Michel Duflo

Sur les extensions des représentations irréductibles des groupes de Lie nilpotents

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 5, nº 1 (1972), p. 71-120
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1972_4_5_1_71_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 5, 1972, p. 71 à 120.

SUR LES EXTENSIONS DES REPRÉSENTATIONS IRRÉDUCTIBLES DES GROUPES DE LIE NILPOTENTS

PAR MICHEL DUFLO

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE I. — *Représentations des algèbres de Lie*

CHAPITRE II. — *Représentations des groupes*

INTRODUCTION

Soit σ une représentation irréductible (continue unitaire dans un espace de Hilbert) d'un groupe de Lie réel nilpotent simplement connexe N. On suppose que N est un sous-groupe invariant fermé d'un groupe localement compact G et que G laisse fixe la classe de σ. Un des résultats principaux de cet article est le calcul de l'obstruction (au sens de Mackey) qu'il y a à étendre σ à G. Cette obstruction n'était connue auparavant que lorsque G était un groupe résoluble ([2], [5]), ou lorsque N était un groupe d'Heisenberg [24].

Nous déduisons de ce calcul quelques conséquences, et en particulier un théorème de réduction dans la théorie des représentations holomorphes induites qui généralise un théorème de Kostant [1].

Tous ces résultats ont leur traduction en termes d'algèbres de Lie. Nous en développerons ailleurs quelques conséquences.

Énonçons plus en détail le théorème qui permet le calcul de l'obstruction. Conservons les notations N et σ ci-dessus. La représentation σ est associée par la théorie de Kirillov à une forme linéaire f sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{n}$ de N. Soit S un groupe d'automorphismes de N laissant fixe f. Nous construisons un revêtement $\tilde{S}$ d'ordre 2 de S et une représentation V de $\tilde{S}$ dans l'espace de σ tels que

$$V(s)\,\sigma(n)\,V(s)^{-1} = \sigma(s(n))$$

pour tout $s \in \tilde{S}$ et $n \in N$.

Lorsque N est Heisenberg et S le groupe symplectique, ceci est bien connu, et, de fait, la démonstration consiste à se ramener à ce cas, par une récurrence standard sur la dimension de N. Supposons maintenant que N soit l'ensemble des points rationnels d'un groupe unipotent p-adique. La théorie de Kirillov est encore valable dans ce cas, de même que reste vraie l'existence de $\tilde{S}$ lorsque N est « Heisenberg » [25]. On peut donc se demander si nos résultats aussi restent valables. Je l'ignore, car les démonstrations utilisent les représentations induites holomorphes, et en particulier un théorème de [1].

L'article est divisé en deux chapitres. Le premier concerne les algèbres de Lie, et utilise des résultats de [4] et [9]. Ce chapitre a été exposé à Marseille et je me suis servi de la rédaction qu'en a fait J. Carmona. Je suis heureux de l'en remercier. Le second concerne les groupes. On y utilise essentiellement [1] ainsi qu'un théorème de [20] qui permet de passer de l'algèbre au groupe, et, naturellement, [19].

Les résultats de cet article ont été annoncés dans [15] et [16].

CHAPITRE I

1. Notations. — 1.1. Toutes les algèbres de Lie considérées dans ce chapitre sont de dimension finie sur un corps k algébriquement clos de caractéristique 0.

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie. On note $\mathfrak{g}^*$ son dual, $U(\mathfrak{g})$ son algèbre enveloppante. Étant donné $g \in \mathfrak{g}^*$, on note B_g la forme bilinéaire sur $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ telle que

$$B_g(X, Y) = \langle g, [X, Y] \rangle$$

et $\mathfrak{g}(g)$ son noyau, qui est le stabilisateur de g dans $\mathfrak{g}$. Plus généralement, si $\mathfrak{n}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$ et si $f \in \mathfrak{n}^*$, on note $\mathfrak{g}(f)$ le stabilisateur de f dans $\mathfrak{g}$.

1.2. Soit $\mathfrak{l}$ une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$.

Si $X \in \mathfrak{l}$, on pose

$$\rho_{\mathfrak{g},\mathfrak{l}}(X) = \frac{1}{2}\operatorname{tr}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{l}}(X)$$

(l'opérateur ad X induit un endomorphisme de $\mathfrak{g}/\mathfrak{l}$ dont $\operatorname{tr}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{l}}(X)$ est la trace). Il est clair que $\rho_{\mathfrak{g},\mathfrak{l}}$ est une représentation de dimension 1 de $\mathfrak{l}$.

1.3. Soit μ une représentation de $\mathfrak{l}$ dans un espace vectoriel W. Notons W′ le $U(\mathfrak{l})$-module associé à la représentation $\mu \otimes \rho_{\mathfrak{g},\mathfrak{l}}$. La représentation de $\mathfrak{g}$ dans $U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{l})} W'$ est notée $\operatorname{Ind}(\mu, \mathfrak{g})$. Si $u \in U(\mathfrak{g})$, $w \in W$, nous noterons $u \otimes w$ l'élément de $U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{l})} W'$ correspondant.

Si μ est de dimension 1, et si m est un élément non nul de W, l'application $u \mapsto u \otimes m$ induit un $\mathfrak{g}$-isomorphisme de $U(\mathfrak{g})$ modulo l'idéal à gauche engendré par les

$$H - \mu(H) - \rho_{\mathfrak{g},\mathfrak{l}}(H) \qquad (H \in \mathfrak{l})$$

sur

$$U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{l})} W'.$$

1.4. Soit toujours $g \in \mathfrak{g}^*$. Une sous-algèbre $\mathfrak{l}$ de $\mathfrak{g}$ est subordonnée à g si $g \mid \mathfrak{l}$ est une représentation de $\mathfrak{l}$ [c'est-à-dire si $B_g(\mathfrak{l}, \mathfrak{l}) = 0$].

On notera $\operatorname{Mxl}(g, \mathfrak{g})$ l'ensemble des sous-algèbres subordonnées à g de dimension $\frac{1}{2}(\dim \mathfrak{g} + \dim \mathfrak{g}(g))$.

Lorsque $\mathfrak{g}$ est résoluble le noyau dans $U(\mathfrak{g})$ de $\operatorname{Ind}(g \mid \mathfrak{l}, \mathfrak{g})$ est un idéal bilatère primitif de $U(\mathfrak{g})$ qui ne dépend pas de $\mathfrak{l} \in \operatorname{Mxl}(g, \mathfrak{g})$ (*cf.* [10]). On le note I_g.

2. Théorème principal. — Dans ce paragraphe on se donne une algèbre de Lie nilpotente $\mathfrak{n}$, un élément $f \in \mathfrak{n}^*$, une algèbre de Lie $\mathfrak{s}$, un homomorphisme j de $\mathfrak{s}$ dans l'algèbre des dérivations de $\mathfrak{n}$ stabilisant f.

Soit $\mathfrak{h} \in \mathrm{Mxl}(f, \mathfrak{n})$. La représentation $\sigma_{\mathfrak{h}} = \mathrm{Ind}(f \mid \mathfrak{h}, \mathfrak{n})$ a pour noyau I_f (*cf.* [9]). Nous noterons encore $\sigma_{\mathfrak{h}}$ la représentation (fidèle) de $\mathrm{A} = \mathrm{U}(\mathfrak{n})/\mathrm{I}_f$ déduite par passage au quotient.

Soit $\mathrm{X} \in \mathfrak{s}$. Il existe [26] une algèbre $\mathfrak{h} \in \mathrm{Mxl}(f, \mathfrak{n})$ stable sous $j(\mathrm{X})$. La dérivation de $\mathrm{U}(\mathfrak{n})$ qui prolonge $j(\mathrm{X})$ laisse stable l'idéal à gauche engendré par les $\mathrm{H} - f(\mathrm{H})$ pour $\mathrm{H} \in \mathfrak{h}$. En effet, si $\mathrm{H} \in \mathfrak{h}$, on a

$$j(\mathrm{X})[\mathrm{H} - f(\mathrm{H})] = j(\mathrm{X})\,\mathrm{H} - f(j(\mathrm{X})\,\mathrm{H})$$

parce que, comme $j(\mathrm{X})$ stabilise f, on a

$$f(j(\mathrm{X})\,\mathrm{H}) = 0.$$

Il en résulte que $j(\mathrm{X})$ stabilise I_f. Nous noterons encore $j(\mathrm{X})$ la dérivation de A déduite par passage du quotient.

Par ailleurs, $j(\mathrm{X})$ induit en endomorphisme $j_{\mathfrak{h}}(\mathrm{X})$ de l'espace de $\sigma_{\mathfrak{h}}$. Avec les notations de 1.3, on a donc

$$j_{\mathfrak{h}}(\mathrm{X})(u \otimes m) = j(\mathrm{X})\,u \otimes m. \tag{1}$$

Proposition 2.1. — *Soit* $\mathrm{X} \in \mathfrak{s}$. *Il existe un élément* (*unique*) $\theta(\mathrm{X}) \in \mathrm{A}$ *tel que, pour tout* $\mathfrak{h} \in \mathrm{Mxl}(f, \mathfrak{n})$ *stable par* $j(\mathrm{X})$ *on ait*

$$\sigma_{\mathfrak{h}}(\theta(\mathrm{X})) = j_{\mathfrak{h}}(\mathrm{X}) + \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}_{\mathfrak{n}/\mathfrak{h}}(\mathrm{X}).$$

Si $u, v \in \mathrm{A}$, *posons* $\varepsilon(u)\,v = uv - vu$.

On a, de plus,

$$\varepsilon(\theta(\mathrm{X})) = j(\mathrm{X}).$$

Démonstration. — L'algèbre A est une algèbre de Weyl [9]. Toutes ces dérivations sont intérieures [10]. Il existe donc $\theta'(\mathrm{X}) \in \mathrm{A}$ tel que

$$\varepsilon(\theta'(\mathrm{X})) = j(\mathrm{X}).$$

Comme le centre de A est réduit aux scalaires, un tel élément est déterminé modulo k.

Soit $\mathfrak{h} \in \mathrm{Mxl}(f, \mathfrak{n})$ stable sous $j(\mathrm{X})$.

Soit $\mathrm{Y} \in \mathfrak{n}$. Les relations suivantes sont immédiates :

$$[j_{\mathfrak{h}}(\mathrm{X}), \sigma_{\mathfrak{h}}(\mathrm{Y})] = \sigma_{\mathfrak{h}}(j(\mathrm{X})\,\mathrm{Y}),$$
$$[\sigma_{\mathfrak{h}}(\theta'(\mathrm{X})), \sigma_{\mathfrak{h}}(\mathrm{Y})] = \sigma_{\mathfrak{h}}(j(\mathrm{X})\,\mathrm{Y}).$$

L'opérateur

$$j_{\mathfrak{h}}(\mathrm{X}) - \sigma_{\mathfrak{h}}(\theta'(\mathrm{X}))$$

commute à la représentation $\sigma_{\mathfrak{h}}$. Le commutant de $\sigma_{\mathfrak{h}}$ est formé des scalaires. Ajoutant à $\theta'(\mathrm{X})$ un scalaire convenable, et tenant compte de ce que $\sigma_{\mathfrak{h}}$ est fidèle, on voit qu'il existe $\theta_{\mathfrak{h}}(\mathrm{X}) \in \mathrm{A}$ tel que

$$\sigma_{\mathfrak{h}}(\theta_{\mathfrak{h}}(\mathrm{X})) = j_h(\mathrm{X}) + \frac{1}{2}\mathrm{tr}_{\mathfrak{n}/\mathfrak{h}}(\mathrm{X}).$$

De plus,

$$\varepsilon(\theta_{\mathfrak{h}}(\mathrm{X})) = j(\mathrm{X}).$$

Il reste à voir que $\theta_{\mathfrak{h}}(\mathrm{X})$ ne dépend pas de $\mathfrak{h}$.

Introduisons l'algèbre $\mathfrak{g} = k\,\mathrm{X} \times_j \mathfrak{n}$ produit semi-direct de $k\,\mathrm{X}$ et de $\mathfrak{n}$. Notons $g \in \mathfrak{g}^*$ l'élément prolongeant f tel que $g(\mathrm{X}) = 0$. Notons $\mathfrak{l}$ la sous-algèbre $k\,\mathrm{X} \times_j \mathfrak{h}$, qui appartient à $\mathrm{Mxl}(g, \mathfrak{g})$.

L'injection canonique induit un $\mathfrak{n}$-isomorphisme :

$$\mathrm{U}(\mathfrak{n}) \otimes_{\mathrm{U}(\mathfrak{h})} k \to \mathrm{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathrm{U}(\mathfrak{l})} k$$

de sorte que la restriction de $\tau = \mathrm{Ind}(g \mid \mathfrak{l}, \mathfrak{g})$ à $\mathfrak{n}$ est $\sigma_{\mathfrak{h}}$. Dans cet isomorphisme, l'opérateur correspondant à $\tau(\mathrm{X})$ est $j_h(\mathrm{X})$. En effet, si $u \in \mathrm{U}(\mathfrak{n})$, on a

$$\begin{aligned} \tau(\mathrm{X})(u \otimes m) &= \mathrm{X}\,u \otimes m \\ &= u\,\mathrm{X} \otimes m + j(\mathrm{X})\,u \otimes m \\ &= u \otimes \mathrm{X}\,m + j(\mathrm{X})\,u \otimes m \\ &= \rho_{\mathfrak{g},\mathfrak{l}}(\mathrm{X})\,u \otimes m + j(\mathrm{X})\,u \otimes m \\ &= \sigma_{\mathfrak{h}}\left[\theta_{\mathfrak{h}}(\mathrm{X})\right](u \otimes m). \end{aligned}$$

Rappelons que le noyau de τ est noté I_g et ne dépend pas de $\mathfrak{h}$ (*cf.* 1.4).

Considérons l'application

$$\mathrm{U}(\mathfrak{n}) \to \mathrm{U}(\mathfrak{g})/\mathrm{I}_g.$$

D'après ce que nous venons de voir, elle est surjective et de noyau I_f. Elle induit un isomorphisme

$$i\ :\ \mathrm{U}(\mathfrak{g})/\mathrm{I}_g \to \mathrm{U}(\mathfrak{n})/\mathrm{I}_f = \mathrm{A}$$

et, notant $\overline{\mathrm{X}}$ l'image de X dans $\mathrm{U}(\mathfrak{g})/\mathrm{I}_g$, on a

(2) $$i(\overline{\mathrm{X}}) = \theta_{\mathfrak{h}}(\mathrm{X}).$$

Ceci prouve notre assertion, car i est défini sans référence à $\mathfrak{h}$.

Par exemple, la construction précédente s'applique à $\mathfrak{s} = \mathfrak{n}(f)$.

LEMME 2.2. — *Soit* $X \in \mathfrak{n}(f)$. *Notons* $\overline{X}$ *l'image de* X *dans* A. *On a*

$$\theta(X) = \overline{X} - \langle f, X \rangle.$$

Démonstration. — Comme $\varepsilon(\theta(X)) = \varepsilon(\overline{X})$, il existe $\sigma \in k$ tel que

$$\overline{X} = \theta(X) + c.$$

Soit $\mathfrak{h} \in \mathrm{Mxl}(f, \mathfrak{n})$. Avec les notations de 1.3, on a

$$\sigma_{\mathfrak{h}}(\theta(X))(1 \otimes m) = 0,$$

$$\sigma_{\mathfrak{h}}(X)(1 \otimes m) = X \otimes m = f(X)(1 \otimes m),$$

et donc

$$c = f(X).$$

THÉORÈME 2.3. — *L'application* θ *est un homomorphisme d'algèbres de Lie de* s *dans* A.

Remarque 2.4. — Le théorème est évident s'il existe $\mathfrak{h} \in \mathrm{Mxl}(f, n)$ stable sous $\mathfrak{s}$. Ce n'est pas en général le cas, et alors il n'est pas évident que θ soit linéaire.

Remarque 2.5. — Identifiant l'algèbre de Lie des dérivations de A à A/k, j induit un homomorphisme de $\mathfrak{s}$ dans A/k.

On voit que cet homomorphisme se relève. Le théorème affirme plus que l'existence du relèvement. Il en fournit un bien déterminé.

Démonstration. — Le théorème est évident si $\dim \mathfrak{n} = 1$. On raisonne par récurrence sur $\dim \mathfrak{n}$. On suppose donc $\dim \mathfrak{n} > 1$ et le théorème démontré pour les algèbres de Lie de dimension inférieure. On distingue plusieurs cas suivant la méthode traditionnelle. Notons $\mathfrak{z}$ le centre de $\mathfrak{n}$.

I. On suppose que $\mathfrak{z} \cap \ker f \neq 0$. En passant au quotient par $\mathfrak{z} \cap \ker f$, on est ramené immédiatement au cas de l'algèbre $\mathfrak{n}/\mathfrak{z} \cap \ker f$ à laquelle s'applique l'hypothèse de récurrence.

II. On suppose que $\dim \mathfrak{z} = 1$, $f(\mathfrak{z}) \neq 0$, et qu'il existe un idéal abélien $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{z}$ de $\mathfrak{n}$ stable sous $\mathfrak{s}$. On pose $\mathfrak{n}' = \mathfrak{n}(f \mid \mathfrak{a})$, $f' = f \mid \mathfrak{n}'$. Alors $\mathfrak{n}' \neq \mathfrak{n}$ est est une sous-algèbre de $\mathfrak{n}$ stable sous $\mathfrak{s}$. On définit $I_{f'} \subset U(\mathfrak{n}')$, $A' = U(\mathfrak{n}')/I_{f'}$, et si $X \in \mathfrak{s}$, $\theta'(X) \in A'$ de manière analogue à $\theta(X)$. L'hypothèse de récurrence montre que θ' est un homomorphisme.

Soit σ' une représentation de $U(\mathfrak{n}')$ dans un espace W, de noyau $I_{f'}$. La représentation $\sigma = \mathrm{Ind}(\sigma', \mathfrak{n})$ a pour noyau I_f. (En effet, ce noyau ne dépend pas de σ'. On le calcule en prenant $\sigma' = \mathrm{Ind}(f' \mid \mathfrak{h}, \mathfrak{n}')$, où $\mathfrak{h} \in \mathrm{Mxl}(f', \mathfrak{n}')$ (*cf.* [9]).)

Soit $X \in \mathfrak{s}$.

Introduisons les produits semi-directs

$$\mathfrak{g} = k\mathrm{X} \times_j \mathfrak{n} \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{g}' = k\mathrm{X} \times_j \mathfrak{n}'.$$

Considérons la représentation τ' de $\mathfrak{g}'$ dans W qui prolonge σ' et telle que

$$\tau'(\mathrm{X}) = \tau'(\theta'(\mathrm{X})).$$

D'après (2), le noyau de τ' est $\mathrm{I}_{g'}$ [où $g \in \mathfrak{g}^*$ est la forme linéaire prolongeant f telle que $g(\mathrm{X}) = 0$, et $g' = g \mid \mathfrak{g}'$]. Soit $\tau = \mathrm{Ind}(\tau', \mathfrak{g})$. Le noyau de τ est I_g. [En effet, il ne dépend que du noyau de τ'. Choisissons $\mathfrak{h} \in \mathrm{Mxl}(f', \mathfrak{n}')$ stable sous $j(\mathrm{X})$, et posons $\mathfrak{l} = k\mathrm{X} \times_j \mathfrak{h}$. Si $\sigma' = \mathrm{Ind}(f' \mid \mathfrak{h}, \mathfrak{n}')$, alors $\tau' = \mathrm{Ind}(g' \mid \mathfrak{l}, \mathfrak{g}')$ et $\tau = \mathrm{Ind}(g \mid \mathfrak{l}, \mathfrak{g})$. Comme $\mathfrak{l} \in \mathrm{Mxl}(g, \mathfrak{g})$, ceci prouve notre assertion.]

Soient $u \in \mathrm{U}(\mathfrak{n})$ et $w \in \mathrm{W}$. On a :

$$\begin{aligned}\tau(\mathrm{X})(u \otimes w) &= \mathrm{X}u \otimes w = u\mathrm{X} \otimes w + j(\mathrm{X})u \otimes w \\ &= \rho_{\mathfrak{g},\mathfrak{g}'}(\mathrm{X})u \otimes w + u \otimes \tau'(\theta'(\mathrm{X}))w + j(\mathrm{X})u \otimes w.\end{aligned}$$

Comme X et $\theta(\mathrm{X})$ ont la même image dans $\mathrm{U}(\mathfrak{g})/\mathrm{I}_g$, et comme $\tau \mid \mathfrak{n} = \sigma$, on a prouvé la formule

$$(3) \qquad \sigma(\theta(\mathrm{X}))(u \otimes w) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}_{\mathfrak{n}/\mathfrak{n}'}(\mathrm{X})u \otimes w + j(\mathrm{X})u \otimes w + u \otimes \sigma'(\theta(\mathrm{X}))w.$$

Comme θ' est un homomorphisme, il en résulte que $\sigma \circ \theta$ est un homomorphisme. Comme σ est une représentation fidèle de A, il en résulte que θ est un homomorphisme.

III. Si l'on n'est pas dans un des deux cas qui précèdent, alors $\dim \mathfrak{z} = 1$, $f(\mathfrak{z}) = 0$, et $\mathfrak{n}$ est une algèbre de Heisenberg de centre $\mathfrak{z}$.

Posons $\mathfrak{m} = \mathfrak{n} \cap \ker f$ et $\mathrm{B} = \mathrm{B}_f \mid \mathfrak{m} \times \mathfrak{m}$. Les $j(\mathrm{X})$ $(\mathrm{X} \in \mathfrak{s})$ induisent des endomorphismes de $\mathfrak{m}$ laissant stable B.

Notons $\mathfrak{sp}(\mathrm{B})$ l'algèbre de ces endomorphismes. Ils se prolongent trivialement en des dérivations de $\mathfrak{n}$.

Nous pouvons supposer que $\mathfrak{s} = \mathfrak{sp}(\mathrm{B})$.

