

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

GASTON DARBOUX

Mémoire sur les fonctions discontinues

Annales scientifiques de l'É.N.S. 2^e série, tome 4 (1875), p. 57-112

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1875_2_4_57_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1875, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

MÉMOIRE
SUR
LES FONCTIONS DISCONTINUES,

PAR M. G. DARBOUX,

MAITRE DE CONFÉRENCES A L'ÉCOLE NORMALE.

Jusqu'à l'apparition du Mémoire de Riemann sur les séries trigonométriques aucun doute ne s'était élevé sur l'existence de la dérivée des fonctions continues. D'excellents, d'illustres géomètres, au nombre desquels il faut compter Ampère, avaient essayé de donner des démonstrations rigoureuses de l'existence de la dérivée. Ces tentatives étaient loin sans doute d'être satisfaisantes; mais, je le répète, aucun doute n'avait été formulé sur l'existence même d'une dérivée pour les fonctions continues (1).

La publication du Mémoire de Riemann a décidé la question en sens contraire. A l'occasion des séries trigonométriques, l'illustre géomètre expose ses idées sur les principes du Calcul infinitésimal; il généralise, par une de ces vues qui n'appartiennent qu'aux esprits de premier ordre, la notion de l'intégrale définie; il montre qu'elle est applicable à des fonctions discontinues dans tout intervalle, et il énonce les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction, continue ou discontinue, soit susceptible d'intégration. Ce seul fait, qu'il existe des fonctions discontinues susceptibles d'intégration, suffit à prouver, comme on le verra, qu'il y a des fonctions continues n'ayant pas de dérivée, et cette conséquence des travaux de Riemann n'a pas tardé à être admise par les géomètres allemands.

L'un d'eux, M. Hankel, a publié en 1870 les résultats de ses études

(1) Toutefois, quand ces recherches ont été communiquées à la Société Mathématique, M. Bienaymé, en prononçant quelques paroles d'encouragement, a bien voulu déclarer qu'il avait toujours fait des objections aux démonstrations d'Ampère et de Duhamel, et qu'il a toujours pensé qu'une fonction continue n'a pas nécessairement une dérivée.

sur le Mémoire de Riemann. Malheureusement les conclusions de son travail ne sont pas irréprochables, et un géomètre distingué, M. Gilbert, a fait aux démonstrations de Hankel des objections qui pourraient s'adresser aussi aux résultats. Le principe de la condensation des singularités de Hankel est énoncé d'une manière trop absolue, et il est regrettable que la mort n'ait pas laissé à cet excellent géomètre le temps de reprendre les propositions qu'il avait données et de les limiter en les mettant à l'abri de toute objection. Je me suis imposé le devoir de revenir sur quelques-unes d'entre elles, et je crois les avoir mises à l'abri de toute critique, sous la forme que je leur ai donnée.

Plus récemment, M. Schwarz, dans une Note insérée aux *Archives des Sciences naturelles*, n° 189, 15 septembre 1873, et M. Gilbert, dans les *Bulletins de l'Académie royale de Belgique* (2^e série, t. XXXV, n° 6), se sont occupés du même sujet. Je dois aussi signaler un travail tout récent de M. Klein, publié dans les *Sitzungsberichte* de la Société d'Erlangen le 8 décembre 1873.

Dans le travail qu'on va lire, je reprends, en donnant tous les développements nécessaires, la définition de l'intégrale définie d'après Riemann, et je montre comment cette définition doit conduire à une infinité de fonctions continues n'ayant pas de dérivée.

Laissant ensuite de côté la définition des fonctions continues comme intégrales, j'expose quelques principes sur les séries dont les termes sont des fonctions de la variable indépendante. Ces principes ont été souvent appliqués par les géomètres; mais, à mon sens, ils gagnent beaucoup à être mis en lumière et exposés avec le degré de généralité qui leur appartient. La théorie des séries permet ensuite de former directement une foule de fonctions continues qui n'ont pas de dérivée pour une infinité de valeurs de la variable indépendante, comprises dans tout intervalle ou même qui n'ont de dérivée pour aucune valeur de la variable.

Au risque d'être trop long, j'ai tenu avant tout, sans y réussir peut-être, à être rigoureux. Bien des points, qu'on regarderait à bon droit comme évidents ou que l'on accorderait dans les applications de la science aux fonctions usuelles, doivent être soumis à une critique rigoureuse dans l'exposé des propositions relatives aux fonctions les plus générales. Par exemple, on verra qu'il existe des fonctions continues

qui ne sont ni croissantes ni décroissantes dans aucun intervalle, qu'il y a des fonctions discontinues qui ne peuvent varier d'une valeur à une autre sans passer par toutes les valeurs intermédiaires.

On conçoit qu'en présence de propositions aussi singulières on éprouve le besoin d'apporter la plus grande rigueur dans les déductions et de n'admettre que les propositions les mieux démontrées.

Ces recherches ont été communiquées à la Société Mathématique dans les séances du 19 mars 1873 et du 28 janvier 1874.

I. — *Des fonctions et de la continuité.*

Une fonction $f(x)$ est dite *bien déterminée* quand à chaque valeur de x correspond une valeur unique de $f(x)$.

Il peut arriver qu'une fonction généralement bien déterminée de x devienne indéterminée pour certaines valeurs x_0, x_1, x_2, \dots de la variable x . Alors il faut compléter la définition de la fonction en assignant les valeurs qu'elle prend pour $x = x_0, x = x_1, \dots$, c'est-à-dire en définissant

$$f(x_0), f(x_1), f(x_2), \dots$$

Cette définition peut se faire d'une manière arbitraire. Dans la plupart des cas on effectue cette détermination de manière à conserver à la fonction certains caractères tels que la continuité, la propriété de rester finie, etc.; mais, à considérer les choses d'une manière rigoureuse, une fonction, telle que

$$\frac{x^2 - a^2}{x - a},$$

n'a aucune valeur pour $x = a$; les opérations qu'il faut faire pour trouver la valeur de la fonction n'ont plus aucun sens lorsque $x = a$. De même

$$\frac{x}{y} e^{-\frac{x}{y}}$$

n'est pas bien déterminée pour $x = 0, y = 0$, et l'on peut convenir à l'avance qu'elle aura une certaine valeur A pour $x = y = 0$.

Les remarques précédentes ne sauraient être contestées dans le cas des fonctions discontinues; mais nous avons à prévenir une objection

qui pourrait être adressée dans le cas des fonctions continues. Soit, par exemple, la fonction

$$\frac{x^2 - a^2}{x - a},$$

qui est indéterminée pour $x = a$. On pourrait prétendre que la valeur pour $x = a$ doit être la limite vers laquelle tend la fonction lorsque x se rapproche de a .

Mais si nous prenons une de ces fonctions que présente le Calcul intégral, et qui sont définies par les propriétés

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= 1, \text{ lorsque } x \text{ est différent de } a, \\ \varphi(a) &= A, \end{aligned}$$

nous voyons que le produit $\varphi(x)(x + a)$ sera toujours égal à $\frac{x^2 - a^2}{x - a}$, x étant différent de a , et il tendra, lorsque x se rapprochera de a , vers la limite $2a$, différente de sa vraie valeur $2Aa$ pour $x = a$.

Il existe donc des fonctions qui tendent vers une valeur limite quand x s'approche d'un nombre fixe x_0 , mais qui pour $x = x_0$ ont une valeur différente de la valeur limite.

A l'exemple de M. O. Bonnet, nous définirons la continuité d'une fonction $f(x)$ de la manière suivante :

Une fonction $f(x)$ est dite continue, pour la valeur $x = x_0$, quand on peut prendre h assez petit pour que l'on ait

$$f(x_0 \pm \theta h) - f(x_0) < \varepsilon$$

en valeur absolue, θ pouvant prendre toutes les valeurs positives plus petites que 1, et ε étant aussi petit qu'on le veut.

Quand une fonction n'est pas continue pour la valeur x_0 de x , il peut arriver que $f(x_0 + h)$ ait pour limite $f(x_0)$ quand h tend vers zéro seulement par des valeurs positives ou, dans d'autres cas, seulement par des valeurs négatives. Cette remarque est importante pour la définition qui va suivre.

On dit qu'une fonction est continue dans un intervalle (x_0, x_1) , où $x_0 < x_1$, quand elle est continue pour toutes les valeurs de x comprises entre x_0 et x_1 , et qu'on a, en outre,

$$\lim f(x_0 + h) = f(x_0), \quad \lim f(x_1 - h) = f(x_1),$$

lorsque h tend vers zéro par des valeurs positives. Ces dernières conditions sont satisfaites si la fonction est continue pour les valeurs x_0 , x_1 de x .

THÉORÈME I. — *Étant donnée une fonction $f(x)$, qui reste comprise, quand x prend les valeurs x_0 , x_1 et toutes les valeurs intermédiaires, entre deux limites fixes A et B, on peut assigner deux nombres M, m donnant lieu aux propriétés suivantes : M est supérieur ou égal aux diverses valeurs de la fonction, et il y a au moins une valeur de la fonction supérieure à $M - \varepsilon$, ε étant aussi petit qu'on le veut. De même m est inférieur ou égal à toutes les valeurs de la fonction, et il y a au moins une valeur de la fonction inférieure à $m + \varepsilon$.*

Considérons, en effet, l'intervalle (A, B), et divisons-le en n parties, en intercalant $n - 1$ nombres X_1, X_2, \dots, X_{n-1} ,

$$A, X_1, X_2, \dots, X_{n-1}, B.$$

S'il n'y a pas de valeur de la fonction inférieure à X_i , ou supérieure à X_k , nous pourrions substituer l'intervalle (X_i, X_k) à l'intervalle (A, B). Divisons de même l'intervalle (X_i, X_k) , et continuons ainsi indéfiniment. Nous obtiendrons ainsi une suite d'intervalles tous compris les uns dans les autres et tendant vers un intervalle limite (m, M) , qui possédera évidemment les propriétés indiquées dans l'énoncé du théorème. Cet intervalle peut être (A, B) si, à chaque opération, il n'y a pas réduction dans la longueur totale de l'intervalle.

Si la fonction est discontinue, M et m ne sont pas nécessairement des valeurs particulières de la fonction. Par exemple, la fonction

$$\begin{aligned} y &= x, & \text{pour } x \text{ différent de } 1, \\ y &= 0, & \text{pour } x = 1, \end{aligned}$$

a 1 pour limite maximum quand x varie de 0 à 1 ; elle ne devient jamais égale à 1.

Nous appellerons M la *limite maximum*, m la *limite minimum* de la fonction dans l'intervalle donné. La différence positive ou nulle $M - m$ s'appellera, d'après Riemann, l'*oscillation de la fonction* dans l'intervalle donné.

L'énoncé du théorème précédent indique que la fonction doit de-

meurer comprise entre deux limites A, B. Il ne suffit pas, pour qu'il en soit ainsi, que la fonction $f(x)$ demeure finie pour toute valeur de x comprise dans l'intervalle ou égale aux valeurs extrêmes.

Par exemple, la fonction définie par les équations

$$y = \frac{1}{x}, \quad \text{pour } x \text{ différent de zéro,}$$

$$y = 0, \quad \text{pour } x = 0,$$

ne devient pas infinie dans l'intervalle $(0, 1)$; elle ne reste pas non plus comprise entre deux limites fixes.

THÉORÈME II. — *Étant donnée une fonction de x finie et continue dans l'intervalle (x_0, x_1) lorsque x variera de x_0 à x_1 , $f(x)$ passera au moins une fois par toutes les valeurs intermédiaires entre $f(x_0)$ et $f(x_1)$.*

Soient k une quantité intermédiaire entre $f(x_0)$ et $f(x_1)$ et posons

$$\varphi(x) = f(x) - k;$$

il est clair que $\varphi(x_0)$ et $\varphi(x_1)$ sont de signes contraires. Tout revient donc à démontrer que, si deux nombres substitués dans le premier membre d'une équation donnent des résultats de signes contraires, ils comprennent au moins une racine de l'équation. Ce théorème a été établi d'une manière rigoureuse par Cauchy dans la Note III de l'*Analyse algébrique*.

La propriété précédente a été souvent prise pour la définition des fonctions continues. Il existe cependant, nous le verrons, une classe de fonctions discontinues qui ne peuvent varier d'une valeur à une autre, sans passer par toutes les valeurs intermédiaires et, par conséquent, la propriété qui constitue le théorème précédent n'est pas caractéristique des fonctions continues.

THÉORÈME III. — *Étant donnée une fonction de x finie et continue dans l'intervalle (a, b) , cette fonction atteint ses limites maximum et minimum pour une ou plusieurs valeurs de x comprises dans l'intervalle, et par conséquent elle passe par toutes les valeurs intermédiaires entre M et m.*

La démonstration que j'ai donnée du théorème analogue pour les fonctions de deux variables (*Bulletin des Sciences mathématiques et as-*

tronomiques, t. III, p. 307), s'applique sans difficulté aux fonctions d'une seule variable.

D'après la définition des limites maximum et minimum M et m , la fonction prend des valeurs supérieures à $M - \varepsilon$ et inférieures à $m + \varepsilon$. Puisque la fonction est continue, elle passe donc, quand x varie dans l'intervalle, par toutes les valeurs intermédiaires entre $M - \varepsilon$ et $m + \varepsilon$, et, comme ε est aussi petit qu'on le veut, il est ainsi démontré que la fonction prend toutes les valeurs intermédiaires entre M et m . Il n'y a doute que pour M et m . Examinons M .

