1)k\ldots(k-m+3)\gamma_1 + (k+1)k\ldots(k-m+4)\gamma_2 + \ldots + (k+1)\gamma_{m-1}]g_{k+1} \\ \quad = \mathrm{B}_{k0}\,g_k + \mathrm{B}_{k1}\,g_{k-1} + \ldots + \mathrm{B}_{kk}\,g. \end{cases}$$

Les quantités positives B_{ki} étant formées avec les quantités positives M, comme les quantités A_{ki} de l'équation (7), le sont avec les coefficients des développements des fonctions $\mathrm{Q}'(x)$ selon les puissances ascendantes de $x-a$: il suit de là que l'on a, en général,

$$\mathrm{B}_{ki} > \text{mod.}\,\mathrm{A}_{ki}.$$

Si, en outre, g_0 est positif, il en sera de même de $g_1, g_2, \ldots, g_h$. Maintenant, si l'on compare les équations (7) et (11), on voit de suite que, au moins à partir d'une certaine limite t, le coefficient de C_{k+1} est toujours supérieur au coefficient de g_{h+1}. Si donc, pour k inférieur à t, on a toujours

$$(12) \qquad \text{mod.}\, C_k < g_k,$$

cette inégalité subsistera certainement pour k supérieur à t.

Supposons que l'on tire des équations (7) et (11)

$$C_k = \mathcal{A}_k C_0, \quad g_k = \mathcal{B}_k g_0,$$

les quantités $\mathcal{A}_k$, $\mathcal{B}_k$ étant indépendantes des quantités C et g; soit de plus $\mathcal{A}$ le module maximum des quantités

$$1, \ \mathcal{A}_1, \ \mathcal{A}_2, \ldots, \ \mathcal{A}_t,$$

et $\mathcal{B}$ le module minimum des quantités

$$1, \ \mathcal{B}_1, \ \mathcal{B}_2, \ldots, \ \mathcal{B}_t,$$

aucune des deux quantités $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ ne sera nulle; si l'on choisit C_0 de manière que l'on ait

$$\mathcal{B} g_0 > \mathcal{A}\, \text{mod.}\, C_0,$$

l'inégalité (12) sera certainement satisfaite. La convergence de la série u est, par conséquent, établie pour les environs du point a : elle est convergente pour tout le domaine de ce point, ce qui résulte, soit de la continuité, soit, si l'on veut, de l'inégalité

$$\text{mod.}\,(x-a) < \frac{r y_1}{y_1 + r M_1},$$

où l'on peut évidemment supposer y_1 aussi grand qu'on le veut.

31. L'existence d'une solution de la forme

$$y_1 = (x-a)^{r_1} \varphi(x)$$

une fois établie [rappelons que $\varphi(x)$ doit être une fonction uniforme, continue dans le domaine du point a et différente de zéro pour $x = a$], le reste de la proposition fondamentale annoncée dans le § 29 s'établira aisément : si, en effet, dans l'équation

$$(1) \qquad \frac{d^m y}{dx^m} = \frac{P_1(x)}{x-a} \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \frac{P_2(x)}{(x-a)^2} \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + \ldots + \frac{P_m(x)}{(x-a)^m} y,$$

on fait

$$y = y_1 \int z\, dx,$$

on obtiendra une équation

$$(2) \qquad \frac{d^{m-1} z}{dx^{m-1}} = \frac{P'_1(x)}{x-a} \frac{d^{m-2} z}{dx^{m-2}} + \ldots + \frac{P'_{m-1}(x)}{(x-a)^{m-1}} z,$$

et il est bien aisé de voir que les fonctions $P'_1(x)$, $P'_2(x), \ldots, P'_{m-1}(x)$ seront, dans le domaine du point a, uniformes et continues [§ 13, équation (4)]. Les racines de l'équation fondamentale déterminante relative à cette équation (2) seront (§ 29)

$$r_2 - r_1 - 1, \quad r_3 - r_1 - 1, \ldots, \quad r_m - r_1 - 1,$$

si l'on a rangé les racines $r_1, r_2, \ldots, r_m$ dans un ordre tel que $r_j - r_i$ ne soit jamais un nombre entier positif pour $j > i$; la même propriété subsistera pour les racines ci-dessus dans l'ordre où elles sont et l'équation en z admettra une intégrale de la forme

$$z_1 = (x-a)^{r_2 - r_1 - 1} \psi(x),$$

ψ étant une fonction uniforme et continue dans le domaine du point a, différente de zéro pour $x = a$.

Il en résultera l'existence d'une intégrale

$$y_2 = y_1 \int z_1\, dx,$$

pour l'équation (1), intégrale qui sera une fonction de même nature que F [§ 26, équation (2)] et appartiendra à l'exposant

$$r_2 - r_1 - 1 + 1 + r_1 = r_2.$$

Si de même, dans l'équation (2), on fait

$$z = z_1 \int t\, dx,$$

on obtiendra une équation en t qui admettra une intégrale de la forme

$$t_1 = (x-a)^{r_3 - r_2 - 1} \chi(x),$$

$\chi(x)$ étant une fonction uniforme et continue dans le domaine du point a, différente de zéro pour $x=a$, et l'on obtiendra une troisième intégrale de l'équation (1), savoir :

$$y_3 = y_1 \int z_1\, dx \int t_1 dx,$$

appartenant à l'exposant

$$r_3 - r_2 - 1 + 1 + r_2 - r_1 - 1 + 1 + r_1 = r_3.$$

Les intégrales $y_1, z_1, t_1, \ldots, w_1$ des équations différentielles auxiliaires étant toujours de la forme

$$(x-a)^\alpha f(x),$$

où $f(x)$ est une fonction continue et uniforme dans le domaine de a, différente de zéro pour $x=a$, et les logarithmes ne pouvant s'introduire que par les intégrations (§ 26).