Dans ce cas, comme remarqué dans [18], il existe un isomorphisme ψ de $\mathfrak{s}$ dans A. Pour décrire ψ, choisissons une base $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$, z de $\mathfrak{n}$ telle que

$$z \in \mathfrak{z}, \qquad f(z) = 1, \qquad x_1, \ldots, y_n \in \mathfrak{m}, \qquad [x_i, x_j] = [y_i, y_j] = 0,$$
$$[x_i, y_j] = \rho_{ij} z, \qquad (1 \leq i, j \leq n).$$

Posons $p_i = \bar{x}_i$, $q_i = \bar{y}_i$; notons A_m (pour $m \in \mathbf{N}$) le sous-espace de A engendré par les éléments de la forme

$$p_1^{\alpha_1} q_1^{\beta_1} \ldots p_n^{\alpha_n} q_n^{\beta_n},$$

avec

$$\alpha_1 + \beta_1 + \ldots + \alpha_n + \beta_n \leq m.$$

Alors A_1 est une sous-algèbre de Lie de A, isomorphe à $\mathfrak{n}$. Les relations

$$[p_i, q_j^n] = \delta_{ij}\, n q_j^{n-1},$$
$$[p_i^n, q_j] = \delta_{ij}\, n p_i^{n-1}$$

montrent que A_2 est le normalisateur de A_1 dans A. Comme A est engendré par A_1 et comme toutes ses dérivations sont intérieures, il en résulte que A_2/k s'identifie à l'algèbre des dérivations de A_1 annulant k. L'image de $\mathfrak{m}$ dans A_1 est engendrée par les p_i et les q_i. Le stabilisateur de cet espace est somme de

$$A'_2 = \sum_{i,j} k\left(\frac{p_i q_j + q_j p_i}{2}\right) + kp_i p_j + kq_i q_j$$

et de k.

Un calcul simple prouve que A'_2 est une sous-algèbre de Lie de A. Ce que nous venons de voir prouve qu'étant donné $X \in \mathfrak{sp}(B)$, il existe un élément $\psi(X)$ et un seul dans A'_2 tel que $j(X) = \varepsilon(\varphi(X))$. Comme A'_2 est une sous-algèbre, on voit que ψ est un isomorphisme de $\mathfrak{sp}(B)$ sur A'_2.

Le théorème sera démontré si nous prouvons que $\theta = \psi$.

Soit donc $X \in \mathfrak{sp}(B)$. Il existe $\mathfrak{h} \in \mathrm{Mxl}(f, \mathfrak{n})$, stable sous X. Alors $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{m}$ est un sous-espace totalement isotrope maximale de $\mathfrak{m}$ stable sous X. Imposons à la base de $\mathfrak{n}$ choisie plus haut de vérifier les relations

$$x_1 \in \mathfrak{h}, \qquad \ldots, \qquad x_n \in \mathfrak{h}.$$

Notons $\mathfrak{b}$ la sous-algèbre de $\mathfrak{sp}(B)$ stabilisant $\mathfrak{h}$. La restriction de θ à $\mathfrak{b}$ est un homomorphisme (*cf.* Remarque 2.4); d'autre part, $\psi(b)$ admet une base formée d'éléments de la forme

$$\frac{1}{2}(p_i q_j + q_j p_i) \quad \text{et} \quad p_i p_j \qquad (1 \leq i, j \leq n).$$

Il suffit donc de prouver la relation $\theta(X) = \psi(X)$ dans un des cas suivants :

A. $\psi(X) = p_i p_j$;

B. $\psi(X) = \frac{1}{2}(p_i q_j + q_j p_i)$.

Notons enfin que $\theta(X)$ et $\psi(X)$ ne diffèrent que d'une constante, car ils induisent la même dérivation de A.

Considérons l'élément $1 \otimes m$ de l'espace de la représentation

$$\sigma_{\mathfrak{h}} = \mathrm{Ind}\,(f \mid \mathfrak{h}, \mathfrak{n}).$$

Dans le cas A, on a

$$\sigma_{\mathfrak{h}}\,(p_i\,p_j)\,(1 \otimes m) = x_i\,x_j \otimes m = 0,$$

$$\sigma_{\mathfrak{h}}\,(\theta\,(\mathrm{X}))\,(1 \otimes m) = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}_{\mathfrak{n}/\mathfrak{h}}\,(\mathrm{X})\,(1 \otimes m).$$

Comme X est nilpotent, on a $\mathrm{tr}_{\mathfrak{n}/\mathfrak{h}}\,(\mathrm{X}) = 0$, donc

$$\sigma_{\mathfrak{h}}\,(\psi\,(\mathrm{X}))\,(1 \otimes m) = \sigma_{\mathfrak{h}}\,(\theta\,(\mathrm{X}))\,(1 \otimes m) \tag{4}$$

et, finalement, $\psi\,(\mathrm{X}) = \theta\,(\mathrm{X})$.

Dans le cas B, on a

$$\sigma_{\mathfrak{h}}\left(\frac{1}{2}(p_i\,q_j + q_j\,p_i)\right)(1 \otimes m)$$
$$= \sigma_{\mathfrak{h}}\left(\frac{1}{2}\delta_{ij}\,z + q_j\,p_i\right)(1 \otimes m) = \frac{1}{2}\delta_{ij}\,(1 \otimes m)$$

et

$$\sigma_{\mathfrak{h}}\,(\theta\,(\mathrm{X}))\,(1 \otimes m) = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}_{\mathfrak{n}/\mathfrak{h}}\,(\mathrm{X})\,(1 \otimes m).$$

D'autre part, si $k \in \{1, \ldots, n\}$, on a

$$\left[\frac{1}{2}(p_i\,q_j + q_j\,p_i),\, q_k\right] = \delta_{ik}\,q_j$$

et donc

$$\mathrm{tr}_{\mathfrak{n}/\mathfrak{h}}\,(\mathrm{X}) = \delta_{ij}.$$

On en déduit encore la relation (4), et donc

$$\psi\,(\mathrm{X}) = \theta\,(\mathrm{X}).$$

C. Q. F. D.

3. Représentations d'un produit semi-direct. — On se donne $\mathfrak{n}$, f, $\mathfrak{s}$ comme dans le paragraphe 2. Soit σ une représentation irréductible de $\mathfrak{n}$ de noyau I_f dans un espace V. On cherche les représentations irréductibles γ du produit semi-direct $\mathfrak{b} = \mathfrak{s} \times_j \mathfrak{n}$ telles que $\gamma \mid \mathfrak{n}$ soit multiple de σ.

Le théorème 2.3 montre qu'il existe une représentation σ' de $\mathfrak{b}$ dans V telle que

$$\sigma'\,(\mathrm{Y}) = \sigma\,(\mathrm{Y}) \quad \text{si} \quad \mathrm{Y} \in \mathfrak{n}; \tag{1}$$

$$\sigma'\,(\mathrm{X}) = \sigma\,(\theta\,(\mathrm{X})) \quad \text{si} \quad \mathrm{X} \in \mathfrak{s}. \tag{2}$$

Soit τ une représentation de $\mathfrak{s}$ dans un espace W. On la prolonge trivialement en une représentation de $\mathfrak{b}$ dans W.

On considère la représentation de $\tau \otimes \sigma'$ de $\mathfrak{b}$ dans $W \otimes V$.

THÉORÈME 3.1. — *Soit τ une représentation de $\mathfrak{s}$ dans un espace* W. *La représentation $\tau \otimes \sigma'$ de $\mathfrak{b}$ dans $W \otimes V$ est définie par les formules*

$$\tau \otimes \sigma'(Y) = 1 \otimes \sigma(Y) \quad \text{si} \quad Y \in \mathfrak{n}; \tag{3}$$

$$\tau \otimes \sigma'(X) = \tau(X) \otimes 1 + 1 \otimes \sigma(\theta(X)) \quad \text{si} \quad X \in \mathfrak{s}. \tag{4}$$

Toute représentation γ de $\mathfrak{b}$ telle que $\gamma \mid \mathfrak{n}$ soit multiple de σ est isomorphe à une représentation de la forme $\tau \otimes \sigma'$.

La représentation $\tau \otimes \sigma'$ est irréductible si et seulement si τ est irréductible.

Si τ' est une représentation de $\mathfrak{s}$ dans W', *l'injection naturelle induit un isomorphisme*

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{s}}(W, W') \simeq \mathrm{Hom}_{\mathfrak{b}}(W \otimes V, W' \otimes V).$$

Démonstration. — Le commutant de σ est réduit aux scalaires (*cf.* [22]). D'après ([6], th. 1, p. 15) on peut supposer que γ est réalisée dans un espace $W \otimes V$ de telle sorte que $\gamma(Y) = 1 \otimes \sigma(Y)$ pour tout $Y \in \mathfrak{n}$. De plus, tout endomorphisme de $V \otimes W$ commutant à la représentation $1 \otimes \sigma$ est de la forme $B \otimes 1$ ([6], p. 15) avec $B \in \mathrm{Hom}(W, W)$, et tous les sous-espaces $\mathfrak{n}$-invariants de $W \otimes V$ sont de la forme $W' \otimes V$, où $W' \subset W$ ([6], p. 42).

Soit $X \in \mathfrak{n}$. L'opérateur.

$$\gamma(X) - 1 \otimes \sigma(\theta(X))$$

commute à $1 \otimes \sigma$. Il existe donc $\tau(X) \in \mathrm{Hom}(W, W)$ tel que

$$\gamma(X) - 1 \otimes \sigma(\theta(X)) = \tau(X) \otimes 1.$$

On en déduit que τ est une représentation, que $\gamma = \tau \otimes \sigma'$. Toutes les autres assertions sont claires. C. Q. F. D.

Dans les notations du théorème 3.1, $\tau \otimes \sigma'$ est en quelque sorte un produit tensoriel tordu de τ et de σ. Nous allons voir que l'on peut l'interpréter comme un vrai produit tensoriel.

On définit un homomorphisme r de $U(\mathfrak{b})$ dans $U(\mathfrak{s}) \otimes A$ en posant

$$r(Y) = 1 \otimes \overline{Y} \quad \text{si} \quad Y \in \mathfrak{n} \tag{5}$$

et si $\overline{Y}$ est l'image de Y dans A,

$$r(X) = X \otimes 1 + 1 \otimes \theta(X) \quad \text{si} \quad X \in \mathfrak{s}. \tag{6}$$

En effet,

$$\begin{aligned}[r(\mathrm{X}), r(\mathrm{Y})] &= [\mathrm{X} \otimes 1 + 1 \otimes \theta(\mathrm{X}), 1 \otimes \overline{\mathrm{Y}}] \\ &= [1 \otimes \theta(\mathrm{X}), 1 \otimes \overline{\mathrm{Y}}] = 1 \otimes [\theta(\mathrm{X}), \overline{\mathrm{Y}}] = 1 \otimes [\mathrm{X}, \mathrm{Y}]^{-} \\ &= r([\mathrm{X}, \mathrm{Y}]).\end{aligned}$$

Il est clair que l'on a (avec les notations de 3.1)

$$\tau \otimes \sigma' = r \circ (\tau \otimes \sigma). \tag{7}$$

Proposition 3.2. — *L'homomorphisme r induit un isomorphisme*

$$\mathrm{U}(\mathfrak{b})/\mathrm{U}(\mathfrak{b})\,\mathrm{I}_f \to \mathrm{U}(\mathfrak{s}) \otimes \mathrm{A}.$$

Démonstration. — On a évidemment $\mathrm{U}(\mathfrak{b})\,\mathrm{I}_f \subset \ker r$. Il faut montrer l'inclusion inverse.

Soient $y_1, \ldots, y_m$ une suite d'éléments de $\mathfrak{s}$ et $u \in \mathrm{U}(\mathfrak{n})$. On a

$$r(y_1 \ldots y_m u) = \sum_{\substack{0 \leq k_j \leq 1 \\ 1 \leq j \leq m}} y_1^{k_1} \ldots y_m^{k_m} \otimes \theta(y_1)^{1-k_1} \ldots \theta(y_m)^{1-k_m}\, \overline{u}. \tag{8}$$

En effet, (8) est vrai si $m = 1$ par définition de r, et le cas général se démontre par récurrence en écrivant :

$$r(y_1 \ldots y_m u) = r(y_1)\, r(y_2 \ldots y_m u).$$

Soit $x_1, \ldots, x_m$ une base de $\mathfrak{s}$. Soit $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \mathbf{N}^m$ un multi-indice; on pose

$$|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_m \qquad \text{et} \qquad x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \ldots x_m^{\alpha_m}.$$

Tout élément v de $\mathrm{U}(\mathfrak{b})$ s'écrit d'une manière et d'une seule sous la forme

$$v = \sum x^\alpha u_\alpha,$$

où $u_\alpha \in \mathrm{U}(\mathfrak{n})$ est nul pour presque tous les α.

On note $q(v)$ le plus grand entier tel qu'il existe α de longueur $q(v)$ tel que $u_\alpha \neq 0$.

Supposons $r(v) = 0$. Nous allons prouver que $v \in \mathrm{U}(\mathfrak{s})\,\mathrm{I}_f$ par récurrence sur $q(v)$. Si $q(v) = 0$, alors $v \in \mathrm{U}(\mathfrak{n})$ et donc $v \in \mathrm{I}_f$. Supposons donc $q(v) > 0$, et le théorème démontré pour les éléments $v' \in \ker r$ tels que $q(v') < q(v)$.

D'après (8), on a

$$0 = r(v) = \sum_{|\alpha| = q(v)} x^\alpha \otimes \overline{u}_\alpha + \sum_{|\alpha| < q(v)} x^\alpha \otimes p_\alpha$$

avec certains éléments $p_\alpha \in A$. On voit donc que $\bar{u}_\alpha = 0$ si $|\alpha| = q(\nu)$, c'est-à-dire $u_\alpha \in I_f$. Posons

$$v' = v - \sum_{|\alpha| = q(\nu)} x^\alpha \otimes u_\alpha.$$

Alors $q(\nu') < q(\nu)$ et $r(\nu') = 0$, de sorte que $\nu' \in U(\mathfrak{s}) I_f$. Il en résulte que $\nu \in U(\mathfrak{s}) I_f$.

C. Q. F. D.

Comme l'algèbre A est une algèbre de Weyl, tout idéal bilatère de $U(\mathfrak{s}) \otimes A$ est de la forme $J \otimes A$, où J est un idéal bilatère de $U(\mathfrak{s})$ ([9], p. 493). Il est clair que J est maximal, ou premier, si et seulement s'il en est de même de $J \otimes A$.

Nous noterons $r_*(J)$ l'idéal bilatère de $U(\mathfrak{b})$ image réciproque de $J \otimes A$.

Proposition 3.3. — *L'application r_* est une bijection de l'ensemble des idéaux bilatères de $U(\mathfrak{s})$ sur l'ensemble des idéaux bilatères de $U(\mathfrak{b})$ contenant I_f.*

L'application r_* induit une bijection de l'ensemble des idéaux premiers (maximaux) de $U(\mathfrak{s})$ sur l'ensemble des idéaux premiers (maximaux) de $U(\mathfrak{b})$ contenant I_f.

Si τ est une représentation de $U(\mathfrak{s})$ de noyau J, le noyau de $\tau \otimes \sigma'$ est $r_*(J)$.

Si J est primitif, $r_*(J)$ est primitif.

Tout est clair.

4. Un complément a un théorème de Blattner. — Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, $\mathfrak{n}$ un idéal, σ une représentation irréductible de $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{k}$ le stabilisateur de σ dans $\mathfrak{g}$.

(On sait que $\mathfrak{k}$ est l'ensemble des $X \in \mathfrak{g}$ tels qu'il existe un endomorphisme s de l'espace de σ tel que

$$[s, \sigma(Y)] = \sigma([X, Y])$$

pour tout $Y \in \mathfrak{n}$.)

Le théorème suivant (qui rappelle un théorème bien connu de Mackey) a été prouvé par R. J. Blattner [4].

Théorème 4.1. — *Soit γ une représentation irréductible de $\mathfrak{k}$ telle que $\gamma \mid \mathfrak{n}$ soit multiple de σ. Alors $\mathrm{Ind}(\gamma, \mathfrak{g})$ est irréductible.*

En suivant de près la démonstration de [4], nous allons démontrer un résultat analogue.

Soit γ une représentation de $\mathfrak{k}$ dans un espace W. Rappelons que nous notons W' le $U(\mathfrak{k})$-module associé à $\gamma \otimes \rho_{\mathfrak{g},\mathfrak{k}}$.

Notons $U_n(\mathfrak{g}) = U_n$ le sous-espace de $U(\mathfrak{g})$ engendré par les produits d'éléments de $\mathfrak{g}$ de longueur $\leq n$ (ici $n \in \mathbf{N}$). Nous poserons

$$U_n W' = U_n \otimes_{U(\mathfrak{k})} W',$$
$$UW' = U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{k})} W'.$$

En particulier, $U_0 W' = W'$ est un sous-espace $\mathfrak{k}$-stable de UW'.

Soient γ_1 et γ_2 deux représentations de $\mathfrak{k}$ dans des espaces W_1 et W_2. A un élément $\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{k}}(W_1, W_2)$ est associé un élément $\psi' \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{k}}(W'_1, W'_2)$, et un élément $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(UW'_1, UW'_2)$; on a

(1) $$\varphi(u \otimes w) = u \otimes \psi'(w)$$

pour tout $u \in U(g)$, $w \in W'$.

Théorème 4.2. — *Soient γ_1 et γ_2 deux représentations de $\mathfrak{k}$ dont la restriction à $\mathfrak{n}$ soit multiple de σ. L'injection naturelle induit un isomorphisme*

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{k}}(W_1, W_2) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(UW'_1, UW'_2).$$

Démonstration. — Soit $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(UW'_1, UW'_2)$. Il faut montrer que φ provient d'un élément de $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{k}}(W_1, W_2)$. Compte tenu de (1), il suffit de prouver

(2) $$\varphi(W'_1) \subset W'_2.$$

Notons V l'espace de σ.

Comme $\gamma_1 \mid \mathfrak{n}$ est multiple de σ, W'_1 est somme directe de sous-$\mathfrak{n}$-modules isomorphes à V. Soit $V_1 \subset W'_1$ un tel sous-$\mathfrak{n}$-module; il nous suffit pour prouver (2) de prouver que $\varphi(V_1) \subset W'_2$. Comme V_1 est un $\mathfrak{n}$-module simple, l'une au moins des relations suivantes est vérifiée :

$$\varphi(V_1) \subset W'_2 \qquad \text{ou} \qquad \varphi(V_1) \cap W'_2 = 0.$$

On est donc ramené à démontrer l'assertion suivante :

(3) $$\varphi(V_1) \cap W'_2 = 0 \Rightarrow \varphi(V_1) = 0.$$

On suppose donc donné un sous-$\mathfrak{n}$-module simple V_1 de W'_1 tel que $\varphi(V_1) \cap W'_2 = 0$. Nous allons démontrer par récurrence sur l'entier n que l'on a $\varphi(V_1) \cap U_n W'_2 = 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Soit $n \in \mathbf{N}$, $n > 0$. On suppose que $\varphi(V_1) \in U_{n'} W'_2 = 0$ pour tout $n' < n$. Soit $w \in V_1$ tel que $\varphi(w) \in U_n W'_2$. Nous devons prouver que $\varphi(w) = 0$. Nous supposons que $\varphi(w) \neq 0$. Le théorème sera démontré si nous prouvons que c'est absurde.

Soit $x_1, \ldots, x_m$ une base d'un supplémentaire de $\mathfrak{k}$ dans $\mathfrak{g}$. Si $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \mathbf{N}^m$, on pose toujours $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \ldots x_m^{\alpha_m}$. Il existe des éléments bien déterminés $w_\alpha \in W'_2$ tels que

$$\varphi(w) = \sum_{|\alpha| \leq n} x^\alpha \otimes w_\alpha.$$

Comme $\varphi(w) \neq 0$, $\varphi(w)$ ne peut être dans $U_{n-1} W'_2$, à cause de l'hypothèse de récurrence. Il existe donc un multi-indice α_0 de longueur n tel que $w_{\alpha_0} \neq 0$.

Soit $z \in U(\mathfrak{n})$. Il résulte de ([4], lemme 7) qu'il existe des éléments $w'_\alpha \in W'_2$ tels que

$$\varphi(zw) = z\,\varphi(w) = \sum_{|\alpha|=n} x^\alpha \otimes z w_\alpha + \sum_{|\alpha|<n} x^\alpha \otimes w'_\alpha.$$

En particulier, $zw = 0$ entraîne $zw_\alpha = 0$ pour tout α de longueur n. Il existe donc un homomorphisme η de $\mathfrak{n}$-module de V_1 dans W'_2 tel que $\eta(w) = w_{\alpha_0}$. Comme $\gamma_2 \mid \mathfrak{n}$ est multiple de σ, il existe un $\mathfrak{n}$-module supplémentaire W''_2 de $\eta(V_1)$ dans W'_2. On notera ζ l'homomorphisme de $\mathfrak{n}$-modules de W'_2 dans V_1 nul sur W''_2 tel que $\zeta \circ \eta = \text{id}$. Comme le commutant de σ est scalaire, $\tau(w_\alpha)$ est proportionnel à w si $|\alpha| = n$. On a donc.

$$\zeta(w_\alpha) = \lambda_\alpha\, w,$$

avec $\lambda_\alpha \in k$, $\lambda_{\alpha_0} = 1$.

Écrivons $\alpha_0 = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$. On peut supposer que $\alpha_1 \neq 0$. Soit $z \in U(\mathfrak{n})$. D'après ([4], lemme 7), le coefficient de $x_1^{\alpha_1 - 1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_m^{\alpha_m}$ dans W'_2 de $\varphi(zw)$ est

$$\begin{aligned} & z w_{\alpha_1 - 1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m} + \alpha_1 [z, x_1]\, w_{\alpha_0} \\ & \quad + (\alpha_2 + 1)[z, x_2]\, w_{\alpha_1 - 1, \alpha_2 + 1, \alpha_3, \ldots, \alpha_m} + \cdots \\ & \quad + (\alpha_m + 1)[z, x_m]\, w_{\alpha_1 - 1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m + 1}. \end{aligned}$$

Posons

$$y = \alpha_1 x_1 + \sum_{i=2}^{m} c_i x_i.$$

où

$$c_i = (\alpha_i + 1)\, \lambda_{\alpha_1 - 1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i + 1, \ldots, \alpha_m}.$$

Posons

$$w_0 = (w_{\alpha_1 - 1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m}).$$

Si l'on applique ζ au coefficient de $x_1^{\alpha_1 - 1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_m^{\alpha_m}$, on trouve

$$z w_0 + [z, y]\, w.$$

Comme $\alpha_1 \neq 0$, y n'appartient pas à $\mathfrak{k}$. D'autre part, si $zw = 0$, on a $\varphi(zw) = 0$ et donc $zw_0 + [z, y]\, w = 0$.