Décomposons l'intervalle (a, b) des valeurs de x en deux intervalles égaux (a, c) , (c, b) , je dis que dans l'un au moins de ces intervalles la limite maximum sera M . En effet, si les deux limites étaient M' , M'' , plus petites que M , la fonction ne prendrait pas dans l'intervalle (a, b) les valeurs comprises entre M et le plus grand des deux nombres M' , M'' . Donc l'une au moins des limites M' , M'' est égale à M . Soit, par exemple, (a, c) l'intervalle dans lequel s'est conservée la limite maximum; si elle est la même dans les deux, on choisira arbitrairement. Décomposons de même (a, c) en deux parties égales, et répétons les mêmes raisonnements. En continuant indéfiniment, nous aurons une suite d'intervalles tous compris les uns dans les autres et tendant vers zéro, pour lesquels la limite maximum sera toujours M . Les limites inférieures de ces intervalles sont constantes ou croissantes; de même les limites supérieures sont constantes ou décroissantes. Soit α leur limite commune; elle jouira évidemment de la propriété que dans tout intervalle $(\alpha - h, \alpha + h)$; la limite maximum de la fonction sera M , quelque petit que soit h . Donc il y aura une valeur de x comprise dans cet intervalle

$$\alpha \pm \theta h,$$

pour laquelle on aura

$$M - f(\alpha \pm \theta h) < \varepsilon.$$

D'autre part, on peut prendre h assez petit, la fonction étant continue, pour que

$$f(\alpha \pm \theta h) - f(\alpha) < \varepsilon,$$

en valeur absolue. Donc on peut démontrer que l'on a

$$M - f(\alpha) < 2\varepsilon,$$

en valeur absolue. Donc

$$f(\alpha) = M.$$

Le raisonnement se ferait à peu près de la même manière si α était une des limites extrêmes a, b de l'intervalle primitif.

Il s'applique aussi à la limite minimum m , qui devient, au signe près, la limite maximum si l'on change le signe de la fonction.

II. — *Division des fonctions discontinues en deux classes.*

D'après ce qui précède, étant donnée une fonction continue ou discontinue $f(x)$ dans un intervalle quelconque (a, b) , il y a lieu de considérer trois nombres, la *limite maximum* M , la *limite minimum* m et l'*oscillation* $\Delta = M - m$ dans l'intervalle considéré. Nous présenterons d'abord quelques remarques sur ces trois nombres.

Supposons que l'on considère, au lieu de l'intervalle (a, b) , un autre intervalle (x_0, x_1) compris dans (a, b) , c'est-à-dire tel que l'on ait

$$x_0 \supset a, \quad x_1 \supset b.$$

Il est clair que la limite maximum M' dans le nouvel intervalle ne peut être supérieure à M ; de même la limite minimum m' ne peut être inférieure à m . On a donc

$$M' \supset M, \quad m' \supset m, \quad \Delta' \supset \Delta,$$

Soient de même (a, c) , (c, b) deux intervalles consécutifs donnant l'un les nombres M, m, Δ , l'autre M', m', Δ' et soit (x_0, x_1) un nouvel intervalle compris dans (a, b) , mais tel que l'on ait

$$x_0 < c < x_1;$$

ce nouvel intervalle empiète donc sur les deux premiers. La limite maximum dans (x_0, x_1) sera au plus égale au plus grand des deux nombres M, M' ; de même la limite minimum sera supérieure ou égale au plus petit des nombres m, m' ; enfin l'oscillation sera au plus égale à la somme $\Delta + \Delta'$ des oscillations dans les deux intervalles consécutifs (a, c) , (c, b) .

Cela posé, considérons une fonction quelconque $f(x)$, définie dans

un intervalle (a, b) et assujettie à rester comprise entre deux limites fixes A, B. Les oscillations de la fonction dans tout intervalle compris dans (a, b) seront évidemment finies et inférieures à $B - A$.

Intercalons, entre a et b , $n - 1$ valeurs x_1, x_2, \dots, x_{n-1} , et posons pour abrégier

$$x_1 - a = \delta_1, \quad x_2 - x_1 = \delta_2, \dots, \quad b - x_{n-1} = \delta_n.$$

Nous formerons ainsi n intervalles, et nous désignerons par M_i, m_i, Δ_i la limite maximum, la limite minimum et l'oscillation dans le $i^{\text{ième}}$ intervalle. Formons les trois sommes

$$M = M_1 \delta_1 + M_2 \delta_2 + \dots + M_n \delta_n,$$

$$m = m_1 \delta_1 + m_2 \delta_2 + \dots + m_n \delta_n,$$

$$\Delta = \Delta_1 \delta_1 + \Delta_2 \delta_2 + \dots + \Delta_n \delta_n,$$

entre lesquelles existe la relation identique

$$\Delta = M - m.$$

Je dis que, lorsqu'on prendra n suffisamment grand, et que tous les intervalles δ tendront vers zéro, les trois sommes précédentes, quelle que soit la fonction considérée, continue ou discontinue, tendront chacune vers une limite finie et déterminée, ne dépendant que de la nature de la fonction et des valeurs extrêmes a, b qui limitent l'intervalle considéré.

Pour le démontrer, supposons qu'on passe d'un système d'intervalles δ_i à un autre en subdivisant tous les intervalles δ_i , qu'on intercale par exemple, entre a et x_1 , $p - 1$ valeurs y_1, y_2, \dots, y_{p-1} de x , puis, entre x_1 et x_2 , $q - 1$ valeurs z_1, z_2, \dots, z_{q-1} de x , et ainsi de suite. Il est facile de démontrer que, dans le nouveau système d'intervalles, les sommes M, Δ deviendront plus petites ou resteront constantes, et que m ne pourra que rester constante ou augmenter. Pour fixer les idées, prenons M . La démonstration se ferait de la même manière pour m . Pour Δ , elle résulte de la relation identique écrite plus haut entre m, M et Δ .

Appelons $\delta_1^1, \delta_1^2, \dots, \delta_1^p$ les p intervalles dans lesquels se décompose l'intervalle δ_1 : on aura

$$\delta_1 = \delta_1^1 + \delta_1^2 + \dots + \delta_1^p.$$

Désignons par M_1^i la limite maximum dans l'intervalle δ_1^i . Le terme $M_1 \delta_1$ de M devra être remplacé, quand on aura subdivisé les intervalles, par

la somme

$$M_1^1 \delta_1^1 + \dots + M_p^p \delta_p^p.$$

Or, d'après une remarque déjà faite, les maxima M_1^1, \dots, M_p^p sont tous égaux ou inférieurs à M_1 : on a donc

$$\begin{aligned} M_1^1 \delta_1^1 + M_2^2 \delta_2^2 + \dots + M_p^p \delta_p^p &\leq M_1 (\delta_1^1 + \dots + \delta_p^p), \\ &\leq M_1 \delta_1, \end{aligned}$$

Ainsi chaque terme $M_i \delta_i$ de M est remplacé, dans la somme relative au nouveau système d'intervalles, par une suite de termes dont la somme est au plus égale au terme qu'ils remplacent. Donc, *dans toute subdivision des intervalles, quelque loin qu'on la continue, M ne peut que rester constante ou diminuer. Elle a donc nécessairement une limite.*

On verra de même que la somme m a une limite vers laquelle elle tend en croissant sans cesse, et par conséquent la somme Δ qui est égale à $M - m$ décroît constamment et a aussi une limite égale à la différence des limites de M et de m . Il ne reste plus qu'à démontrer que *ces trois limites demeurent toujours les mêmes, de quelque manière que les intervalles tendent vers zéro.*

A cet effet, nous commencerons par résoudre la question suivante :

Soient

$$\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$$

un système d'intervalles, et

$$M = M_1 \delta_1 + \dots + M_n \delta_n$$

la somme M correspondante. Prenons un second système d'intervalles

$$\delta'_1, \delta'_2, \dots, \delta'_p,$$

tel que le plus grand des intervalles δ' soit inférieur au plus petit des intervalles δ divisé par un nombre entier h . Alors on aura, quels que soient α et les indices β ,

$$\delta'_\alpha < \frac{\delta_\beta}{h};$$

et soit

$$M' = M'_1 \delta'_1 + \dots + M'_p \delta'_p$$

la valeur de la somme M correspondant à ce nouveau système d'intervalles. Proposons-nous de trouver une limite supérieure de la différence $M' - M$: nous entendons par là non une limite supérieure de la valeur absolue, mais simplement un nombre supérieur à $M' - M$.

Soient

$$a, x_1, x_2, \dots, x_{\mu-1}, b,$$

$$a, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{\mu-1}, b$$

les deux suites de valeurs de x déterminant, la première les intervalles δ ,

$$\delta_1 = x_1 - a, \quad \delta_2 = x_2 - x_1, \dots,$$

la seconde les intervalles δ' ,

$$\delta'_1 = \gamma_1 - a, \quad \delta'_2 = \gamma_2 - \gamma_1, \dots$$

En intercalant ces deux suites entre a et b , on aura une nouvelle suite

$$a, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{\mu}, x_1, \gamma_{\mu+1}, \dots, \gamma_{\nu}, x_2, \gamma_{\nu+1}, \dots, \gamma_{\rho}, x_3, \gamma_{\rho+1}, \dots, b,$$

et il est clair que, les intervalles δ' étant tous plus petits que les intervalles δ , entre deux valeurs consécutives de y ne peuvent se trouver deux valeurs de x . Il peut arriver que $x_1 = \gamma_{\mu}$ ou $x_2 = \gamma_{\nu}$, mais cela ne changera rien aux raisonnements. On a

$$\delta_1 = x_1 - a = \gamma_1 - a + \gamma_2 - \gamma_1 + \dots + \gamma_{\mu} - \gamma_{\mu-1} + x_1 - \gamma_{\mu},$$

$$\delta_2 = x_2 - x_1 = \gamma_{\mu+1} - x_1 + \gamma_{\mu+2} - \gamma_{\mu+1} + \dots + \dots + x_2 - \gamma_{\nu},$$

$$\delta_3 = x_3 - x_2 = \gamma_{\nu+1} - x_2 + \dots + \dots + x_3 - \gamma_{\rho},$$

.....

et par suite

$$M = (\gamma_1 - a)M_1 + (\gamma_2 - \gamma_1)M_1 + \dots + (x_1 - \gamma_{\mu})M_1$$

$$+ (\gamma_{\mu+1} - x_1)M_2 + \dots + (x_2 - \gamma_{\nu})M_2$$

$$+ (\gamma_{\nu+1} - x_2)M_3 + \dots + (x_3 - \gamma_{\rho})M_3$$

$$+ \dots,$$

$$M' = (\gamma_1 - a)M'_1 + (\gamma_2 - \gamma_1)M'_2 + \dots + (x_1 - \gamma_{\mu})M'_{\mu+1}$$

$$+ (\gamma_{\mu+1} - x_1)M'_{\mu+1} + \dots + (x_2 - \gamma_{\nu})M'_{\nu+1}$$

$$+ (\gamma_{\nu+1} - x_2)M'_{\nu+1} + \dots + (x_3 - \gamma_{\rho})M'_{\rho+1}$$

$$+ \dots,$$

$$M' - M = (\gamma_1 - a)(M'_1 - M_1) + \dots + (x_1 - \gamma_{\mu})(M'_{\mu+1} - M_1)$$

$$+ (\gamma_{\mu+1} - x_1)(M'_{\mu+1} - M_2) + \dots + (x_2 - \gamma_{\nu})(M'_{\nu+1} - M_2)$$

$$+ (\gamma_{\nu+1} - x_2)(M'_{\nu+1} - M_3) + \dots + (x_3 - \gamma_{\rho})(M'_{\rho+1} - M_3)$$

$$+ \dots$$

Il est clair que tous les termes de cette somme correspondant à des intervalles tels que $y_1 - a, y_2 - y_1$ compris entièrement entre a et x_1 , entre x_1 et x_2 , ne peuvent être que nuls ou négatifs. En effet, en vertu d'une remarque déjà faite, les intervalles $\delta'_1, \delta'_2, \dots, \delta'_\mu$, par exemple, étant tous compris dans l'intervalle δ , les limites maxima M'_1, \dots, M'_μ sont inférieures ou au plus égales à M_1 . On a donc

$$\begin{aligned} M' - M \leq & (x_1 - y_\mu)(M'_{\mu+1} - M_1) + (y_{\mu+1} - x_1)(M'_{\mu+1} - M_2) \\ & + (x_2 - y_\nu)(M'_{\nu+1} - M_2) + (y_{\nu+1} - x_2)(M'_{\nu+1} - M_3) \\ & + (x_3 - y_\rho)(M'_{\rho+1} - M_3) + (y_{\rho+1} - x_3)(M'_{\rho+1} - M_4) \\ & \dots \end{aligned}$$

Or chacune des différences $M'_{\mu+1} - M_1, \dots$ est inférieure, en valeur absolue et en signe, à la différence $B - A$ entre les deux membres qui comprennent toutes les valeurs de la fonction dans l'intervalle (a, b) ; on a donc

$$M' - M < (\delta'_{\mu+1} + \delta'_{\nu+1} + \delta'_{\rho+1} + \dots)(B - A);$$

or

$$\delta'_{\mu+1} < \frac{\delta_1}{h}, \quad \delta'_{\nu+1} < \frac{\delta_2}{h}, \quad \delta'_{\rho+1} < \frac{\delta_3}{h},$$

donc

$$(r) \quad M' - M < \frac{B - A}{h} (\delta_1 + \delta_2 + \dots) < \frac{(b - a)(B - A)}{h}.$$

Il résulte de cette inégalité que la différence $M' - M$, si elle est positive, est inférieure à un nombre qui tend vers zéro quand h grandit indéfiniment. Par un choix convenable de h , elle pourra être rendue plus petite que tout nombre donné.

Nous pouvons maintenant démontrer la proposition que nous avons énoncée. Supposons que l'on parte de différents systèmes d'intervalles et que, dans chaque système, on fasse tendre tous les intervalles vers zéro, en subdivisant, comme il a été indiqué, les intervalles à l'infini. Nous avons démontré qu'il y a une limite pour la somme M , dans chaque mode de subdivision : je dis que toutes ces limites sont égales.

En effet, soit μ la limite de M dans un premier système de division; soit μ' la limite dans un autre système. Si ces deux limites ne sont pas égales, on aura $\mu' > \mu$ par exemple.

