

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

MARCEL BERGER

Du côté de chez Pu

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4^e série, tome 5, n° 1 (1972), p. 1-44

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1972_4_5_1_1_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

DU CÔTÉ DE CHEZ PU

PAR MARCEL BERGER



1. INTRODUCTION. — On doit à Pu [27] le théorème suivant : « Quelle que soit la structure riemannienne g sur le projectif réel P de dimension 2, le volume ν de P pour g et la longueur l , pour g , de la plus petite courbe de P non homotope à 0, vérifient

$$(1.1) \quad \frac{\nu}{l^2} \geq \frac{2}{\pi}$$

et

$$(1.2) \quad \frac{\nu}{l^2} = \frac{2}{\pi}$$

si et seulement si g est la structure riemannienne canonique de P . »

Il était tentant de chercher à généraliser ce théorème, à la fois en dimension plus grande que 2 et pour les projectifs complexes, quaternioniens. Je n'ai pas réussi à démontrer ou contre-démontrer de telles généralisations. Cependant je pense que certains résultats préliminaires ou connexes peuvent être intéressants. On trouvera dans le présent article, après les généralités nécessaires, spécialement sur les espaces projectifs (§ 3), la définition des carcans et quotients (§ 5). Puis, au paragraphe 6, une généralisation aux cas quaternioniens et cayleyiens d'un théorème de Wirtinger relatif au cas complexe; résultat utilisé au paragraphe 7 pour calculer le carcan des projectifs munis de leur structure riemannienne canonique. Ceci permet alors de définir des séries d'assertions (§ 8), dont le théorème de Pu n'est que la plus simple. Le paragraphe 9 établit un lien entre l'une de ces assertions et les structures riemanniennes sur le projectif réel qui sont à géodésiques toutes fermées. Le paragraphe 10 démontre quelques relations de transitivité

dans ces séries d'assertions. Enfin les paragraphes 11 et 12 sont consacrés à des versions infinitésimales des assertions considérées; il est classique que l'on peut espérer attaquer un problème ouvert en regardant une forme plus faible, infinitésimale par exemple, ce qui, en général, linéarise le problème. La proposition (11.2) dit essentiellement que toutes les généralisations de l'inégalité (1.1) de Pu sont « vraies au premier ordre ». Le paragraphe 12 étudie les versions infinitésimales de la partie 1.2 du théorème de Pu (inégalité caractéristique). Cette fois-ci, le théorème (12.3), dû à R. Michel, dit que certaines inégalités sont « caractéristiques au premier ordre » tandis que le théorème (12.17) montre que d'autres sont fausses.

Les pages 73 à 85 de [4] peuvent constituer une introduction au présent article, qui en est en quelque sorte le développement; par exemple, le théorème (7.1) était énoncé dans ([4], p. 84), sans démonstration.

Un prochain article à paraître dans le même journal (4^e série, t. 5, 1972, fasc. 2), contiendra des résultats analogues mais relatifs aux tores au lieu des projectifs.

2. MATÉRIEL RIEMANNIEN.

(2.1) On notera (M, g) une *variété riemannienne*, couple formé d'une variété C^∞ M et d'une structure riemannienne g sur M .

(2.2) Une *isométrie* entre deux variétés riemanniennes (M, g) , (N, h) est un difféomorphisme $f: M \rightarrow N$ tel que $f^*h = g$, où f^*h est

$$f^*h(u, v) = h((Tf)(u), (Tf)(v)).$$

On dira alors que (M, g) et (N, h) sont *isométriques* et on *notera* ce fait

$$(2.3) \quad (M, g) = (N, h),$$

ce qui est un abus d'écriture.

(2.4) Une variété riemannienne (M, g) possède une *mesure canonique*, notée ν , plus précisément ν_g si nécessaire; si $\{x_i\}_{i=1, \dots, a}$ sont des coordonnées locales sur M et si on pose

$$g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right),$$

alors ν_g s'écrit dans la carte considérée

$$(2.5) \quad \nu_g = (\det(g_{ij}))^{\frac{1}{2}} dx_1 \dots dx_a.$$

Si M est compacte, la masse totale $\int_M \nu_g$ est appelée le *volume* de (M, g) et *notée*

$$(2.6) \quad \text{vol}(M, g) = \int_M \nu_g.$$

Si M est orientée, alors elle possède une *forme volume canonique* $\hat{\nu}_g$, dont la valeur absolue est précisément la mesure $\nu_g : \nu_g = |\hat{\nu}_g|$.