On peut donc définir un endomorphisme s de V_1 par la formule

$$s(zw) = zw_0 + [z, y]\, w \qquad [z \in U(\mathfrak{n})].$$

Soit $z' \in U(\mathfrak{n})$. Notons $\sigma_1(z')$ la restriction à V_1 de $\gamma_1(z')$. (Donc $\sigma_1 \simeq \sigma$.) On a

$$\begin{aligned}[s, \sigma_1(z')](zw) &= s(z' zw) - z' s(zw) \\ &= z' z w_0 + [z' z, y]\, w - z' zw_0 - z' [z, y]\, w \\ &= [z', y]\, zw = -\sigma_1([y, z'])\, zw\end{aligned}$$

de sorte que

$$\sigma_1([y, z']) = [-s, \sigma_1(z')].$$

Donc y stabilise σ_1 (ou σ) et donc $y \in \mathfrak{k}$, ce qui fournit la contradiction cherchée. C. Q. F. D.

5. Extensions des représentations des algèbres de Lie nilpotentes. — Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur k, $\mathfrak{n}$ un idéal nilpotent de $\mathfrak{g}$, $f \in \mathfrak{n}^*$, σ une représentation irréductible de $\mathfrak{n}$ de noyau I_f.

Le lemme suivant est connu. Prouvons-le pour la commodité du lecteur.

Lemme 5.1. — *Soit* $Y \in \mathfrak{n}$ *un élément tel que* $\exp(\operatorname{ad} Y) f = f$. *Alors* $Y \in \mathfrak{n}(f)$.

Démonstration. — Soit n un entier tel que $(\operatorname{ad} Y)^{n+1} f = 0$. Posons $f_i = \frac{1}{i!}(\operatorname{ad} Y)^i f$ (ici, $i \in \mathbf{N}$). Pour $t = 1, 2, \ldots, n$, on a $\exp t(\operatorname{ad} Y) f = f$ et donc

$$tf_1 + t^2 f_2 + \ldots + t^n f_n = 0.$$

Le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 2 & 2^2 & \ldots & 2^n \\ . & .. & \ldots & .. \\ n & n^2 & \ldots & n^n \end{vmatrix}$$

est non nul, de sorte que $f_1 = f_2 = \ldots = f_n = 0$.

En particulier, $f_1 = 0$ signifie que $Y \in \mathfrak{n}(f)$.

Lemme 5.2. — *Le stabilisateur de* σ *dans* $\mathfrak{g}$ *est* $\mathfrak{g}(f) + \mathfrak{n}$. *C'est aussi le stabilisateur de* I_f *dans* $\mathfrak{g}$.

Démonstration. — D'après [12], I_f et σ ont même stabilisateur. Celui-ci contient $\mathfrak{g}(f) + \mathfrak{n}$, comme nous l'avons vu au début du paragraphe 2.

Considérons une base de $\mathfrak{g}$ contenant une base de $\mathfrak{n}$. Notons k' le corps engendré sur $\mathbf{Q}$ par les constantes de structures et les coordonnées de f,

$\mathfrak{g}'$ la sous-algèbre de Lie engendrée sur k' par cette base, f' la restriction de f à $\mathfrak{g}' \cap \mathfrak{n}$. On plonge k' dans $\mathbf{C}$, on pose $\mathfrak{g}'' = \mathfrak{g}' \otimes \mathbf{C}$ et on note f'' la forme linéaire sur $\mathfrak{n}''$ déduite de f'. Il est facile de voir que l'on a $I_f = I_{f'} \otimes k$ et $I_{f''} = I_{f'} \otimes \mathbf{C}$ de sorte qu'il suffit de prouver le lemme lorsque le corps de base est $\mathbf{C}$, ce que nous faisons désormais. Soit G le groupe de Lie complexe simplement connexe d'algèbre $\mathfrak{g}$. Les notations N et G (f) sont claires. D'après ([9], théorème 5), le stabilisateur de I_f dans G est G (f) N. Le lemme en résulte aussitôt.

C. Q. F. D.

Considérons la suite exacte :

$$0 \to \mathfrak{z} \to \mathfrak{g}(f) \times \mathfrak{n} \to \mathfrak{k} \to 0,$$

où $\mathfrak{k}$ est le stabilisateur de σ dans $\mathfrak{g}$, et $\mathfrak{z}$ l'ensemble des couples $(Y, -Y) \in \mathfrak{g}(f) \times \mathfrak{n}$, avec $Y \in \mathfrak{g}(f)$ (*cf.* le lemme 5.2). Si τ est une représentation de $\mathfrak{g}(f)$, la représentation $\tau \otimes \sigma'$ du théorème 3.1 est nulle sur $\mathfrak{z}$ si et seulement si $\tau \mid \mathfrak{n}(f)$ est multiple de $f \mid \mathfrak{n}(f)$ (c'est une conséquence du lemme 2.2). Dans ce cas, on note encore $\tau \oplus \sigma'$ la représentation de $\mathfrak{k}$ déduite par passage au quotient. Les théorèmes 3.1, 3.3, 4.1 et 4.2 donnent le théorème suivant :

THÉORÈME 5.3. — *Soient σ une représentation irréductible de $\mathfrak{n}$ de noyau I_f, et τ et τ' des représentations de $\mathfrak{g}(f)$ dans des espaces* W *et* W' *dont les restrictions à $\mathfrak{n}(f)$ soient multiples de $f \mid \mathfrak{n}(f)$.*

Posons $\rho = \mathrm{Ind}(\tau \otimes \sigma', \mathfrak{g})$ et $\rho' = \mathrm{Ind}(\tau \otimes \sigma', \mathfrak{g})$, et notons V *et* V' *les espaces de ρ et ρ'.*

(I) *L'injection naturelle induit un isomorphisme*

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}(f)}(W, W') \simeq \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, V').$$

(II) *Si τ* et *τ' ont même noyau dans* U $(\mathfrak{g}(f))$, *ρ et ρ' ont même noyau dans* U $(\mathfrak{g})$.

(III) *ρ est irréductible si et seulement s'il en est de même de τ.*

6. APPLICATION AUX REPRÉSENTATIONS INDUITES. — Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur k, $\mathfrak{n}$ un idéal nilpotent, $g \in \mathfrak{g}^*$, $f = g \mid \mathfrak{n}$.

Soit $\mathfrak{l}$ une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ subordonnée à g. Nous supposons que $\mathfrak{h} = \mathfrak{l} \cap \mathfrak{n} \in \mathrm{Mxl}(f, \mathfrak{n})$. La représentation $\sigma = \mathrm{Ind}(f \mid \mathfrak{h}, \mathfrak{n})$ a pour noyau I_f.

Posons $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}(f)$, $\mathfrak{l}_1 = \mathfrak{l} \cap \mathfrak{g}_1$, $f_1 = f \mid \mathfrak{g}_1$. Alors $\mathfrak{n}(f)$ est un idéal de $\mathfrak{g}_1$ contenu dans $\mathfrak{l}_1$; la représentation $f \mid \mathfrak{n}(f)$ est stable par $\mathfrak{g}(f)$. Posons $\tau = \mathrm{Ind}(f_1 \mid \mathfrak{l}_1, \mathfrak{g}_1)$. La restriction de τ à $\mathfrak{n}(f)$ est multiple de $f \mid \mathfrak{n}(f)$. On peut donc former la représentation $\tau \otimes \sigma'$ de $\mathfrak{k} = \mathfrak{g}_1 + \mathfrak{n}$.

THÉORÈME 6.1. — *Les représentations* Ind $(g \mid \mathfrak{l}, \mathfrak{g})$ *et* Ind $(\tau \otimes \sigma', \mathfrak{g})$ *sont équivalentes.*

COROLLAIRE 6.2. — *La représentation* Ind $(g \mid \mathfrak{l}, \mathfrak{g})$ *est irréductible si et seulement s'il en est de même de* Ind $(g_1 \mid \mathfrak{l}_1, \mathfrak{g}_1)$. *Ces deux représentations ont même commutant.*

Ceci résulte des théorèmes 5.3 et 6.1.

Démonstration de 6.1. — On sait que $\mathfrak{l} = \mathfrak{l}_1 + \mathfrak{h} \subset \mathfrak{k}$ (*cf.* [1]). Le théorème d'induction par étages nous ramène au cas où $\mathfrak{g} = \mathfrak{k}$, condition que nous supposons réalisée désormais. Considérons l'homomorphisme surjectif

$$\pi : \quad \mathfrak{b} = \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{n} \to \mathfrak{g}.$$

Soient $g' \in \mathfrak{b}^*$ l'image de g, $\mathfrak{l}' \subset \mathfrak{b}$ l'algèbre $\mathfrak{l}_1 \times \mathfrak{h}$. On est amené à prouver que la représentation $\tau \otimes \sigma'$ de $\mathfrak{b}$ est équivalente à Ind $(g' \mid \mathfrak{l}', \mathfrak{b})$.

Notons J l'idéal à gauche de $U(\mathfrak{b})$ engendré par les éléments $H - g'(H) - \rho_{\mathfrak{b}, \mathfrak{l}'}(H)$ quand H parcourt $\mathfrak{l}'$, $\overline{J}_1$ l'idéal à gauche de $U(\mathfrak{g}_1)$ engendré par les éléments $H - g_1(H) - \rho_{\mathfrak{g}_1, \mathfrak{l}_1}(H)$ quand H parcourt $\mathfrak{l}_1$, J_2 l'idéal à gauche de $U(\mathfrak{n})$ engendré par les $H - f(H)$ quand H parcourt $\mathfrak{h}$, $\overline{J}_2$ l'image de J_2 dans $A = U(\mathfrak{n})/I_f$.

Considérons, comme dans la proposition 3.2 l'homomorphisme

$$r : \quad U(\mathfrak{b}) \to U(\mathfrak{g}_1) \otimes A.$$

Nous allons prouver que $r(J) = J'$, où J' est l'idéal à gauche

$$J' = J_1 \otimes A + U(\mathfrak{g}_1) \otimes J_2.$$

Cela entraîne le théorème. En effet, Ind $(g \mid \mathfrak{l}', \mathfrak{b})$ est équivalente à la représentation naturelle de $\mathfrak{b}$ dans $U(\mathfrak{b})/J$, $\tau \otimes \sigma$ à la représentation naturelle de $U(\mathfrak{g}_1) \otimes A$ dans $(U(\mathfrak{g}_1) \otimes A)/J'$, de sorte que Ind $(g \mid \mathfrak{l}', \mathfrak{b})$ et $r \circ (\tau \otimes \sigma')$ sont équivalentes. Notre assertion résulte donc de la formule (7) du paragraphe 3.

Prouvons d'abord l'inclusion $r(J) \subset J'$. Si $H \in \mathfrak{h}$, on a $r(H) = \overline{\overline{H}}$, et donc $r(H - f(H)) \in \overline{J}_2$. Si $H \in \mathfrak{l}_1$, on a $r(H) = H \otimes 1 + 1 \otimes \theta(H)$. Comme H laisse stable $\mathfrak{h}$, on sait que

$$\theta(H) - \frac{1}{2} \operatorname{tr}_{\mathfrak{n}/\mathfrak{h}}(H) \in \overline{J}_2$$

(propos. 2.1). Par conséquent, l'élément

$$r\left(H - g'(H) - \rho_{\mathfrak{b}, \mathfrak{l}'}\right) = \left[H - g_1(H) - \rho_{\mathfrak{b}_1, \mathfrak{l}_1}(H)\right] \otimes 1 + 1 \otimes \left[\theta(H) - \frac{1}{2} \operatorname{tr}_{\mathfrak{n}/\mathfrak{h}}(H)\right]$$

est dans J'.

Prouvons enfin l'inclusion $r^{-1}(\mathrm{J}') \subset \mathrm{J}$.

Soient $y_1, \ldots, y_p$ une base d'un supplémentaire de $\mathfrak{l}_1$ dans $\mathfrak{g}_1$, $x_1, \ldots, x_q$ une base d'un supplémentaire de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{n}$. Soient $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_q) \in \mathbf{N}^q$ et $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_p) \in \mathbf{N}^p$ des multi-indices. Les éléments $y^\beta x^\alpha$ forment une base d'un supplémentaire E de J dans U $(\mathfrak{b})$.

Soit n un entier, et soit E_n l'espace engendré par les $y^\beta x^\alpha$ avec $|\beta| \leqq n$. Il est clair que $\mathrm{E}_0 \cap r^{-1}(\mathrm{J}') = 0$. Le théorème sera démontré si nous prouvons que $\mathrm{E} \cap r^{-1}(\mathrm{J}') = 0$. Par récurrence, il suffit de prouver que si $n \geqq 1$, et si $\mathrm{E}_{n-1} \cap r^{-1}(\mathrm{J}') = 0$, alors $\mathrm{E}_n \cap r^{-1}(\mathrm{J}') = 0$. Soit $u = \sum_{|\beta| \leqq n} y^\beta p_\beta(x)$, où $p_\beta(x)$ est une certaine combinaison linéaire de x^α, un élément de E_n. On a, d'après (8), paragraphe 3,

$$(1) \qquad r(u) = \sum_{|\beta| = n} y^\beta \otimes \overline{p_\beta(x)} + \sum_{|\beta| < n} y^\beta \otimes v_\beta,$$

où pour $|\beta| < n$, v_β est un certain élément de A.

Supposons que $r(u) \in \mathrm{J}'$. Alors $\overline{p_\beta(x)} \in \bar{\mathrm{J}}_2$ si $|\beta| = n$, de sorte que $p_\beta(x) \in \mathrm{J}_2$. Ceci entraîne que $p_\beta(x) = 0$ si $|\beta| = n$, et donc $u \in \mathrm{E}_{n-1}$. L'hypothèse de récurrence entraîne que $u = 0$.

C. Q. F. D.

7. Application aux algèbres de Lie résolubles. — Dans un prochain article, nous développerons des applications du théorème 6.1 et de son corollaire à l'étude des idéaux primitifs d'une algèbre de Lie quelconque. Nous nous contenterons ici d'algèbres résolubles. Ici encore, le lecteur reconnaîtra quelques arguments empruntés à [1].

Théorème 7.1. — *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie résoluble sur k; soit $\mathfrak{n}$ un idéal nilpotent tel que $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$ soit nilpotent. Soit $g \in \mathfrak{g}^*$. Posons $f = g \mid \mathfrak{n}$. Soit $\mathfrak{l}$ une sous-algèbre subordonnée à g telle que $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{n} \in$ Mxl $(f, \mathfrak{n})$. Alors* Ind $(g \mid \mathfrak{l}, \mathfrak{g})$ *est irréductible si et seulement si $\mathfrak{l} \in$ Mxl $(g, \mathfrak{g})$.*

Démonstration. — D'après 6.1 et 6.2, Ind $(g \mid \mathfrak{l}, \mathfrak{g})$ est irréductible si et seulement si Ind $(g_1 \mid \mathfrak{l}_1, \mathfrak{g}_1)$ est irréductible. D'autre part, $\mathfrak{l} \in$ Mxl $(g, \mathfrak{g})$ si et seulement si $\mathfrak{l}_1 \in$ Mxl $(g_1, \mathfrak{g}_1)$ (*cf.* [1]). Comme l'algèbre $\mathfrak{g}_1/\mathfrak{n}(f) \cap \ker f$ est nilpotente, le théorème résulte de ([9], théor. 4).

C. Q. F. D.

Théorème 7.2. — *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie résoluble sur k. Soit* I *un idéal primitif de* U $(\mathfrak{g})$. *Il existe $g \in \mathfrak{g}^*$ tel que* $\mathrm{I} = \mathrm{I}_g$.

Démonstration. — Soit $\mathfrak{n}$ le plus grand idéal nilpotent de $\mathfrak{g}$. D'après le théorème 5.5 de [12], il existe un idéal primitif L de U($\mathfrak{n}$) générique pour $I \cap U(\mathfrak{n})$, une représentation irréductible σ de $\mathfrak{n}$ de noyau L et une représentation γ du stabilisateur $\mathfrak{k}$ de σ dans $\mathfrak{g}$ tels que $\gamma \mid \mathfrak{n}$ soit multiple de σ, et Ind $(\gamma, \mathfrak{g})$ soit irréductible de noyau I. Il existe $f \in \mathfrak{n}^*$ tel que $I_f = L$ ([9], théor. 6). Alors $\mathfrak{k} = \mathfrak{g}(f) + \mathfrak{n}$, et il existe une représentation irréductible τ de $\mathfrak{g}(f)$ telle que $\tau \mid \mathfrak{n}(f)$ soit multiple de $f \mid \mathfrak{n}(f)$ et telle que $\gamma = \tau \otimes \sigma'$. Notons J le noyau de τ dans U ($\mathfrak{g}(f)$). Comme l'algèbre $\mathfrak{g}(f)/\mathfrak{n}(f) \cap \ker f$ est nilpotente, et comme la représentation τ passe au quotient, il existe $g_1 \in \mathfrak{g}(f)^*$ tel que $J = I_{g_1}$. Il est clair que $g_1 \mid \mathfrak{n}(f) = f \mid \mathfrak{n}(f)$ de sorte qu'il existe $g \in \mathfrak{g}^*$ tel que $g \mid \mathfrak{n} = f$ et $g \mid \mathfrak{g}(f) = g_1$. Il résulte du théorème 6.1 que $I = I_g$.

C. Q. F. D.

Remarque 7.3. — On trouvera une démonstration plus directe de 7.2 dans [8].

Remarque 7.4. — Une démonstration analogue à celle du théorème 7.2 prouve que si, dans la proposition 3.3, on suppose $\mathfrak{s}$ résoluble, alors J est primitif si et seulement s'il en est de même de r^* (J).

8. L'APPLICATION θ ET L'ANTI-ISOMORPHISME CANONIQUE. — Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur k. On note $X \to \tilde{X}$ l'anti-isomorphisme de U ($\mathfrak{g}$) qui prolonge l'application $X \to -X$ de $\mathfrak{g}$. Supposons $\mathfrak{g}$ résoluble. Si I est un idéal de U ($\mathfrak{g}$) primitif, il en est de même de $\tilde{I}$. Cela résulte par exemple de la caractérisation des idéaux primitifs de U ($\mathfrak{g}$) de ([8], théor. 3.5).

(On voit donc que, dans ce cas, les idéaux primitifs « à droite » sont primitifs « à gauche ».)

En particulier, soit $g \in \mathfrak{g}^*$ et considérons I_g. Alors $\tilde{I}_g$ est de la forme $I_{g'}$ pour un certain $g' \in \mathfrak{g}^*$ (théor. 7.2).

Je pense que l'on peut toujours choisir $g' = -g$. Dans ce paragraphe je montre qu'il en est bien ainsi dans certains cas. *Voir* aussi la remarque 2.2 du chapitre II qui me paraît au fond de ce problème.

LEMME 8.1. — *Soient $\mathfrak{n}$ une algèbre de Lie nilpotente et $f \in \mathfrak{n}^*$. Alors* $\tilde{I}_f = I_{-f}$.

Démonstration. — C'est évident si dim $\mathfrak{n} = 1$. On va raisonner par récurrence sur dim $\mathfrak{n}$. On suppose donc dim $\mathfrak{n} > 1$ et le théorème démontré dans les dimensions inférieures. On distingue, suivant la méthode traditionnelle de Kirillov, deux cas. Notons $\mathfrak{z}$ le centre de $\mathfrak{n}$.

I. $\ker f \cap \mathfrak{z} \neq 0$. En passant au quotient par cet idéal, on est ramené au cas de l'algèbre $\mathfrak{n}/\ker f \cap \mathfrak{z}$, où l'on peut appliquer l'hypothèse de récurrence.

II. $\dim \mathfrak{z} = 1$ et $f(\mathfrak{z}) \neq 0$. On choisit $x, y \in \ker f$, $z \in \mathfrak{z}$ tels que $[x, y] = z$, $[\mathfrak{n}, y] \subset \mathfrak{z}$, $f(z) = 1$. On note $\mathfrak{n}'$ le centralisateur de y dans $\mathfrak{n}$, $f' = f \mid \mathfrak{n}'$. On note I_1 l'idéal de $U(\mathfrak{n})$ engendré par $z - 1$, et φ_1 la projection $U(\mathfrak{n}) \to A_1 = U(\mathfrak{n})/I_1$. On pose $p_1 = \varphi_1(x)$, $q_1 = \varphi_1(y)$; on note V_1 l'algèbre engendrée par p_1 et q_1, et W_1 son commutant, de sorte que $A_1 = V_1 \otimes W_1$. L'image de $U(\mathfrak{n}')$ est $k[q_1] \otimes W_1$. Si J est un idéal de $k[q_1] \otimes W_1$ contenant q_1, il est de la forme $k[q_1]^+ \otimes W_1 + k[q_1] \otimes (W_1 \cap J)$, où $k[q_1]^+$ est formé des polynômes en q_1 sans terme constant. Le plus grand idéal bilatère de A_1 contenu dans $A_1 J$ est $V_1 \otimes (W_1 \otimes J)$. (Pour toutes ces assertions, *voir* [9], lemmes 8 et 9.) Appliquons ceci à $J = \varphi_1(I_{f'})$. On sait que I_f est le noyau d'une représentation de $\mathfrak{n}$ induite par une représentation de $\mathfrak{n}'$ de noyau $I_{f'}$, de sorte que l'on a

$$\varphi_1(I_f) = V_1 \otimes [W_1 \cap \varphi_1(I_{f'})].$$

On note I_2 l'idéal engendré par $z + 1$. Avec les notations analogues, on a

$$\varphi_2(I_{-f}) = V_2 \otimes [W_2 \cap \varphi_2(I_{-f'})].$$

L'application $X \to \tilde{X}$ transforme I_1 en I_2 et induit un anti-isomorphisme λ : $A_1 \to A_2$.

Il est clair que $\lambda(V_1) = V_2$ et $\lambda(W_1) = W_2$. D'autre part, l'hypothèse de récurrence, appliquée à $\mathfrak{n}'$, montre que $\lambda(\varphi_1(I_f)) = \varphi_2(I_{-f})$. D'après ([9], lemme 9), on a donc $\tilde{I}_f = I_{-f}$. C. Q. F. D.