Cela posé, dans le système d'intervalles correspondant à la limite μ , on peut prendre le nombre d'intervalles assez grand pour que la somme M correspondante satisfasse aux inégalités

$$\mu < M < \mu + \sigma < \mu';$$

alors, dans le système d'intervalles correspondant à la limite μ' , toutes les sommes M' seront supérieures à μ' et par conséquent à M . Supposons que l'on ait poussé assez loin la division des intervalles pour que tous les intervalles correspondant à la somme M' soient plus petits que les intervalles correspondant à M divisés par h . On aura

$$M' - M < \frac{(b - a)(B - A)}{h}.$$

Ainsi on pourrait rendre la différence positive $M' - M$ inférieure à tout nombre donné en prenant h suffisamment grand. Cela est évidemment impossible si $\mu' > \mu$, puisque la somme M' est supérieure à μ' et la somme M inférieure à $\mu + \sigma$. Donc

$$M' - M > \mu' - \mu - \sigma,$$

et comme on peut prendre σ aussi petit qu'on le veut, on voit que $M' - M$ devrait demeurer supérieur à un nombre déterminé. Donc μ' ne peut être différent de μ .

Ainsi, quel que soit le système primitif d'intervalles, si on le subdivise à l'infini d'une manière quelconque, pourvu que tous les intervalles tendent vers zéro, la somme M tendra toujours en décroissant vers une limite parfaitement déterminée μ .

Pour compléter notre démonstration, il importe de remarquer qu'on ne fait pas toujours tendre les intervalles vers zéro par le mode de subdivision qui a été indiqué. Par exemple, on peut diviser l'intervalle (a, b) en n parties égales, puis en $n + 1$, puis en $n + 2$, et ainsi de suite. Il importe d'examiner tous ces cas; mais ici la discussion devient très-simple.

La somme M relative à tout système d'intervalles est évidemment supérieure à μ ; car, si l'on part de ce système d'intervalles en le subdivisant, la somme M , d'après ce qui a été démontré, tend vers μ par des valeurs décroissantes. Il suffit donc de démontrer que, lorsque tous les

intervalles tendent vers zéro d'une manière quelconque, elle finit par différer de μ d'aussi peu qu'on le veut.

A cet effet, nous avons vu qu'en partant d'un premier système d'intervalles et en le subdivisant à l'infini on peut obtenir un système d'intervalles pour lequel on ait

$$M < \mu + \sigma,$$

σ étant aussi petit qu'on le veut. Dès que l'on aura tout autre système d'intervalles tous plus petits que les intervalles correspondant à M , divisés par h , la somme M' correspondante sera plus petite que

$$M + \frac{(b-a)(B-A)}{h} < \mu + \sigma + \frac{(b-a)(B-A)}{h}.$$

Comme on peut rendre σ et $\frac{1}{h}$ aussi petits qu'on le veut, on voit que la somme M se rapprochera toujours de μ , quels que soient les modes de division adoptés, pourvu que tous les intervalles tendent vers zéro.

Nous sommes maintenant en mesure de donner, en toute rigueur, la définition de l'intégrale définie d'après Riemann; mais, dès à présent, nous pouvons diviser en deux grandes classes les fonctions discontinues. Nous venons de démontrer que les trois sommes

$$M = \delta_1 M_1 + \dots + \delta_n M_n,$$

$$m = \delta_1 m_1 + \dots + \delta_n m_n,$$

$$\Delta = \delta_1 D_1 + \dots + \delta_n D_n$$

tendent vers des limites finies et déterminées quand tous les intervalles tendent vers zéro. Nous pouvons appeler ces limites M_{ab} , m_{ab} , Δ_{ab} . On a

$$\Delta_{ab} = M_{ab} - m_{ab}.$$

Il est clair que la nature intime de la fonction dépend surtout de la limite Δ_{ab} .

Pour une première classe de fonctions, on aura

$$\Delta_{ab} = 0, \quad M_{ab} = m_{ab};$$

pour la deuxième classe, Δ_{ab} sera en général une fonction de a et de b , différente de zéro.

Riemann a fait connaître un caractère simple qui permet de reconnaître si la somme

$$\Delta = \delta_1 D_1 + \dots + \delta_n D_n$$

tend vers zéro. Prenons une quantité σ fixe, mais aussi petite qu'on le voudra. Pour que la somme Δ tende vers zéro, il faut et il suffit que la grandeur totale des intervalles pour lesquels l'oscillation est plus grande que σ tende vers zéro quand n augmente indéfiniment.

Cette condition est nécessaire. En effet, si elle n'est pas remplie, la contribution des intervalles où l'oscillation est plus grande que σ à la somme Δ sera plus grande que leur longueur totale l multipliée par σ ; et, comme l ne tend pas vers zéro, Δ sera toujours plus grand que $l\sigma$ et ne tendra pas vers zéro.

Elle est suffisante; car, si elle est remplie, la contribution des intervalles où l'oscillation est plus grande que σ sera plus petite que $l(B - A)$. D'ailleurs, la grandeur totale des autres intervalles étant plus petite que $(b - a)$, on aura

$$\Delta < l(B - A) + \sigma(b - a),$$

l tendant vers zéro et σ pouvant être pris aussi petit qu'on le veut; on peut démontrer ainsi que Δ_{ab} est inférieur à tout nombre positif aussi petit qu'on le veut. Donc

$$\Delta_{ab} = 0.$$

Il importe de remarquer que, dans les démonstrations précédentes, nous avons supposé $a < b$. Si a était plus grand que b , on arriverait de même à une limite, en intercalant des quantités décroissantes x_1, x_2, \dots, x_{n-1} ,

$$a, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, b.$$

On aura ainsi deux limites égales et contraires suivant le sens dans lequel on supposera parcouru un intervalle; on aurait

$$M_{ab} = -M_{ba}, \quad \Delta_{ab} = -\Delta_{ba},$$

et, en général,

$$M_{ac} = M_{ab} + M_{bc}, \quad \Delta_{ab} = \Delta_{ac} + \Delta_{cb}, \dots$$

III. — Définition de l'intégrale définie.

Soit $f(x)$ une fonction continue de x qui reste comprise, quand x varie de a à b , entre deux nombres fixes A, B et prenons entre a et b une série de valeurs x_1, x_2, \dots, x_{n-1} , rangées par ordre de grandeur. Désignons toujours $x_1 - a$ par δ_1 ; $x_2 - x_1$ par δ_2, \dots , et soient en outre $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ des nombres positifs, inférieurs ou égaux à l'unité. Considérons la somme

$$\Sigma = \delta_1 f(a + \theta_1 \delta_1) + \delta_2 f(x_1 + \theta_2 \delta_2) + \dots + \delta_n f(x_{n-1} + \theta_n \delta_n).$$

Il est clair qu'elle dépend à la fois du choix des intervalles δ et des quantités θ . Examinons d'abord comment elle varie quand on donne aux θ tous les systèmes possibles de valeurs.

Désignons par M_i, m_i les limites maxima et minima de la fonction dans le $i^{\text{ème}}$ intervalle. Le terme $\delta_i f(x_i + \theta_{i+1} \delta_{i+1})$ demeurera compris lorsque θ_{i+1} variera entre $\delta_i M_i$ et $\delta_i m_i$, et il s'approchera autant qu'on le voudra de l'une ou de l'autre de ces quantités. Donc la somme Σ demeurera comprise entre les deux sommes

$$M = \delta_1 M_1 + \dots + \delta_n M_n,$$

$$m = \delta_1 m_1 + \dots + \delta_n m_n,$$

dont elle pourra s'approcher autant qu'on voudra.

Donc, si l'on suppose que tous les intervalles δ tendent vers zéro, leur nombre augmentant indéfiniment, pour que la somme Σ ait une limite, quels que soient les θ , il faut et il suffit que les limites de M et de m soient égales, et par conséquent que l'on ait

$$M_{ab} = m_{ab}, \quad \Delta_{ab} = 0.$$

Donc la condition nécessaire et suffisante pour que la somme Σ ait une limite, c'est que la grandeur totale des intervalles dans lesquels les oscillations sont plus grandes que σ tende vers zéro quand tous les intervalles tendent vers zéro, σ étant fixe, mais aussi petit qu'on le veut.

Si cette condition est remplie, la limite de Σ est dite l'intégrale de

$f(x)$ entre les limites a, b . On a

$$(2) \quad \lim \Sigma = \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

Remarque. — Si la somme Δ_{ab} n'est pas nulle, la limite de Σ dépendra du choix des quantités θ et pourra prendre toutes les valeurs intermédiaires entr M_{ab} et m_{ab} . Σ ne peut donc, dans tous les cas, que tendre vers une limite ou être indéterminée.

On a évidemment

$$B(b - a) < \Sigma < A(b - a).$$

Les fonctions continues sont toujours susceptibles d'intégration; cela résulte du théorème suivant :

THÉORÈME III. — *Étant donnée une fonction $f(x)$ continue dans l'intervalle (a, b) , on peut assigner, pour chaque valeur de σ , aussi petite qu'on le veut, une quantité δ telle, que si l'on subdivise l'intervalle (a, b) en intervalles tous plus petits que δ , les oscillations de la fonction dans ces intervalles soient toutes plus petites que σ .*

Ce théorème se trouve dans l'ouvrage de M. Thomae, *Abriss einer Theorie der complexen Functionen*, Halle, 1873. La démonstration nouvelle que nous en donnons offre l'avantage de s'appliquer aux fonctions de plusieurs variables.

Divisons l'intervalle (a, b) en intervalles $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$, puis chacun de ceux-ci en intervalles plus petits, et ainsi de suite. Je dis qu'on finira par obtenir un système d'intervalles dans lequel les oscillations seront plus petites que $\frac{\sigma}{2}$. En effet, s'il n'en est pas ainsi, comme les oscillations diminuent ou restent constantes quand on subdivise les intervalles, on ne pourra obtenir que le résultat suivant :

Dans un intervalle δ_i pour lequel l'oscillation est plus grande que $\frac{\sigma}{2}$, il y aura au moins un nouvel intervalle δ' dans lequel l'oscillation sera supérieure à $\frac{\sigma}{2}$, puis dans celui-ci au moins un nouvel intervalle pour lequel l'oscillation sera encore supérieure à $\frac{\sigma}{2}$, et ainsi de suite. On

aura une suite illimitée d'intervalles, tous compris les uns dans les autres et tendant vers zéro, pour lesquels l'oscillation demeurera supérieure à $\frac{\sigma}{2}$. Les limites inférieures et supérieures de ces intervalles étant, les unes croissantes ou constantes, les autres décroissantes ou constantes, et l'intervalle tendant vers zéro, ces deux séries de limites tendront vers une valeur commune l qui aura la propriété suivante : Dans tout intervalle $(l-h, l+h)$, les oscillations de la fonction seront, quel que soit h , plus grandes que $\frac{\sigma}{2}$. Or cela est impossible si la fonction est continue pour $x = l$; car alors on peut trouver une quantité h telle que l'on ait

$$f(l \pm \theta h) - f(l) < \frac{\sigma}{4}$$

en valeur absolue. Alors la différence des valeurs de la fonction, pour deux valeurs de x comprises entre $l-h$ et $l+h$, sera nécessairement plus petite que $\frac{\sigma}{4}$ ou $\frac{\sigma}{2}$. Il est donc impossible que, dans quelques-uns des intervalles, l'oscillation demeure supérieure à $\frac{\sigma}{2}$.

Supposons donc qu'on ait constitué, au moyen des valeurs $a, x_1, \dots, x_{n-1}, b$, un système d'intervalles pour lesquels les oscillations soient plus petites que $\frac{\sigma}{2}$. Soit δ le plus petit de ces intervalles : si l'on subdivise (a, b) par des valeurs

$$y_1, y_2, \dots, y_{p-1},$$

telles que

$$y_{q+1} - y_q \leq \delta,$$

alors deux valeurs consécutives de y ne pourront comprendre que l'une des quantités x_i et l'oscillation dans l'intervalle (y_q, y_{q+1}) sera au plus égale à $\frac{\sigma}{2}$ s'il n'y a pas de quantité x_h comprise entre y_q et y_{q+1} , et au plus égale à σ s'il y a une quantité x_h entre y_q et y_{q+1} .

Corollaire. — Toute fonction continue est susceptible d'intégration.

Il importe de remarquer que cette propriété subsiste si la fonction, tout en étant généralement continue, devient discontinue pour certaines

valeurs en nombre limité l, l', l'', \dots de la variable x ; car alors les oscillations de la fonction ne pourront demeurer plus grandes que σ que dans les intervalles

$$l - h, l + h; \quad l' - h, l' + h; \quad l'' - h, l'' + h, \dots,$$

dont la grandeur totale peut être rendue aussi petite qu'on le veut.

IV. — Conséquences de la définition de l'intégrale.

Des conséquences de diverse nature peuvent être déduites de la définition précédente de l'intégrale.

D'abord *l'intégrale de la fonction $f(x)$ continuera à exister et ne changera pas de valeur, si l'on change les valeurs de $f(x)$ pour un nombre limité de valeurs de x .*

En effet, soient l, l', l'', \dots les valeurs de x pour lesquelles on change les valeurs de $f(x)$. Les oscillations dans les intervalles $(l - h, l + h)$, $(l' - h, l' + h), \dots$ pourront devenir plus grandes que σ ; mais la longueur totale de ces intervalles pourra être rendue aussi petite qu'on le voudra. L'intégrale continuera donc à exister. D'autre part, la valeur n'aura pas changé, puisque dans la somme Σ

$$\Sigma = f(a + \theta_1 \delta_1) \delta_1 + \dots$$

on peut toujours éviter les quantités l, l' , par un choix convenable des quantités θ . La remarque précédente pourrait être beaucoup étendue, mais elle suffit pour l'objet que nous nous proposons.

En second lieu, *l'intégrale*

$$\int_a^x f(x) dx$$

est toujours une fonction continue de x . En effet, soient A et B deux limites de $f(x)$. L'accroissement de l'intégrale, quand on donne à x un accroissement h positif ou négatif, est

$$\int_x^{x+h} f(x) dx,$$

et il sera compris entre les limites Ah et Bh . Il tendra donc vers zéro avec h .