(2.7) Si $N \subset M$ est une sous-variété de M , la structure riemannienne g de (M, g) induit sur N une structure riemannienne, notée g ou, plus précisément, $g|_N$ si nécessaire. Par exemple, si N est compacte, on pourra considérer $\text{vol}(N, g|_N)$.

(2.8) (cf. [26]) Une *submersion riemannienne* $p : (M, g) \rightarrow (N, h)$ est une submersion $p : M \rightarrow N$ ayant la propriété additionnelle suivante. En $m \in M$, on a le sous-espace tangent vertical $(T_m p)^{-1}(0) \subset T_m M$, sous-espace tangent à la sous-variété $p^{-1}(m)$ en m ; l'espace vectoriel $T_m M$, euclidien pour g_m , admet la décomposition orthogonale

$$T_m M = (T_m p)^{-1}(0) \oplus H_m$$

définissant H_m . Alors p sera une submersion riemannienne si, pour tout $m \in M$, la restriction $T_m p|_{H_m} : H_m \rightarrow T_{p(m)} N$ est une isométrie d'espaces euclidiens.

(2.9) LEMME. — Soient (M, g) , (N, h) , (P, k) trois variétés riemanniennes, $p : (M, g) \rightarrow (N, h)$ une submersion riemannienne et $q : N \rightarrow P$ une application C^∞ telle que $r = q \circ p : (M, g) \rightarrow (P, k)$ soit une submersion riemannienne. Alors $q : (N, h) \rightarrow (P, k)$ est une submersion riemannienne.

$Tr = Tq \circ Tp$ montre d'abord que q est une submersion. Soit ensuite $a \in M$ quelconque, $b = p(a)$, $c = q(b) = r(a)$ et les décompositions orthogonales

$$T_a M = (T_a p)^{-1}(0) \oplus H_a = (T_a r)^{-1}(0) \oplus H'_a, \quad T_b N = (T_b q)^{-1}(0) \oplus H_b$$

associées aux structures riemanniennes considérées. Comme

$$(T_a p)^{-1}(0) \subset (T_a r)^{-1}(0),$$

on a une décomposition orthogonale

$$H_a = H'_a \oplus H''_a \quad \text{et} \quad H''_a = H_a \cap (T_a r)^{-1}(0).$$

Comme $T_a p|_{u_a}$ est une isométrie et que $H'_a = (T_a r)^{-1}(0) \cap H_a$ c'est que nécessairement $T_a p : H'_a \rightarrow H_b$ est une isométrie et que l'on peut écrire

$$T_b q|_{u_b} = T_a r \circ (T_a p|_{u_a})^{-1},$$

qui est bien une isométrie de H_b sur $T_c P$ parce que composée de deux isométries.

(2.10) Soit $p : M \rightarrow N$ une submersion entre deux variétés de dimensions $d = \dim M$, $e = \dim N$ respectivement. Soient α une forme différentielle extérieure de degré d sur M et β une forme différentielle extérieure de degré e sur N et partout non nulle; on sait alors [12], 16.21.7 définir, pour tout $y \in N$, la forme différentielle $\alpha/\beta(y)$ extérieure de degré $d - e$ sur la « fibre » $p^{-1}(y)$. Si, en outre, p est surjective, si M et N sont orientées, si $\alpha \geq 0$ et $\beta(y) > 0$ pour tout $y \in N$, si α est intégrable et β localement intégrable, alors $\alpha/\beta(y)$ est intégrable pour presque tout y , ainsi que la fonction $y \mapsto \int_{p^{-1}(y)} \alpha/\beta(y)$ et l'on a

$$(2.11) \quad \int_M \alpha = \int_N \left(\int_{p^{-1}(y)} \alpha/\beta(y) \right) \beta,$$

(voir [12], 16.24.8). C'est une formule « d'intégration sur les fibres ».