LEMME 8.2. — *Soient* $\mathfrak{n}$ *une algèbre de Lie nilpotente,* $f \in \mathfrak{n}^*$, $\mathfrak{s}$ *l'algèbre des dérivations de* $\mathfrak{n}$ *qui stabilisent* f. *On note* $\theta_f : \mathfrak{s} \to U(\mathfrak{n})/I_f$ *l'application du théorème* 2.3. *D'après le lemme* 1, *l'application* $X \to \tilde{X}$ *induit un anti-isomorphisme* $U(\mathfrak{n})/I_f \to U(\mathfrak{n})/I_{-f}$. *On a*

$$\theta_f(X)^{\sim} = \theta_{-f}(\tilde{X})$$

pour tout $X \in \mathfrak{s}$.

Démonstration. — Un élément $t \in \mathfrak{s}$ est somme d'une dérivation semi-simple et d'une dérivation nilpotente (dont on peut même supposer qu'elles commutent). Il suffit donc de considérer les deux premiers cas qui suivent.

I. t est nilpotente. Introduisons l'algèbre nilpotente $\mathfrak{n}'$ produit semi-direct de kt et de $\mathfrak{n}$. Soit $f' \in \mathfrak{n}'^*$ l'élément tel que $f'(t) = 0$, $f' \mid \mathfrak{n} = f$.

L'injection $U(\mathfrak{n}) \to U(\mathfrak{n}')$ induit un isomorphisme $\mu : U(\mathfrak{n})/I_f \to U(\mathfrak{n}')/I_{f'}$ et, par définition de θ_f, on a $\mu^{-1}(t) = \theta_f(t)$. Le lemme 8.1 montre que le diagramme ci-dessous est commutatif :

$$\begin{tikzcd} U(\mathfrak{n})/I_f \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\sim"] & U(\mathfrak{n}')/I_{f'} \arrow[d, "\sim"] \\ U(\mathfrak{n})/I_{-f} \arrow[r, "\mu"] & U(\mathfrak{n}')/I_{-f'} \end{tikzcd}$$

Il en résulte aussitôt que $\theta_f(t)^{\sim} = \theta_{-f}(\tilde{t})$.

II. t est semi-simple. Comme dans le lemme 8.1 on raisonne par récurrence sur dim $\mathfrak{n}$. On se ramène aussitôt à la situation du II de la démonstration du lemme 8.1. Conservant les mêmes notations, on peut supposer de plus que $[t, x] = x$ et $[t, y] = -y$. On fixe $\mathfrak{h} \in \mathrm{Mxl}(f, \mathfrak{n})$, stable sous t, tel que $y \in \mathfrak{h}$. Notons $\sigma = \mathrm{Inf}(f \mid \mathfrak{h}, \mathfrak{n})$, $\sigma' = \mathrm{Ind}(f \mid \mathfrak{h}, \mathfrak{n}')$. On pose

$$\mathfrak{n}'' = kx + ky + kz, \qquad f'' = f \mid \mathfrak{n}'', \qquad \mathfrak{h}'' = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{n}'', \qquad \sigma'' = \mathrm{Ind}(f'' \mid \mathfrak{h}'', \mathfrak{n}'').$$

Par passage au quotient, on obtient des représentations σ_1 de A_1, σ'_1 de $W_1 \simeq W_1 \otimes k[q_1]/W_1 \otimes k[q_1]^+$, σ''_1 de V_1. Il est clair que

$$\sigma_1 = \sigma'_1 \otimes \sigma''_1.$$

La représentation σ'_1 agit dans V_1 modulo l'idéal à gauche engendré par q_1, et σ''_1 dans $W_1 \otimes k[q_1]$, modulo l'idéal à gauche engendré par les $\varphi_1(H - f(H))$ quand H parcourt $\mathfrak{h}$. Soit $v \otimes w \in V_1 \otimes W_1$. On a

$$(1) \qquad [t, v \otimes w] + \frac{1}{2}\mathrm{tr}_{\mathfrak{n}/\mathfrak{h}}(t)(v \otimes w)$$
$$= [t, v] \otimes w + \frac{1}{2}\mathrm{tr}_{\mathfrak{n}''/\mathfrak{h}''}(t)(v \otimes w) + v \otimes [t, w] + \frac{1}{2}\mathrm{tr}_{\mathfrak{n}'/\mathfrak{h}'}(v \otimes w).$$

Considérons l'algèbre $U(\mathfrak{n})/I_f$. Notons V'_1 l'image de $U(\mathfrak{n}'')$, W'_1 le commutant de V'_1, φ'_1 la projection $J(\mathfrak{n}) \to U(\mathfrak{n})/I_f$. Alors

$$U(\mathfrak{n})/I_f = V'_1 \otimes W'_1.$$

D'autre part,

$$\varphi'_1(U(\mathfrak{n}')) = k[\varphi'_1(y)] \otimes W'_1$$

et

$$\varphi'_1(I_{f'}) = k[\varphi'_1(y)]^+ \otimes W'_1,$$

de sorte que $W'_1 \simeq U(\mathfrak{n}')/I_f$ (*cf.* [7]).

Il résulte de (1) et de la définition de $\theta_f(t)$ que si l'on identifie $U(\mathfrak{n})/I_f$ et $U(\mathfrak{n}'')/I_{f''} \otimes U(\mathfrak{n}')/I_{f'}$, on a

$$\theta_f(t) = \theta_{f''}(t) \otimes 1 + 1 \otimes \theta_{f'}(t).$$

On a l'identité analogue en remplaçant f par $-f$. Supposons $\mathfrak{n} \neq \mathfrak{n}''$.

On peut alors appliquer l'hypothèse de récurrence à $\mathfrak{n}''$ et $\mathfrak{n}'$. On a donc

$$\begin{aligned}\theta_f(t)^{\sim} &= \theta_{f''}(t)^{\sim} \otimes 1 + 1 \otimes \theta_{f'}(t)^{\sim}\\ &= \theta_{-f''}(\tilde{t}) \otimes 1 + 1 \otimes \theta_{-f'}(\tilde{t})\\ &= \theta_{-f}(\tilde{t}).\end{aligned}$$

On est donc amené à démontrer le théorème dans le cas suivant :

III. $\mathfrak{n} = kx + ky + kz$, $[x, y] = z$, $f = z^*$, $[t, x] = x$, $[t, y] = -y$. Il est facile de calculer $\theta_f(t)$, en utilisant par exemple l'algèbre subordonnée $\mathfrak{h} = ky + kz$. Soient $\pi_1 : \mathrm{U}(\mathfrak{n}) \to \mathrm{U}(\mathfrak{n})/\mathrm{I}_f$, $\pi_2 = \mathrm{U}(\mathfrak{n}) \to \mathrm{U}(\mathfrak{n})/\mathrm{I}_{-f}$ les projections.

On vérifie sans peine que

$$\theta_f(t) = -\frac{1}{2}\pi_1(xy + yx),$$

$$\theta_{-f}(t) = +\frac{1}{2}\pi_2(xy + yx)$$

et donc

$$\theta_f(t)^{\sim} = \theta_{-f}(-t) = \theta_{-f}(\tilde{t}).$$

C. Q. F. D.

Lemme 8.3. — *Soient $\mathfrak{n}$ une algèbre de Lie nilpotente, $f \in \mathfrak{n}^*$, $\mathfrak{s}$ une algèbre de Lie nilpotente de dérivations de $\mathfrak{n}$ stabilisant f. Notons $\mathfrak{k} = \mathfrak{s} \times \mathfrak{n}$, le produit semi-direct et soit $g \in \mathfrak{k}^*$ tel que $g \mid \mathfrak{n} = f$. Alors $\tilde{\mathrm{I}}_g = \mathrm{I}_{-g}$.*

Remarque. — Le lemme s'applique en particulier dans la situation suivante : $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie résoluble, $\mathfrak{n}$ le plus grand idéal nilpotent, $g \in \mathfrak{g}^*$, $f = g \mid \mathfrak{n}$; on suppose que $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(f) + \mathfrak{n}$.

Démonstration. — Considérons l'homomorphisme.

$$r_1 : \quad \mathrm{U}(\mathfrak{k}) \to \mathrm{U}(\mathfrak{s}) \otimes \mathrm{U}(\mathfrak{n})/\mathrm{I}_f$$

telle que

$$r_1 \mid \mathfrak{n} = \mathrm{Id},$$
$$r_1 \mid \mathfrak{k} = \theta_f.$$

On construit de même r_2 en partant de $-f$. Le diagramme suivant est commutatif (lemme 8.2) :

$$\begin{array}{ccc}\mathrm{U}(\mathfrak{k}) & \xrightarrow{r_1} & \mathrm{U}(\mathfrak{s}) \otimes \mathrm{U}(\mathfrak{n})/\mathrm{I}_f\\ \downarrow\sim & & \downarrow\sim\\ \mathrm{U}(\mathfrak{k}) & \xrightarrow{r_2} & \mathrm{U}(\mathfrak{s}) \otimes \mathrm{U}(\mathfrak{n})/\mathrm{I}_{-f}\end{array}$$

Posons, d'autre part, $m = g \mid \mathfrak{s}$. On sait (propos. 3.3) que $r_1^{-1}(\mathrm{I}_m) = \mathrm{I}_g$, et $r_2^{-1}(\mathrm{I}_{-m}) = \mathrm{I}_{-g}$. D'après le lemme 8.1, $\mathrm{I}_m = \mathrm{I}_{-m}$, et donc $\mathrm{I}_g = \mathrm{I}_{-g}$.

CHAPITRE II

1. Notations. — 1.1. Soit G un groupe localement compact. Étant donné $x \in G$ et une fonction φ sur G, nous écrivons

$$[\lambda(x)\varphi](y) = \varphi(x^{-1}y),$$
$$[\rho(x)\varphi](y) = \varphi(yx)$$

pour tout $y \in G$. Lorsque G est un groupe de Lie (réel) d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, si φ est de classe C^1 et si $X \in \mathfrak{g}$, nous écrivons

$$[\lambda(X)\varphi](y) = \frac{d}{dt}\varphi(\exp(-tX)y)|_{t=0},$$

$$[\rho(X)\varphi](y) = \frac{d}{dt}(y \exp tX)|_{t=0}.$$

On prolonge λ et ρ en des homomorphismes de $U(\mathfrak{g}^{\mathbf{C}})$, dans l'algèbre des opérateurs différentiels sur G.

Soit D un sous-groupe fermé de G. On fixe des mesures de Haar à gauche μ_G et μ_D sur G et D. (Elles seront parfois notées dx et dd.)

Si G est un groupe de Lie, notons $\mathfrak{d}$ l'algèbre de Lie de D. Soit $d \in D$; on pose

$$\rho_{G,D}(d) = |\det_{\mathfrak{g}/\mathfrak{d}}(d)|^{\frac{1}{2}}.$$

C'est un caractère de D, qui peut être défini en général à partir des fonctions modulaires de G et D.

Sur l'espace des fonctions (numériques) sur G telles que

$$\varphi(xd) = \rho_{G,D}(d)^2\,\varphi(x) \tag{1}$$

pour tout $x \in G$, $d \in D$, il existe une « mesure » et une seule, G-invariante, notée

$$\varphi \to \oint_{G/D} \varphi\, d\mu_{G,D}$$

telle que l'on ait, pour toute fonction ψ continue à support compact sur G

$$\int_G \psi\, d\mu_G = \oint_{G/D} d\mu_{G,D}(x) \int_D \psi(xd)\,\rho_{G,D}(d)^{-2}\, d\mu_D(d). \tag{2}$$

Soit U une représentation (unitaire et continue) de D dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. On note Ind (U, G) la représentation induite de G correspondante. Elle est obtenue en considérant la restriction de λ à l'espace $\mathcal{L}$

des fonctions sur G à valeur dans $\mathcal{H}$, mesurables et vérifiant les relations

(3) $$\varphi(xd) = \rho_{G,D}(d)\, U(d^{-1})\, \varphi(x)$$

pour tout $x \in G$ et tout $d \in D$, et

(4) $$\oint_{G/D} |\varphi|^2\, d\mu_{G,D} < \infty.$$

1.2. Si G est un groupe de Lie, on note $\mathcal{L}^\infty$ l'espace des vecteurs C^∞ de Ind (U, G). Si U est de dimension 1, $\mathcal{L}^\infty$ est formé de l'espace des fonctions $\varphi \in C^\infty(G) \cap \mathcal{L}$ telles que $\lambda(u)\varphi \in \mathcal{L}$ pour tout $u \in U(\mathfrak{g})$, et la représentation dT de $\mathfrak{g}$ dans $\mathcal{L}^\infty$ déduite de Ind (U, G) coïncide avec la restriction de λ.

Plus généralement, si $X \in \mathfrak{g}$ et $\varphi \in C^\infty(G) \cap \mathcal{L}$, alors $\varphi \in \operatorname{dom} dT(X)$ si et seulement si $\lambda(X)\varphi \in \mathcal{L}$.

1.3. Supposons que G soit un groupe de Lie. Nous utiliserons des sous-représentations de représentations induites. Elles seront obtenues de la manière suivante [3]. On part d'une sous-algèbre complexe $\mathfrak{l} \subset \mathfrak{g}^{\mathbf{C}}$, d'une forme linéaire $g \in \mathfrak{g}^*$ telle que $ig \mid \mathfrak{l}$ soit un caractère. On se donne de plus un sous-groupe fermé D de G d'algèbre $\mathfrak{d} = \mathfrak{l} \cap \mathfrak{g}$ et un caractère χ de D tel que
$$|\chi| = \rho_{G,D}$$
et dont la différentielle est $ig \mid \mathfrak{l} - \rho_{\mathfrak{g},\mathfrak{l}}$. (On écrit $\rho_{\mathfrak{g},\mathfrak{l}}$ pour $\rho_{\mathfrak{g}^{\mathbf{C}},\mathfrak{l}}$.)

Considérons l'espace $\mathcal{L}(g, \mathfrak{l}, D, \chi, G)$ complété de l'espace des fonctions $\varphi \in C^\infty(G)$ vérifiant les relations

(5) $$\varphi(xd) = \chi(d^{-1})\, \varphi(x) \qquad (x \in G,\ d \in D);$$

(6) $$\varphi(X)\varphi = [-ig(X) + \rho_{\mathfrak{g},\mathfrak{l}}(X)]\,\varphi \qquad (X \in \mathfrak{l})$$

ainsi que (4).

La restriction $T(g, \mathfrak{l}, D, \chi, G)$ de λ à cet espace est une représentation unitaire de G, contenue dans la représentation induite par le caractère unitaire $\chi\rho_{G,D}^{-1}$ de D.

1.4. Cette construction est intéressante en particulier lorsque $\mathfrak{l}$ est une polarisation positive en $\mathfrak{g}$. Étant donné $g \in \mathfrak{g}^*$, une polarisation au point g est une sous-algèbre complexe $\mathfrak{l} \in \operatorname{Mxl}(g, \mathfrak{g}^{\mathbf{C}})$ telle que $\mathfrak{l} + \bar{\mathfrak{l}}$ soit une sous-algèbre de $\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}$. La polarisation est positive si $ig([X, \overline{X}]) \geq 0$ pour tout $X \in \mathfrak{l}$.

On notera $\operatorname{Pol}^+(g, \mathfrak{g})$ l'ensemble des polarisations positives au point g.

1.5. Soit N un groupe de Lie nilpotent simplement connexe d'algèbre $\mathfrak{n}$. Soient $f \in \mathfrak{n}^*$ et $\mathfrak{h} \in \operatorname{Pol}^+(f, \mathfrak{n})$. Posons $\mathfrak{d}_2 = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{n}$, et soit D_2 le sous-groupe analytique correspondant; soit χ_f le caractère de D_2 de différentielle $if \mid \mathfrak{d}_2$. Comme f restera fixé dans toute la suite, nous noterons $\mathcal{H}_{\mathfrak{h}}$ le sous-espace de la représentation induite Ind (χ_f, N) noté ci-dessus $\mathcal{L}(f, \mathfrak{h}, D_2, \chi_f, N)$ et $\sigma_{\mathfrak{h}}$ la représentation de N dans $\mathcal{H}_{\mathfrak{h}}$.

On sait [1] que la classe de cette représentation ne dépend pas de $\mathfrak{h} \in \mathrm{Pol}^+ (f, \mathfrak{n})$. Il existe donc un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, une représentation unitaire σ de N dans $\mathcal{H}$, et pour tout $\mathfrak{h}$ une isométrie $U_{\mathfrak{h}}$ de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}_{\mathfrak{h}}$ qui entrelace σ et $\sigma_{\mathfrak{h}}$.

On sait que σ est irréductible.

2. Un lemme. — Pour être à même d'utiliser le chapitre I, nous devons établir des relations entre les représentations induites du groupe de Lie G et celles de son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. On conserve les notations de 1.3.

Soit τ une représentation de $\mathfrak{g}$ [ou de $U(\mathfrak{g}^{\mathbf{C}})$] dans un espace vectoriel complexe W. La représentation contragrédiente de $U(\mathfrak{g}^{\mathbf{C}})$ dans W^* (le dual de W) est définie de la manière suivante : si $L \in W^*$, $w \in W$, $u \in U(g^{\mathbf{C}})$, on a

$$\langle u L, w \rangle = \langle L, \tilde{u} w \rangle.$$

Posons $T = T(g, \mathfrak{l}, D, \chi, G)$ et $\mathcal{L} = \mathcal{L}(g, \mathfrak{l}, D, \chi, G)$. Notons dT la représentation de $\mathfrak{g}$ dans $\mathcal{L}^\infty$. Il existe une application $\varphi \to L_\varphi$ de $\mathcal{L}^\infty$ dans le dual de l'espace de $\tau = \mathrm{Ind}(-ig \mid \mathfrak{l}, \mathfrak{g}^{\mathbf{C}})$ qui commute à l'action de $\mathfrak{g}$. On la définit ainsi. D'après 1.2, $\mathcal{L}^\infty \subset C^\infty(G)$ et si $u \in U(\mathfrak{g}^{\mathbf{C}})$, on pose

$$\langle L_\varphi, u \rangle = [\lambda(\tilde{u}) \varphi](1).$$

Soit $X \in \mathfrak{l}$. On a

$$\langle L_\varphi, X \rangle = [\lambda(-X) \varphi](1) = [\rho(X) \varphi](1).$$

Il résulte de [(6), § 1] que L_φ s'annule sur l'idéal à gauche de $U(\mathfrak{g}^{\mathbf{C}})$ engendré par les $X + ig(X) - \rho_{\mathfrak{g}, \mathfrak{l}}(X)$ $(X \in \mathfrak{l})$ et fournit donc par passage du quotient une forme L_φ sur l'espace de τ.

Lemme 2.1. — (i) *Le noyau* J *de* dT *contient le noyau* I *de* $\mathrm{Ind}\left(ig \mid \bar{\mathfrak{l}}, \mathfrak{g}^{\mathbf{C}}\right)$.

(ii) *Si, de plus,* $\mathrm{Ind}\left(ig \mid \bar{\mathfrak{l}}, \mathfrak{g}^{\mathbf{C}}\right)$ *est irréductible et si* $\mathcal{L} \neq 0$, *alors* $I = J$.

Démonstration. — Soient $\mathcal{L}'$ l'espace des fonctions $\bar{\varphi}$ (avec $\varphi \in \mathcal{L}$), T' la représentation de G dans $\mathcal{L}'$. Il est clair que $\mathcal{L}' = \mathcal{L}\left(-g, \bar{\mathfrak{l}}, D, \bar{\chi}, G\right)$. Utilisant l'accouplement $(\varphi, \varphi') \to \oint \varphi \varphi' \, d\mu_{G, D}$, on voit que T' est la représentation contragédiente de T. En particulier, le noyau J' de dT' est $\tilde{J}$.

Soit $u \in I$. Alors $\tilde{u}$ est dans le noyau de la représentation duale de $\mathrm{Ind}\left(ig \mid \bar{\mathfrak{l}}, \mathfrak{g}^{\mathbf{C}}\right)$, et donc $\tilde{u} L_\varphi = 0$ pour tout $\varphi \in \mathcal{L}'^\infty$. Étant donné $\varphi \in \mathcal{L}'^\infty$, et $x \in G$, appliquant ceci à $\mathrm{Ad}\, x\, \tilde{u}$ et $\lambda(x)\varphi$ on voit que $\lambda(\tilde{u})\varphi(x) = 0$. Donc $\tilde{u} \in J'$ et $u \in J$.

On suppose maintenant $\mathcal{L} \neq 0$ et $\mathrm{Ind}(ig \mid \bar{\mathfrak{l}}, \mathfrak{g}^{\mathbf{C}})$ irréductible. Soit V l'idéal à gauche de $U(\mathfrak{g}^{\mathbf{C}})$ formé des u tels que $\tilde{u}\, L_\varphi = 0$ pour tout $\varphi \in \mathcal{L}'^\infty$. Alors $V \neq U(\mathfrak{g})$. [Il existe en effet un élément $\varphi \in \mathcal{L}'^\infty$, $\varphi \neq 0$. En remplaçant au besoin φ par une de ses translatées, on peut supposer $\varphi(1) \neq 0$, et donc $1.L_\varphi \neq 0$. Donc $1 \notin V$.] D'autre part, V contient l'idéal à gauche engendré par les $X - ig(X) - \rho_{\mathfrak{g},\bar{\mathfrak{l}}}(X)$ qui est maximal par hypothèse. Il coïncide donc avec cet idéal. Soit maintenant $u \in J$. Alors $\tilde{u} \in J'$ et $\lambda(\tilde{v})\lambda(\tilde{u}) = 0$ pour tout $\varphi \in \mathcal{L}'^\infty$ et tout $v \in U(\mathfrak{g}^{\mathbf{C}})$. En particulier, $(uv)^\sim L_\varphi = 0$ et donc $uv \in V$ pour tout $v \in U(\mathfrak{g}^{\mathbf{C}})$, ce qui prouve $u \in I$ et le lemme.