On arrivera ainsi à établir l'existence d'un système fondamental d'intégrales de l'équation (1), dont les éléments sont des fonctions de même nature que F [§ 26, équation (2)], appartenant respectivement aux exposants $r_1, r_2, \ldots, r_m$; comme les combinaisons linéaires que l'on peut former avec ces éléments ne peuvent évidemment appartenir qu'à ces exposants ou à des exposants dont les différences respectives avec les précédents soient entières, il faut bien que les racines $r_1, r_2, \ldots, r_m$ de l'équation fondamentale déterminante soient les logarithmes divisés par $2\pi\sqrt{-1}$ des racines $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$ de l'équation fondamentale. Telle est la façon remarquable dont ces deux équations dépendent l'une de l'autre.

32. Nous distinguerons maintenant deux cas :

1° Parmi les racines $r_1, r_2, \ldots, r_m$ de l'équation fondamentale déterminante, il n'y en a pas deux dont la différence soit nulle ou entière.

Les différences $r_2 - r_1 - 1, r_3 - r_1 - 1, \ldots, r_m - r_1 - 1$ ne sont alors jamais égales à un nombre entier, positif ou nul, dans quelque ordre que l'on range les racines : par conséquent, il existera m intégrales

$$y_1 = (x-a)^{r_1}\varphi_1(x), \quad y_2 = (x-a)^{r_2}\varphi_2(x), \ldots, \quad y_m = (x-a)^{r_m}\varphi_m(x),$$

les fonctions $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_m(x)$ étant toutes uniformes et continues dans le domaine du point a, différentes de zéro pour $x=a$.

Ces m intégrales, d'après leur nature, forment un système fondamental; au surplus, en réfléchissant sur le procédé indiqué dans le paragraphe précédent, on voit clairement que les intégrations ne peuvent pas introduire de logarithmes. Dans ce cas, l'équation fondamentale n'aura pas de racines égales.

2° S'il se trouve entre les racines $r_1, r_2, \ldots, r_m$ des différences nulles ou entières, on séparera les racines en groupes (R) tels, que chacun d'entre eux ne comprenne que des racines dont les différences réciproques soient nulles ou entières et comprenne toutes ces racines : certains groupes pourront ne contenir qu'une seule racine; puis on rangera les racines de chaque groupe de manière que la différence d'une racine quelconque et de celle qui la suit ne soit jamais négative. Dès lors, on pourra, sans crainte d'être arrêté, faire les opérations indiquées dans le paragraphe précédent, en commençant par n'importe quel groupe : on obtiendra ainsi autant de groupes (S) d'intégrales qu'il y a de groupes (R) de racines. Dans chaque groupe les exposants auxquels appartiennent les racines ont des différences entières; il ne peut y avoir de relation linéaire à coefficients constants entre les éléments d'un même groupe, puisque ces éléments font partie d'un système fondamental.

Il est bien aisé de retrouver sur les éléments d'un groupe les propriétés définies par les équations (6) du § 21, propriétés d'où l'on déduira pour les éléments eux-mêmes la forme donnée par les équations (11) du § 23.

Soit, en effet, (R) un groupe de racines $r_1, r_2, \ldots, r_\lambda$; nous commencerons les opérations par ce groupe. Soient

$$y_1, \quad y_2 = y_1 \int z_1\, dx, \quad y_3 = y_1 \int z_1\, dx \int r_1\, dx, \ldots, \quad y_\lambda = y_1 \int z_1\, dx \int t_1\, dx \ldots \int v_1\, dx$$

les intégrales correspondantes, formant le groupe (S) : y_1 est de la forme

$$y_1 = (x-a)^{r_1} \varphi(x),$$

et, en faisant

$$\omega = e^{2\pi r_1 \sqrt{-1}},$$

on aura, après avoir fait le tour du point a,

$$[y_1]' = \omega y_1;$$

z_1 est une fonction uniforme, puisque $r_2 - r_1 - 1$ est un nombre entier positif. On aura donc

$$\left[\frac{y_2}{y_1}\right]' = [\int z_1\, dx]' = \int z_1\, dx + C = \frac{y_2}{y_1} + C,$$

C étant une constante; on déduit de là

$$[y_2]' = \omega_{21} y_1 + \omega\, y_2.$$

On prouvera de même que l'on doit avoir

$$[y_3]' = \omega_{31} y_1 + \omega_{32} y_2 + \omega y_3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$[y_\lambda]' = \omega_{\lambda 1} y_1 + \omega_{\lambda 2} y_2 + \ldots + \omega_{\lambda,\lambda-1} y_{\lambda-1} + \omega y_\lambda,$$

ω_{21}, ω_{31}, $\omega_{\lambda,\lambda-1}$ étant des constantes; il suit de là (§ 23) que l'on peut faire

$$y_1 = (x-a)^{r_1} \varphi_{11},$$
$$y_2 = (x-a)^{r_2} [\varphi_{21} + \varphi_{22} \log(x-a)],$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$y_\lambda = (x-a)^{r_\lambda} \{\varphi_{\lambda 1} + \varphi_{\lambda 2} \log(x-a) + \ldots + \varphi_{\lambda\lambda} [\log(x-a)]^{\lambda-1}\},$$