Un cas particulier est le suivant : supposons en outre que

$$p : (M, g) \rightarrow (N, h)$$

soit maintenant une submersion riemannienne, M et N orientées et soient \hat{v}_g, \hat{v}_h les formes volumes canoniques de (M, g) , (N, h) . Pour tout $y \in N$, la fibre $p^{-1}(y)$ est une variété riemannienne orientée, d'après (2.7) et ([12], 16.21.9); la définition (2.8) et la définition de [12], 16.21.7 montrent que la forme quotient $\hat{v}_g/\hat{v}_h(y)$ n'est autre que la forme volume canonique $\hat{v}_{p^{-1}(y)}$ de $p^{-1}(y)$. Supposant pour simplifier M compacte et f fonction continue sur M , de (2.11) on déduit donc la formule

$$(2.12) \quad \int_M f \cdot \hat{v}_g = \int_N \left(\int_{p^{-1}(y)} f \cdot \hat{v}_{p^{-1}(y)} \right) \hat{v}_h.$$

Si M et N ne sont pas orientées on aura encore

$$(2.13) \quad \int_M f \cdot v_g = \int_{y \in N} \left(\int_{p^{-1}(y)} f \cdot v_{p^{-1}(y)} \right) v_h.$$

Ceci se démontre, par exemple, à l'aide de (2.12), en prenant des orientations locales et en recollant avec une partition de l'unité. Un cas parti-

culier s'obtient en prenant $f = 1$, d'où

$$(2.14) \quad \text{vol}(\mathbf{M}, g) = \int_{y \in \mathbf{N}} \text{vol}(p^{-1}(y), g|_{p^{-1}(y)}) \nu_y,$$

et si $\text{vol}(p^{-1}(y), g|_{p^{-1}(y)})$ est une constante k , alors

$$(2.15) \quad \text{vol}(\mathbf{M}, g) = k \text{vol}(\mathbf{N}, h).$$

(2.16) Si \mathbf{G} est un groupe de Lie et \mathbf{H} un sous-groupe fermé de \mathbf{G} , une structure riemannienne g sur l'espace homogène \mathbf{G}/\mathbf{H} est dite *invariante par \mathbf{G}* si, $\gamma \in \mathbf{G}$ opérant sur \mathbf{G}/\mathbf{H} par la même lettre, on a $\gamma^* g = g$, c'est-à-dire si tout γ est une isométrie de $(\mathbf{G}/\mathbf{H}, g)$. Notons $p : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G}/\mathbf{H}$ la projection canonique et $e \in \mathbf{G}/\mathbf{H}$ la classe à gauche \mathbf{H} ; la *représentation linéaire d'isotropie* $\underline{\mathbf{H}} = \{\mathbf{T}_e h : h \in \mathbf{H}\}$ est l'ensemble des actions tangentées sur $\mathbf{T}_e(\mathbf{G}/\mathbf{H})$ des éléments $h \in \mathbf{H}$ agissant sur \mathbf{G}/\mathbf{H} .

(2.17) LEMME. — \mathbf{G}/\mathbf{H} admet une structure riemannienne invariante par \mathbf{G} si et seulement si $\underline{\mathbf{H}}$ est compacte. Si, en outre $\underline{\mathbf{H}}$ est irréductible, alors une telle structure riemannienne invariante par \mathbf{G} est unique à un scalaire positif près.

La première assertion provient de ce qu'un groupe orthogonal est compact et de ce que, réciproquement, si un groupe linéaire est compact, on peut faire la moyenne, pour la mesure de Haar, d'une structure euclidienne quelconque sur $\mathbf{T}_e(\mathbf{G}/\mathbf{H})$ et la transporter ensuite sur \mathbf{G}/\mathbf{H} par l'action de \mathbf{G} . La deuxième assertion peut se voir ainsi : soit \mathbf{E} un espace euclidien pour g , \mathbf{K} un sous-groupe du groupe orthogonal $\mathbf{O}(\mathbf{E})$ de \mathbf{E} pour g et h une forme bilinéaire symétrique invariante par \mathbf{K} . Ceci se traduit, pour l'endomorphisme h^* de \mathbf{E} associé par dualité à h , par le fait que cet endomorphisme commute avec tous les éléments de \mathbf{K} ; comme h^* est self-adjoint et \mathbf{K} irréductible, c'est que h^* est proportionnel à l'identité, ce qui implique que h est proportionnelle à g .