Remarque 2.2. — La démonstration ci-dessus utilise l'existence de la « mesure » $\mu_{G,D}$ pour fournir un accouplement. Le même procédé permet de prouver dans certains cas l'assertion suivante : soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie complexe, $g \in {}^*\mathfrak{g}$, $\mathfrak{l}$ une sous-algèbre telle que $B_g(\mathfrak{l}, \mathfrak{l}) = 0$, et I le noyau de $\mathrm{Ind}(g \mid \mathfrak{l}, \mathfrak{g})$. Alors $\tilde{I}$ est le noyau de $\mathrm{Ind}(-g \mid \mathfrak{l}, \mathfrak{g})$.

J'ignore si ce résultat est général (*cf.* chap. I, § 8).

COROLLAIRE 2.3 (Dixmier [9]). — *On garde les notations de* 1.5. *Le noyau de la représentation $d\sigma$ est l'idéal bilatère primitif* I_{if} *de* $U(\mathfrak{n}^{\mathbf{C}})$ *associé à if.*

3. UN THÉORÈME DE KOSTANT ET UNE FONCTION SUR LE GROUPE SYMPLECTIQUE. — On introduit ici les objets nécessaires à l'énoncé du théorème 6.1.

3.1. On conserve les notations de 1.5. On se donne de plus un groupe S et un homomorphisme j de S dans le groupe des automorphismes de N laissant stable $f \in \mathfrak{n}^*$.

Soit $s \in S$. Il existe une polarisation $\mathfrak{h} \in \mathrm{Pol}^+(f, \mathfrak{n})$ stable sous s [26]. Soient $\varphi \in \mathcal{H}_\mathfrak{h}$, $n \in N$. La formule

$$[V'_\mathfrak{h}(s)\varphi](n) = |\det_{\mathfrak{n}^{\mathbf{C}}/\mathfrak{h}}(s^{-1})|^{\frac{1}{2}}\varphi(s^{-1}(n))$$

définit un opérateur unitaire $V'_\mathfrak{h}(s)$ dans $\mathcal{H}_\mathfrak{h}$ [1].

Le théorème suivant est fondamental.

THÉORÈME 3.1 ([1], théor. III.3.1). — *L'opérateur unitaire*

$$V'(s) = U_\mathfrak{h}^{-1} V'_\mathfrak{h}(s) U_\mathfrak{h}$$

ne dépend pas de la polarisation $\mathfrak{h} \in \mathrm{Pol}^+(f, \mathfrak{n})$ *stable sous s.*

Il est clair que V' est fabriqué de manière à ce que l'on ait la formule

(1) $$V'(s)\,\sigma(n)\,V'(s^{-1}) = \sigma(s(n))$$

pour tout $s \in S$, $n \in N$.

Comme σ est irréductible, V' définit une représentation projective de S dans $\mathcal{H}$. Nous prouverons plus bas que celle-ci provient d'une représentation d'un revêtement d'ordre 2 de S.

Lemme 3.2. — *Soient $s, t \in S$. On a*

$$V'(sts^{-1}) = V'(s)\,V'(t)\,V'(s^{-1}).$$

Démonstration. — Soit $\mathfrak{h} \in \mathrm{Pol}^+(f, \mathfrak{n})$. Si $\varphi \in \mathcal{H}_{s(\mathfrak{h})}$ et $n \in N$, la formule

$$[W(s)\,\varphi](n) = \varphi(s^{-1}(n))$$

définit un opérateur $\mathcal{H}_{s(\mathfrak{h})} \to \mathcal{H}_{\mathfrak{h}}$.

Il est clair que $W(st) = W(s)\,W(t)$ si s et t sont dans S. En particulier,

$$W(sts^{-1}) = W(s)\,W(t)\,W(s^{-1}).$$

Supposons $\mathfrak{h}$ stable par t. Alors $V'_{\mathfrak{h}}(t) = c\,W(t)$, où $c = |\det_{\mathfrak{n}^{\mathbf{C}}/\mathfrak{h}}(s)|^{-\frac{1}{2}}$, et de même $c\,W(sts^{-1}) = V'_{s(\mathfrak{h})}(sts^{-1})$.

Posons $W'(s) = U_{\mathfrak{h}}^{-1}\,W(s)\,U_{s(\mathfrak{h})}$. Il est clair que $W'(s) = \alpha\,V'(s)$, où α est une constante qui dépend du choix des opérateurs $U_{\mathfrak{h}}$. Comme $W'(s^{-1}) = W'(s^{-1})$ et $V'(s) = V'(s^{-1})$, on a $W'(s^{-1}) = \alpha^{-1}\,V'(s^{-1})$, et finalement,

$$V'(sts^{-1}) = V'(s)\,V'(t)\,V'(s^{-1}).$$

3.2. Soit V un espace vectoriel réel de dimension finie muni d'une forme bilinéaire alternée non dégénérée B [par exemple, $V = \mathfrak{n}/\mathfrak{n}(f)$ et B provient de B_f]. On dit qu'un sous-espace complexe $W \subset V^{\mathbf{C}}$ totalement isotrope maximal est positif si $i\,B(w, \overline{w}) > 0$ pour tout $w \in W$. On note $\mathrm{Sp}(B)$ le groupe des automorphismes de B.

Lemme 3.3. — *Soit $s \in \mathrm{Sp}(B)$. Le nombre*

$$\delta(s) = \det_{V^{\mathbf{C}}/W}(s) / |\det_{V^{\mathbf{C}}/W}(s)|$$

ne dépend pas de l'espace W *totalement isotrope maximal positif stable sous s.*

Pour une démonstration, *voir* [26], chap. 5.

Si s et s' laissent stable un même espace W, alors $\delta(ss') = \delta(s)\,\delta(s')$. Tel est en particulier le cas si s et s' commutent.

LEMME 3.4. — *La fonction δ est continue.*

Le groupe Sp (B) est semi-simple connexe. On vérifie que δ satisfait aux hypothèses du lemme suivant :

LEMME 3.5. — *Soit* G *un groupe de Lie réel semi-simple connexe. Soit p une fonction numérique sur* G, *invariante par automorphismes intérieurs, continue en* 1, *et telle que $p(xx') = p(x)\, p(x')$ si x et x' commutent. Alors p est continue.*

Remarque. — Je remercie J. A. Wolf qui m'a signalé une erreur dans ma première démonstration de ce résultat. J. A. Wolf a de son côté étudié de telles fonctions et remarqué en particulier qu'elles sont en correspondance biunivoque (par restriction) avec les caractères (non nécessairement unitaires) du groupe K, image réciproque dans G d'un compact maximal du groupe adjoint.

Démonstration. — Soit N un élément nilpotent de $\mathfrak{g}$. On commence par établir la continuité de p en exp N. Soit $\mathcal{V}$ l'ensemble des $X \in \mathfrak{g}$ tels que les valeurs propres de ad X soient de module $< \pi$. Alors exp induit un difféomorphisme de $\mathcal{V}$ sur exp $\mathcal{V}$. Si $X \in \mathfrak{g}$, on pose $|X| = \sup |a_i|$, où les a_i sont les valeurs propres de ad X. Si $x \in \exp \mathcal{V}$, on pose $|x| = |\log x|$. Si $\mathcal{U}$ est un voisinage de 1 dans G, il existe $\delta > 0$ tel que tout élément $x \in \exp \mathcal{V}$ tel que $|x| < \delta$ a un conjugué dans $\mathcal{U}$. (Utiliser les faits suivants : toute orbite dans $\mathfrak{g}$ contient dans son adhérence un élément semi-simple; il n'y a qu'un nombre fini de classes de conjugaison d'algèbres de Cartan; si $\mathfrak{h}$ est une algèbre de Cartan, les ensembles $\{X \in \mathfrak{h} \mid |X| < \varepsilon\}$ forment une base de voisinages de 0 dans $\mathfrak{h}$ quand ε varie). Comme p est invariante par automorphismes intérieurs et continue en 1, on voit que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que les relations $x \in \exp \mathcal{V}$ et $|x| < \delta$ entraînent $|p(x) - p(1)| < \varepsilon$. Nous supposerons que p n'est pas identiquement nulle. On a donc $p(1) = 1$. Comme 1 appartient à l'adhérence de l'orbite de exp N, on a $p(\exp N) = 1$. Comme $|x|$ tend vers zéro quand x tend vers exp N, la fonction p est continue en exp N.

Soit maintenant $x \in G$. Comme G est connexe, x s'écrit $x = s \exp N$, où N est nilpotent, où Ad s est semi-simple et où s et exp N commutent. Notons Z le centralisateur de s dans G, $\mathfrak{z}$ son algèbre de Lie, $\mathfrak{m}^{\mathbf{C}}$ la somme dans $\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}$ des sous-espaces propres de Ad s correspondant aux valeurs propres différentes de 1. Posons $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}^{\mathbf{C}} \cap \mathfrak{g}$, de sorte que $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{z}$. Considérons l'application

$$T : \quad (X, z) \mapsto \exp X\, z \exp(-X)$$

de $\mathfrak{m} \times Z$ dans G. Sa différentielle au point $(0, x)$ est l'application

$$dT : \quad (X, Y) \mapsto (1 - \operatorname{Ad} x)\, X + Y$$

de $\mathfrak{m} \times \mathfrak{z}$ dans $\mathfrak{g}$. On a identifié les plans tangents en x à G ou Z aux algèbres de Lie de ces groupes, au moyen de la translation à droite par x. Posons $\operatorname{Ad} x = x'$, $\operatorname{Ad} s = s'$, et $\operatorname{Ad} \exp N = n'$. La relation

$$(1 - x') = (1 - s') + s'(1 - n')$$

montre que $1 - s'$ est la partie semi-simple de $1 - x'$. La décomposition de Jordan de $1 - x'$ prouve que $1 - x'$ induit un automorphisme de $\mathfrak{m}$. Il en résulte que dT est un isomorphisme. L'application T est donc étale au point $(0, x)$. Comme on a $p(\exp X\, z \exp(-X)) = p(z)$, il suffit, pour prouver la continuité de p en x, de prouver la continuité en x de la restriction p' de p à Z. Si $z \in Z$, on a $p'(z) = p'(zs^{-1})\, p'(s)$. D'autre part, p étant continue en $\exp N$, il en est de même de p'. Donc p' est continue en x.

Remarque. — La fonction δ du lemme 3.3 n'est pas celle définie par Shale ([24], § 5). La fonction de Shale n'est pas invariante par automorphismes intérieurs et dépend du choix d'une décomposition de Cartan de Sp (B). La même remarque vaut pour les relèvements V′ du théorème 3.1 et Y de [24] de la représentation projective de Sp (B).

4. Cas particulier : S est un groupe de Lie résoluble simplement connexe. — On conserve les notations de 3.1 et 1.5. Donc N est nilpotent simplement connexe, $f \in \mathfrak{n}^*$, S est muni d'un homomorphisme j dans le groupe des automorphismes de N laissant stable f. On suppose de plus que S est un groupe de Lie résoluble simplement connexe et que j est continu.

Dans ce cas il existe $\mathfrak{h} \in \operatorname{Pol}^+(f, \mathfrak{n})$ stable sous S (*cf.* [26]). Il en résulte que V′ est une représentation de S dans $\mathcal{H}$, et que δ est un caractère de S. La fonction δ est définie comme en 3.2, et donc

$$\delta(s) = \det_{\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}/\mathfrak{h}}(s) / |\det_{\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}/\mathfrak{h}}(s)|. \tag{1}$$

Nous noterons $\delta^{\frac{1}{2}}$ le caractère de S tel que $\left(\delta^{\frac{1}{2}}\right)^2 = \delta$, et nous poserons

$$V = \delta^{-\frac{1}{2}} V'.$$

Le produit semi-direct de N par S sera noté $K = S \times_j N$, son algèbre $\mathfrak{k} = \mathfrak{s} \times_j \mathfrak{n}$.

Lemme 4.1. — *Il existe une représentation unitaire continue $\tilde{\sigma}$ de $S \times_j N$ dans $\mathcal{H}$ telle que*

$$\tilde{\sigma} \mid N = \sigma \quad \text{et} \quad \tilde{\sigma} \mid S = V.$$

Démonstration. — La seule chose non évidente est la continuité. Introduisons l'algèbre $\mathfrak{l} = \mathfrak{s} \times_j \mathfrak{h}$ et le groupe $D = S \times_j D_2$. Prolongeons f en une forme linéaire g sur $\mathfrak{k}$ nulle sur $\mathfrak{s}$, et χ_f en un caractère χ de D tel que $\chi(s) = |\det_{\mathfrak{n}/\mathfrak{d}_2} s|^{\frac{1}{2}}$. On vérifie facilement (*cf.* [1]) que l'application de restriction $\psi \to \psi \mid N$ induit un isomorphisme de $\mathcal{L}(g, \mathfrak{l}, D, \chi, K)$ (*cf.* 1.3) sur $\mathcal{H}_{\mathfrak{h}} \simeq \mathcal{H}$ qui entrelace $T(g, \mathfrak{l}, D, \chi, K)$ et σ. Ceci démontre le lemme. Le but de ce numéro est de calculer la différentielle $d\tilde{\sigma}$ de $\tilde{\sigma}$.

On note $\mathcal{H}^\infty$ l'espace des vecteurs C^∞ de la représentation σ. Considérons l'homomorphisme

$$\theta : \quad U(s^{\mathbf{C}}) \to U(n^{\mathbf{C}})/I_{if}$$

construit au chapitre I (ceci ne suppose d'ailleurs pas $\mathfrak{s}$ résoluble). Comme $d\sigma$ a pour noyau I_{if} (corollaire 2.3) on définit une représentation $d\sigma'$ de $\mathfrak{k}$ dans $\mathcal{H}^\infty$ en posant

$$d\sigma'(Y) = d\sigma(Y) \qquad (Y \in \mathfrak{n}); \tag{2}$$

$$d\sigma'(X) = d\sigma(\theta(X)) \qquad (X \in \mathfrak{s}). \tag{3}$$

Proposition 4.2. — *Supposons* S *résoluble simplement connexe. Définissons $\tilde{\sigma}$ comme dans le lemme* 4.1. *Les représentations σ et $\tilde{\sigma}$ ont même ensemble de vecteurs* C^∞ *et* $d\tilde{\sigma} = d\sigma'$.

Nous aurons besoin du lemme suivant, dans lequel, en vue d'utilisation ultérieure, nous ne supposons pas S résoluble.

Lemme 4.3. — *Soit* $\varphi \in C^\infty(N)$ *un élément tel que*

$$\rho(Y)\varphi = -if(Y)\varphi \tag{4}$$

pour tout $Y \in \mathfrak{h}$. *Si* $X \in \mathfrak{s}$, *on définit* $\alpha(X)\varphi \in C^\infty(N)$ *par la formule*

$$\alpha(X)\varphi(n) = \frac{d}{dt}\varphi(\exp - tXn\exp tX)|_{t=0}. \tag{5}$$

Par linéarité, on définit $\alpha(X)\varphi$ *si* $X \in \mathfrak{s}^{\mathbf{C}}$. *Si* $X \in \mathfrak{s}^{\mathbf{C}}$ *stabilise* $\mathfrak{h}$ *on a*

$$\alpha(X)\varphi = \lambda(\theta(X))\varphi + \frac{1}{2}\operatorname{tr}_{\mathfrak{n}^{\mathbf{C}}/\mathfrak{h}}(X)\varphi.$$

Démonstration. — Par continuité, il suffit de le prouver quand φ est analytique, ce que je suppose maintenant. Notons L_φ la forme linéaire sur $U(\mathfrak{n}^{\mathbf{C}})$ telle que $L_\varphi(u) = \lambda(\tilde{u})\varphi(1)$. Elle s'annule sur l'idéal à gauche engendré par les $Y + if(Y)$ $(Y \in \mathfrak{h})$. Si $s \in S$, on pose $\alpha(s)\varphi(n) = \varphi(s^{-1}ns)$. Notons $\varepsilon(s)$ l'automorphisme de $U(\mathfrak{n}^{\mathbf{C}})$ associé à s, et soit $\beta(s)$ le transposé de $\varepsilon(s^{-1})$. On définit de manière analogue $\varepsilon(X)$ et $\beta(X)$ pour $X \in \mathfrak{s}^{\mathbf{C}}$. On voit immédiatement que $\beta(s)\,L_\varphi = L_{\alpha(s)\varphi}$, et donc $\beta(X)\,L_\varphi = L_{\alpha(X)\varphi}$ pour tout $X \in \mathfrak{s}$ et donc aussi pour tout $X \in \mathfrak{s}^{\mathbf{C}}$.

Nous poserons $\theta = \theta_{if}$, et nous noterons θ_{-if} l'application analogue de $\mathfrak{s}^{\mathbf{C}}$ dans $U(\mathfrak{n}^{\mathbf{C}})/I_{-if}$. Si $X \in \mathfrak{s}^{\mathbf{C}}$ stabilise $\mathfrak{h}$ on a, par construction de θ_{-if}

$$\varepsilon(X)\,u + \frac{1}{2}\operatorname{tr}_{\mathfrak{n}^{\mathbf{C}}/\mathfrak{h}}(X)\,u = \theta_{-if}(X)\,u \qquad (u \in U(\mathfrak{n}^{\mathbf{C}})),$$

modulo l'idéal à gauche engendré par les $Y + if(Y)$ $(Y \in \mathfrak{h})$. On a donc

$$\beta(X)\,L_\varphi(u) = -L_\varphi(\varepsilon(X)\,u) = \frac{1}{2}\operatorname{tr}_{\mathfrak{n}^{\mathbf{C}}/\mathfrak{h}}(X)\,L_\varphi(u) + L_\varphi(\theta_{-if}(-X)\,u).$$

Remplaçons $\theta_{-if}(-X)$ par $\theta_{if}(X)^{\sim}$ (chap. I, lemme 8.2). On voit que

$$L_{\alpha(X)\varphi} = L_{\varphi'},$$

où

$$\varphi' = \lambda(\theta(X))\,\varphi + \frac{1}{2}\operatorname{tr}_{\mathfrak{n}^{\mathbf{C}}/\mathfrak{h}}(X).$$

Comme $\alpha(X)\,\varphi$ et φ' sont analytiques, on en déduit que $\alpha(X)\,\varphi = \varphi'$, ce qui prouve le lemme.

Démonstration de 4.2. — Conservons les notations de la démonstration du lemme 4.1. Soient $X \in \mathfrak{s}$, $\varphi \in \mathcal{H}^\infty \simeq \mathcal{H}_{\mathfrak{h}}^\infty$, et ψ l'élément de $\mathcal{L}(g, \mathfrak{l}, D, \chi, K)$ qui prolonge φ. Compte tenu de 1.2, $\varphi \in \operatorname{dom} d\tilde{\sigma}(X)$ si et seulement si $\lambda(X)\,\psi \in \mathcal{L}(g, \mathfrak{l}, D, \chi, K)$, c'est-à-dire, vu le lemme 4.3 si et seulement si $\lambda(\theta(X))\,\varphi \in \mathcal{H}$. Mais tel est en effet le cas puisque $\theta(X) \in U(\mathfrak{n}^{\mathbf{C}})/I_{if}$ et $\varphi \in \mathcal{H}^\infty$. D'autre part,

$$d\tilde{\sigma}(X)\,\varphi = \lambda(\theta(X))\,\varphi = d\sigma(\theta(X))\,\varphi = d\sigma'(X)\,\varphi.$$

Il en résulte que $\mathcal{H}^\infty$ est un sous-ensemble de dom $d\tilde{\sigma}(X)$ stable par $d\tilde{\sigma}(X)$ pour tout $X \in \mathfrak{s}$ et pour tout $X \in \mathfrak{n}$. On en déduit que $\mathcal{H}^\infty$ est composé de vecteurs C^∞ pour $\tilde{\sigma}$, ce qui termine la démonstration.

5. Cas particulier : S est un groupe de Lie simplement connexe. —

5.1. On conserve les notations de 4, sans supposer que S est résoluble. On suppose que S est un groupe de Lie simplement connexe. Les formules (2) et (3) du paragraphe 4 définissent encore une représentation $d\sigma'$ de $\mathfrak{k} = \mathfrak{s} \times_j \mathfrak{n}$ dans $\mathcal{H}^\infty$.

Proposition 5.1. — *Supposons* S *simplement connexe. Il existe une représentation unitaire* $\tilde{\sigma}$ *de* $K = S \times_j N$ *dans* $\mathcal{H}$ *qui prolonge* σ, *telle que* $\mathcal{H}^\infty$ *soit l'ensemble des vecteurs* C^∞ *à la fois pour* σ *et* $\tilde{\sigma}$, *et telle que*

$$d\tilde{\sigma} = d\sigma'. \tag{1}$$

Soit $s \in \mathrm{S}$. *On a, en posant* $\mathrm{V}(s) = \tilde{\sigma}(s)$,

$$\mathrm{V}(s) = \tilde{\sigma}(s) = \delta^{\frac{1}{2}}(s^{-1})\,\mathrm{V}'(s), \tag{2}$$

où la fonction $\delta^{\frac{1}{2}}$ *est continue et vérifie* $\left(\delta^{\frac{1}{2}}\right)^2 = \delta$.

Démonstration. — La représentation $d\sigma'$ est obtenue en composant $d\sigma$ et un homomorphisme $\mathrm{U}(\mathfrak{k}) \to \mathrm{U}(\mathfrak{n}^{\mathbf{C}})/\mathrm{I}_{if}$. D'autre part, si $\mathrm{X} \in \mathfrak{s}$, $d\sigma'(\mathrm{X})$ est antisymétrique. En effet, gardons les notations $\theta = \theta_{if}$, et θ_{-if}. Comme $d\sigma'(\mathrm{X}) = \lambda(\theta(\mathrm{X}))$, il s'agit de prouver que $\operatorname{conj}\left(\tilde{\theta}(\mathrm{X})\right) = -\theta(\mathrm{X})$. D'après le chapitre I, lemme 8.2,

$$\operatorname{conj}\left(\tilde{\theta}(\mathrm{X})\right) = \operatorname{conj}\left(\theta_{-if}(-\mathrm{X})\right) = -\theta_{if}(\mathrm{X}) = -\theta(\mathrm{X}),$$

ce qui prouve notre assertion.

Il résulte de [20], théorème 6, et de la remarque qui termine la démonstration de ce théorème, que $\mathcal{H}^\infty$ est l'ensemble des vecteurs C^∞ d'une représentation $\tilde{\sigma}$ de K de différentielle $d\sigma'$.