φ_{11}, $\varphi_{21}, \ldots, \varphi_{\lambda\lambda}$ étant des fonctions continues et uniformes dans le domaine du point a. On arriverait à la même conclusion en étudiant la série d'intégrations par lesquelles on déduit $y_1, y_2, \ldots, y_\lambda$ de z_1, $t_1, \ldots, w_1$. Il résulte du § 23 que l'on peut, en général, exprimer linéairement $(x-a)^{r_\alpha}\varphi_{\alpha\beta}$ au moyen des fonctions

$$(x-a)^{r_1} \varphi_{11}, \quad (x-a)^{r_2} \varphi_{21}, \ldots, \quad (x-a)^{r_\alpha} \varphi_{\alpha 1}.$$

Supposons, en particulier, que dans le groupe (R) les racines r_1, $r_2, \ldots, r_\lambda$ soient toutes distinctes : alors leurs parties réelles iront toujours en diminuant et, si $\varphi_{\alpha 1}$ était identiquement nul, $\varphi_{\alpha\beta}$ serait nul pour $x = a$; il résulterait de là que y_α appartiendrait à un exposant supérieur à r_α, ce qui est impossible. Dans ce cas donc, le terme $(x-a)^{r_\alpha}\varphi_{\alpha 1}$, qui ne multiplie aucun logarithme, ne manque dans aucun élément $y_1, y_2, \ldots, y_\lambda$, et de plus l'élément y_α appartient au même exposant que ce terme; une combinaison linéaire

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_\alpha y_\alpha$$

appartiendra évidemment à l'exposant r_α et le terme qui ne multiplie aucun logarithme n'y pourra manquer. Cette propriété subsiste donc pour toute intégrale de l'équation proposée qui appartient à l'un des exposants $r_1, r_2, \ldots, r_\lambda$; on en conclut aisément que, dans une pareille intégrale, le terme qui ne multiplie aucun logarithme ne peut jamais être une solution de l'équation différentielle.

33. Certaines des fonctions φ peuvent être nulles et il peut arriver qu'ainsi tous les logarithmes disparaissent : il importe de distinguer les cas où cette circonstance se présente.

Remarquons d'abord qu'elle ne peut jamais avoir lieu si, dans un groupe (R), il existe deux racines égales; si, par exemple, on a $r_2 = r_1$, z_1 appartiendra à l'exposant $r_2 - r_1 - 1 = -1$ et sera, par conséquent, de la forme

$$\frac{A}{x-a} + \varphi(x),$$

A étant différent de zéro et $\varphi(x)$ étant une fonction uniforme et continue dans le domaine de a; il en résulte que

$$\int z_1\, dx$$

sera de la forme

$$A \log(x-a) + \psi(x),$$

et, par suite, y_2 de la forme

$$(x-a)^{r_1}[\varphi_{21}(x) + \varphi_{22}\log(x-a)].$$

Si d'autres racines du groupe étaient égales, les logarithmes apparaîtraient à un moment des opérations et ne pourraient évidemment disparaître par les intégrations.

Il ne peut donc y avoir de doute que dans le cas où toutes les racines $r_1, r_2, \ldots, r_\lambda$ du groupe (R) sont différentes.

Dans ce cas, on commencera par faire, dans l'équation différentielle, la substitution

$$y = (x-a)^{r_\lambda} z;$$

on obtiendra ainsi une équation différentielle en z dont l'équation fondamentale déterminante admettra pour racines les nombres positifs entiers

$$r_1 - r_\lambda, \quad r_2 - r_\lambda, \ldots, \quad r_{\lambda-1} - r_\lambda, \quad 0.$$

Il existera un groupe (Σ) d'intégrales de l'équation en z appartenant respectivement à ces exposants et d'où l'on déduira le groupe (S) d'intégrales de l'équation en y qui appartiennent aux exposants $r_1, r_2, \ldots, r_\lambda$; de plus, aucune des autres racines de l'équation fondamentale déterminante ne sera entière. Faisons, pour abréger,

$$r_1 - r_\lambda = s - 1,$$

et supposons que l'on forme les dérivées $s^{i\grave{e}mes}$ des intégrales de l'équation en r appartenant au groupe considéré; on obtiendra ainsi des fonctions qui appartiendront, ou à des exposants entiers nuls ou positifs, ou à des exposants entiers négatifs, suivant que les intégrales ne contenaient pas de logarithmes ou en contenaient.

En effet, une fonction du groupe (Σ) sera, si elle contient des logarithmes, de la forme

$$Z = (x-a)^r \left\{ \varphi_0 + \varphi_1 \log(x-a) + \ldots + \varphi_k [\log(x-a)]^k \right\}.$$