(2.18) Pour une variété C^∞ quelconque \mathbf{M} , on notera $\mathbf{S}^2(\mathbf{M})$ l'espace vectoriel des formes différentielles bilinéaires *symétriques* sur \mathbf{M} . Si, de plus, (\mathbf{M}, g) est riemannienne, alors on peut, à $h \in \mathbf{S}^2(\mathbf{M})$, associer la fonction numérique $\text{trace}_g h$, dont la valeur en $m \in \mathbf{M}$ est la trace, par rapport à la structure euclidienne g_m de $\mathbf{T}_m \mathbf{M}$, de la forme bilinéaire symétrique h_m , trace que l'on peut définir par exemple comme $\sum_i h_m(x_i, x_i)$, pour une base orthonormée quelconque $\{x_i\}$ de $\mathbf{T}_m \mathbf{M}$.

3. PROJECTIFS. — On désignera par \mathbf{K} soit le corps \mathbf{R} des nombres réels, soit celui \mathbf{C} des nombres complexes, soit celui \mathbf{H} des quaternions,

soit enfin l'algèbre à division \mathbf{Ca} des octaves de Cayley; on notera $i = \dim_{\mathbf{R}} \mathbf{K}$, donc $i = 1, 2, 4, 8$ et \mathbf{K}_i le \mathbf{K} déterminé par cet i .

Si $i = 1, 2, 4$ on peut considérer les espaces projectifs de toute dimension $a \in \mathbf{N}$, sur \mathbf{K}_i , que l'on notera $\mathbf{P}_i^a = \mathbf{P}(\mathbf{K}_i^{a+1})$. Si $i = 8$, on ne peut considérer $\mathbf{P}_8^a = \mathbf{P}(\mathbf{Ca}^{a+1})$ que pour $a = 0, 1$. Cependant, il existe un \mathbf{P}_8^2 , le plan projectif des octaves de Cayley (cf. [15], § 6).

Il est entendu que lorsque l'on écrira \mathbf{P}_i^a , si $i = 8$, alors $a \leq 2$.

Quand on écrira $\mathbf{P}_i^b \subset \mathbf{P}_i^a$, $b \leq a$, il s'agira de l'inclusion héréditaire canonique, déduite pour $i \neq 8$, de l'inclusion canonique

$$\mathbf{K}^{b+1} \times \{0\} \subset \mathbf{K}^{(b+1)+(a-b)=a+1}.$$

Si $i = 8$, voir (3.2) ci-dessous.

Les \mathbf{P}_i^a sont canoniquement des variétés \mathbf{C}^∞ , compactes de dimension ia ; ce qu'on peut voir, sauf pour \mathbf{P}_8^2 , en les considérant comme quotient de \mathbf{K}_i^{a+1} par le groupe multiplicatif $\mathbf{K}^* = \mathbf{K} - \{0\}$. Mais la meilleure méthode, valable elle aussi pour \mathbf{P}_8^2 , est de les considérer comme espaces homogènes de groupes de Lie compacts. Pour $i = 1, 2, 4$ d'abord, on munit \mathbf{K}_i^{a+1} de sa structure hermitienne canonique $\sum_i z_i \bar{z}'_i$ (si $i = 1$, $z_i = \bar{z}'_i$

et c'est une structure euclidienne). L'ensemble \mathbf{S} des vecteurs de norme égale à 1 est en fait une sphère de dimension $i(a+1) - 1$, soit

$$\mathbf{S}^a \subset \mathbf{R}^{a+1}, \quad \mathbf{S}^{2a+1} \subset \mathbf{C}^{a+1}, \quad \mathbf{S}^{4a+3} \subset \mathbf{H}^{a+1}.$$

On notera \mathbf{U}_i^{a+1} le plus grand groupe linéaire qui, sur \mathbf{K}_i^{a+1} , respecte la forme $\sum_i z_i \bar{z}'_i$; pour :

- $i = 1$, c'est le groupe orthogonal $\mathbf{O}(a+1)$;
- $i = 2$, c'est le groupe unitaire $\mathbf{U}(a+1)$;
- $i = 4$, c'est le groupe symplectique $\mathbf{Sp}(a+1)$.