Il reste à prouver (2). On sait qu'il existe un scalaire $p(s)$ de module 1 tel que

$$\mathrm{V}(s) = p(s)\,\mathrm{V}'(s).$$

Lorsque s est contenu dans un sous-groupe résoluble connexe de S, (2) résulte de la proposition 4.2.

En particulier, on a

$$p(\exp \mathrm{X}) = \exp\left(-\frac{1}{2}\operatorname{Im}\operatorname{tr}_{\mathfrak{n}^{\mathbf{C}}/\mathfrak{h}}(\mathrm{X})\right) \tag{3}$$

si $\mathrm{X} \in \mathfrak{s}$ et si $\mathfrak{h} \in \mathrm{Pol}^+(f, \mathfrak{n})$ est stable sous X. Le nombre

$$\operatorname{Im}\operatorname{tr}_{\mathfrak{n}^{\mathbf{C}}/\mathfrak{h}}(\mathrm{X})$$

désigne la partie imaginaire de $\operatorname{tr}_{\mathfrak{n}^{\mathbf{C}}/\mathfrak{h}}(\mathrm{X})$. Il résulte, de manière analogue à 3.2 et 3.3, que ce nombre ne dépend pas de $\mathfrak{h}$, et dépend continûment de $\mathrm{X} \in \mathfrak{s}$. La fonction p est donc continue au voisinage de 1.

En général, on prouve (2) par récurrence sur la dimension de N. On suppose $\dim \mathrm{N} > 1$ et le théorème démontré pour les groupes nilpotents de dimension $< \dim \mathrm{N}$. On examine différents cas.

I. On suppose qu'il existe un idéal $\mathfrak{a} \subset \ker f$, $\mathfrak{a} \neq 0$, stable sous S. On se ramène sans difficulté au cas du groupe $\mathrm{N}/\exp(\mathfrak{a})$.

II. On suppose que le centre $\mathfrak{z}$ de $\mathfrak{n}$ est de dimension 1, $f(\mathfrak{z}) \neq 0$. On suppose qu'il existe un idéal abélien $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{z}$ de $\mathfrak{n}$ stable sous S. On pose $\mathfrak{n}_1 = \mathfrak{n}(f \mid \mathfrak{a})$. Alors $\mathfrak{n}_1 \neq \mathfrak{n}$ et $\mathfrak{n}_1$ est stable par S. On pose $f_1 = f \mid \mathfrak{n}_1, \ldots$. La représentation σ est induite par la représentation σ_1 de N_1. Les opérateurs V'_1, V_1, de même que le nombre p_1 sont définis de manière analogue à V', V et p.

Identifions $\mathcal{H}$ et l'espace des fonctions mesurables sur N à valeurs dans $\mathcal{H}_1$ vérifiant les relations

$$\varphi(nn') = \sigma_1(n'^{-1})\,\varphi(n) \qquad (n \in N,\ n' \in N_1); \tag{4}$$

$$\int_{N/N_1} |\varphi|^2\, d\mu_{N, N_1} < \infty. \tag{5}$$

Comme S est connexe, $\det_{\mathfrak{n}/\mathfrak{n}_1}(s) > 0$ pour tout $s \in S$. Soient $n \in N$ et $\varphi \in \mathcal{H}$. La formule

$$[W(s)\,\varphi](n) = \det_{\mathfrak{n}/\mathfrak{n}_1}(s)^{-\frac{1}{2}}\, V_1(s)\, \varphi(s^{-1} ns)$$

définit un opérateur unitaire $W(s)$ dans $\mathcal{H}$. Il est clair que W est une représentation de S. On définit de même un opérateur $W'(s)$ à partir de $V'_1(s)$. On a donc

$$W(s) = p_1(s)\, W'(s).$$

D'autre part, utilisant une polarisation $\mathfrak{h} \in \mathrm{Pol}^+(f, \mathfrak{n})$ stable sous S et contenant $\mathfrak{a}$, et réalisant σ et σ_1 dans les espaces $\mathcal{H}_{\mathfrak{h}}$ et $\mathcal{H}_{1, \mathfrak{h}}$, il est immédiat de voir que $W'(s) = V'(s)$. Il résulte de (2) que $p(s) = p_1(s)$ dans un voisinage de l'origine. On voit donc que $W(s) = V(s)$ dans un voisinage de l'origine. Comme S est connexe, on en déduit $W = V$, et donc $p = p_1$.

La formule (2) résulte donc dans ce cas de l'hypothèse de récurrence appliquée à N_1.

III. Si l'on n'est pas dans un des cas qui précèdent, $\mathfrak{n}$ est une algèbre d'Heisenberg. Le groupe des automorphismes de $\mathfrak{n}$ laissant stable f est un groupe symplectique. On peut supposer que S est le revêtement simplement connexe de ce groupe. Soit $\mathfrak{m} = \ker f$, et posons $B = B_f \mid \mathfrak{m} \times \mathfrak{m}$. Notons π la projection canonique $S \to \mathrm{Sp}(B)$.

Un élément $s \in S$ s'écrit de manière unique sous la forme $s' s''$, où s' et s'' commutent, $\pi(s')$ est semi-simple, s'' unipotent. Comme il existe $\mathfrak{h} \in \mathrm{Pol}^+(f, \mathfrak{n})$ stable sous s' et s'', on a $V'(s) = V'(s')\, V'(s'')$ et donc $p(s) = p(s')\, p(s'')$. Il résulte de (3) que $p(s'') = 1$, et donc $p(s) = p(s')$. De même, si s et t, éléments de S, commutent, $p(st) = p(s)\, p(t)$. Enfin il résulte du lemme 3.2 que p est invariante par les automorphismes intérieurs. La fonction p est donc continue (lemme 3.5).

Il nous reste donc à prouver que $p(s)^2 = \delta(s)^{-1}$. D'après ce qu'on vient de voir, il suffit de le faire lorsque $\pi(s)$ est semi-simple. Supposons qu'il existe deux sous-espaces $\mathfrak{m}_1$ et $\mathfrak{m}_2$ de $\mathfrak{m}$, stable sous s, orthogonaux par rapport à B, tels que $\mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{m}_2 = \mathfrak{m}$. Posons

$$\mathfrak{n}_i = \mathfrak{m}_i + \mathfrak{z}, \qquad f_i = f \mid \mathfrak{n}_i, \qquad N_i = \exp(\mathfrak{n}_i), \quad \ldots \qquad (i = 1, 2).$$

Il est bien connu que σ se déduit par passage au quotient de la représentation $\sigma_1 \otimes \sigma_2$ de $N_1 \times N_2$ dans $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$. Considérons S_1 et S_2, et l'homomorphisme canonique $\lambda : S_1 \times S_2 \to S$. Alors s est de la forme $\lambda(s_1, s_2)$, avec $s_1 \in S_1$, $s_2 \in S_2$, et on montre que

$$V(s) = V_1(s_1) \otimes V_2(s_2), \qquad V'(s) = V'_1(s_1) \otimes V'_2(s_2)$$

de sorte que $p(s) = p_1(s_1)\, p_2(s_2)$. Comme on a aussi $\delta(s) = \delta_1(s_1)\, \delta_2(s_2)$, on voit qu'il suffit de démontrer (2) lorsque s est indécomposable. Pour cette méthode de démonstration, *cf.* [24]. On est alors dans un des cas suivant :

A. $\dim(\mathfrak{m}) = 2$, $\pi(s)$ a ses valeurs propres imaginaires pures. On peut alors trouver une base de $\mathfrak{m}$ tel que, identifiant $\mathfrak{s}$ et $\mathfrak{sl}(2)$, on ait $s = \exp\left(t\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$ pour un certain $t \in \mathbf{R}$. Dans ce cas (2) résulte de (3).

B. $\dim(\mathfrak{m}) = 2$, $\pi(s)$ a ses valeurs propres réelles. Dans ce cas, il existe $z \in$ centre de S et $X \in \mathfrak{s}$ $\left[\text{on peut choisir la base de } \mathfrak{m} \text{ pour que } X = t\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right]$ tels que $s = z \exp X$. On a $p(s) = p(z)\, p(\exp X)$. La formule est prouvée pour z (cas A) et pour $\exp X$ [form. (3)]. Elle l'est donc pour s.

C. $\dim(\mathfrak{m}) = 4$, les valeurs propres de $\pi(s)$ ne sont pas réelles, et $\mathfrak{m}$ est somme directe de deux sous-espaces totalement isotropes stables sous s. Si $r(\theta)$ est la rotation d'angle θ, $\pi(s)$ est de la forme $\begin{pmatrix} r(\theta) & 0 \\ 0 & r(-\theta) \end{pmatrix}$. Ici encore on peut mettre s sous la forme $s = z \exp X$, avec z dans le centre de S et $X \in \mathfrak{s}$. Il suffit donc de prouver la formule pour z dans le centre de S. Il est bien connu ([17], p. 207) que z est de la forme $\exp X$, avec $X \in \mathfrak{s}$, de sorte que (2) est encore vrai en ce cas.

Ceci termine la démonstration de 5.1.

Considérons, par exemple, le cas particulier où $S = N(f)$. Il résulte du chapitre I, 2.2, ou d'un calcul direct, le lemme suivant :

Lemme 5.2. — *Soit* $X \in \mathfrak{n}(f)$. *On a*

$$V(\exp X) = e^{-i\langle f, X\rangle}\, \sigma(\exp X).$$

5.2. Cas particulier. N est Heisenberg.

Remarque 5.3. — Le cas où N est Heisenberg et S le revêtement simplement connexe du groupe symplectique est traité dans [24]. La démonstration suivie ici est essentiellement celle de [18].

Remarque 5.4. — Supposons toujours N Heisenberg, et gardons les notations $\mathfrak{m} = \ker f$, $B = B_f \mid \mathfrak{m} \times \mathfrak{m}$. On sait que le noyau Γ du revêtement $S \to \mathrm{Sp}(B)$ est isomorphe à $\mathbf{Z}$, et donc $\mathrm{Sp}(B)$ admet un revêtement connexe (et un seul) d'ordre 2. Notons-le $\mathrm{Mp}(B)$. La représentation V provient d'une représentation (notée) aussi V de $\mathrm{Mp}(B)$ (*cf.* [24]). Il en est donc aussi de même de la fonction $\delta^{\frac{1}{2}}$. Soit π la projection $\pi : \mathrm{Mp}(B) \to \mathrm{Sp}(B)$. L'application

$$s \mapsto \left(\pi(s), \delta^{\frac{1}{2}}(s)\right)$$

est un difféomorphisme de $\mathrm{Mp}(B)$ sur le sous-ensemble des couples $(x, \theta) \in \mathrm{Sp}(B) \times \mathbf{C}$ tels que $\theta^2 = \delta(x)$.

Démonstration de 5.4. — Pour être complets, prouvons que V provient d'une représentation de $\mathrm{Mp}(B)$. Si $s \in \Gamma$, on a $\delta^{\frac{1}{2}}(s)^2 = \delta(\pi(s)) = 1$, et $V'(s) = V'(\pi'(s)) = 1$. On a donc $V(s) = \pm 1$, et V est trivial sur un groupe d'ordre < 2 de Γ.

Lemme 5.5. — *Soit* ε *l'élément non trivial du noyau de :* $\mathrm{Mp}(B) \to \mathrm{Sp}(B)$. *Alors* $V(\varepsilon) = \delta^{\frac{1}{2}}(\varepsilon) = -1$.

Soient $z_1, \ldots, z_{2n}$ des coordonnées de $z \in \mathfrak{m}$ dans une base $e_1, \ldots, e_{2n}$ telles que

$$B(z, z') = \sum_1^n z_i z'_{i+n} - z'_i z_{i+n}.$$

Soit

$$X = \left(\begin{array}{cc:cc} \multicolumn{2}{c:}{0} & -1 & 0 \\ & & 0 & 0 \\ \hdashline 1 & 0 & \multicolumn{2}{c}{0} \\ 0 & 0 & & \end{array}\right) \in \mathfrak{sp}(B).$$

Alors l'élément $s = \exp(2\pi X)$ de $\mathrm{Mp}(B)$ est dans le noyau de π. L'espace $W = \sum_1^n \mathbf{C}(e_j + ie_{j+n})$ est positif; on a $\mathrm{tr}_{\mathfrak{m}\mathbf{C}/W} X = i$, et donc, d'après (3)

$$\delta^{\frac{1}{2}}(s) = e^{\frac{1}{2}(2i\pi)} = -1.$$

Il en résulte que $V(s) = -1$, et donc que $s \neq 1$. (C'est-à-dire $s = \varepsilon$.) Ceci prouve le lemme et la remarque 5.4.

5.3. Le lemme qui suit ne sera utilisé que dans la démonstration du théorème 8.1.

Lemme 5.6. — *On garde les notations du début du paragraphe* 5. *Soit* $\mathfrak{h} \in \mathrm{Pol}^+(f, \mathfrak{n})$. *Soit* $\varphi \in \mathcal{H}_{\mathfrak{h}}^{\infty}$ (*c'est donc un vecteur* C^{∞} *de la représentation* σ *réalisée dans* $\mathcal{H}_{\mathfrak{h}}$, *cf.* 1.5). *Si* $s \in S$, $n \in N$, *et* $k = sn \in S \times_j N$, *on pose* $\psi(k) = [V(s^{-1})\varphi](n)$. *Alors* $\psi \in C^{\infty}(K)$.

Démonstration. — Comme $\mathcal{H}_{\mathfrak{h}}$ est un sous-espace stable de l'espace d'une représentation induite de N, on a $\mathcal{H}_{\mathfrak{h}}^{\infty} \subset \mathcal{H}_{\mathfrak{h}} \cap C^{\infty}(N)$. On sait que cette inclusions provient de la présence d'opérateurs elliptiques d'ordre élevé parmi les opérateurs $\lambda(u)$ $(u \in U(\mathfrak{n}))$. Le même argument prouve que la forme linéaire $\varphi \to \varphi(1)$ est continue sur $\mathcal{H}_{\mathfrak{h}}^{\infty}$ muni de sa topologie de Fréchet usuelle. D'autre part, si $\varphi \in \mathcal{H}_{\mathfrak{h}}^{\infty}$, φ est un vecteur C^{∞} de la représentation $\tilde{\sigma}$ de K (théor. 5.1). L'application $k \to \tilde{\sigma}(k^{-1})\varphi$ dans $\mathcal{H}_{\mathfrak{h}}^{\infty}$ est donc C^{∞}, et il en est de même de

$$k \mapsto [\tilde{\sigma}(k^{-1})\varphi](1) = [V(s^{-1})\varphi](n) = \psi(k),$$

ce qui prouve le lemme 5.6.

6. Cas général. — Dans ce paragraphe, N est un groupe de Lie nilpotent simplement connexe, $f \in \mathfrak{n}^*$, S un groupe, j un homomorphisme de S dans le groupe des automorphismes de N stabilisant f. L'espace $\mathfrak{n}/\mathfrak{n}(f)$ est muni d'une forme bilinéaire alternée non dégénérée. On note $\mathrm{Sp}(\mathfrak{n}/\mathfrak{n}(f))$ le groupe symplectique associé, $\mathrm{Mp}(\mathfrak{n}/\mathfrak{n}(f))$ le revêtement connexe d'ordre 2 de $\mathrm{Sp}(\mathfrak{n}/\mathfrak{n}(f))$ si $\mathfrak{n} \neq \mathfrak{n}(f)$, et le groupe ± 1 si $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}(f)$.

On considère le groupe $\tilde{S}$ formé des couples

$$(s, x) \in S \times \mathrm{Mp}(\mathfrak{n}/\mathfrak{n}(f))$$

tels que s et x aient même image dans $\mathrm{Sp}(\mathfrak{n}/\mathfrak{n}(f))$.

Le groupe $\tilde{S}$ est donc un revêtement d'ordre 2 de S, et l'on a des homomorphismes

$$j : \tilde{S} \to \mathrm{Mp}(\mathfrak{n}/\mathfrak{n}(f)),$$
$$\pi : \tilde{S} \to S.$$

Compte tenu de la remarque 5.4, on peut identifier $\tilde{S}$ et l'ensemble des couples $(s, \theta) \in S \times \mathbf{C}$ tels que

$$\theta^2 = \delta(s) = \det_{\mathfrak{n}_{\mathbf{C}}/\mathfrak{h}}(s) / |\det_{\mathfrak{n}_{\mathbf{C}}/\mathfrak{h}}(s)|$$

[où $\mathfrak{h} \in \mathrm{Pol}^+(f, \mathfrak{n})$ est stable sous s].

Nous poserons $\delta^{\frac{1}{2}}(s, \theta) = \theta$. On a donc, si $s \in \tilde{S}$, $\delta^{\frac{1}{2}}(s)^2 = \delta(\pi(s))$. Nous noterons ε l'élément non trivial du noyau de π. D'après le lemme 5.5, on a

$$\delta^{\frac{1}{2}}(\varepsilon) = -1. \tag{1}$$

THÉORÈME 6.1. — *Posons, pour* $s \in \tilde{S}$,

$$V(s) = \delta^{\frac{1}{2}}(s^{-1})\, V'(\pi(s)). \tag{2}$$

Alors V *est une représentation de* $\tilde{S}$ *dans* $\mathcal{H}$ *telle que*

$$V(s)\,\sigma(n)\,V(s^{-1}) = \sigma(sns^{-1}) \tag{3}$$

pour tout $n \in N$, $s \in \tilde{S}$. *On définit une représentation unitaire* $\tilde{\sigma}$ *de* $\tilde{S} \times_j N$ *dans* $\mathcal{H}$ *qui prolonge* σ *en posant*

$$\tilde{\sigma}(sn) = V(s)\,\sigma(n) \qquad (s \in \tilde{S},\ n \in N).$$

Si S *est un groupe de Lie, et si* j *est continue,* $d\tilde{\sigma}$ *se calcule comme dans la proposition* 5.1.

Il existe une représentation unitaire (*continue*) *de* S *qui prolonge* σ *si et seulement s'il existe un caractère* χ *unitaire* (*continu*) *de* $\tilde{S}$ *tel que* $\chi(\varepsilon) = -1$.

Démonstration. — La seule chose non évidente est le fait que V soit une représentation de $\tilde{S}$. Le théorème est démontré lorsque N est Heisenberg (remarque 5.4). Dans le cas général, on le démontre par récurrence sur la dimension de N. On suppose donc dim $N > 1$, et le théorème démontré pour les groupes de dimension moindre. On distingue différents cas. Notons $\mathfrak{z}$ le centre de $\mathfrak{n}$.

I. ker $f \cap \mathfrak{z} \neq 0$. On se ramène facilement au cas du groupe d'algèbre $\mathfrak{n}/\ker f \cap \mathfrak{z}$ auquel on peut appliquer l'hypothèse de récurrence.

II. On suppose que dim $\mathfrak{z} = 1$, $f(\mathfrak{z}) \neq 0$. On suppose qu'il existe un idéal abélien $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{z}$, stable sous S. On note $\mathfrak{n}_1$ le centralisateur de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{n}$, $f_1 = f \mid \mathfrak{n}$. On pose, si $s \in S$,

$$\delta_1(s) = \det_{\mathfrak{n}_1^{\mathbf{C}}/\mathfrak{h}}(s) / \left| \det_{\mathfrak{n}_1^{\mathbf{C}}/\mathfrak{h}}(s) \right|$$

[où $\mathfrak{h} \in \mathrm{Pol}^+(f_1, \mathfrak{n}_1)$ est stable sous s], et on considère le revêtement $\tilde{S}_1$ de S associé à $\delta_1^{\frac{1}{2}}$.

On introduit l'ensemble $\hat{S}$ formé des triplets

$$(s, \theta_1, \theta_2) \in S \times \mathbf{C} \times \mathbf{C}$$

tels que $\theta_1^2 = \delta_1(s)$, $\theta_2^2 = \det_{\mathfrak{n}/\mathfrak{n}_1}(s)$. On muni $\hat{S}$ de la structure de groupe qui fait de $(s, \theta_1, \theta_2) \to \theta_2$ un caractère, et de l'application naturelle dans $\tilde{S}_1$ un homomorphisme.

L'application $(s, \theta_1, \theta_2) \to (s, \theta_1 \theta_2)$ est un homomorphisme de $\hat{S}$ sur $\tilde{S}$ de noyau $\varepsilon_0 = (1, -1, -1)$.

On considère σ comme la représentation induite par σ_1. L'espace $\mathcal{H}$ est donc réalisé comme espace de fonctions φ sur N à valeurs dans $\mathcal{H}_1$ vérifiant la relation

$$\varphi(nn') = \sigma_1(n')^{-1}\varphi(n)$$

pour tout $n \in \mathrm{N}$ et tout $n' \in \mathrm{N}_1$.

Soit $(s, \theta_1) \in \tilde{\mathrm{S}}_1$. Alors la formule

$$\mathrm{V}_1((s, \theta_1)) = \theta_1^{-1}\mathrm{V}'_1(s)$$

définit, par l'hypothèse de récurrence, une représentation de S_1. Soient $(s, \theta_1, \theta_2) \in \hat{\mathrm{S}}$, $\varphi \in \mathcal{H}$, $n \in \mathrm{N}$. On définit un opérateur $\mathrm{W}(s, \theta_1, \theta_2)$ dans $\mathcal{H}$ en posant

$$\mathrm{W}(s, \theta_1, \theta_2)\varphi(n) = \theta_2^{-1}\theta_1^{-1}\mathrm{V}'_1(s)\varphi(s^{-1}(n)).$$

Comme V_1 est une représentation et θ_2 un caractère, on voit que W est une représentation de $\hat{\mathrm{S}}$. Comme $\mathrm{W}(\varepsilon_0) = 1$, W définit par passage au quotient une représentation W de $\tilde{\mathrm{S}}$. Il est facile de voir (*cf.* la démonstration de la proposition 5.1) que $\mathrm{W} = \mathrm{V}$, de sorte que V est une représentation.

III. On suppose que $\dim \mathfrak{z} = 1$, $f(\mathfrak{z}) \neq 0$, et qu'il n'existe pas d'idéal abélien $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{z}$ de $\mathfrak{n}$ stable sous S. Alors N est Heisenberg, ce qui termine la démonstration du théorème.

7. Calcul de l'obstruction. — Soit G un groupe localement compact séparable, N un sous-groupe fermé invariant, qui soit un groupe de Lie réel nilpotent simplement connexe, $f \in \mathfrak{n}^*$, σ la représentation unitaire irréductible de N associée à f. On note $\mathrm{G}(f)$ le stabilisateur de f dans G. Le groupe $\mathrm{K} = \mathrm{G}(f)\,\mathrm{N}$ est le stabilisateur de σ dans G [1].