Or $\varphi_k (x-a)^r$ est une intégrale de l'équation en z, faisant nécessairement partie du groupe (Σ) et appartenant à un exposant entier n égal ou supérieur à r, mais certainement inférieur à s. Posons pour un instant

$$\varphi_k (x-a)^r = (x-a)^n \Phi(x),$$

$\Phi(x)$ étant une fonction uniforme et continue dans le domaine de a, ne s'annulant pas pour $x = a$; la dérivée $n^{i\grave{e}me}$ de Z contiendra le terme

$$1.2\ldots n \Phi(x) [\log(x-a)]^k,$$

qui ne pourra se réduire avec aucun autre; cette dérivée $n^{i\grave{e}me}$ appartiendra donc au plus à l'exposant zéro, et, dans ce cas, sera infinie pour $x = a$: elle ne se trouvera donc pas dans le cas d'exception du théorème du § 27 et la dérivée suivante,

$$\frac{d^{n+1} Z}{dx^{n+1}}$$

appartiendra au plus à l'exposant négatif -1 ; il en est de même, *a fortiori*, de

$$\frac{d^s Z}{dx^s}.$$

Si donc on forme une équation différentielle linéaire, admettant pour solutions les dérivées $s^{\text{ièmes}}$ des intégrales de l'équation en z, et seulement ces dérivées, on reconnaîtra l'existence ou la non-existence de logarithmes dans le groupe (S), d'après l'existence ou la non-existence de racines négatives dans l'équation fondamentale déterminante relative à cette équation. En particulier, si le groupe (R) ne contient que deux racines, on sera ainsi complétement fixé sur la forme des intégrales du groupe correspondant.

Il ne reste plus qu'à montrer comment on peut former une équation différentielle linéaire admettant comme solutions les dérivées $s^{\text{ièmes}}$ des intégrales de l'équation en z. On pourrait différentier s fois cette équation, puis éliminer $z, \frac{dz}{dx}, \dots, \frac{d^{s-1}z}{dx^{s-1}}$ entre les $s+1$ équations obtenues; l'équation résultante où l'on ferait $\frac{d^s z}{dx^s} = u$ admettrait évidemment ces dérivées $s^{\text{ièmes}}$ comme solutions, mais on peut arriver à une équation d'ordre moindre, dans le cas où l'équation en z admet une solution entière de degré inférieur à s, car il existe alors une relation linéaire identique à coefficients constants entre les $s^{\text{ièmes}}$ d'un système fondamental de l'équation en z. Pour arriver dans tous les cas à l'équation différentielle d'ordre le plus petit possible, nous écrirons l'équation en z de la façon suivante :

$$\frac{d^\beta z}{dx^\beta} = q_1 \frac{d^{\beta+1} z}{dx^{\beta+1}} + q_2 \frac{d^{\beta+2} z}{dx^{\beta+2}} + \dots + q_{m-\beta} \frac{d^m z}{dx^m},$$

$\frac{d^\beta z}{dx^\beta}$ étant la dérivée d'ordre le plus petit qui entre effectivement dans l'équation proposée. Si l'on fait

$$u = \frac{d^\beta z}{dx^\beta},$$

l'équation deviendra

$$u = q_1 \frac{du}{dx} + q_2 \frac{d^2 u}{dx^2} + \dots + q_{m-\beta} \frac{d^{m-\beta} u}{dx^{m-\beta}},$$

équation qui n'admet pas d'autres solutions que les dérivées $\beta^{\text{ièmes}}$ u_1, $u_2, \dots, u_m$ des intégrales $z_1, z_2, \dots, z_m$ de l'équation en z; on en déduira, par la différentiation,

$$\frac{du}{dx} = q'_1 \frac{d^2 u}{dx^2} + q'_2 \frac{d^3 u}{dx^3} + \ldots + q'_{m-\beta} \frac{d^{m-\beta+1} u}{dx^{m-\beta+1}},$$

équation qui, si l'on y fait

$$\frac{du}{dx} = v,$$

n'admettra pas d'autres solutions que les dérivées

$$\frac{du_1}{dx}, \quad \frac{du_2}{dx}, \ldots, \quad \frac{du_m}{dx}$$

des intégrales de l'équation en u. Si l'on avait, en effet,

$$C_1 \frac{du_1}{dx} + C_2 \frac{du_2}{dx} + \ldots + C_m \frac{du_m}{dx} = 0,$$

on en déduirait

$$C_1 u_1 + C_2 u_2 + \ldots + C_m u_m = C,$$

et la constante C serait une solution de l'équation en u, ce qui est impossible. On continuera ainsi de proche en proche jusqu'à ce que l'on arrive à l'équation cherchée.

34. Lorsque, en général, on aura reconnu l'existence d'une intégrale de la forme

$$y = (x-a)^r \{\varphi_0 + \varphi_1 \log(x-a) + \ldots + \varphi_n [\log(x-a)]^n\},$$

où $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ représentent des fonctions continues et uniformes dans le domaine du point a, on pourra employer le procédé suivant pour la détermination directe de ces fonctions; on substituera cette valeur de y dans l'équation proposée et l'on égalera à zéro les coefficients des diverses puissances de $\log(x-a)$: on obtiendra ainsi n équations différentielles linéaires simultanées, contenant, sauf une, des seconds membres; on cherchera ensuite à déterminer $n+1$ séries de la forme

$$\alpha_i + \beta_i (x-a) + \gamma_i (x-a)^2 + \ldots, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n,$$

qui, mises à la place de $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$, satisfassent à ces équations.