En troisième lieu, soit

$$F(x) = \int_a^x f(x) dx,$$

et supposons que $f(x)$ soit continue pour la valeur $x = x_0$. Alors, dans l'intervalle $(x_0, x_0 + h)$, $f(x)$ sera comprise entre $f(x_0) + \sigma$ et $f(x_0) - \sigma$, σ tendant vers zéro avec h . On aura donc

$$F(x_0 + h) - F(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+h} f(x) dx < h [f(x_0) + \sigma],$$

$$> h [f(x_0) - \sigma],$$

$$f(x_0) - \sigma < \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} < f(x_0) + \sigma,$$

d'où

$$\lim \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = f(x_0).$$

Ainsi la fonction $f(x)$ sera la dérivée de $F(x)$, pour toutes les valeurs de x pour lesquelles $f(x)$ est continue.

On démontrerait d'une manière toute semblable (voir art. IX) que, si une fonction susceptible d'intégration $f(x)$ est la dérivée d'une autre fonction $F(x)$, on a nécessairement

$$\int_a^x f(x) dx = F(x) - F(a).$$

La division des fonctions discontinues en deux classes, les unes susceptibles d'intégration, les autres non intégrables, a une grande importance, et les remarques suivantes montrent que ce caractère se conserve à travers des transformations très-variées de la fonction.

Soit $\varphi(u)$ une fonction de u telle que

$$\frac{\varphi(u) - \varphi(v)}{u - v}$$

soit comprise entre deux limites finies α, β quand u et v prennent toutes les valeurs comprises entre A et B.

Alors les oscillations de la fonction $f(x)$ toujours comprise entre A et B et celles de la fonction $\varphi[f(x)]$ seront évidemment du même ordre

dans tout intervalle et, par conséquent, les deux fonctions $f(x)$, $\varphi[f(x)]$ appartiennent à la même classe. Par exemple, si une fonction $f(x)$ est intégrable, il en sera de même des fonctions

$$[f(x)]^2, [f(x)]^n, \sqrt{1+f^2(x)}, \dots$$

Nous allons maintenant indiquer des classes de fonctions discontinues susceptibles d'intégration, et à cet effet nous allons donner d'abord quelques propositions indispensables sur la théorie des séries.

V. — Des séries.

Toutes les fois qu'une série reste convergente quand on prend tous ses termes avec le même signe, la somme de cette série est indépendante de l'ordre des termes, et nous dirons, pour abrégé, que la série est *absolument convergente*.

Nous dirons qu'une série

$$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots,$$

dont tous les termes sont des fonctions continues ou discontinues de x , est également ou *uniformément* (*gleichmäßig*) *convergente* ⁽¹⁾ dans un intervalle donné (a, b) quand on peut prendre n assez grand pour que le reste R_n de la série soit inférieur à une quantité σ aussi petite qu'on le veut pour toutes les valeurs de x égales à a, b , ou comprises entre a et b .

Une série peut être toujours convergente dans une intervalle donné, sans être uniformément convergente dans cet intervalle. En voici un premier exemple. Considérons la série

$$x^2 e^{-x^2} = \sum_1^{\infty} [n^2 x^2 e^{-n^2 x^2} - (n+1)^2 x^2 e^{-(n+1)^2 x^2}],$$

qui est convergente pour toute valeur de x . La série n'est pas également convergente dans l'intervalle $(0, 1)$. En effet, le reste R_n a pour expression

$$R_n = n^2 x^2 e^{-n^2 x^2};$$

⁽¹⁾ Voir, au sujet des séries à égale convergence et de leur emploi dans la représentation des fonctions en séries trigonométriques, différents travaux de MM. Heine, Thomae, Cantor, dans le *Journal de M. Borchardt*.

il tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$, quelle que soit la valeur fixe donnée à x . Mais, dans l'intervalle $(0, 1)$, il y a toujours une valeur de x égale à $\frac{1}{n}$ pour laquelle on a $R_n = \frac{1}{e}$. Donc R_n ne peut pas être rendu, quel que soit x , plus petit que σ pour une valeur fixe donnée à n ; *son maximum ne tend pas vers zéro quand n augmente indéfiniment*. Si l'on prenait la série

$$\Sigma [n^2 x e^{-n^2 x^2} - (n+1)^2 x e^{-(n+1)^2 x^2}],$$

le reste R_n tendrait bien vers zéro avec $\frac{1}{n}$, pour toute valeur fixe de x ; mais la valeur maximum $\frac{n}{e}$ dans l'intervalle $(0, 1)$, au lieu de tendre vers zéro, croîtrait indéfiniment avec n .

THÉORÈME IV. — *Si une série*

$$f(x) = \varphi_0(x) + \varphi_1(x) + \dots$$

est uniformément convergente dans un intervalle donné (a, b) et, si ses termes sont des fonctions continues de x , elle représente dans cet intervalle une fonction continue de x .

En effet, décomposons $f(x)$ en deux parties, la somme $S_n(x)$ des n premiers termes et le reste $R_n(x)$. On pourra prendre n assez grand pour que, quel que soit x , $R_n(x)$ soit, dans l'intervalle considéré, plus petit que σ . Or on a

$$f(x \pm \theta h) - f(x) = S_n(x \pm \theta h) - S_n(x) + R_n(x \pm \theta h) - R_n(x),$$

et

$$R_n(x \pm \theta h) - R_n(x) < 2\sigma$$

en valeur absolue. Les termes étant des fonctions continues, on peut prendre ensuite h assez petit pour que l'on ait

$$S_n(x \pm \theta h) - S_n(x) < \sigma$$

en valeur absolue; donc on peut prendre h assez petit pour que l'on ait

$$f(x \pm \theta h) - f(x) < 3\sigma$$

en valeur absolue; ce qui est la définition même de la continuité.

Pour ce qui concerne les limites de l'intervalle (a, b) , on démontrerait de même que

$$f(a) = \lim f(a + h), \quad f(b) = \lim f(b - h),$$

h tendant vers zéro par des valeurs positives.

Remarque. — La réciproque de ce théorème n'est pas vraie. Nous avons donné plus haut un exemple d'une fonction continue, développable en une série de fonctions continues qui n'est pas également convergente; mais on peut énoncer le corollaire suivant :

Si une fonction $f(x)$ est développable en une série convergente dans l'intervalle (a, b) , et si la fonction est discontinue pour une valeur x_0 de x comprise dans l'intervalle (a, b) , la série ne pourra être également convergente dans un intervalle quelconque comprenant la valeur x_0 .

Nous supposons, bien entendu, que les termes sont des fonctions continues de x .

Par exemple, les séries trigonométriques qui développent des fonctions discontinues ne peuvent être uniformément convergentes dans des intervalles comprenant une des valeurs pour lesquelles la fonction est discontinue. Ainsi la série

$$\sum \frac{\sin 2n\pi x}{n},$$

série toujours convergente, n'est pas uniformément convergente dans tout intervalle comprenant un multiple impair de $\frac{1}{2}$.

Il existe des fonctions discontinues telles que $f(x + h)$ et $f(x - h)$ aient, lorsque h tend vers zéro par des valeurs positives, des limites différentes de $f(x)$. Nous distinguerons ces limites, à l'exemple de Dirichlet, par $f(x + 0)$ et $f(x - 0)$. Par exemple, la fonction $E(x)$ qui représente le plus grand entier contenu dans x est telle que, pour tout nombre entier n , on a

$$E(n - 0) = n - 1, \quad E(n) = n, \quad E(n + 0) = n.$$

Soit de même (x) la fonction qui représente la différence entre x et l'entier le plus voisin. Cette fonction serait indéterminée pour

$x = \text{entier} + \frac{1}{2}$; nous poserons alors

$$(x) = 0, \quad \text{pour } x = \text{entier} + \frac{1}{2}.$$

Cette fonction est toujours continue, excepté pour les valeurs de x de la forme $n + \frac{1}{2}$, n étant entier. On a alors

$$(n + \frac{1}{2}) = 0, \quad (n + \frac{1}{2} - 0) = \frac{1}{2}, \quad (n + \frac{1}{2} + 0) = -\frac{1}{2}.$$

C'est à des fonctions de ce genre que s'applique le théorème suivant :

THÉORÈME V. — *Si les termes d'une série uniformément convergente*

$$f(x) = \varphi_1(x) + \dots + \varphi_n(x) + \dots$$

sont des fonctions $\varphi_n(x)$ pour lesquelles $\varphi_n(x+0)$ ou $\varphi_n(x-0)$ existent, la série jouit de la même propriété, et l'on a

$$f(x+0) = \varphi_1(x+0) + \dots + \varphi_n(x+0) + \dots$$

$$f(x-0) = \varphi_1(x-0) + \dots + \varphi_n(x-0) + \dots$$

Ce théorème se démontre comme le précédent.

On voit qu'une série uniformément convergente dans un intervalle donné peut, en quelque sorte, être traitée comme les sommes composées d'un nombre limité de termes.

Le théorème précédent va nous permettre de définir des fonctions discontinues *dans tout intervalle*.

Soit la série

$$f(x) = a_1 \frac{\mathbf{E}(x)}{x} + a_2 \frac{\mathbf{E}(2x)}{2x} + \dots + a_n \frac{\mathbf{E}(nx)}{nx}.$$

Si la série des constantes

$$\mathbf{A} = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

est absolument convergente, la série $f(x)$ aura ses termes inférieurs à ceux de la série \mathbf{A} , son reste inférieur, quel que soit x , à celui de \mathbf{A} : elle sera donc uniformément convergente dans tout intervalle. On aura donc

$$f(x \pm 0) = \Sigma a_n \frac{\mathbf{E}(nx \pm 0)}{nx}.$$

Si x est incommensurable, la fonction $f(x)$ est continue.

Si x est commensurable et égal à la fraction irréductible $\frac{p}{q}$, on a bien

$$f(x + 0) = f(x);$$

mais

$$f(x - 0) = f(x) - \frac{1}{qx} \left(a_q + \frac{a_{2q}}{2} + \frac{a_{3q}}{3} + \dots \right).$$

Ainsi la fonction $f(x)$ est discontinue pour toutes les valeurs commensurables de x .

Soit encore la série

$$f(x) = a_1(x) + a_2(2x) + \dots + a_n(nx) + \dots,$$

où (x) a la signification indiquée précédemment. Le reste de cette série est inférieur à celui de la série des constantes

$$A = a_1 + a_2 + \dots,$$

et, par conséquent, la série $f(x)$ sera uniformément convergente dans tout intervalle si la série A est absolument convergente.

Cela posé pour toute valeur incommensurable de x ou pour toute valeur commensurable de la forme $\frac{p}{2q+1}$, nx ne sera jamais égal, quel que soit n , à un entier plus $\frac{1}{2}$ et, par conséquent, la fonction (nx) sera continue. On aura donc, pour toute valeur de x de la forme indiquée,

$$\lim f(x \pm h) = f(x).$$

La fonction $f(x)$ est continue pour toutes les valeurs incommensurables de x et pour toutes les valeurs de la forme $\frac{p}{2q+1}$.

Considérons, au contraire, les valeurs commensurables de x qui, réduites à leur plus simple expression, sont de la forme $\frac{p}{2q}$; p sera nécessairement impair, et l'on aura

$$\begin{aligned} (qx + 0) &= (qx) - \frac{1}{2}, & (qx - 0) &= (qx) + \frac{1}{2}, \\ (3qx + 0) &= (3qx) - \frac{1}{2}, & (3qx - 0) &= (3qx) + \frac{1}{2}, \dots \end{aligned}$$

par suite,

$$\begin{aligned} f(x + 0) &= f(x) - \frac{1}{2}(a_q + a_{3q} + a_{5q} + \dots), \\ f(x - 0) &= f(x) + \frac{1}{2}(a_q + a_{3q} + a_{5q} + \dots). \end{aligned}$$

Ainsi la fonction $f(x)$ est discontinue de telle manière qu'il y ait une limite pour $f(x + h)$ et $f(x - h)$ quand h tend vers zéro par des valeurs positives, et cela pour une infinité de valeurs de x dans tout intervalle donné.

THÉORÈME V. — *Si tous les termes d'une série sont des fonctions continues ou discontinues susceptibles d'intégration, et si la série est uniformément convergente dans un intervalle donné (a, b) , la fonction que représente la série, et qui n'est pas nécessairement continue, sera susceptible d'intégration. Son intégrale sera la somme des intégrales de tous ses termes.*

Décomposons la série en deux parties, la somme des n premiers termes et le reste. On aura, en désignant par $f(x)$ la fonction représentée par la série,

$$f(x) = S_n(x) + R_n(x).$$

On peut prendre, par hypothèse, n assez grand pour que $R_n(x)$ demeure, quel que soit x , inférieur à σ . D'autre part, si, comme nous le supposons, les termes ne deviennent pas infinis, $S_n(x)$ demeurera comprise entre deux limites fixes quand x prendra toutes les valeurs comprises dans l'intervalle (a, b) : donc déjà la fonction $f(x)$ satisfait à la première condition d'intégrabilité. Elle demeure comprise entre deux limites fixes quand x varie de a à b .

D'après cela, si nous formons la somme

$$\Sigma = f(a + \theta_1 \delta_1) \delta_1 + f(x_1 + \theta_2 \delta_2) \delta_2 + \dots,$$

relative à l'intervalle (a, x) compris dans (a, b) , cette somme ne pourra (art. III) que tendre vers une limite finie ou être indéterminée. Si elle tend vers une limite finie, la fonction est intégrable. Tout se réduit donc à montrer que Σ n'est pas indéterminée. Or décomposons la somme Σ en deux parties en remplaçant chaque valeur de $f(x)$ par $S_n(x) + R_n(x)$. Nous aurons

$$\Sigma = \Sigma' + \Sigma'',$$

Σ' étant la partie de la somme où $f(x)$ est remplacée par $S_n(x)$ et Σ''

la partie où $f(x)$ est remplacée par $R_n(x)$. Les termes étant intégrables, il en sera de même de la somme $S_n(x)$, et par conséquent Σ' tendra vers une limite finie et déterminée. Quant à Σ'' , comme R_n est inférieur à σ , Σ'' sera toujours comprise entre $\sigma(b-a)$ et $-\sigma(b-a)$; Σ sera donc comprise entre

$$\Sigma' + \sigma(b-a) \quad \text{et} \quad \Sigma' - \sigma(b-a).$$

Comme on peut prendre n assez grand pour que σ soit aussi petit qu'on le veut, on voit que la somme Σ ne peut rester indéterminée, puisqu'elle demeure comprise entre deux quantités qui diffèrent aussi peu qu'on le veut. Donc la fonction $f(x)$ est susceptible d'intégration, et son intégrale est la somme des intégrales de tous les termes.