On notera $\hat{\mathrm{N}}$ le dual de N, et O_σ l'orbite sous G de σ dans $\hat{\mathrm{N}}$. Soit T une représentation factorielle de G (représentation signifie représentation unitaire continue dans un espace de Hilbert séparable). A la représentation $\mathrm{T} \mid \mathrm{N}$ est associée une « quasi-orbite » μ sur $\hat{\mathrm{N}}$. Soit U une représentation factorielle de K telle que $\mathrm{U} \mid \mathrm{N}$ soit un multiple de σ. Alors (*cf.* [19]), $\mathrm{T} = \mathrm{Ind}(\mathrm{U}, \mathrm{G})$ est une représentation factorielle de G; la quasi orbite μ est supportée par O_σ; les commutants de U et T sont isomorphes; l'application $\mathrm{U} \to \mathrm{Ind}(\mathrm{U}, \mathrm{G})$ induit une bijection de l'ensemble des classes de telles représentations.

On va donc étudier les représentations factorielles U de $\mathrm{K} = \mathrm{G}(f)\,\mathrm{N}$ telles que $\mathrm{U} \mid \mathrm{N}$ soit un multiple de σ. Considérons la suite exacte

$$1 \to \mathrm{Z} \to \widetilde{\mathrm{G}(f)} \times_f \mathrm{N} \to \mathrm{G}(f)\,\mathrm{N} \to 1.$$

Le groupe $\widetilde{G(f)}$ est défini comme au paragraphe 6, et Z est l'ensemble des couples $(s, \pi(s^{-1}))$, où $s \in \widetilde{G(f)}$ est tel que $\pi(s) \in N(f)$.

Notons U′ le relèvement de U à $\widetilde{G(f)} \times_j N$. Si τ est une représentation factorielle de $\widetilde{G(f)}$, nous la prolongeons trivialement en une représentation τ de $\widetilde{G(f)} \times_j N$. La représentation $\tau \otimes \tilde{\sigma}$ (*cf.* théor. 6.1) est factorielle, sa restriction à N est un multiple de σ, les commutants de τ et $\tau \otimes \tilde{\sigma}$ sont isomorphes (lemme de Schur). L'application $\tau \to \tau \otimes \tilde{\sigma}$ induit une bijection de l'espace des classes de représentations factorielles de $\widetilde{G(f)}$ sur l'espace des classes de représentations factorielles de $\widetilde{G(f)} \times_j N$ dont la restriction à N est multiple de σ. En particulier, U′ est de la forme $\tau \otimes \tilde{\sigma}$.

Posons $\widetilde{N(f)} = \pi^{-1}(N(f))$. Comme $N(f)$ est simplement connexe, $\widetilde{N(f)} = N(f) \cup \varepsilon N(f)$. On note $\tilde{\chi}_f$ le caractère de $\widetilde{N(f)}$ qui prolonge χ_f et tel que $\tilde{\chi}_f(\varepsilon) = -1$.

Soit $(s, \pi(s^{-1})) \in Z$. Comme

$$(s, \pi(s^{-1})) = (1, \pi(s^{-1}))(s, 1),$$

on a

$$\tilde{\sigma}(s, s^{-1}) = \sigma(s^{-1})\, V(s) = \tilde{\chi}_f(s)^{-1},$$

d'après les lemmes 5.2 et 5.5.

La représentation $\tau \otimes \tilde{\sigma}$ provient d'une représentation de K si et seulement si $\tau \mid \widetilde{N(f)} = \tilde{\chi}_f$. On a donc finalement prouvé le théorème suivant :

THÉORÈME 7.1. — *Soit τ une représentation factorielle de $\widetilde{G(f)}$ sont la restriction à $\widetilde{N(f)}$ est un multiple de $\tilde{\chi}_f$. La représentation $\tau \otimes \tilde{\sigma}$ fournit par passage du quotient une représentation* (*notée encore* $\tau \otimes \tilde{\sigma}$) *de* K. *La représentation* Ind $(\tau \otimes \tilde{\sigma}, G)$ *est factorielle, son commutant est isomorphe à celui de τ, et l'application*

$$\tau \to \operatorname{Ind}(\tau \otimes \tilde{\sigma}, G)$$

induit une bijection de l'ensemble des classes de représentations factorielles τ de $\widetilde{G(f)}$ telles que $\tau \mid \widetilde{N(f)}$ soit multiple de $\tilde{\chi}_f$ sur l'ensemble des classes de représentations factorielles T *de* G *telles que la quasi orbite dans* $\hat{N}$ *associée à* $T \mid N$ *soit de support* O_σ.

Remarque 7.2. — Il peut arriver que $\widetilde{G(f)}$ possède un caractère unitaire tel que $\chi(\varepsilon) = -1$. Il n'est pas nécessaire dans ce cas d'introduire $\widetilde{G(f)}$. En effet, $\tau \otimes \chi$ est une représentation de $G(f)$, et l'on peut décrire les représentations de G sous la forme Ind $((\tau \otimes \chi)(\tilde{\sigma} \otimes \chi^{-1}), G)$.

C'est ce qui se passe en particulier lorsque $G(f)$ laisse un élément $\mathfrak{h} \in \mathrm{Pol}^+(f, \mathfrak{n})$. Dans ce cas, $\delta^{\frac{1}{2}}$ est un tel caractère. Il en est ainsi lorsque G est résoluble; on retrouve alors un résultat de Brezin, Auslander et Moore (*cf.* [2], chap. IV et [5]).

Remarque 7.3. — Dans le théorème 7.1, on peut construire $\mathrm{Ind}(\tau \otimes \tilde{\sigma}, G)$ même si τ n'est pas supposée factorielle.

8. Un théorème de réduction dans la théorie des représentations holomorphes induites. — 8.1. Dans ce paragraphe, G est un groupe de Lie contenant un sous-groupe invariant nilpotent fermé simplement connexe. Étant donné $g \in \mathfrak{g}^*$ et quelques autres données (*cf.* 1.3) on lui associe une représentation « induite holomorphe » de G. Posons $f = g \mid \mathfrak{n}$. Le théorème 7.1 permet de réduire l'étude de cette représentation à celle d'une représentation analogue du groupe $\widetilde{G(f)}$. Ceci généralise une technique due à Auslander et Kostant.

8.2. Soit $g \in \mathfrak{g}^*$. On reprend les notations de 1.3. On suppose de plus que $\mathfrak{h} = \mathfrak{l} \cap \mathfrak{n}^{\mathbf{C}} \in \mathrm{Pol}^+(f, \mathfrak{n})$. Gardons les notations $\widetilde{G(f)}$, π, ε, ... du paragraphe 6. On posera $G_1 = \widetilde{G(f)}$, $D_1 = \pi^{-1}(D \cap G(f))$, $f_1 = f \mid \mathfrak{g}_1$ [ici $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}(f)$], $\mathfrak{l}_1 = \mathfrak{l} \cap \mathfrak{g}_1^{\mathbf{C}}$, $D_2 = N \cap D$, $\mathfrak{d}_2 = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{n}$. Étant donné un caractère χ de D comme en 1.3 on définit un caractère χ_1 de D_1 en posant

$$\chi_1(x) = \chi(\pi(x))\, \delta^{\frac{1}{2}}(x) \mid \det_{\mathfrak{g}/\mathfrak{k}} x \mid^{\frac{1}{2}} \mid \det_{\mathfrak{n}^{\mathbf{C}}/\mathfrak{h}}(x) \mid^{\frac{1}{2}}$$

pour tout $x \in D_1$.

On construit (*cf.* 1.3) les représentations $T = T(g, \mathfrak{l}, D, \chi, G)$ de G et $T_1 = T(g_1, \mathfrak{l}_1, D_1, \chi_1, G_1)$ de G_1.

Comme $\widetilde{N(f)}$ est un sous-groupe invariant de G_1, et comme $\chi_1 \mid \widetilde{N(f)} = \tilde{\chi}_1$, la représentation $T_1 \mid \widetilde{N(f)}$ est multiple de $\tilde{\chi}_f$. On peut donc construire, comme dans le théorème 7.1, la représentation

$$\mathrm{Ind}(T_1 \otimes \tilde{\sigma}, G).$$

Théorème 8.1. — *On suppose que* D_2 *est connexe, que* $D = \pi(D_1) D_2$ *et que* D *stabilise* $\mathfrak{h}$. *Les représentations* T *et* $\mathrm{Ind}(T_1 \otimes \tilde{\sigma}, G)$ *sont équivalentes.*

Lorsque $\mathfrak{h}$ est stable sous $G(f)$, ceci est démontré dans [1]. (C'est, dans ce cas, essentiellement le théorème 3.1.)

Démonstration. — Considérons $K = G(f).N$, et posons $g' = g \mid \mathfrak{k}$. Par hypothèse, K contient D. On considère le caractère χ' de D défini par

$$\chi'(x) = \chi(x) \mid \det_{\mathfrak{g}/\mathfrak{k}} x \mid^{\frac{1}{2}}.$$

On construit la représentation

$$T' = T(g', \mathfrak{l}, D, \chi', K)$$

et il résulte de [26], que T est isomorphe à la représentation Ind (T′, G). Il suffit donc de démontrer que $T' = T_1 \otimes \tilde{\sigma}$, c'est-à-dire que l'on peut supposer que $G = K$, ce que nous faisons désormais.

Nous considérons les espaces de fonctions $\mathcal{L} = \mathcal{L}(g, \mathfrak{l}, D, \chi, G)$, $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}(g_1, \mathfrak{l}_1, D_1, \chi_1, G_1)$, et $\mathcal{H}_{\mathfrak{h}}$ dans lesquels agissent T, T_1 et σ. Les espaces $\mathcal{L}^\infty$, $\mathcal{L}_1^\infty$, $\mathcal{H}_{\mathfrak{h}}^\infty$ des vecteurs C^∞ sous l'action de ces représentations sont formés de fonctions C^∞. Rappelons que $\tilde{\sigma} \mid G_1$ est noté V.

Soient $\varphi \in \mathcal{H}_{\mathfrak{h}}^\infty$, $\psi \in \mathcal{L}_1^\infty$. La formule

$$\Lambda(\varphi, \psi)(\pi(x)n) = \psi(x)[V(x^{-1})\varphi](n) \tag{1}$$

(où $x \in G_1$, $n \in N$) définit une fonction $\Lambda(\psi \otimes \varphi) = \Lambda(\varphi, \psi) \in C^\infty(G)$. En effet, la formule (1) a un sens, car si $y \in \widetilde{N(f)}$, on a

$$\begin{aligned}\psi(xy)[V(y^{-1}x^{-1})]\varphi(n) &= \{\tilde{\chi}_f(y)\psi(x)\}\{\tilde{\chi}_f(y^{-1})V(x^{-1})\varphi(n)\}\\ &= \psi(x)V(x^{-1})\varphi(n).\end{aligned}$$

D'autre part, $\Lambda(\varphi, \psi)$ est C^∞, d'après le lemme 5.6.

Le théorème sera démontré si nous prouvons les assertions suivantes :

A. $\Lambda(\varphi, \psi) \in \mathcal{L}$; l'application $(\varphi, \psi) \to \Lambda(\varphi, \psi)$ se prolonge en un multiple d'une isométrie de $\mathcal{H}_{\mathfrak{h}} \otimes \mathcal{L}_1$, et commute à l'action de G.

B. L'image de Λ est dense dans $\mathcal{L}$.

Démonstration de A. — Posons $\theta = \Lambda(\varphi, \psi)$.

Soient $x \in G_1$, $n \in N$, $y \in D_1$, $d \in D$. Prouvons la relation

$$\theta(\pi(x)nd) = \chi(d^{-1})\,\theta(\pi(x)n). \tag{2}$$

Celle-ci est triviale si $d \in D_2$. Comme $D = \pi(D_1)D_2$, il suffit de l'établir si $d = \pi(y)$. On a

$$\theta(\pi(x)n\,\pi(y)) = \theta(\pi(xy)(y^{-1}ny)) = \psi(xy)[V(y^{-1}x^{-1})\varphi](y^{-1}ny).$$

Puisque y stabilise $\mathfrak{h}$, on a

$$V'(y^{-1})\varphi'(n) = |\det{}_{\mathfrak{n}_{\mathbf{C}}/\mathfrak{h}}\, y|^{\frac{1}{2}}\varphi'(yny^{-1})$$

pour tout $\varphi' \in \mathcal{H}_{\mathfrak{h}}$. Donc

$$[V(y^{-1}x^{-1})\varphi](y^{-1}ny) = \delta^{\frac{1}{2}}(y)\,|\det{}_{\mathfrak{n}_{\mathbf{C}}/\mathfrak{h}}\, y|^{\frac{1}{2}}[V(x^{-1})\varphi](n).$$

Il résulte de la définition de χ_1 que l'on a

$$\theta(\pi(x)\, n\, \pi(y)) = \chi(\pi(y^{-1}))\, \theta(\pi(x)\, n).$$

Prouvons que Λ commute à l'action de G. Soient $n' \in \mathrm{N}$, $x' \in \mathrm{G}_1$. On a

$$\begin{aligned} \lambda(n'\pi(x'))\, \theta(\pi(x)\, n) &= \theta(\pi(x'^{-1})\, n'^{-1}\, \pi(x)\, n) \\ &= \theta(\pi(x'^{-1}x)\,(x^{-1}n'x)^{-1}\, n) \\ &= \psi(x'^{-1}x)\, \mathrm{V}(x^{-1})\, \mathrm{V}(x')\, \varphi((x^{-1}n'x)^{-1}\, n). \end{aligned}$$

On a, en posant $\varphi' = \mathrm{V}(x^{-1})\, \mathrm{V}(x')\, \varphi$,

$$\varphi'((x^{-1}n'x)^{-1}\, n) = \sigma(x^{-1}n'x)\, \varphi'(n) = \mathrm{V}(x^{-1})\, \sigma(n')\, \mathrm{V}(x)\, \varphi'(n)$$

et donc

$$\lambda(n'\pi(x'))\, \theta(\pi(x)\, n) = \mathrm{T}_1(x')\, \psi(x)\, \sigma(n')\, \mathrm{V}(x')\, \varphi(n)$$

ou encore

$$\lambda(n'\pi(x'))\, \theta = \Lambda\{\mathrm{T}_1 \otimes \tilde{\sigma}(n'\pi(x'))\, \psi \otimes \varphi\}.$$

Soit maintenant $\mathrm{X} \in \mathfrak{k}$. Puisque Λ commute à l'action de G, on a

$$\lambda(\mathrm{X})\, \theta = \Lambda\{d(\mathrm{T}_1 \otimes \tilde{\sigma})(\mathrm{X})\, \psi \otimes \varphi\}. \tag{3}$$

Par linéarité, ceci est encore vrai si $\mathrm{X} \in \mathfrak{k}^{\mathbf{C}}$.

Soit $\mathrm{X} \in \mathfrak{l}$. Prouvons la relation

$$\rho(\mathrm{X})\, \theta = \{-ig(\mathrm{X}) + \rho_{\mathfrak{g},\mathfrak{l}}(\mathrm{X})\}\, \theta. \tag{4}$$

La relation est triviale si $\mathrm{X} \in \mathfrak{h}$. Il suffit donc de l'établir lorsque $\mathrm{X} \in \mathfrak{l}_1$. (En effet, $\mathfrak{l} = \mathfrak{l}_1 + \mathfrak{h}$, *cf.* [1]). Comme Λ commute à l'action de G il suffit d'établir l'égalité des deux membres de (4) au point 1. On a

$$\rho(\mathrm{X})\, \theta(1) = \lambda(-\mathrm{X})\, \theta(1)$$

et, d'après (3),

$$\begin{aligned} \rho(\mathrm{X})\, \theta(1) &= \Lambda(\lambda(-\mathrm{X})\, \psi \otimes \varphi)(1) + \Lambda(\psi \otimes d\mathrm{V}(-\mathrm{X})\, \varphi)(1) \\ &= \{-ig(\mathrm{X}) + \rho_{\mathfrak{g}_1,\mathfrak{l}_1}(\mathrm{X})\}\, \psi(1)\, \varphi(1) + \varphi(1)\, d\mathrm{V}(-\mathrm{X})\, \varphi(1). \end{aligned}$$

Utilisons le théorème 5.2 et le lemme 4.3. On a

$$d\mathrm{V}(-\mathrm{X})\, \varphi(1) = -\lambda(\theta(\mathrm{X}))\, \varphi(1) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}_{\mathfrak{n}^{\mathbf{C}}/\mathfrak{h}}(\mathrm{X})\, \varphi(1).$$

La formule (4) en résulte aussitôt.

Soit F une fonction continue sur G, à support compact modulo D, telle que

$$\mathrm{F}(xd) = \rho_{\mathrm{G},\mathrm{D}}(d)^2\, \mathrm{F}(x)$$

pour tout $x \in G$, $d \in D$. On peut normaliser les différentes « mesures » invariantes qui interviennent ci-dessous de manière à ce que l'on ait

$$\oint_{G/D} F\, d\mu_{G,D} = \oint_{G_1/D_1} d\mu_{G_1,D_1}(x) \int_{N/D_2} F(\pi(x)\, n)\, d\mu_{N,D_2}(n). \tag{5}$$

En effet (*cf.* [26]), on a

$$\oint_{G/D} \ldots = \oint_{G/DN} \ldots \oint_{DN/D} \ldots .$$

L'inclusion $G(f) \to G$ induit, puisque $D = (D \cap G(f)) . D_2$, un isomorphisme

$$G_1/D_1 \simeq G(f)/G(f) \cap D \simeq G/DN$$

et l'inclusion $N \to ND$ un isomorphisme $N/D_2 \simeq DN/D$.

La relation (5) est encore valable pour les fonctions mesurables positives.

Appliquons (5) à la fonction $|\,\theta\,|^2$. On a

$$\oint_{G/D} |\,\theta\,|^2\, d\mu_{G,D} = \oint_{G_1/D_1} |\,\psi(x)\,|^2\, d\mu_{G_1,D_1}(x) \oint_{N/D_2} |\,V(x^{-1})\, \varphi(n)\,|^2\, d\mu_{N,D_2}(n).$$

Comme $V(x^{-1})$ est un opérateur unitaire, la seconde intégrale est $\|\,\varphi\,\|^2$. On trouve donc $\|\,\Lambda(\psi \otimes \varphi)\,\| = \|\,\psi\,\| . \|\,\varphi\,\|$, ce qui termine la démonstration de A.

Démonstration de B. — Les éléments de la forme $h = \alpha \star h'$, où $\alpha \in \mathcal{D}(G)$, $h' \in \mathcal{L}^\infty$, h' est orthogonal à l'image de Λ, sont denses dans l'orthogonal de l'image de Λ.

Nous aurons démontré le théorème si nous prouvons que lorsque α et h' sont comme ci-dessus, alors $h = 0$. Par hypothèse, et compte tenu de (5) pour tout $\psi \in \mathcal{L}_1^\infty$ et tout $\varphi \in \mathcal{H}_{\mathfrak{h}}^\infty$. on a

$$0 = \oint_{G_1/D_1} \psi(x)\, d\mu_{G_1,D_1}(x) \int_{N/D_2} \overline{h}(\pi(x)\, n)\, V(x^{-1})\, \varphi(n)\, d\mu_{N,D_2}(n). \tag{6}$$

Prouvons d'abord que la fonction

$$n \to \alpha \star h'(n)$$

est un élément de $\mathcal{H}_{\mathfrak{h}}$ qui dépend continûment de $\alpha \in \mathcal{D}(G)$.

Soit $Y \in \mathfrak{h}$. La relation

$$\rho(Y)\, h = -\, if(Y)\, h$$

entraîne la même relation pour la restriction de h à N. Soit maintenant λ une fonction continue à support compact modulo D_2 sur N, telle que

$$\lambda(nd) = \chi_f(d)\, \lambda(n)$$

pour tout $n \in \mathrm{N}$, $d \in \mathrm{D}_2$. Calculons

$$\langle h, \lambda \rangle_{\mathrm{N}} = \int_{\mathrm{N}/\mathrm{D}_2} \lambda(n)\, h(n)\, dn.$$

comme

$$h(n) = \int_{\mathrm{G}} \alpha(x)\, h'(x^{-1} n)\, dn$$

l'inégalité de Schwarz donne

$$\begin{aligned} |\langle h, \lambda \rangle_{\mathrm{N}}|^2 &\leq \int_{\mathrm{N}/\mathrm{D}_2} \int_{\mathrm{G}} |\lambda(n)|^2 \,|\alpha(x)|\, dx\, dn \\ &\quad \times \int_{\mathrm{N}/\mathrm{D}_2} \int_{\mathrm{G}} |h'(x^{-1} n)|^2\, \alpha(x)\,|\, dx\, dn \\ &\leq |\lambda|_{\mathrm{N}}^2 \int_{\mathrm{G}} |\alpha|\, d\mu_{\mathrm{G}} \times \mathrm{I}, \end{aligned}$$

où I est la seconde intégrale double. On a

$$\mathrm{I} = \int_{\mathrm{G}} \int_{\mathrm{N}/\mathrm{D}_2} |h'(xn)|^2\, |\alpha'(x)|\, dx\, dn,$$

où l'on a posé : $\alpha'(x) = |\det_{\mathfrak{g}} x|\, \alpha(x^{-1})$;

$$\begin{aligned} \mathrm{I} &= \int_{\mathrm{G}/\mathrm{N}} dx \int_{\mathrm{N}} dy \int_{\mathrm{N}/\mathrm{D}_2} |h'(xyn)|^2\, |\alpha'(xy)|\, dx\, dn \\ &= \int_{\mathrm{G}/\mathrm{N}} dx \left\{ \int_{\mathrm{N}/\mathrm{D}_2} |h'(xn)|^2\, dn \right\} \left\{ \int_{\mathrm{N}} |\alpha'(xy)|\, dy \right\} \\ &= \int_{\mathrm{G}/\mathrm{D}_2} |h'(x)|^2 \int_{\mathrm{N}} |\alpha'(xy)|\, dy\, dx \\ &= \oint_{\mathrm{G}/\mathrm{D}} |h'(x)|^2\, dx \int_{\mathrm{D}/\mathrm{D}_2} \int_{\mathrm{N}} |\alpha'(x\, dy)|\, dd\, dy \\ &\leq \sup_x \int_{\mathrm{DN}} |\alpha'(xy)|\, dy \times |h'|^2. \end{aligned}$$

On voit finalement que l'on a

$$|\langle h, \lambda \rangle|_{\mathrm{N}} \leq \mathrm{M}(\alpha)\, |\lambda|_{\mathrm{N}}\, |h'|, \tag{7}$$

où $\mathrm{M}(\alpha)$ est une constante qui tend vers zéro quand α tend vers zéro en restant dans un compact fixe. Ceci étant vrai pour tout λ, on voit que

$$|h|_{\mathrm{N}} < \mathrm{M}(\alpha)\, |h'|, \tag{8}$$

ce qui prouve notre assertion.