Alors \mathbf{P}_i^a peut s'écrire comme espace homogène

$$(3.1) \quad \mathbf{P}_i^a = \mathbf{U}_i^{a+1} / \mathbf{W}_i^a,$$

où, par définition, \mathbf{W}_i^a est le sous-groupe de \mathbf{U}_i^{a+1} qui laisse fixe la \mathbf{K}_i -droite $\mathbf{K}_i \cdot e_{a+1}$ (où e_{a+1} désigne le dernier vecteur de la base canonique de \mathbf{K}_i^{a+1}). On a donc, si

$$\begin{aligned} i = 1 : & \quad \mathbf{W}_1^a = \mathbf{O}(a) \times \mathbf{O}(1), \\ i = 2 : & \quad \mathbf{W}_2^a = \mathbf{U}(a) \times \mathbf{U}(1), \\ i = 4 : & \quad \mathbf{W}_4^a = \mathbf{Sp}(a) \times \mathbf{Sp}(1). \end{aligned}$$

(3.2) Lorsque $i = 8$ et $a = 1$, on pose $U_8^2 = \text{Spin}(9)$, et l'on identifie $\text{Spin}(9)$ avec sa représentation linéaire canonique dans \mathbf{R}^{16} ; on peut d'ailleurs identifier \mathbf{R}^{16} à $\mathbf{Ca}^2 = \mathbf{Ca} \oplus \mathbf{Ca}$. Le groupe W_8^1 est le sous-groupe de $\text{Spin}(9)$ qui laisse invariant e_1 , le premier vecteur de la base canonique de \mathbf{R}^{16} , il est isomorphe à $\text{Spin}(7)$. Le quotient est $P_8^1 = \text{Spin}(9)/\text{Spin}(7) = U_8^2/W_8^1$, ensemble des \mathbf{Ca} -droites de \mathbf{Ca}^2 . Pour $i = 8$ et $a = 2$, P_8^2 est justement défini ([15], § 6) comme l'espace homogène $F_4/\text{Spin}(9)$; nous poserons donc $U_8^3 = F_4$ et $W_8^2 = \text{Spin}(9)$. Nous fixerons le plongement $P_8^1 \subset P_8^2$ précisément par les inclusions $\text{Spin}(7) \subset \text{Spin}(9) \subset F_4$.

(3.3) Lorsque $a = 1$, le projectif P_i^1 est difféomorphe à la sphère S^i : pour $i = 1, 2, 4$ (voir, par exemple, [12], p. 71); lorsque $i = 8$, voir [32], 20.6, p. 109. On prendra cependant bien garde à ce que, du point de vue riemannien [cf. (3.5)], ce difféomorphisme n'est pas une isométrie; P_i^1 est de courbure constante égale à 4, car il est de diamètre $\frac{\pi}{2}$ et non π , tandis que S^i est de courbure 1. On déduit de ces difféomorphismes les fibrations de Hopf :

$$S^1 \rightarrow S^3 \rightarrow S^2, \quad S^3 \rightarrow S^7 \rightarrow S^4, \quad S^7 \rightarrow S^{15} \rightarrow S^8.$$

Plus généralement, en restreignant la projection canonique $p : K_i^{a+1} \rightarrow P_i^a$ à la sphère $S^{i(a+1)-1} \subset K_i^{a+1}$, on a les fibrations :

$$(3.4) \quad S^{i-1} \rightarrow S^{i(a+1)-1} \rightarrow P_i^a \quad (i = 1, 2, 4 \text{ et tous } a).$$

Par contre, il n'existe pas de fibration $S^7 \rightarrow S^{23} \rightarrow P_8^2$, voir, par exemple : M. Greenberg, *Lectures on Algebraic Topology*, milieu de la page 152.

L'ensemble des P_i^a forme exactement l'ensemble des espaces riemanniens symétriques compacts de rang 1 : ([18], p. 354).

(3.5) Question de *structures riemanniennes* sur nos projectifs, tous les P_i^a possèdent une *structure riemannienne canonique*, que l'on notera g_0 . La raison en est que la représentation linéaire d'isotropie [cf. (2.16)] de W_i^a opère transitivement sur les directions de l'espace tangent; plus précisément, si e désigne le point base de P_i^a , c'est-à-dire la droite projective $K_i.e_{a+1}$ pour $i = 1, 2, 4$ ou la classe à gauche W_i^a de l'espace homogène U_i^{a+1}/W_i^a pour tout i , et si $T_e P_i^a$ est l'espace tangent à la variété P_i^a en e , le groupe W_i^a opère linéairement dans $T_e P_i^a$: on désignera par \underline{W}_i^a ce groupe linéaire. \underline{W}_i^a opère transitivement sur les directions de $T_e P_i^a$ ([18], prop. 5.1), en particulier est irréductible. On applique alors le lemme (2.17). Dans la suite, on désignera par g_0 cette structure rieman-

nienne, ceci entendu *soit* à un scalaire près, *soit* celle normée en sorte que le diamètre de P_i^a soit égal à $\frac{\pi}{2}$. Ces structures riemanniennes sont héréditaires : pour l'inclusion canonique $P_i^b \subset P_i^a$, $g_0(P_i^b)$ n'est autre que la restriction à P_i^b de $g_0(P_i^a)$.