35. Il peut se présenter, relativement à un point singulier a, une circonstance digne d'attention.

Supposons que les racines $r_1, r_2, \ldots, r_m$ de l'équation fondamentale déterminante soient toutes entières, positives et distinctes, de façon à ne former qu'un seul groupe; il peut se faire que les intégrales correspondantes ne contiennent point de logarithmes; dès lors elles ne présenteront en ce point aucune espèce de singularité, et le point a ne sera pas en réalité un point singulier; il ne diffère des points ordinaires qu'en ce que le déterminant

$$\begin{vmatrix} \frac{d^{m-1}y_1}{dx^{m-1}} & \frac{d^{m-2}y_1}{dx^{m-2}} & \cdots & y_1 \\ \frac{d^{m-1}y_2}{dx^{m-1}} & \frac{d^{m-2}y_2}{dx^{m-2}} & \cdots & y_2 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{d^{m-1}y_m}{dx^{m-1}} & \frac{d^{m-2}y_m}{dx^{m-2}} & \cdots & y_m \end{vmatrix}$$

y est nul. M. Weierstrass a désigné ces points sous le nom de *points à apparence singulière*. Il est aisé de les reconnaître, d'après les principes qui précèdent.

V.

36. Ces principes posés, nous allons en faire quelques applications.

Nous donnerons d'abord certaines conditions nécessaires pour que toutes les intégrales d'une équation linéaire soient algébriques.

Les équations linéaires qui jouissent de cette propriété appartiennent évidemment à la classe d'équations que nous avons plus spécialement étudiées et dont le type est (§ 28)

$$\frac{d^m y}{dx^m} = \frac{F_{\rho-1}(x)}{\psi(x)}\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \frac{F_{2(\rho-1)}(x)}{[\psi(x)]^2}\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} + \ldots + \frac{F_{m(\rho-1)}(x)}{[\psi(x)]^m}y,$$

où $\psi(x) = (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_\rho)$ et où $F_{\rho-1}(x), F_{2(\rho-1)}(x), \ldots F_{m(\rho-1)}(x)$ sont des fonctions entières en x dont le degré est au plus égal à l'indice.

On devra étudier chacun de leurs points singuliers $a_1, a_2, \ldots, a_\rho$, auquel on adjoindra le point ∞ de la sphère; les racines des équations fondamentales déterminantes relatives à ces différents points devront toutes être rationnelles et distinctes; de plus, pour chacun des points singuliers $a_1, a_2, \ldots, a_\rho, \ldots, \infty$ les conditions du § 33, nécessaires et suffisantes pour que les éléments du système fondamental ne contiennent point de logarithmes, devront être satisfaites.

Si toutes ces conditions sont remplies, les diverses intégrales de l'équation proposée n'auront qu'un nombre fini de points singuliers, présentant tous le caractère des points critiques algébriques; mais ce ne seront pas nécessairement des fonctions algébriques, car elles restent évidemment susceptibles de prendre une infinité de valeurs en un même point; la distinction des cas où ce nombre de valeurs est fini semble d'une difficulté d'une nature tout autre : cette difficulté se lie à la question du passage d'un système fondamental relatif à un point singulier au système fondamental relatif à un autre point singulier.

37. Les équations différentielles linéaires à coefficients constants ne rentrent pas dans le type du § 28. Tout ce que la théorie nous apprend sur les intégrales de ces équations, c'est qu'elles ne peuvent présenter de singularité qu'au point ∞ ; on peut d'ailleurs, par un changement de la variable indépendante, ramener ces équations au type normal. Si

$$(1) \qquad \frac{d^m y}{dx^m} = p_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + p_2 \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + \ldots + p_m y,$$

où $p_1, p_2, \ldots, p_m$ sont des constantes, est l'équation à laquelle on a affaire, on posera

$$x = \log z,$$

et l'on aura en général

$$\frac{d^n y}{dx^n} = a_1 z \frac{dy}{dz} + a_2 z^2 \frac{d^2 y}{dz^2} + \ldots + a_n z^n \frac{d^n y}{dz^n},$$

où les a sont des constantes numériques données par la formule

$$a_k = \sum_{i=0}^{i=k-1} \frac{(-1)^i (k-i)^{n-1}}{1.2\ldots i \times 1.2\ldots(k-i-1)},$$

de sorte que l'équation proposée prendra la forme

$$(2) \qquad \frac{d^m y}{dz^m} = \frac{p'_1}{z} \frac{d^{m-1} y}{dz^{m-1}} + \frac{p'_2}{z_2} \frac{d^{m-2} y}{dz^{m-2}} + \ldots + \frac{p'_m}{z^m} y,$$

$p'_1, p'_2, \ldots, p'_m$ étant de nouvelles constantes. Cette équation est conforme au type du § 28.

Considérons en général les équations de la forme

$$(3) \qquad \frac{d^m y}{dx_m} = \frac{P_1}{x-a}\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \frac{P_2}{(x-a)^2}\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} + \ldots + \frac{P_m}{(x-a)^m}y,$$

où $P_1, P_2, \ldots, P_m$ sont des constantes.

Elles n'admettent pas d'autre point singulier à distance finie que le point a; l'équation fondamentale déterminante relative à ce point sera (§ 29)

$$r(r-1)\ldots(r-m+1) - r(r-1)\ldots(r-m+2)P_1 - \ldots - rP_{m-1} - P_m = 0.$$

Si r_1 est une racine de cette équation et que l'on fasse

$$y = (x-a)^{r_1}u,$$

on verra, d'après l'équation (4) du § 29, que le coefficient de u dans l'équation différentielle résultante est identiquement nul : cette équation admettra donc une solution de la forme $u = C_1$, et par suite l'équation proposée une solution de la forme

$$y = C_1(x-a)^{r_1}.$$

Si toutes les racines $r_1, r_2, \ldots, r_m$ de l'équation fondamentale déterminante sont distinctes, la solution complète de l'équation (3) sera donnée par la formule