Remplaçant α par $\rho(x)\alpha$, on en déduit que la fonction

$$n \to h(xn) = h_x(n) \tag{9}$$

est un élément de $\mathcal{H}_{\mathfrak{h}}$ qui dépend continûment de $x \in G$. Il en résulte que si $x \in G_1$, la formule

$$\overline{k}(x) = \int_{N/D_2} \overline{h}(\pi(x)n)\,V(x^{-1})\,\varphi(n)\,d\mu_{N,D_2}(n) \tag{10}$$

définit une fonction continue sur G_1.

Nous allons démontrer que l'élément k est dans $\mathcal{L}_1$.

Montrons tout d'abord que k est différentiable et que dans (10) on peut dériver sous le signe $\int$. Posons

$$H(x, n) = \overline{h}(\pi(x)n)\,V(x^{-1})\,\varphi(n)$$

et notons avec un indice 1 les dérivés par rapport à la première variable; alors, si $X \in \mathfrak{s}$, on a

$$\lambda_1(X)\,H(x, n) = \lambda(X)\,\overline{h}(\pi(x)n)\,V(x^{-1})\,\varphi(n) - h(\pi(x)n)\,V(x^{-1})\,dV(X)\,\varphi(n). \tag{11}$$

On déduit de (10), appliqué à h et à $\lambda(X)\,h$, que l'intégrale

$$\int_{N/D_2} \lambda_1(X)\,H(x, n)\,d\mu_{N,D_2}(n)$$

converge uniformément lorsque X et x restent dans des compacts. Il en résulte que k est dérivable, et que l'on a la formule

$$\lambda(X)\,\overline{k}(x) = \int_{N/D_2} \lambda_1(X)\,H(x, n)\,dn. \tag{12}$$

Cette formule est encore valable, par linéarité, si $X \in \mathfrak{s}^{\mathbf{C}}$.

On voit que $\lambda(X)\,k$ est somme d'éléments analogues à k; par récurrence, on voit que $k \in C^\infty(G_1)$.

Soit $x \in G_1$. On définit $h_x \in \mathcal{H}_{\mathfrak{h}}$ par la formule [*cf.* (9)]

$$h_x(n) = h(\pi(x)n) \qquad (n \in N).$$

En particulier, h_1 est la restriction de h à N. Soit $d \in D_1$. On a

$$\begin{aligned} h_d(n) &= h(\pi(d)n) = h(\pi(d)\,n\,\pi(d^{-1})\,\pi(d)) \\ &= \chi(\pi(d))^{-1}\,h(\pi(d)\,n\,\pi(d^{-1})) \\ &= \chi(\pi(d))^{-1}\,\delta^{-\frac{1}{2}}(d)\,\left|\det_{\mathfrak{n}^{\mathbf{C}}/\mathfrak{h}}(d)\right|^{-\frac{1}{2}}\,V(d)^{-1}\,h_1(n) \end{aligned}$$

et donc [en remplaçant h par $\lambda(x^{-1})\, h$], on voit que

$$h_{xd} = \chi_1(d)^{-1}\, \mathrm{V}(d^{-1})\, h_x \qquad (x \in \mathrm{G}_1,\ d \in \mathrm{D}_1). \tag{13}$$

On en déduit les égalités

$$\begin{aligned} \bar{k}(xd) &= (\mathrm{V}(d^{-1})\, \mathrm{V}(x^{-1})\, \varphi,\ h_{xd}) \\ &= (\mathrm{V}(d^{-1})\, \mathrm{V}(x^{-1})\, \varphi,\ \chi_1(d)^{-1}\, \mathrm{V}(d^{-1})\, h_x) \\ &= \overline{\chi_1(d)}^{-1}\, (\mathrm{V}(x^{-1})\, \varphi,\ h_x), \end{aligned}$$

car $\mathrm{V}(d^{-1})$ est un opérateur unitaire. On a donc prouvé la relation

$$k(xd) = \chi_1(d)^{-1}\, k(x) \tag{14}$$

pour tout $x \in \mathrm{G}_1$, $d \in \mathrm{D}_1$.

Soit $\mathrm{X} \in \mathfrak{s}^{\mathbf{C}}$. Posons $d_t = \exp t\mathrm{X}$.

Compte tenu de la relation

$$h(d_t^{-1}\, n) = h(d_t^{-1}\, n d_t\, d_t^{-1}),$$

on voit que

$$\lambda(\mathrm{X})\, h(n) = \rho(-\mathrm{X})\, h(n) + \alpha(\mathrm{X})\, h_1(n),$$

où $\alpha(\mathrm{X})$ est défini comme dans le lemme 4.3. Ceci est encore valable lorsque $\mathrm{X} \in \mathfrak{s}^{\mathbf{C}}$ par linéarité. En particulier, si $\mathrm{X} \in \mathfrak{l}_1$, on a

$$\lambda(-\mathrm{X})\, h(n) = [-ig(\mathrm{X}) + \rho_{\mathfrak{g},\mathfrak{l}}(\mathrm{X})]\, h(n) + d\mathrm{V}(-\mathrm{X})\, h(n) - \frac{1}{2}\operatorname{tr}_{\mathfrak{n}^{\mathbf{C}}/\mathfrak{h}}(\mathrm{X})\, h(n)$$

et donc :

$$\lambda(-\mathrm{X})\, h(n) = [-ig(\mathrm{X}) + \rho_{\mathfrak{g}_1,\mathfrak{l}_1}(\mathrm{X})]\, h(n) + d\mathrm{V}(-\mathrm{X})\, h_1(n) \tag{15}$$

pour tout $\mathrm{X} \in \mathfrak{l}_1$, $n \in \mathrm{N}$.

Compte tenu de (11) et (12), il en résulte que l'on a, si $\mathrm{X} \in \mathfrak{l}_1$,

$$\begin{aligned} \operatorname{conj}[\lambda(-\mathrm{X})\, k(1)] = \operatorname{conj}\{[-ig(\mathrm{X}) + \rho_{\mathfrak{g}_1,\mathfrak{l}_1}(\mathrm{X})]\, k(1)\} \\ + (\varphi,\ d\mathrm{V}(-\mathrm{X})\, h_1) + (d\mathrm{V}(-\overline{\mathrm{X}})\, \varphi,\ h_1). \end{aligned}$$

Comme la représentation V est unitaire, la somme des deux derniers termes est nulle, et l'on obtient

$$\lambda(-\mathrm{X})\, k(1) = [-ig(\mathrm{X}) + \rho_{\mathfrak{g}_1,\mathfrak{l}_1}(\mathrm{X})]\, k(1).$$

Remarquant que $\lambda(-\mathrm{X})\, k(1) = \rho(\mathrm{X})\, k(1)$, et que $\rho(\mathrm{X})$ commute aux translations à gauche, on a finalement prouvé la relation

$$\rho(\mathrm{X})\, k = [-ig(\mathrm{X}) + \rho_{\mathfrak{g}_1,\mathfrak{l}_1}(\mathrm{X})]\, k \tag{16}$$

pour tout $\mathrm{X} \in \mathfrak{l}_1$.

Une simple application de l'inégalité de Schwarz montre que pour tout $x \in G_1$, on a

$$| k(x) |^2 \leqq | \varphi |^2 \int_{N/D_2} | h(xn) |^2 \, dn.$$

il en résulte de (5) que l'on a

$$\oint_{G_1/D_1} | k(x) |^2 \, dx \leqq | \varphi |^2 \, | h |^2 < \infty. \tag{17}$$

Les relations (14), (16) et (17) prouvent que $k \in \mathcal{L}_1$.

D'après (6), k est orthogonal à tous les $\psi \in \mathcal{L}_1^\infty$. Donc $k = 0$. Comme k est continue, $k(x) = 0$ pour tout $x \in N$. Fixons x. Cela signifie que h_x est orthogonal à tous les éléments de la forme $V(x^{-1}) \varphi$ avec $\varphi \in \mathcal{H}_{\mathfrak{h}}^\infty$, et donc $h_x = 0$. Il en résulte $h = 0$, ce qui prouve le théorème.

8.3. Le théorème 8.1 est surtout intéressant lorsque $\mathfrak{l} \in \mathrm{Pol}^+(g, \mathfrak{g})$. Nous allons l'énoncer à nouveau en considérant un cas particulier des représentations construites en 1.3.

Soient donc G un groupe de Lie, $g \in \mathfrak{g}^*$. On note $G(g)$ le centralisateur de g dans G, $\mathfrak{g}(g)$ son algèbre de Lie. Sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(g)$, il y a une forme bilinéaire canonique alternée non dégénérée. On introduit comme au paragraphe 6 les groupes $\mathrm{Sp}(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(g))$, $\mathrm{Mp}(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(g))$ et le revêtement $\widehat{G(g)}$ d'ordre 2 de $G(g)$. On note p la projection $\widehat{G(g)} \to G(g)$ et e_0 l'élément non trivial du noyau de p.

On suppose qu'il existe $\mathfrak{l} \in \mathrm{Pol}^+(g, \mathfrak{g})$ stable sous $G(g)$. Par construction, $\widehat{G(g)}$ est muni d'un caractère $\delta_0^{\frac{1}{2}}$ tel que $\delta_0^{\frac{1}{2}}(e_0) = -1$, et

$$\delta_0^{\frac{1}{2}}(x)^2 = \det_{\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}/\mathfrak{l}} x / | \det_{\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}/\mathfrak{l}} x |$$

[ce caractère ne dépend pas de $\mathfrak{l} \in \mathrm{Pol}^+(g, \mathfrak{g})$].

On suppose qu'il existe un caractère unitaire η de $\widehat{G(g)}$ tel que $\eta(e_0) = -1$ et dont la différentielle soit $ig \mid \mathfrak{g}(g)$.

Remarque 8.2. — Un tel caractère n'existe pas en général. Il peut arriver qu'en se restreignant à un sous-groupe de $\widehat{G(g)}$ contenant e_0 et la composante neutre, un tel caractère existe. Avec les modifications évidentes, ce qui suit reste valable dans ce cas.

On note D_0 le sous-groupe analytique de G d'algèbre $\mathfrak{d} = \mathfrak{l} \cap \mathfrak{g}$. On pose $D = D_0 G(g)$. C'est un sous-groupe de G. Le produit

$$\eta(.) \, \delta_0^{-\frac{1}{2}}(.) \, | \det_{\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}/\mathfrak{h}} (.) |^{-\frac{1}{2}}$$

est un caractère de G (g). On suppose qu'il se prolonge en un caractère χ de D de différentielle

$$d\chi = ig \mid \mathfrak{d} - \rho_{\mathfrak{g},\mathfrak{l}} \mid \mathfrak{d}.$$

Nous poserons

$$\mathcal{L}(g, \mathfrak{l}, \mathrm{D}, \chi, \mathrm{G}) = \mathcal{H}(g, \eta, \mathfrak{l}, \mathrm{G}) \quad \text{et} \quad \mathrm{T}(g, \mathfrak{l}, \mathrm{D}, \chi, \mathrm{G}) = \tau(g, \eta, \mathfrak{l}, \mathrm{G}).$$

On voit que τ opère par translations à gauche dans un espace de fonctions sur G vérifiant les relations

$$\rho(\mathrm{X})\varphi = [-ig(\mathrm{X}) + \rho_{\mathfrak{g},\mathfrak{l}}(\mathrm{X})]\varphi \qquad (\mathrm{X} \in \mathfrak{l}); \tag{18}$$

$$\varphi(x\pi(y)) = \eta(y)^{-1}\delta_0^{\frac{1}{2}}(y) \mid \det_{\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}/\mathfrak{l}} y \mid^{\frac{1}{2}} \varphi(x) \tag{19}$$

pour tout $x \in \mathrm{G}$, $y \in \widehat{\mathrm{G}(g)}$.

Soit N comme ci-dessus, et $f = g \mid \mathfrak{n}$.

On suppose que $\mathfrak{h} = \mathfrak{l} \cap \mathfrak{n}^{\mathbf{C}} \in \mathrm{Pol}^{+}(f, \mathfrak{n})$. On conserve les notations G_1, g_1, ... Alors $\pi(\mathrm{G}_1(g_1)) = \mathrm{G}(g)\,\mathrm{N}(f)$, D_2 est connexe, $\mathrm{D} = \pi(\mathrm{D}_1)\,\mathrm{D}_2$ (*cf.* [1]). La formule

$$\eta_1(x) = \chi_1(p_1(x)) \mid \det_{\mathfrak{g}_1^{\mathbf{C}}/\mathfrak{l}_1}(p_1(\mathrm{X})) \mid^{\frac{1}{2}} \delta_1^{\frac{1}{2}}(x), \tag{20}$$

où $x \in \widehat{\mathrm{G}_1(g_1)}$ définit un caractère unitaire de $\widehat{\mathrm{G}_1(g_1)}$ de différentielle ig_1 et tel que $\eta_1(e_1) = -1$.

Nous poserons

$$\tau = \tau(g, \eta, \mathfrak{l}, \mathrm{G}) \quad \text{et} \quad \tau_1 = \tau(g_1, \eta_1, \mathfrak{l}_1, \mathrm{G}_1).$$

Corollaire 8.3. — *Les représentations* τ *et* Ind $(\tau_1 \otimes \tilde{\sigma}, \mathrm{G})$ *sont équivalentes.*

Compte tenu du changement de notation, c'est un cas particulier du théorème 8.1.

9. Applications et conclusions. — 9.1. *Groupes résolubles simplement connexes.* — Le corollaire 8.3 permet de démontrer, sous des conditions un peu moins restrictives que [1], que $\tau(g, \eta, \mathfrak{l}, \mathrm{G})$ ne dépend pas de $\mathfrak{l}$. On pourrait d'ailleurs énoncer un théorème d'indépendance analogue concernant les représentations factorielles construites par Pukanszky ([21], § 4). Le démonstration du théorème 9.1 est, compte tenu du corollaire 8.3, identique à celle de [1]. Comme il ne donne pas une caractérisation nécessaire des polarisations $\mathfrak{l} \in \mathrm{Pol}^{+}(g, \mathfrak{g})$ donnant lieu à des représentations irréductibles, il ne rajoute pas grand chose à [1]; je renvoie donc le lecteur à [1] pour la démonstration.

THÉORÈME 9.1. — *Soit* G *un groupe de Lie résoluble connexe. Soient* $g \in \mathfrak{g}^*$, *et* η *un caractère de* $\widehat{G(g)}$ *comme en* 8.3. *Soit* $\mathfrak{l} \in \mathrm{Pol}^+(g, \mathfrak{g})$ *un élément stable sous* $G(g)$ *tel qu'il existe un idéal nilpotent* $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{g}$ *tel que* $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$ *soit nilpotent et* $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{n}^{\mathbf{C}} \in \mathrm{Pol}^+(g \mid \mathfrak{n}, \mathfrak{n})$.

Alors $\tau(g, \eta, \mathfrak{l}, G)$ *est irréductible, non triviale, et sa classe ne dépend pas de* $\mathfrak{l} \in \mathrm{Pol}^+(g, \mathfrak{g})$ *vérifiant ces conditions.*

Remarque 9.2. — Posons $\tau = \tau(g, \eta, \mathfrak{l}, G)$. Soit $d\tau$ la représentation de $U(\mathfrak{g}^{\mathbf{C}})$ associée à τ. On sait que le noyau de $d\tau$ est un idéal bilatère primitif de $U(\mathfrak{g}^{\mathbf{C}})$ (Dixmier [9]). En fait, il résulte du lemme 2.1 que le noyau de $d\tau$ est I_{ig}.

Soit u un élément du centre de $U(\mathfrak{g}^{\mathbf{C}})$. Alors $d\tau(u)$ est un scalaire. Notons-le $\chi_{ig}(u)$. Ce scalaire est calculé dans [7]. En particulier, $\chi_{ig}(u)$ est fonction polynomiale de g. Il me semble que ce résultat, ainsi que la forme du corollaire 8.3 plaident plus en faveur de la correspondance entre orbites et représentations que nous avons adopté qu'en celle adoptée dans [1].

9.2. CONCLUSION. — Soit G un groupe de Lie; on conserve les notations N, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{n}$, g, f.

Nous avons vu que lorsque G est résoluble le théorème 8.1 n'ajoute pas grand chose à [1]. En effet, il existe dans ce cas $\mathfrak{l} \in \mathrm{Pol}^+(g, \mathfrak{g})$ tel que $\mathfrak{h} = \mathfrak{l} \cap \mathfrak{n}^{\mathbf{C}} \in \mathrm{Pol}^+(f, \mathfrak{n})$ et tel que $\mathfrak{h}$ soit stable sous $G(f)$.

Si on ne suppose plus G résoluble, on construit facilement des exemples où il existe $\mathfrak{l} \in \mathrm{Pol}^+(g, \mathfrak{g})$ tel que $\mathfrak{h} \in \mathrm{Pol}^+(f, \mathfrak{n})$, mais où l'on ne peut imposer en plus que $\mathfrak{h}$ soit stable sous $G(f)$. Dans ce cas le théorème 8.1 est utile.

En fait, le théorème 8.1 reste insuffisant, et rend beaucoup moins de services que son analogue infinitésimal (chap. I, théor. 6.1). En effet, même si l'orbite de g est de dimension maximale, il n'existe pas en général d'élément $\mathfrak{l} \in \mathrm{Mxl}(g, \mathfrak{g}^{\mathbf{C}})$ tel que $\mathfrak{h} \in \mathrm{Pol}^+(f, \mathfrak{n})$, Un tel exemple a été construit par Dixmier [13].

Pour obtenir des résultats suffisamment généraux, il faut considérer des représentations dans des espaces de formes harmoniques. Le travail récent de Satake [23] indique que l'on peut espérer généraliser le théorème 8.1 dans cette direction.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AUSLANDER (L.) et KOSTANT (B.), *Polarizations and unitary representations of solvable Lie groups* (à paraître).

[2] AUSLANDER (L.) et MOORE (C. C.), *Unitary representations of solvable Lie groups* (*Memoires A. M. S.*, vol. 62, 1966).

[3] BLATTNER (R. I.) *On induced representations.* II (*Amer. J. Math.*, vol, 83, 1961, p. 499-512).

[4] BLATTNER (R. I.), *Induced and produced representations of Lie algebras* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 144, 1969, p. 457-474).
[5] BREZIN (J.), *Unitary representation theory for solvable Lie group* (*Memoirs A. M. S.*, vol. 79, 1968).
[6] BOURBAKI (N.), *Algèbre*, chap. VIII, Hermann, Paris.
[7] CONZE (M.) et DUFLO (M.), *Sur l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie résoluble* (*Bull. Sc. Math.*, t. 94, 1970, p. 201-208).
[8] CONZE (N.) et VERGNE (M.), *Idéaux primitifs des algèbres enveloppantes des algèbres de Lie résolubles* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 272, série A, 1971, p. 985-988).
[9] DIXMIER (J.), *Représentations irréductibles des algèbres de Lie nilpotentes* (*Anals Acad. Brasilier Ciencas*, t. 4, 1963, p. 491-519).
[10] DIXMIER (J.), *Représentations irréductibles des algèbres de Lie résolubles* (*J. Math. pures et appl.*, t. 45, 1966, p. 1-68).
[11] DIXMIER (J.), *sur le noyau infinitésimal d'une représentation unitaire d'un groupe résoluble* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 262, série A, 1966, p. 483-486).
[12] DIXMIER (J.), *Sur les représentations induites des algèbres de Lie* (*J. Math. pures et appl.*, à paraître).
[13] DIXMIER (J.), *Polarisations dans les algèbres de Lie* (*Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, t. 4, 1971, p. 321-336).
[14] DUFLO (M.), *Caractères des groupes et des algèbres de Lie résolubles* (*Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, t. 3, 1970, p. 23-74).
[15] DUFLO (M.), *Sur les représentations irréductibles des algèbres de Lie contenant un idéal nilpotent* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 270, série A, 1970, p. 504-506).
[16] DUFLO (M.), *Sur les représentations unitaires des groupes de Lie contenant un sous-groupe invariant nilpotent* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 270, série A, 1970, p. 578-581).
[17] HOCHSCHILD (G.), *La structure des groupes de Lie*, Dunod, Paris.
[18] KIRILLOV (A. A), *The characters of unitary représentations of Lie groups* (*Fonct. Anal. applic.*, vol. 3, 1969; traduit du russe par Consultant Bureau).
[19] MACKEY (G. W.), *Unitary representations of groups extensions* (*Acta Math.*, vol. 99, 1958, p. 265-311).
[20] NELSON (E.), *Analytic vectors* (*Ann. Math.*, vol. 70, 1959, p. 572-615).
[21] PUKANSZKY (L.), *Factor representations of solvable Lie groups* (à paraître).
[22] QUILLEN (D.), *On the endomorphism ring of a simple module over an enveloping algebra* (*Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. 21, 1970, p. 171-172).
[23] SATAKE (I.), *Unitary representations of a semi-direct product of Lie groups on $\bar{\partial}$-Cohomology spaces* (*Math. Ann.*, vol. 190, 1971, p. 177-202).
[24] SHALE (D.) *Linear Symmetries of free Boson fields* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 103, 1962 p. 149-167).
[25] WEIL (A.), *Sur certains groupes d'opérateurs unitaires* (*Acta Math.*, vol. 111, 1964, p. 143-211).
[26] WEIL (A.), *Représentations des groupes de Lie résolubles*, Dunod, Paris (à paraître).

(Manuscrit reçu le 7 juin 1971.)

Michel DUFLO,
109, boulevard de la République,
92-Saint-Cloud.