Corollaire. — La série des intégrales des termes est uniformément convergente dans le même intervalle que $f(x)$.

THÉORÈME VI. — *Étant donnée une série $f(x)$ dont tous les termes sont des fonctions continues ayant des dérivées, si la série des dérivées est uniformément convergente dans un intervalle donné et si ses termes sont susceptibles d'intégration, elle représentera la dérivée de la série $f(x)$.*

Soient

$$f(x) = \varphi_1(x) + \dots + \varphi_n(x) + \dots$$

la série proposée et

$$f_1(x) = \varphi'_1(x) + \dots + \varphi'_n(x) + \dots$$

la série des dérivées. Soit S_n la somme des n premiers termes de cette série : on aura, d'après le théorème précédent,

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f_1(x) dx = \int_a^x S_n(x) dx + \int_a^x R_n(x) dx.$$

Prenons n assez grand pour que $R_n(x)$ soit dans tout l'intervalle considéré inférieur à σ , alors $\int_x^{x+h} R_n(x) dx$ sera inférieur en valeur absolue à σh . On aura

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &< \frac{1}{h} \int_x^{x+h} S_n(x) dx + \frac{\sigma h}{h} \\ &> \frac{1}{h} \int_x^{x+h} S_n(x) dx - \frac{\sigma h}{h}, \end{aligned}$$

et, en faisant tendre h vers zéro,

$$S_n(x) - \sigma < \lim \frac{f(x+h) - f(x)}{h} < S_n(x) + \sigma;$$

donc

$$\lim \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f_1(x) \quad \text{C. Q. F. D.}$$

Remarque. — Si les conditions que nous avons indiquées dans l'énoncé du théorème V ne sont pas toutes remplies, on n'a pas le droit d'intégrer, sans un examen préalable, tous les termes de la série. Nous allons donner un exemple d'une série toujours convergente représentant une fonction continue $f(x)$ de x et telle que la série des intégrales, qui est toujours convergente, ne représente pas l'intégrale de $f(x)$.

Soit

$$(\alpha) \quad -2xe^{-x^2} = \sum_x^{\infty} [-2n^2xe^{-n^2x^2} + 2(n+1)^2xe^{-(n+1)^2x^2}].$$

Intégrons entre les limites zéro et x ; l'intégrale du premier membre est

$$e^{-x^2} - 1.$$

La série des intégrales des termes est

$$\sum_x^{\infty} [e^{-n^2x^2} - e^{-(n+1)^2x^2}];$$

elle est toujours convergente, et a pour somme e^{-x^2} et non $e^{-x^2} - 1$. Une des conditions indiquées par le théorème V n'est pas en effet remplie; la série (α) n'est pas uniformément convergente dans l'intervalle $(0, x)$.

THÉORÈME VII. — Soit la série

$$f(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \dots;$$

si la série

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \sum \frac{\varphi_n(x+h) - \varphi_n(x)}{h},$$

considérée comme fonction de h , est uniformément convergente quand h prend toutes les valeurs comprises entre zéro et un nombre fixe positif,

on a , h tendant vers zéro par des valeurs positives,

$$\lim \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \Sigma \lim \frac{\varphi_n(x+h) - \varphi_n(x)}{h};$$

de même, si la série demeure uniformément convergente quand h prend toutes les valeurs comprises entre zéro et un nombre fixe négatif, on a

$$\lim \frac{f(x-h) - f(x)}{-h} = \Sigma \lim \frac{\varphi_n(x-h) - \varphi_n(x)}{-h},$$

h tendant vers zéro par des valeurs positives.

Ce théorème est évident, mais il a une utilité réelle : c'est pour cela que nous l'énonçons explicitement.

On sait peu de chose sur la continuité des séries en général. Aussi croyons-nous que les théorèmes suivants, quoique d'une application limitée, pourront avoir un certain intérêt.

THÉORÈME VIII. — *Si une série à termes positifs, fonctions continues de x , est telle que dans un intervalle (a, b) les termes puissent se partager en deux groupes nettement séparés, l'un formé de termes croissants, l'autre de termes décroissants, la série sera dans l'intervalle (a, b) une fonction continue de x .*

D'après l'hypothèse du théorème, nous pouvons décomposer la série en deux autres, l'une pour laquelle les termes croissent, l'autre pour laquelle les termes décroissent. Il suffira donc de démontrer la proposition pour le cas où les termes sont tous croissants ou tous décroissants.

Supposons, en premier lieu, les termes croissants; je dis d'abord que l'on a

$$\lim f(x-h) = f(x),$$

h tendant vers zéro par des valeurs positives.

En effet, décomposons la série $f(x)$ en ses deux parties S_n, R_n . On aura

$$f(x) = S_n(x) + R_n(x),$$

$$f(x-h) = S_n(x-h) + R_n(x-h).$$

Lorsque h tend vers zéro, $f(x-h)$ croît sans cesse. Elle a donc une

limite égale ou inférieure à $f(x)$. D'un autre côté, cette limite est supérieure à celle de $S_n(x - h)$ qui est $S_n(x)$. Ainsi la limite de $f(x - h)$ est comprise entre $S_n(x)$ et $f(x)$; elle ne peut donc être que $f(x)$.

Je dis maintenant que

$$\lim f(x + h) = f(x),$$

h tendant vers zéro par des valeurs positives.

En effet, on a

$$f(x + h) = S_n(x + h) + R_n(x + h),$$

$f(x + h)$ décroissant avec h à une limite égale ou supérieure à $f(x)$. D'ailleurs, tous les termes étant décroissants, on a, h_1 étant plus petit que h ,

$$R_n(x + h_1) < R_n(x + h).$$

Donc

$$f(x + h_1) < S_n(x + h_1) + R_n(x + h),$$

et par suite, lorsque h_1 tend vers zéro,

$$\lim f(x + h_1) < S_n(x) + R_n(x + h);$$

$R_n(x + h)$ pouvant être pris aussi petit qu'on le veut, on voit que

$$\lim f(x + h) = f(x).$$

La démonstration se fait de la même manière quand tous les termes décroissent. La proposition est donc démontrée dans toute son étendue.

THÉORÈME IX. — *Si une série $f(x)$ dont les termes sont des fonctions continues*

$$\varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \dots + \varphi_n(x) + \dots$$

est absolument convergente pour $x = a$, $x = b$ et toutes les valeurs de x comprises entre a et b et que dans cet intervalle la série puisse se partager en deux autres, pour chacune desquelles les termes varient tous dans le même sens, la série représente une fonction continue de x dans l'intervalle (a, b) .

En effet, il suffira de considérer séparément les termes positifs et les termes négatifs et d'appliquer la proposition précédente.

Les deux théorèmes qui précèdent pourraient se rattacher à la notion des séries également convergentes. Nous avons préféré en donner des

démonstrations élémentaires. Voici d'autres propositions s'appliquant au cas où les séries ne sont pas absolument convergentes.

THÉORÈME X. — *Si la série*

$$(A) \quad a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$$

est convergente, il en sera de même de la suivante :

$$(B) \quad a_0 \varepsilon_0 + a_1 \varepsilon_1 + \dots + a_n \varepsilon_n + \dots,$$

où l'on suppose seulement que

$$\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$$

forment une suite croissante ou décroissante, mais telle que ε_n ait une limite finie, ε_∞ , quand n croît indéfiniment.

Le théorème peut être considéré comme équivalant à une proposition d'Abel dans le Mémoire sur la série du binôme. Nous l'énonçons seulement en lui donnant toute l'extension dont il nous paraît susceptible.

Pour le démontrer, considérons la somme d'un nombre quelconque de termes de la série B, à partir de $\varepsilon_{n+1} a_{n+1}$,

$$a_{n+1} \varepsilon_{n+1} + \dots + a_{n+p} \varepsilon_{n+p}.$$

Si nous posons

$$R_{n,p} = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p},$$

la série A étant convergente, nous savons que $R_{n,p}$ tend vers zéro, quel que soit p , quand n augmente indéfiniment. On a d'ailleurs

$$a_{n+p} = R_{n,p} - R_{n,p-1},$$

et par suite

$$a_{n+1} \varepsilon_{n+1} + \dots + a_{n+p} \varepsilon_{n+p} = R_{n,1} (\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+2}) + R_{n,2} (\varepsilon_{n+2} - \varepsilon_{n+3}) + \dots + R_{n,p} \varepsilon_{n+p}.$$

Les quantités

$$\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+2}, \quad \varepsilon_{n+2} - \varepsilon_{n+3}, \dots$$

étant de même signe, on a

$$R_{n,1} (\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+2}) + \dots + R_{n,p-1} (\varepsilon_{n+p-1} - \varepsilon_{n+p}) = \mu_n (\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+p}),$$

μ_n étant une moyenne entre les quantités $R_{n,1}, \dots, R_{n,p}$, et par conséquent tendant vers zéro avec elles, et par suite

$$a_{n+1} \varepsilon_{n+1} + \dots + a_{n+p} \varepsilon_{n+p} = \mu_n (\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+p}) + R_{n,p} \varepsilon_{n+p}.$$

Or les quantités ε variant dans le même sens, elles sont toutes plus petites que la plus grande des quantités $\varepsilon_0, \varepsilon_\infty$. Donc le second membre est inférieur, en valeur absolue, à la plus grande des quantités

$$(2\mu_n \pm R_{n,p})\varepsilon_0, \quad (2\mu_n \pm R_{n,p})\varepsilon_\infty.$$

Il tend donc vers zéro d'après les hypothèses faites quand n augmente indéfiniment, et la proposition est démontrée.

THÉORÈME XI. — *Soient la série convergente*

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$$

et la suite

$$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x),$$

formée de fonctions continues dans l'intervalle (a, b) , et jouissant des propriétés suivantes. Pour toute valeur de x égale à a, b , ou comprise entre a et b , les fonctions forment une suite constante ou croissante ou décroissante, c'est-à-dire que le signe de

$$\varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x)$$

est le même pour toute valeur de n . En outre $\varphi_0(x), \varphi_\infty(x)$ demeurent finies dans l'intervalle (a, b) ; alors la série

$$a_0 \varphi_0(x) + a_1 \varphi_1(x) + \dots + a_n \varphi_n(x) + \dots$$

sera toujours convergente et définira une fonction de x continue dans tout l'intervalle (a, b) .

La convergence résulte du théorème précédent; quant à la continuité, elle résulte de ce que la série est uniformément convergente dans l'intervalle (a, b) . En effet, le reste R_n , d'après ce qui a été démontré précédemment, est inférieur à la plus grande des quantités

$$(2\mu_n \pm R_{n,p})\varphi_0(x), \quad (2\mu_n \pm R_{n,p})\varphi_\infty(x);$$

$\varphi_0(x), \varphi_\infty(x)$ demeurant par hypothèse comprises entre des limites fixes quand x varie dans l'intervalle considéré, on peut prendre n assez grand pour que le reste soit, quel que soit x , plus petit que σ .

L'application des propositions précédentes aux séries ordonnées suivant les puissances croissantes de la variable x est immédiate et évidente, mais on peut indiquer plusieurs autres applications.

Par exemple, si la série

$$a_1, a_2, \dots, a_n$$

est convergente, la série

$$\sum \frac{a_n}{1 - \alpha_n z},$$

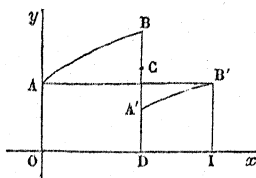
où les nombres $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ forment une suite croissante ou décroissante, définit une fonction continue de z , excepté pour les valeurs qui rendent un terme infini, etc.

VI. — *D'une classe de fonctions discontinues susceptibles d'intégration.*

Nous avons, dans l'article précédent, rencontré des fonctions discontinues, telles qu'il y ait des limites $f(x + 0), f(x - 0)$ différentes de $f(x)$ pour $f(x + h), f(x - h)$, lorsque h tend vers zéro par des valeurs positives. On peut prendre des exemples plus généraux de fonctions ayant de telles propriétés.

Soit, par exemple, une fonction $\varphi(x)$ définie dans l'intervalle $(0, 1)$ par une courbe telle que $ABA'B'$. Nous supposerons (*fig. 1*) que

Fig. 1.



$OA = IB'$. Pour plus de simplicité, nous admettrons que la fonction, généralement continue, soit discontinue pour la seule valeur $x = \frac{1}{2}$; soit

$$\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = DC,$$

et posons

$$BC = \alpha, \quad CA' = \beta;$$

alors

$$\varphi\left(\frac{1}{2} + 0\right) = \varphi\left(\frac{1}{2}\right) - \beta, \quad \varphi\left(\frac{1}{2} - 0\right) = \varphi\left(\frac{1}{2}\right) + \alpha.$$

Il est clair qu'on peut concevoir ou former une infinité de fonctions satisfaisant à de telles conditions. En dehors de l'intervalle $(0, 1)$, la fonction sera définie par l'équation $\varphi(x + 1) = \varphi(x)$ et par conséquent $\varphi(x)$ sera toujours inférieure à un nombre A . Cela posé, la série

$$f(x) = a_1 \varphi(x) + a_2 \varphi(2x) + \dots + a_n \varphi(nx)$$

sera toujours convergente, si la série des constantes

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

est absolument convergente; et, en outre, le reste de la série $f(x)$ étant toujours inférieur à celui de la série s_n , où l'on prend tous les termes positivement, multipliés par un nombre fixe A , il est clair que la série $f(x)$ sera uniformément convergente dans tout intervalle.

On verra comme précédemment que $f(x)$ est continue pour toutes les valeurs incommensurables ou commensurables à dénominateur impair. Au contraire, on aura

$$f\left(\frac{p}{2q} - 0\right) = f\left(\frac{p}{2q}\right) + \alpha(a_q + a_{2q} + a_{3q} + \dots),$$

$$f\left(\frac{p}{2q} + 0\right) = f\left(\frac{p}{2q}\right) - \beta(a_q + a_{2q} + a_{3q} + \dots).$$

On pourrait multiplier les exemples de ce genre en remplaçant $\varphi(x)$ par une fonction non périodique, mais restant finie pour toute valeur de x , en considérant, au lieu de la série $f(x)$, la suivante :

$$\sum a_n \varphi(\alpha_n x),$$

où les quantités α_n sont des constantes quelconques. Nous nous contenterons du cas particulier que nous avons examiné.