Pour $i = 1, 2, 4$ et P_s^1 on peut réaliser g_0 ainsi : la projection canonique $p : K_i^{a+1} \rightarrow P_i^a$ détermine un isomorphisme entre les espaces vectoriels $T_e P_i^a$ et le sous-espace affine $e_{a+1} + K_i^a$ (pour le plongement canonique $K_i^a \subset K_i^{a+1}$), donc un isomorphisme entre $T_e P_i^a$ et K_i^a ; alors g_0 n'est autre, à travers cet isomorphisme, que la partie réelle (euclidienne) de la forme hermitienne canonique $\sum_i z_i \bar{z}_i$ de K^a .

Les fibrations $S^{i-1} \rightarrow S^{i(a+1)-1} \xrightarrow{p} P_i^a$, lorsque les sphères et P_i^a sont munis de leur structure riemannienne canonique, sont des submersions riemanniennes [cf. (2.8)] : ceci résulte de l'unicité de g_0 . On aura donc, d'après la formule (2.13), pour toute fonction f sur $S^{i(a+1)-1}$

$$(3.6) \quad \int_{S^{i(a+1)-1}} f \cdot v_{g_0} = \int_{m \in P_i^a} \left(\int_{p^{-1}(m)} f \cdot v_{p^{-1}(m)} \right) v_{g_0}.$$

Si on applique la formule (3.6) à la fonction 1, comme les volumes des sphères sont connus, on aura les volumes des P_i^a ($i = 1, 2, 4$) :

$$(3.7) \quad \text{vol}(P_1^a, g_0) = \frac{\pi^{n+1}}{n!} \quad \text{si } a = 2n + 1,$$

$$(3.8) \quad \text{vol}(P_1^a, g_0) = \frac{(2\pi)^n}{(2n-1)(2n-3)\dots 3.1} \quad \text{si } a = 2n,$$

$$(3.9) \quad \text{vol}(P_2^a, g_0) = \frac{\pi^a}{a!},$$

$$(3.10) \quad \text{vol}(P_4^a, g_0) = \frac{\pi^{2a}}{(2a+1)!}.$$

Pour calculer $\text{vol}(P_s^2, g_0)$, il faut une autre méthode, d'après ce qui a été dit à la suite de la formule (3.4); à l'aide de l'application exponentielle, on en trouvera un calcul dans ([7], p. 113) ou dans ([3], p. 210); le résultat est

$$(3.11) \quad \text{vol}(P_s^2, g_0) = \frac{6\pi^8}{11!}$$

[qui coïncide d'ailleurs avec $\text{vol}(S^{23}, g_0)/\text{vol}(S^7, g_0)$, bien qu'il n'y ait pas de fibration correspondante]. Quant au volume de (P_s^1, g_0) , c'est celui de la sphère S^8 de courbure constante égale à 4, donc

$$(3.12) \quad \text{vol}(P_s^1, g_0) = \frac{\pi^4}{8.7.5.3}.$$

(3.13) Question de *sous-espaces projectifs* dans nos projectifs, dans chaque P_i^a et pour tout $0 \leq b \leq a$, on peut considérer les sous-espaces projectifs de K_i -dimension égale à b ; on notera $G_i^{a,b}$ cet ensemble, puisqu'il s'identifie évidemment à la grassmannienne des sous-espaces vectoriels de dimension $b+1$ de K_i^{a+1} , ceci pour $i=1, 2, 4$. Lorsque $i=8$, le seul cas à considérer est $G_8^{2,1}$, l'ensemble des droites projectives de P_8^2 , qui sont bien définies (voir, par exemple, [15], § 7); géométriquement, les droites de P_8^2 (ainsi, plus généralement, que les hyperplans de P_i^a) se réalisent en dualité avec les points de P_8^2 : la droite duale du point m est l'ensemble des points de P_8^2 situés à la distance $\frac{\pi}{2}$ de m . Le groupe U_i^{a+1} opère transitivement sur $G_i^{a,b}$.