$$y = C_1(x-a)^{r_1} + C_2(x-a)^{r_2} + \ldots + C_m(x-a)^{r_m};$$

s'il y a deux racines égales à r_1, on fera dans l'équation proposée

$$y = (x-a)^{r_1}u.$$

L'équation résultante en u sera de même forme que la proposée, si ce n'est que le coefficient de u sera nul; en posant

$$\frac{du}{dx} = u',$$

l'équation fondamentale déterminante relative à l'équation en u' admettra la racine -1 : l'équation en u' admettra donc la solution

$$u' = C(x-a)^{-1},$$

l'équation en u la solution

$$u = C\log(x-a),$$

et l'équation en y la solution

$$y = C(x-a)^{r_1}\log(x-a).$$

En continuant de la même façon, on reconnaîtra en général que, s'il existe λ racines égales à r_1, l'équation admettra la solution

$$y = (x-a)^{r_1}\{p + q\log(x-a) + \ldots + s[\log(x-a)]^{\lambda-1}\},$$

$p, q, \ldots, s$ étant des constantes; c'est là, d'ailleurs, un résultat bien connu.

Revenons à l'équation (2) : elle devra, d'après ce qui précède, admettre une solution de la forme

$$y = z^r;$$

d'où résulte que l'équation (1), à coefficients constants, devra admettre une solution de la forme

$$y = e^{rx},$$

et l'on est ainsi ramené à la méthode ordinairement employée pour la résolution de pareilles équations.

38. Considérons encore les équations du second ordre conformes au type du § **28**, et admettant deux points singuliers a, b; elles seront de la forme

$$(x-a)^2(x-b)^2\frac{d^2u}{dx^2} + (x-a)(x-b)(fx+g)\frac{du}{dx} + (hx^2+kx+l)u = 0.$$

On les ramènera d'abord à la forme

$$(x-a)(x-b)\frac{d^2y}{dx^2} + (mx+n)\frac{dy}{dx} + py = 0;$$

il suffira pour cela d'employer la substitution

$$u = (x-a)^r(x-b)^{r'}y,$$

en prenant pour r et r' des valeurs qui satisfassent respectivement aux deux équations fondamentales déterminantes relatives, l'une au point a, l'autre au point b.

On pourra ensuite, par un changement de la variable indépendante, amener les deux points a et b à coïncider avec deux points singuliers quelconques, o et 1 par exemple; il suffira pour cela de faire

$$x = (b-a)x' + a;$$

l'équation prendra alors la forme

$$x(x-1)\frac{d^2y}{dx^2} + (mx+n)\frac{dy}{dx} + py = 0,$$

les valeurs de m, n, p n'étant plus les mêmes, bien entendu.

Il y a lieu de considérer les trois équations fondamentales relatives aux points o, 1, ∞.

Les équations relatives aux deux premiers points sont

$$r(r-1) - nr = 0, \quad \text{d'où} \quad r = 0, \quad r = 1+n$$

et

$$r(r-1) + (m+n)r = 0, \quad \text{d'où} \quad r = 0, \quad r = 1-m-n.$$

Pour le point ∞, il faut d'abord faire (§ 13) la substitution

$$x = \frac{1}{t};$$

l'équation deviendra alors

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\dfrac{2-2t-m-nt}{1-t}}{t}\frac{dy}{dt} + \frac{\dfrac{p}{1-t}}{t^2}y = 0,$$

et l'équation fondamentale relative au point $t=0$, sera

$$r(r-1) + (2-m)r + p = 0,$$

ou

$$r^2 + (1-m)r + p = 0.$$

Désignons-en les racines par α et β, nous aurons

$$p = \alpha\beta, \quad m = 1+\alpha+\beta;$$

posons enfin

$$n = -\gamma,$$

l'équation proposée prendra la forme

$$(x^2 - x)\frac{d^2y}{dx^2} - [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x]\frac{dy}{dx} + \alpha\beta\,y = 0:$$

c'est la célèbre équation différentielle étudiée par Gauss, à laquelle satisfait la série hypergéométrique

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha\beta}{1.\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1).\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)}x^2 + \ldots.$$

Les racines des diverses équations fondamentales déterminantes sont :

Pour le point $x = 0$.....	$r = 0$,	$r = 1 - \gamma$;
Pour le point $x = 1$......	$r = 0$,	$r = \gamma - \alpha - \beta$;
Pour le point $x = \infty$....	$r = \alpha$,	$r = \beta$.

Si γ n'est pas un nombre entier négatif, il existera dans le domaine du point O une fonction uniforme satisfaisant à l'équation : c'est la série hypergéométrique

$$P = F(\alpha, \beta, \gamma, x),$$

elle-même convergente dans le cercle décrit du point O comme centre avec un rayon égal à 1. Dans le même cercle doit exister une solution appartenant à l'exposant $1 - \gamma$; pour l'obtenir, nous ferons

$$y = ux^{1-\gamma}:$$

on aura ainsi l'équation

$$x(x-1)\frac{d^2u}{dx^2} - [2 - \gamma - (\alpha + \beta + 3 - 2\gamma)x]\frac{du}{dx} + (\alpha + 1 - \gamma)(\beta + 1 - \gamma)u = 0,$$

qui ne diffère de l'équation en y que par le changement de α, β, γ respectivement en $\alpha + 1 - \gamma$, $\beta + 1 - \gamma$, $2 - \gamma$; lorsque ce dernier nombre ne sera pas un entier négatif, l'équation en u admettra la solution

$$F(\alpha + 1 - \gamma, \beta + 1 - \gamma, 2 - \gamma, x),$$

et par conséquent l'équation proposée admettra la solution

$$Q = x^{1-\gamma}F(\alpha + 1 - \gamma, \beta + 1 - \gamma, 2 - \gamma, x).$$

Lors donc que γ ne sera pas entier, la solution complète de l'équation proposée sera, dans le domaine du point zéro,

$$CP + C'Q,$$

C et C' étant des constantes arbitraires.