Cela posé, je dis que *toutes les fonctions discontinues, telles que, pour chaque valeur de x , $f(x + h)$ et $f(x - h)$ aient une limite, quand h positif tend vers zéro, sont des fonctions susceptibles d'intégration.*

Cela est évident, en vertu du théorème V, pour les fonctions développables en série que nous avons formées; mais nous allons démontrer la proposition sans nous préoccuper de l'origine de ces fonctions.

Par la définition, pour chaque valeur de x on peut trouver un nombre positif h , tel que l'on ait

$$\begin{aligned} f(x + \theta h) - f(x + 0) &< \sigma, & \text{en valeur absolue,} \\ f(x - \theta h) - f(x - 0) &< \sigma, & 0 < \theta < 1. \end{aligned}$$

Soit un intervalle (a, b) . En partant de a on pourra donc trouver une quantité δ_1 , telle que l'on ait

$$f(a + \theta \delta_1) - f(a + 0) \leq \frac{\sigma}{2}, \quad \theta < 1;$$

je la prends aussi grande que possible, soit $a + \delta_1 = x_1$.

Ensuite je détermine une quantité δ_2 , la plus grande possible, telle que

$$f(x_1 + \theta \delta_2) - f(x_1 + 0) \leq \frac{\sigma}{2}, \quad \theta < 1,$$

soit

$$x_1 + \delta_1 = \delta_2.$$

Je dis qu'en opérant ainsi et en continuant indéfiniment j'atteindrai la limite b .

Supposons, en effet, que la suite indéfiniment prolongée

$$x_p = a + \delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_p$$

n'atteigne pas b ; elle aura une limite x égale ou inférieure à b , et alors, quelque petit que soit h , il y aura une infinité de quantités x_p comprises entre $x - h$ et x . Or, par parenthèse, on peut trouver une quantité h , telle que

$$f(x - \theta h) - f(x - 0) < \frac{\sigma}{4}, \quad 0 < \theta < 1,$$

pour toute valeur de θ . De l'inégalité précédente il résulte que la différence de deux valeurs quelconques de la fonction dans l'intervalle $(x - h, x)$ est plus petite que $\frac{\sigma}{2}$. On aura donc

$$f[x_p + \theta(x_{p+q} - x_q)] - f(x_p + 0) \leq \frac{\sigma}{2};$$

et par conséquent, au lieu de passer de x_p à x_{p+1} , on pourrait aller à x_{p+q} , ce qui est contraire à l'hypothèse que nous avons faite, puisque x_{p+1} doit être la plus grande valeur de x , telle que

$$f[x_p + \theta(x_{p+1} - x_p)] - f(x_p + 0) \leq \frac{\sigma}{2}, \quad \text{en valeur absolue.}$$

Il y a donc contradiction à supposer que la suite des quantités x_1, x_2, \dots n'atteint pas b .

Supposons qu'on ait atteint b après n opérations, et soient

$$a, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, b$$

les valeurs intercalées. Formons les intervalles

$$a, a + \varepsilon, x_1 - \varepsilon, x_1 + \varepsilon, x_2 - \varepsilon, x_2 + \varepsilon, \dots, x_{n-1} - \varepsilon, x_{n-1} + \varepsilon, b - \varepsilon, b.$$

Dans les intervalles

$$(a + \varepsilon, x_1 - \varepsilon), (x_1 + \varepsilon, x_2 - \varepsilon), \dots, (x_{n-1} + \varepsilon, b - \varepsilon),$$

les oscillations de la fonction sont plus petites que σ . Dans les autres elles sont quelconques; mais la longueur totale de ces autres intervalles est $2(n-1)\varepsilon$, et peut être rendue aussi petite qu'on le veut par un choix convenable de ε . Donc la grandeur totale des intervalles, dans lesquels les oscillations sont plus grandes que σ , peut être prise aussi petite qu'on le veut, et par suite la fonction est toujours susceptible d'intégration.

Il suit de cette démonstration que les fonctions discontinues qui ne sont pas susceptibles d'intégration sont nécessairement telles que, pour un nombre illimité de valeurs de x dans tout intervalle, $\varphi(x+h)$ est indéterminé quand h tend vers zéro.

VII. — *D'une première classe de fonctions continues n'ayant pas de dérivée.*

Soit $f(x)$ une fonction pour laquelle $f(x+0)$ et $f(x-0)$ existent toujours, et cherchons son intégrale. Soit

$$F(x) = \int_a^x f(x) dx.$$

On aura

$$F(x_0 + h) - F(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+h} f(x) dx.$$

Supposons d'abord h positif. On peut, sans changer l'intégrale (art. IV), remplacer la valeur $f(x_0)$ de $f(x)$ par $f(x_0 + o)$. Alors, dans l'intervalle $(x_0, x_0 + h)$, h étant suffisamment petit, on aura toujours

$$f(x_0 + o) - \sigma < f(x) < f(x_0 + o) + \sigma.$$

Donc

$$[f(x_0 + o) - \sigma] h < F(x_0 + h) - F(x_0) < [f(x_0 + o) + \sigma] h,$$

et par suite

$$\lim \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = f(x_0 + o).$$

On aurait de même

$$\lim \frac{F(x_0 - h) - F(x_0)}{-h} = f(x_0 - o).$$

Il y a donc deux dérivées, ou plutôt la dérivée n'existe pas toutes les fois que $f(x_0 + o)$ est différent de $f(x_0 - o)$. Développons quelques exemples.

Soit

$$f(x) = \frac{(x)}{1^s} + \frac{(2x)}{2^s} + \dots + \frac{(nx)}{n^s} + \dots, \quad s > 1;$$

on aura

$$\int_0^x f(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x \frac{(nx) dx}{n^s}.$$

Les intégrales des termes de la série s'effectuent sans difficulté. On a

$$\int_0^x (nx) dx = \frac{1}{n} \int_0^{nx} (x) dx = \frac{1}{2n} [nx]^2,$$

$[x]$ désignant une fonction égale à (x) , excepté pour les valeurs égales à un entier $+ \frac{1}{2}$, et qui a alors la valeur

$$[n + \frac{1}{2}] = + \frac{1}{2}.$$

On a donc

$$F(x) = 2 \int_0^x f(x) dx = \frac{[x]^2}{1+s} + \frac{[2x]^2}{2^{1+s}} + \dots + \frac{[nx]^2}{n^{1+s}} + \dots$$

La fonction définie par cette série n'aura pas de dérivée pour les valeurs de x de la forme $\frac{p}{2^q}$. On aura alors

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = 2f(x) - \frac{1}{q^s} \left(1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots \right),$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x-h) - F(x)}{-h} = 2f(x) + \frac{1}{q^s} \left(1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots \right).$$

Soit de même la série

$$f(x) = \frac{E(x)}{x} + \frac{E(2x)}{2^s x} + \dots + \frac{E(nx)}{n^s x}, \quad s < 2;$$

on trouve sans peine

$$\int_0^x \frac{E(nx)}{x} dx = \log \varphi(nx),$$

où

$$\varphi(x) = \frac{x^{E(x)}}{1.2.3 \dots E(x)},$$

et par suite

$$F(x) = \int_0^x f(x) dx = \sum \frac{\log \varphi(nx)}{n^s}.$$

Cette fonction n'aura pas de dérivée pour les valeurs commensurables de x . On peut lui substituer le produit infini

$$e^{F(x)} = \prod \varphi(x) [\varphi(2x)]^{\frac{1}{2^s}} \dots [\varphi(nx)]^{\frac{1}{n^s}} \dots,$$

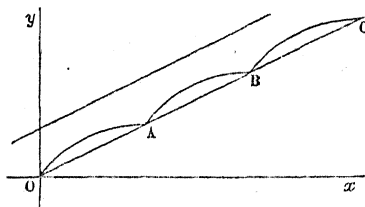
qui a les mêmes propriétés.

Mais on peut former directement, et sans recourir à l'intégration, beaucoup d'autres exemples de fonctions continues n'ayant pas de dérivée.

Soit, par exemple, la fonction représentée (*fig. 2*) par la courbe OABC,

qui se compose d'une partie convexe OA où la tangente n'est jamais verticale, et qu'on reproduit indéfiniment en AB, BC, ..., sur la droite OABC. On peut supposer, par exemple, que OA soit un arc de cercle

Fig. 2.



ayant son centre au-dessous de Ox . Une telle fonction $\varphi(x)$ est continue; elle a une dérivée, excepté pour les abscisses correspondant aux points A, B, C, ..., abscisses que nous supposons égales à 1, 2, 3, ..., n . De plus, $\varphi(x)$ est toujours inférieure à l'ordonnée d'une droite, c'est-à-dire à une expression de la forme $Ax + B$. Enfin $\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h}$ demeure visiblement, quels que soient x et h , comprise entre deux nombres fixes qui sont les coefficients angulaires des tangentes à la première branche de courbe en O et en A.

Formons la série

$$f(x) = \sum a_n \varphi(nx),$$

qui sera convergente si la série $\sum na_n$ est absolument convergente. Cela résulte de ce que l'on a $\varphi(nx) < Anx + B$.

On aura

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \sum_{n=1}^{\infty} na_n \frac{\varphi(nx+nh) - \varphi(nx)}{nh}.$$

Par hypothèse, $\frac{\varphi(nx+nh) - \varphi(nx)}{nh}$ demeure toujours comprise entre deux limites fixes. La série précédente est donc également convergente par rapport à x et h dans tout intervalle, et en appliquant le théorème VII, on a

$$\lim \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \sum na_n \lim \frac{\varphi(nx+nh) - \varphi(nx)}{nh}.$$

Supposons d'abord x incommensurable, alors nx le sera aussi. La fonction $\varphi(X)$ aura une dérivée pour $X = nx$, et l'on aura

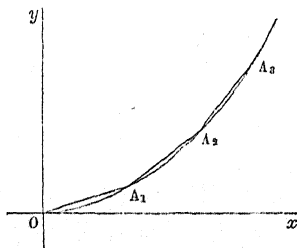
$$\lim \frac{f(x \pm h) - f(x)}{\pm h} = \sum n a_n \varphi'(nx).$$

Supposons, au contraire, $x = \frac{p}{q}$. Alors, pour tous les termes tels que nx soit entier, la limite de $\frac{\varphi(nx + nh) - \varphi(nx)}{nh}$ sera différente, suivant que h tendra vers zéro par des valeurs positives ou par des valeurs négatives. Il y aura donc deux limites différentes pour $\frac{f(x + h) - f(x)}{h}$, suivant que h tendra vers zéro par des valeurs positives ou par des valeurs négatives.

Voici un autre exemple extrêmement général :

Soit une courbe $OA_1 A_2 A_3$ convexe vers l'axe des x (*fig. 3*), et inscrivons dans cette courbe une autre courbe $OA_1 A_2 A_3 \dots$, formée d'arcs

Fig. 3.



isolés ne présentant pas leur concavité du côté de l'axe des x . Supposons si l'on veut, pour fixer les idées, que OA_1 , $A_1 A_2$, $A_2 A_3, \dots$ soient des lignes droites, et considérons la fonction $\varphi(x)$ représentée par le polygone inscrit $OA_1 A_2 A_3 \dots$.

Il est clair qu'on pourra trouver une infinité de systèmes de constantes positives, tels que la série

$$f(x) = a_1 \varphi(x) + a_2 \varphi(2x) + \dots + a_n \varphi(nx) + \dots$$

soit absolument convergente pour toute valeur de x . Par exemple, si l'on suppose que la courbe $OA_1 A_2 A_3 \dots$ soit la parabole représentée

par l'équation $y = x^2$, et que le polygone $OA_1 A_2 A_3 \dots$ soit compris entre la courbe et la parabole $y = x^2 + Ax + B$, où A et B sont positifs, la série $f(x)$ sera absolument convergente pour toutes les valeurs de x , pourvu que la série

$$a_1 + 4a_2 + \dots + n^2 a_n$$

le soit aussi.

Cela posé, il est clair que la fonction $\varphi(x)$ a une dérivée pour toutes les valeurs de x qui ne sont pas les abscisses des sommets A_1, A_2, A_3, \dots du polygone.

Pour une de ces abscisses α_n correspondant au sommet A_n , il y aura, au contraire, deux limites différentes pour

$$\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h}.$$

Si h tend vers zéro par des valeurs positives, la limite correspondante est le coefficient angulaire du côté $A_n A_{n+1}$. Si h est négatif, la limite est, au contraire, le coefficient angulaire de $A_{n-1} A_n$. Remarquons, de plus, que le rapport

$$\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h}$$

tend vers sa limite par des valeurs décroissantes si h est positif, ou par des valeurs croissantes si h est négatif. On aura

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \sum n a_n \frac{\varphi(nx + nh) - \varphi(nx)}{nh}.$$

Supposons d'abord qu'aucune des abscisses nx ne soit égale à l'abscisse α_n de l'un des sommets A_n du polygone : alors, d'après le théorème VIII, tous les termes variant dans le même sens quand h tend vers zéro, on a

$$\lim \frac{f(x \pm h) - f(x)}{\pm h} = \sum n a_n \varphi'(nx),$$

et la fonction $f(x)$ a une dérivée.

Au contraire, si une ou plusieurs des abscisses nx correspondent à des sommets, il n'y aura pas de dérivée.

Supposons, comme application, que le polygone $OA_1 A_2 \dots A_n$ soit

inscrit dans la parabole dont l'équation est

$$y = x^2,$$

et que les abscisses des sommets A_1, A_2, \dots soient $1, 2, 3, \dots, n, \dots$; on aura une fonction représentée par le polygone des ponts suspendus.