(3.14) Questions *d'orientation*: d'une part, chaque P_i^a , pour tous a et $i=2, 4, 8$, est orienté canoniquement, parce que l'on oriente naturellement K_i^a , d'où une orientation de $T_e P_i^a$, que l'on peut transporter sur P_i^a par U_i^{a+1} parce qu'il est connexe si $i=2, 4, 8$. D'autre part, puisque $P_i^b \subset P_i^a$ est orienté comme on vient de le faire, et que U_i^{a+1} opère transitivement sur $G_i^{a,b}$, chaque élément de $G_i^{a,b}$ est orienté canoniquement.

4. HOMOLOGIES. — Pour les groupes de cohomologie H^* des P_i^a on posera :

$$H^*(P_i^a) = H^*(P_1^a; \mathbf{Z}_2) \quad \text{si } a = 1, \quad H^*(P_i^a) = H^*(P_i^a; \mathbf{Z}) \quad \text{si } i = 2, 4, 8.$$

De même pour les H_* . On rappelle que $H^*(P_i^a)$ est un anneau engendré par un élément $\alpha \neq 0$, de degré i et vérifiant la seule relation $\alpha^{a+1} = 0$. En particulier, par dualité: si $i=1$, tous les $H_k(P_1^a)$ sont isomorphes à \mathbf{Z}_2 ($k=0, 1, \dots, a$); si $i=2, 4, 8$, tous les $H_k(P_i^a)$ sont nuls à l'exception des $H_{hi}(P_i^a)$ qui sont tous isomorphes à \mathbf{Z} ($h=0, 1, \dots, a$). Si $j: X \rightarrow Y$ est un morphisme de variétés, on notera

$$j^*: H^*(Y) \rightarrow H^*(X), \quad j_*: H_*(X) \rightarrow H_*(Y)$$

les morphismes associés en cohomologie et homologie respectivement. Si X est une variété compacte, connexe, de dimension d , on a $H_d(X; \mathbf{Z}_2)$ et $H^d(X; \mathbf{Z}_2)$ isomorphes à \mathbf{Z}_2 et si X est orientable, alors $H^d(X; \mathbf{Z})$ et $H_d(X; \mathbf{Z})$ sont isomorphes à \mathbf{Z} . On écrira $H_d(X)$ dans tous les cas.

(4.1) Pour une sous-variété C^∞ compacte connexe Y d'un P_i^a , on introduira les notations suivantes :

$$(a) \quad Y \approx P_i^b \quad (\text{dans } P_i^a) \quad \text{si } Y \in G_i^{a,b} \quad [\text{voir (3.13)}];$$

(b) $Y \sim P_i^b$ (dans P_i^a) si Y est difféomorphe à P_i^b et telle que

$$j_* : H_{ib}(Y) \rightarrow H_{ib}(P_i^a)$$

applique un générateur de $H_{ib}(Y)$ sur un générateur de $H_{ib}(P_i^a)$;

(c) $Y \not\sim 0$ (dans P_i^a) si, Y étant de dimension d et de plus orientable si $i = 2, 4, 8$, l'image par j_* d'un générateur de $H_d(Y)$ est un élément non nul de $H_d(P_i^a)$ (remarquer que donc nécessairement d est un multiple de i).

Évidemment $Y \approx P_i^b$ (dans P_i^a) entraîne $Y \sim P_i^b$ (dans P_i^a) et $Y \sim P_i^b$ (dans P_i^a) entraîne $Y \not\sim 0$ (dans P_i^a). Par contre, ces définitions ne sont pas équivalentes; pour (a) et (b), il suffit de modifier localement une $Y \in G_i^{a,b}$. Pour (b) et (c), il suffit d'ajouter à une $Z \approx P_i^b$ (dans P_i^a) une anse située dans un ouvert contractile de P_i^a . Ceci sauf l'exception $i = 1, b = 1$; dans ce cas, (b) et (c) sont équivalentes, car une variété compacte connexe de dimension 1 est difféomorphe S^1 , donc à P_1^1 . Les définitions (4.1), (b) et (c) s'étendent à une variété X difféomorphe à un P_i^a :

(4.2) Pour une sous-variété Y , compacte connexe, d'une variété X difféomorphe à un P_i^a , on introduit les notations :

(a) $Y \sim P_i^b$ (dans X) : comme en (4.1), (b);

(b) $Y \not\sim 0$ (dans X) : comme en (4.1), (c).