Pour étudier le point 1, faisons

$$x = (1 - x'),$$

l'équation deviendra

$$x'(x' - 1)\frac{d^2y}{dx'^2} - [\alpha + \beta + 1 - \gamma - (\alpha + \beta + 1)x']\frac{dy}{dx'} + \alpha\beta y = 0,$$

équation qui ne diffère de la proposée que par le changement de γ en $\alpha + \beta + 1 - \gamma$; si donc $\alpha + \beta + 1 - \gamma$ n'est pas entier, l'équation proposée admettra dans le domaine du point 1 les deux solutions

$$R = F(\alpha, \beta, \alpha + \beta + 1 - \gamma, 1 - x),$$
$$S = x^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma - \beta, \gamma - \alpha, 1 + \gamma - \alpha - \beta, 1 - x),$$

et la solution complète sera, dans le domaine du point 1,

$$CR + C'S,$$

C et C' étant des constantes arbitraires.

Remarquons que les deux domaines des points 0 et 1 empiètent l'un sur l'autre; dans la partie commune, si les nombres γ et $\alpha + \beta + 1 - \gamma$ ne sont entiers ni l'un ni l'autre, les séries P, Q, R, S sont simultanément convergentes, et si λ, λ', μ, μ' sont des constantes convenables, on devra avoir

$$R = \lambda P + \mu Q, \quad S = \lambda' P + \mu' Q.$$

La détermination effective des constantes λ, μ, λ', μ' permettra de passer d'un domaine dans l'autre.

Examinons maintenant le point ∞ : quand on fait dans l'équation proposée

$$x = \frac{1}{t},$$

elle devient

$$t^2(1 - t)\frac{d^2y}{dt^2} + t[(\gamma - 2)t - (\alpha + \beta + 1)]\frac{dy}{dt} + \alpha\beta y = 0.$$

L'équation fondamentale déterminante relative au point zéro a pour racines α et β; cherchons, par exemple, la solution qui appartient à l'exposant α et, pour cela, faisons

$$y = t^\alpha u,$$

l'équation précédente deviendra

$$t(t-1)\frac{d^2u}{dt^2} - [\alpha - \beta + 1 - (2\alpha - \gamma + 2)]\frac{du}{dt} + \alpha(\alpha + 1 - \gamma)u = 0,$$

équation qui ne diffère de la proposée que par le changement de α, β, γ respectivement en α, $\alpha + 1 - \gamma$, $\alpha - \beta + 1$: si donc $\alpha - \beta + 1$ n'est pas un entier nul ou négatif, elle admettra la solution

$$F(\alpha, \alpha + 1 - \gamma, \alpha - \beta + 1, t),$$

et l'équation proposée la solution

$$T = \frac{1}{x^\alpha} F\left(\alpha, \alpha + 1 - \gamma, \alpha - \beta + 1, \frac{1}{x}\right);$$

de même, si $\beta - \alpha + 1$ n'est pas un entier nul ou négatif, l'équation proposée admettra la solution

$$U = \frac{1}{x^\beta} F\left(\beta, \beta + 1 - \gamma, \beta - \alpha + 1, \frac{1}{x}\right).$$

Ces deux séries T et U sont convergentes dans tout le domaine du point ∞, c'est-à-dire dans toute la portion du plan extérieur au cercle de rayon 1, décrit de l'origine comme centre.

Les domaines du point 1 et du point ∞ empiètent l'un sur l'autre; dans la portion commune, T et U doivent pouvoir s'exprimer en fonction linéaire à coefficients constants de R et de S.

Lorsque γ est un nombre entier, ou bien $\gamma - \alpha - \beta$, ou bien $\alpha - \beta$, il peut y avoir des logarithmes dans les solutions complètes de l'équation dans le domaine du point zéro, ou du point 1, ou du point ∞ : cherchons ce qu'il en est.

On trouvera aisément que, si l'on fait

$$\frac{d^m y}{dx^m} = u,$$

la fonction satisfait à l'équation différentielle

$$(x^2-x)\frac{d^2u}{dx^2}-[(\gamma+m)-(\alpha+m+\beta+m+1)x]\frac{du}{dx}+(\alpha+m)(\beta+m)u=0,$$

qui ne diffère de l'équation proposée que par le changement de α, β, γ en $\alpha+m$, $\beta+m$, $\gamma+m$; l'équation fondamentale déterminante relative au point zéro aura par conséquent pour racines 0 et $1-\gamma-m$. Si donc γ est un nombre entier, positif, nul ou négatif, $1-\gamma-m$ finira toujours par être un entier négatif; alors l'intégrale complète devra toujours contenir un logarithme dans le domaine du point zéro.

On conclura de là aisément qu'il en est de même pour le point 1, ou pour le point ∞ lorsque $\gamma-\alpha-\beta$ est un nombre entier, ou bien $\alpha-\beta$.

Dans ces différents cas, effectivement, nous avons vu qu'il n'existe qu'une seule des deux séries P et Q, ou R et S, ou T et U.