La fonction $\varphi(x)$ aura pour expression

$$\varphi(x) = E^2(x) + [2E(x) + 1][x - E(x)].$$

Pour toutes les valeurs non entières de x on a

$$\varphi'(x) = 2E(x) + 1.$$

Au contraire, si x est entier,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} = 2x + 1, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(x-h) - \varphi(x)}{-h} = 2x - 1;$$

on aura par suite, pour x commensurable et égal à la fraction irréductible $\frac{p}{q}$,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \sum n a_n [2E(nx) + 1]$$

et

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x-h) - f(x)}{-h} = \sum n a_n [2E(nx) + 1] - 2(qa_q + 2qa_{2q} + 3qa_{3q} + \dots).$$

VIII. — Nouvelles fonctions continues n'ayant pas de dérivée.

Employons maintenant la fonction introduite par M. Schwarz dans sa Note déjà citée *Sur une fonction continue n'ayant pas de dérivée*.

Cette fonction est définie par l'équation

$$\varphi(x) = E(x) + \sqrt{x - E(x)}.$$

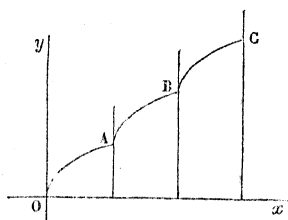
Elle est représentée par une série d'arcs de parabole OA, AB, BC, ... (fig. 4), tous égaux et ayant leur tangente en O, A, B, ... verticale. Cette fonction est évidemment croissante, et elle est inférieure à l'ordonnée $Ax + B$ d'une droite.

Cela posé, formons la série

$$f(x) = a_1 \varphi(x) + a_2 \varphi(2x) + \dots + a_n \varphi(nx),$$

où $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ sont des quantités *positives* telles, que la série $\sum na_n$ soit convergente. Alors la série $f(x)$ est uniformément convergente

Fig. 4.



dans tout intervalle. Elle représente une fonction continue et croissante de x . Cela est évident : tous ses termes sont positifs et croissants. On a

$$f(x+h) - f(x) = \sum a_n [\varphi(nx+nh) - \varphi(nx)],$$

et par suite, en prenant un seul terme de la série,

$$f(x+h) - f(x) > a_n [\varphi(nx+nh) - \varphi(nx)].$$

Supposons x commensurable égal à $\frac{p}{q}$, et prenons $n = q$;

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} > a_q \frac{\varphi(p+qh) - \varphi(p)}{h},$$

ou, en substituant les valeurs de $\varphi(p)$ et $\varphi(p+qh)$,

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} > a_q \sqrt{\frac{q}{h}},$$

et par suite

$$\lim \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \infty,$$

quand h tend vers zéro par des valeurs positives. Ainsi la dérivée de la fonction est infinie dans le sens positif pour toutes les valeurs commensurables de x .

Pour compléter l'étude de cette fonction, nous allons montrer qu'il y a des incommensurables pour lesquelles la dérivée existe et est finie,

d'autres pour lesquelles elle est infinie. Pour fixer les idées, prenons

$$f(x) = \sum_i^{\infty} \frac{\varphi(nx)}{n^4}.$$

Alors

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} > \sum \frac{\varphi(nx + nh) - \varphi(nx)}{n^4 h},$$

la somme Σ étant étendue à un nombre fini, mais quelconque, de termes de la série, qu'on choisira de la manière la plus convenable. L'inégalité précédente se justifie d'elle-même, tous les termes de la série étant positifs. Le second membre étant composé d'un nombre fini de termes, cherchons sa limite, qui, d'après la définition de $\varphi(x)$, est

$$\sum \frac{1}{n^3} \frac{1}{2\sqrt{nx - E(nx)}}.$$

Choisissons pour n les dénominateurs des réduites de rang impair du développement de x en fraction continue. Ces réduites sont toutes inférieures à x . Désignons-les par $\frac{P_n}{Q_n}$. Alors la somme précédente pourra s'écrire

$$\sum \frac{1}{2Q_n^3} \frac{1}{\sqrt{Q_n x - P_n}}.$$

Or on a (voir SERRET, *Algèbre supérieure*, t. I)

$$Q_n x - P_n < \frac{1}{Q_{n+1}}.$$

Donc, en remplaçant $Q_n x - P_n$ par $\frac{1}{Q_{n+1}}$, on ne peut que diminuer la somme précédente, et l'on aura

$$\lim \frac{f(x+h) - f(x)}{h} > \sum \frac{\sqrt{Q_{n+1}}}{2Q_n^3}.$$

D'ailleurs, en appelant α_n le quotient complet correspondant à Q_n , on a

$$Q_{n+1} = \alpha_n Q_n + Q_{n-1}, \quad Q_{n+1} > \alpha_n Q_n,$$

et par suite, *a fortiori*,

$$\lim \frac{f(x+h) - f(x)}{h} > \sum \frac{\sqrt{\alpha_n}}{2Q_n^2 \sqrt{Q_n}}.$$

Prenons le premier terme de la somme qui figure dans le second membre de l'inégalité, et supposons qu'on ait choisi Q_n arbitrairement. Alors, α_n n'entrant pas dans Q_n , on peut le déterminer de telle manière que le premier terme ait une valeur quelconque, par exemple une valeur supérieure à 1 ou à $\frac{1}{n}$. Dans le terme suivant il y aura un nouveau quotient α_{n+2} dont on pourra encore disposer arbitrairement, et ainsi de suite. On peut donc former une incommensurable telle, que chacun des termes soit supérieur à l'unité, par exemple, et alors, en prenant un assez grand nombre de termes, on prouvera que

$$\lim \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

est plus grande que toute quantité donnée. Cette limite est donc infinie *dans les deux sens*, car nous n'avons fait aucune hypothèse sur le signe de h .

Pour établir que la fonction $f(x)$ a une dérivée pour certaines valeurs incommensurables, nous nous appuierons sur l'inégalité, facile à démontrer, à laquelle satisfait la fonction $\varphi(x)$,

$$\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} < \frac{2}{(x)}, \quad \text{en valeur absolue,}$$

(x) ayant la signification que nous lui avons déjà attribuée. Alors on voit que la série

$$\sum \frac{\varphi(nx + nh) - \varphi(nx)}{n^2 h},$$

considérée comme fonction de h , sera uniformément convergente si la série

$$\sum \frac{1}{n^2 (nx)}$$

est absolument convergente; et si cette dernière condition est remplie, on aura le droit de passer à la limite dans la série précédente et d'écrire

$$f'(x) = \sum \frac{\varphi'(nx)}{n^2}.$$

Tout se réduit donc à montrer qu'il y a des incommensurables pour

lesquelles la série

$$\sum \frac{1}{n^3(nx)}$$

est absolument convergente.

Or, si n n'est pas le dénominateur d'une réduite du développement de x en fraction continue, on a

$$(nx) > \frac{1}{2n}, \quad \text{en valeur absolue}$$

(voir SERRET, *Algèbre supérieure, loc. cit.*) et, par conséquent,

$$\frac{1}{n^3(nx)} < \frac{1}{2n^2},$$

en valeur absolue. Donc les termes qui ne correspondent pas aux dénominateurs des réduites forment une série absolument convergente.

Pour le dénominateur Q_n d'une réduite, on a

$$(Q_n x) > \frac{1}{Q_n + Q_{n+1}};$$

donc

$$\frac{1}{Q_n^3(Q_n x)} < \frac{Q_n + Q_{n+1}}{Q_n^3} < \frac{(\alpha_n + 2)}{Q_n^2} \quad (1),$$

(1) Les résultats de la théorie des fractions continues, sur lesquels nous nous appuyons dans ce qui va suivre, peuvent être résumés de la manière suivante : x étant l'incommensurable, $\frac{P_n}{Q_n}$ la $(n+1)^{\text{ième}}$ réduite, α_n le quotient complet correspondant à Q_n , on a

$$Q_{n+1} > \alpha_n Q_n, \quad Q_{n+1} < (\alpha_n + 1) Q_n;$$

$x - \frac{P_n}{Q_n}$ est compris entre $\frac{(-1)^{n+1}}{Q_n Q_{n+1}}$ et $\frac{(-1)^{n+1}}{Q_n (Q_n + Q_{n+1})}$.

Enfin, si n n'est pas le dénominateur d'une réduite,

$$(nx) > \frac{1}{2n}, \quad \text{en valeur absolue.}$$

Remarquons, en outre, que P_n, Q_n ne dépendent que des quotients complets $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$. Si donc une incommensurable est inconnue quand Q_n a été obtenue, on peut choisir α_n arbitrairement, ce qui donne P_{n+1}, Q_{n+1} , puis α_{n+1} arbitrairement, et ainsi de suite.

α_n désignant, comme précédemment, le $n^{\text{ième}}$ quotient complet. Or il y a une infinité d'incommensurables pour lesquelles la série

$$\sum \frac{\alpha_n + 2}{Q_n^2}$$

sera convergente, par exemple toutes celles pour lesquelles α_n ne dépasse pas une certaine limite.

Soit encore la série

$$f(x) = \sum a_n (\sin n x \pi)^{\frac{2}{3}},$$

qui sera également convergente dans tout intervalle si la série $\sum a_n$ est absolument convergente. Nous allons d'abord établir un lemme préliminaire en cherchant une limite supérieure de

$$\frac{[\sin(x\pi + h\pi)]^{\frac{2}{3}} - (\sin x\pi)^{\frac{2}{3}}}{h\pi},$$

lorsque, x restant fixe, h prend toutes les valeurs possibles. Posons

$$\sin(x\pi + h\pi) = \gamma^3, \quad \sin x\pi = a^3.$$

On pourra écrire l'expression précédente

$$\frac{\gamma^2 - a^2}{\gamma^3 - a^3} \frac{\sin(x\pi + h\pi) - \sin x\pi}{h\pi} = \frac{\gamma + a}{\gamma^2 + a\gamma + a^2} \frac{\sin \frac{h\pi}{2}}{\frac{h\pi}{2}} \cos\left(x\pi + \frac{h\pi}{2}\right);$$

γ et a étant plus petits que 1, l'expression est en valeur absolue inférieure à $\frac{2}{\gamma^2 + a\gamma + a^2}$. Le minimum du dénominateur a lieu pour $\gamma = -\frac{a}{2}$. En substituant cette valeur de γ , on a donc

$$\frac{[\sin(x\pi + h\pi)]^{\frac{2}{3}} - (\sin x\pi)^{\frac{2}{3}}}{h} < \frac{8\pi}{3[\sin(x\pi)]^{\frac{2}{3}}},$$

en valeur absolue, et quel que soit h .

Ce lemme étant admis, revenons à la fonction $f(x)$ et supposons

que x soit commensurable et égal à la fraction irréductible $\frac{p}{q}$. On aura

$$(\alpha) \quad \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \sum a_n \frac{[\sin(nx\pi + nh\pi)]^{\frac{2}{3}} - (\sin nx\pi)^{\frac{2}{3}}}{h};$$

$\sin nx\pi$ ne peut prendre que les q valeurs,

$$\sin \frac{\pi}{q}, \quad \sin \frac{2\pi}{q}, \dots, \quad \sin \frac{(q-1)\pi}{q}, \quad \sin \pi,$$

dont la dernière est nulle et correspond aux termes pour lesquels n est un multiple de q . Décomposons la série $f(x)$ en deux, l'une $\varphi(x)$ formée des termes pour lesquels n n'est pas multiple de q , l'autre $\psi(x)$ formée des termes pour lesquels n est au contraire multiple de q . On aura

$$(\beta) \quad f(x+h) - f(x) = \varphi(x+h) - \varphi(x) + \psi(x+h) - \psi(x).$$

Considérons d'abord la série $\varphi(x)$; on a

$$(\gamma) \quad \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} = \sum a_n \frac{[\sin(nx\pi + nh\pi)]^{\frac{2}{3}} - (\sin nx\pi)^{\frac{2}{3}}}{h},$$

la somme étant étendue à toutes les valeurs de n non multiples de q . Pour tous les termes, on a, d'après le lemme,

$$\frac{[\sin(nx\pi + nh\pi)]^{\frac{2}{3}} - (\sin nx\pi)^{\frac{2}{3}}}{h} < \frac{8na_n\pi}{3(\sin nx\pi)^{\frac{2}{3}}};$$

$\sin nx\pi$ prend l'une des valeurs

$$\sin \frac{\pi}{q}, \quad \sin \frac{2\pi}{q}, \dots, \quad \sin \frac{(q-1)\pi}{q},$$

et demeure supérieure à tout nombre fixe Λ plus petit que les $q-1$ sinus précédents. Donc la série (γ) a ses termes inférieurs en valeur absolue à ceux de la série

$$\frac{8\pi}{3\Lambda} \sum na_n.$$

Si nous supposons que cette dernière série soit absolument convergente, la série (γ) , considérée comme fonction de h , sera uniformément convergente dans tout intervalle, et l'on aura le droit (théorème VII) de faire tendre h vers zéro. Donc on aura

$$\lim \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} = \sum \frac{2}{3} \frac{a_n n \pi \cos(nx\pi)}{(\sin nx\pi)^{\frac{1}{3}}},$$

la somme qui figure dans le second membre étant toujours étendue aux valeurs de n non multiples de q . Si nous désignons cette somme par L , nous pourrions poser

$$\varphi(x+h) - \varphi(x) = h(L + \varepsilon),$$

ε tendant vers zéro avec h .

Considérons maintenant la série $\psi(x)$, qui se compose des termes pour lesquels n est multiple de q . On aura, en posant $n = n'q$,

$$\begin{aligned} \psi(x+h) - \psi(x) &= \sum_1^n a_{n'q} (\sin n'q h \pi)^{\frac{2}{3}}, \\ (\delta) \quad \frac{\psi(x+h) - \psi(x)}{h^{\frac{2}{3}}} &= (\pi)^{\frac{2}{3}} \sum a_{n'q} \left(\frac{\sin n'q h \pi}{n'q h \pi} \right)^{\frac{2}{3}} (n'q)^{\frac{2}{3}}. \end{aligned}$$

La série $\sum a_{n'q} (n'q)^{\frac{2}{3}}$ est convergente, puisque la série $\sum n a_n$ l'est déjà par hypothèse. D'ailleurs $\frac{\sin n'q h \pi}{n'q h \pi}$ est toujours plus petit que 1. La série (δ) est donc uniformément convergente par rapport à h dans tout intervalle, et l'on peut faire tendre h vers zéro. On aura donc

$$\lim \frac{\psi(x+h) - \psi(x)}{h^{\frac{2}{3}}} = \pi^{\frac{2}{3}} \sum a_{n'q} (n'q)^{\frac{2}{3}},$$

et si nous désignons le second membre par K , nous aurons

$$\psi(x+h) - \psi(x) = h^{\frac{2}{3}}(K + \varepsilon'),$$

ε' tendant vers zéro avec h .