Pour obtenir alors la solution complète, on peut se servir de la solution déjà obtenue; désignons-la en général par y, et faisons

$$y=y_1\int z\,dx,$$

dans l'équation proposée; on aura, pour déterminer z, l'équation

$$(x^2-x)\left(2\frac{dy_1}{dx}z+y_1\frac{dz}{dx}\right)-[\gamma-(\alpha+\beta+1)x]y_1 z=0,$$

ou

$$\frac{dz}{z}=\frac{\gamma-(\alpha+\beta+1)x}{x^2-x}dx-2\frac{dy_1}{y_1}=\frac{\gamma-\alpha-\beta-1}{x-1}dx-\frac{\gamma}{x}dx-2\frac{dy_1}{y_1};$$

d'où

$$z=\frac{(x-1)^{\gamma-\alpha-\beta-1}}{x^\gamma y_1^2};$$

et, par conséquent,

$$y=y_1\int\frac{(x-1)^{\gamma-\alpha-\beta-1}}{x^\gamma y_1^2}dx$$

sera une seconde solution de l'équation. On peut encore employer la méthode indiquée dans le § 24 et déterminer le terme qui ne multiplie pas de logarithme au moyen d'une équation différentielle contenant un second membre.

Nous appliquerons cette méthode dans le cas où les deux racines de l'équation fondamentale déterminante relative au point zéro sont égales, c'est-à-dire dans le cas où $\gamma = 1$.

L'équation proposée se réduit alors à

$$(x^2 - x)\frac{d^2y}{dx^2} - [1 - (\alpha + \beta + 1)x]\frac{dy}{dx} + \alpha\beta y = 0;$$

elle admettra d'abord la solution

$$P = F(\alpha, \beta, 1, x) = A_0 + A_1 x + \ldots + A_i x^i + \ldots.$$

En faisant

$$A_i = \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+i-1)\times\beta(\beta+1)\ldots(\beta+i-1)}{1^2.2^2\ldots i^2},$$

cherchons à satisfaire à cette équation par une fonction de la forme

$$y = \varphi + P\log x,$$

φ étant une fonction continue et uniforme dans le domaine du point zéro; en substituant dans l'équation proposée, égalant à zéro l'ensemble des termes qui ne contiennent pas de logarithmes en facteur, il vient

$$(x^2 - x)\frac{d^2\varphi}{dx^2} - [1 - (\alpha + \beta + 1)x]\frac{d\varphi}{dx} + \alpha\beta\varphi + 2(x-1)\frac{dP}{dx} + (\alpha + \beta)P = 0;$$

si l'on fait

$$\varphi = A_0 a_0 + A_1 a_1 x + \ldots + A_i a_i x^i + \ldots,$$

que l'on remplace φ et P par les séries équivalentes dans l'équation différentielle et que l'on égale à zéro le coefficient de x^i, il viendra

$$(\alpha + i)(\beta + i)A_i a_i - (i+1)^2 A_{i+1} a_{i+1} + (\alpha + \beta + 2i)A_i - 2(i+1)A_{i+1} = 0$$

ou, en remarquant que

$$\frac{A_{i+1}}{A_i} = \frac{(\alpha+i)(\beta+i)}{(i+1)^2},$$

$$a_{i+1} - a_i = \frac{-2}{i+1} + \frac{1}{\alpha+i} + \frac{1}{\beta+i},$$

d'où

$$a_i = a_0 + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha+1} + \ldots + \frac{1}{\alpha+i-1} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta+1} + \ldots + \frac{1}{\beta+i-1}$$
$$-2\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{i}\right).$$

On peut, sans inconvénient, supposer a_0 nul, cela revenant à retrancher $a_0 P$ de φ; la série qui représente φ est ainsi déterminée par son terme général $A_i a_i x^i$.

Si l'on examine la forme de ce terme général, on reconnaît aisément que la solution ainsi obtenue

$$\varphi + P \log x$$

peut s'écrire

$$A \log x + \frac{\partial P}{\partial \alpha} + \frac{\partial P}{\partial \beta} + 2\frac{\partial P}{\partial \gamma},$$

où P représente la fonction

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x),$$

dans laquelle on fait $\gamma = 1$ après avoir pris les dérivées partielles; c'est le résultat auquel on arriverait immédiatement en cherchant la limite pour $\gamma = 1$ du rapport

$$\frac{x^{1-\gamma} F(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, 2-\gamma, x) - F(\alpha, \beta, \gamma, x)}{1-\gamma},$$

qui, d'après ce qu'on a vu, satisfait constamment à l'équation proposée.

Le fond de ce travail est l'œuvre de M. Fuchs : j'ai introduit quelques raisonnements intermédiaires pour montrer comment, en partant des propriétés des intégrales, on pouvait arriver à déterminer leurs formes; un peu plus loin j'ai indiqué les caractères qui permettent de reconnaître les fonctions qui satisfont à une équation différentielle linéaire à coefficients uniformes ou rationnels; j'ai donné une application immédiate aux fonctions algébriques. Dans la recherche du type des équations qui sont l'objet principal de cette étude, j'ai appelé l'attention sur une exception à l'un des lemmes fondamentaux, exception qui enlevait aux raisonnements leur rigueur, et j'ai montré comment on pouvait lever la difficulté. M. Fuchs lui-même, dans son second Mémoire, a parlé de ce cas d'exception sans peut-être y insister suffisamment. Enfin les dernières applications, sous la forme que je leur ai donnée, m'appartiennent.