En tenant compte des résultats que nous venons d'établir, l'équa-

tion (β) nous donnera

$$f(x+h) - f(x) = h(L + \varepsilon) + h^{\frac{2}{3}}(K + \varepsilon') = h^{\frac{2}{3}}(K + \varepsilon''),$$

ε'' tendant vers zéro avec h . Ainsi, pour toute valeur commensurable de x , l'accroissement de la fonction est de la forme

$$(K + \varepsilon'') h^{\frac{2}{3}},$$

et la dérivée est par conséquent infinie.

Ce fait analytique correspond, en Géométrie, à un point de rebroussement avec la tangente verticale.

Cet exemple nous paraît surtout remarquable en ce qu'il montre clairement qu'il existe des fonctions continues qui ne sont ni croissantes ni décroissantes dans aucun intervalle.

M. Hankel, qui l'a traité par une méthode inexacte, affirme que, dans le cas où x est incommensurable, la série des dérivées des termes est convergente et représente la dérivée de la fonction. Cela a lieu, il est vrai, pour un grand nombre d'incommensurables, mais la proposition n'est pas générale. Soit, en effet,

$$\sum \frac{2n a_n \pi}{3} \frac{\cos nx\pi}{(\sin nx\pi)^{\frac{1}{3}}}$$

la série des dérivées : en faisant usage des résultats déjà signalés relatifs aux incommensurables, on reconnaîtra qu'on peut disposer des quotients complets de telle manière que les termes correspondant aux dénominateurs des réduites soient aussi grands qu'on le voudra ; et, par conséquent, la série n'ayant pas ses termes tendant vers zéro avec $\frac{1}{n}$ ne pourra être convergente.

Voici un nouvel exemple présentant une propriété nouvelle. Soit

$$F(x) = \sum \frac{a_n}{n\pi} \sin nx\pi \sin\left(\frac{1}{2} \log \sin^2 nx\pi\right).$$

On suppose que la série $\sum a_n$ soit absolument convergente et, par suite, la série $F(x)$ sera convergente pour toutes les valeurs de x . La série

des dérivées des termes est

$$f(x) = \sum a_n \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \log \sin^2 n x \pi\right) \cos(n x \pi),$$

et elle est, d'après les hypothèses faites, uniformément convergente dans tout intervalle. Les termes sont des fonctions continues devenant indéterminées chacune pour un nombre limité de valeurs de x dans un intervalle donné. Ils sont donc susceptibles d'intégration, et l'on a, en effet,

$$F(x) = \int_0^x f(x) dx.$$

Réciproquement, d'après le théorème VI, $F(x)$ aura pour dérivée $f(x)$, excepté pour les valeurs commensurables de x , et alors on s'assurera aisément, par une recherche directe, que la dérivée est indéterminée. Ainsi nous obtenons *une fonction dont la dérivée existe pour toutes les valeurs incommensurables, mais est indéterminée pour les valeurs commensurables.*

Nous terminerons en donnant un exemple d'une fonction qui n'a de dérivée pour aucune valeur de la variable.

Soit

$$f(x) = \sum_1^{\infty} \frac{\sin[1.2.3\dots(n+1)x]}{1.2.3\dots n}.$$

La série qui représente $f(x)$ étant uniformément convergente dans tout intervalle, la fonction est évidemment continue. Pour rechercher si elle a une dérivée, décomposons-la en deux parties et posons

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \sum_1^{N-1} \frac{\sin[1.2.3\dots(n+1)x]}{1.2\dots n}, \\ \psi(x) &= \sum_N^{\infty} \frac{\sin[1.2.3\dots(n+1)x]}{1.2.3\dots n}. \end{aligned}$$

Soit ensuite

$$1.2.3\dots N \times Nh = 2\varepsilon.$$

On trouvera facilement

$$\frac{\psi(x+h) - \psi(x)}{h} = \frac{\theta}{\varepsilon},$$

θ étant une quantité comprise entre -1 et $+1$, et

$$\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} = \sum_1^N n \cos[(1.2.3\dots n)x] - \varepsilon \sin[(1.2.3\dots N)x] + \omega(N, \varepsilon),$$

$\omega(N, \varepsilon)$ désignant une fonction qui tend vers zéro quand, ε restant fixe, N croît indéfiniment et, par conséquent, h tend vers zéro.

En nous appuyant sur ce que $f(x)$ est la somme de $\varphi(x)$ et $\psi(x)$, nous aurons donc

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \sum_1^N n \cos[(1.2.3\dots n)x] - \varepsilon \sin[(1.2.3\dots N)x] \\ &\quad + \omega(\varepsilon, N) + \frac{\theta}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Si la fonction $f(x)$ avait une dérivée, le second membre tendrait vers une limite fixe, *indépendante de ε* , quand, ε restant fixe, N croîtrait indéfiniment.

Or on s'assurera aisément que ce second membre ne peut avoir une limite indépendante de ε que dans le cas où $\sin[(1.2\dots N)x]$ tend vers zéro quand N croît indéfiniment. Donc déjà la fonction $f(x)$ n'a pas de dérivée toutes les fois que x n'a pas été choisie de telle manière que $\sin[(1.2\dots N)x]$ tende vers zéro quand N croît indéfiniment.

Considérons maintenant ces valeurs de x , en nombre infini dans tout intervalle, pour lesquelles $\sin[(1.2\dots N)x]$ a zéro pour limite quand N croît indéfiniment. On verra facilement que dans ce cas le rapport

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

se rapproche indéfiniment, quand N croît, de la somme

$$\sum_1^N n \cos[(1.2.3\dots n)x].$$

Or cette somme ne tend vers aucune limite; car, d'après les hypothèses faites, $\sin[(1.2\dots N)x]$ ayant zéro pour limite quand N croît, $\cos[(1.2\dots N)x]$ se rapproche indéfiniment en valeur absolue de l'unité et la somme précédente dont le terme général devient indéfiniment grand, ne peut avoir aucune limite.

Donc, *dans aucun cas, la fonction $f(x)$ n'a de dérivée.*

IX. — *Définition d'une classe singulière de fonctions discontinues.*

Soit

$$\varphi(y) = y^2 \sin \frac{1}{y},$$

et posons

$$\varphi'(y) = 2y \sin \frac{1}{y} - \cos \frac{1}{y},$$

pour y différent de zéro;

$$\varphi'(0) = 0,$$

pour $y = 0$. Alors $\varphi'(y)$ sera toujours, même pour $y = 0$, la dérivée de $\varphi(y)$, par rapport à y ; seulement la fonction $\varphi'(y)$ sera discontinue pour $y = 0$. On a d'ailleurs, pour $y < 1$, $\varphi'(y) < 3$.

Formons la série discontinue

$$f(x) = \sum \pi a_n \varphi'(\sin nx\pi) \cos nx\pi + \dots,$$

qui sera uniformément convergente si la série $\sum a_n$ est absolument convergente. Les termes de cette série sont des fonctions de x discontinues pour certaines valeurs de x , mais susceptibles d'intégration. On aura donc

$$F(x) = \int_0^x f(x) dx = \sum \frac{a_n}{n} \varphi(\sin nx\pi).$$

D'après le théorème VI, $f(x)$ sera, dans tous les cas, la dérivée de $F(x)$. Ainsi nous obtenons *une fonction continue dont la dérivée est discontinue pour toutes les valeurs commensurables de x , mais existe pour toutes les valeurs de x .*

En partant de la remarque précédente, nous allons montrer qu'il existe des fonctions discontinues qui jouissent d'une propriété que l'on regarde quelquefois comme le caractère distinctif des fonctions continues, celle de ne pouvoir varier d'une valeur à une autre sans passer par toutes les valeurs intermédiaires.

Soit, en effet, $F(x)$ une fonction dont la dérivée existe pour toute valeur de x , mais soit discontinue. Supposons que, pour $x = x_0$, $x = x_1$,

la dérivée prenne les valeurs

$$F'(x_0) = A, \quad F'(x_1) = B.$$

Je dis que, si x varie de x_0 à x_1 , $f'(x)$ passe au moins une fois par toutes les valeurs intermédiaires entre A et B . Soit, en effet, M une de ces valeurs

$$A > M > B,$$

et formons la fonction

$$F(x) - Mx.$$

Cette fonction continue aura, pour $x = x_0$, une dérivée $A - M$ positive et, pour $x = x_1$, une dérivée $B - M$ négative. Elle commencera donc par être croissante quand x variera de x_0 à x_1 , puis elle finira par être décroissante pour $x = x_1$. Donc elle aura un maximum qu'elle atteindra pour une certaine valeur

$$x_0 + \theta(x_1 - x_0),$$

et pour lequel sa dérivée sera nulle; on aura donc

$$f'[x_0 + \theta(x_1 - x_0)] - M = 0.$$

Ainsi tout nombre M intermédiaire entre A et B est une valeur de la dérivée.

La seule objection qu'on pourrait faire à notre conclusion, c'est que la dérivée doit nécessairement être continue. L'exemple que nous avons donné montre qu'il n'en est pas ainsi et que la dérivée peut être discontinue un nombre infini de fois dans tout intervalle, sans être jamais indéterminée.

Cet exemple n'est pas, du reste, en désaccord avec les notions que nous avons de la continuité et de la discontinuité des fonctions. Il est clair que, si la loi d'une fonction est telle que ses variations soient brusques, elle ne peut varier d'une valeur à une autre en passant par toutes les valeurs intermédiaires. Par exemple, si l'on a

$$\lim f(x + h) = f(x + 0) > f(x),$$

$$\lim f(x - h) = f(x - 0) < f(x),$$

h tendant vers zéro par des valeurs positives, il est clair que, lorsque x

variera de $x - h_1$ à $x + h_1$, la fonction ne prendra pas toutes les valeurs comprises entre $f(x - h_1)$ et $f(x + h_1)$. Mais il y a, nous l'avons vu, d'autres genres de discontinuité et il existe des fonctions pour lesquelles la limite de $f(x + h)$ est indéterminée quand h tend vers zéro.

Par exemple, lorsque h tend vers zéro, $f(x + h)$ peut prendre toutes les valeurs comprises entre $f(x) - K^2$ et $f(x) + K^2$. Un exemple simple de ce cas nous est offert par la fonction $\sin \frac{1}{x}$ lorsque x tend vers zéro. On conçoit que de telles fonctions, pour lesquelles $f(x + h)$ a une limite indéterminée, ne puissent passer d'une valeur à une autre sans atteindre toutes les valeurs intermédiaires.

C'est à cette dernière classe de fonctions qu'appartiennent les dérivées des fonctions continues quand elles sont finies et existent pour toutes les valeurs de la variable. Soit, en effet, $F(x)$ une fonction continue ayant une dérivée. On aura, d'après le théorème des accroissements finis ⁽¹⁾,

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = F'(x+h_1),$$

h_1 étant compris entre zéro et h .

Quand h tendra vers zéro, il en sera de même de h_1 , d'après une loi inconnue. On voit que la dérivée $F'(x)$ doit être ou continue ou discontinue, de telle manière qu'il y ait un système de valeurs de h pour lequel $F'(x+h) - F'(x)$ tende vers zéro avec h . Cette propriété exige que $F'(x+h)$ ne tende vers aucune limite déterminée quand h tend vers zéro; car, si cette limite existait, elle serait $F'(x)$ et la fonction dérivée serait continue.

Il semble difficile d'indiquer un caractère général qui permette de reconnaître si une fonction $f(x)$ a une fonction primitive, c'est-à-dire si elle est la dérivée d'une autre fonction.

Dans le cas, toutefois, où $f(x)$ est susceptible d'intégration, la solution peut être donnée. En effet, s'il existe une fonction $F(x)$ telle que

$$F'(x) = f(x),$$

⁽¹⁾ Voir la belle démonstration de ce théorème, donnée par M. O. Bonnet, dans le *Traité de Calcul différentiel et intégral*, de M. Serret, t. I, p. 17. Cette démonstration suppose seulement que la dérivée existe et soit finie.

on aura

$$F(x) - F(a) = F(x) - F(x_{n-1}) + F(x_{n-1}) - F(x_{n-2}) + \dots + F(x_1) - F(a),$$

ou, en appliquant le théorème des accroissements finis,

$$F(x) - F(a) = f(a + \theta_1 \delta_1) \delta_1 + f(x_1 + \theta_2 \delta_2) \delta_2 + \dots + f(x_{n-1} + \theta_n \delta_n) \delta_n,$$

les δ ayant la même signification que dans l'article III, et par conséquent $F(x)$ ne pourra être que l'intégrale définie

$$C + \int_a^x f(x) dx.$$

On effectuera cette intégration et il restera à voir si l'intégrale a pour dérivée $f(x)$.

Il faut pour cela que l'on ait

$$\int_x^{x+h} f(x) dx = [f(x) + \varepsilon] h,$$

ε tendant vers zéro avec h . Or l'intégrale est la limite de

$$\frac{h}{n} \left\{ f(x) + f\left(x + \frac{h}{n}\right) + \dots + f\left[x + \frac{(n-1)h}{n}\right] \right\},$$

lorsque n croit indéfiniment. Donc, pour qu'une fonction susceptible d'intégration soit la dérivée d'une autre fonction, il faut et il suffit que sa valeur moyenne dans l'intervalle $(x, x + h)$

$$\lim \frac{1}{n} \left\{ f(x) + f\left(x + \frac{h}{n}\right) + \dots + f\left[x + \frac{(n-1)h}{n}\right] \right\}$$

devienne égale à $f(x)$ quand h tend vers zéro. h doit être pris successivement positif et négatif.