(4.3) LEMME. — Si Y est de dimension ib , $b < a$, X difféomorphe à P_i^a , alors $Y \not\sim 0$ (dans X) est équivalent à $H_{i(b+1)}(X, Y)$ est isomorphe à \mathbf{Z} , si $i = 1$ et \mathbf{Z} si $i = 2, 4, 8$.

Ce lemme résulte de la valeur des $H_*(P_i^a)$ et de la suite exacte d'homologie du couple (X, Y) .

(4.4) LEMME. — Soit Y une sous-variété de dimension ib de P_i^a et Z une sous-variété de dimension ic de Y ; supposons que $Y \sim P_i^b$ (dans P_i^a) et $Z \not\sim 0$ (dans Y). Alors $Z \not\sim 0$ (dans P_i^a).

Remarquer que $Z \not\sim 0$ (dans Y) et $Y \not\sim 0$ (dans P_i^a) n'entraînent pas $Z \not\sim 0$ (dans P_i^a) : comme contre-exemple, on pourra prendre l'exemple ci-dessus précédent (4.2) et, dans son anse, installer une courbe convenable.

Pour démontrer ce lemme, regardons d'abord la suite exacte du couple (P_i^a, Y) ; le stade $j_* : H_{ib}(Y) \rightarrow H_{ib}(P_i^a)$ est un isomorphisme par hypothèse, donc aussi $j_* : H^{ib}(P_i^a) \rightarrow H^{ib}(Y)$. Soit β un générateur de $H^i(Y)$ et α un générateur de $H^i(X)$; on a donc $j^*(\alpha^b) = \pm \beta^b$, donc $j^*(\alpha) = \pm \beta$, puis $j^*(\alpha^h) = \pm \beta^h$ pour tout $h = 0, 1, \dots, b$, d'où des isomorphismes $j_* : H_{ih}(Y) \rightarrow H_{ih}(P_i^a)$ pour tous ces $h = 0, 1, \dots, b$.

Il résulte alors de la suite exacte d'homologie du couple (P_i^a, Y) que $H_k(P_i^a, Y) = 0$ pour tout $k \leq ib$. On peut évidemment supposer $c < b$, sinon il n'y a rien à démontrer; considérons la suite exacte du triple (P_i^a, Y, Z) , ce qui précède montre que $H_{i(c+1)}(Y, Z)$ est isomorphe à $H_{i(c+1)}(P_i^a, Z)$. Il suffit alors d'appliquer deux fois le lemme (4.3).

(4.5) LEMME. — Si $Y \sim P_i^b$ (dans P_i^a) et $Z \sim P_i^c$ (dans Y), alors $Z \sim P_i^c$ (dans P_i^a).

Pour les injections d'inclusions $k: Z \rightarrow Y$, $j: Y \rightarrow P_i^a$, les morphismes associés j_* , k_* transforment : j_* un générateur de $H_{ib}(Y)$ en un générateur de $H_{ib}(P_i^a)$, k_* un générateur de $H_{ic}(Z)$ en un générateur de $H_{ic}(Y)$. La démonstration du lemme (4.4) montre en fait que j_* transforme un générateur de $H_{ic}(Y)$ en un générateur de $H_{ic}(P_i^a)$, donc $(j \circ k)_* = j_* \circ k_*$ transforme bien un générateur de $H_{ic}(Z)$ en un générateur de $H_{ic}(P_i^a)$.

(4.6) LEMME. — Soit Y une sous-variété de P_i^a , telle que $Y \not\sim 0$ (dans P_i^a) et Y de dimension ib , $b < a$. Alors, quel que soit $Q \approx P_i^{a-b}$ (dans P_i^a), on a $Q \cap Y \neq \emptyset$.

Par l'absurde; soit $Q \approx P_i^{a-b}$ (dans P_i^a) tel que $Q \cap Y = \emptyset$, donc $Y \subset P_i^a - Q$. Comme $b < a$, $P_i^a - Q$ est homéomorphe à une boule ouverte de \mathbf{R}^{ia} ; il en résulte que, pour l'inclusion $j: Y \rightarrow P_i^a$, le morphisme j_* transforme un générateur de $H_{ib}(Y)$ en l'élément 0 de $H_{ib}(P_i^a)$, ce qui est contradictoire.

5. CARCANS. — Soit g une structure riemannienne quelconque sur un P_i^a et un entier b , $0 < b < a$; on donne alors les définitions et notations suivantes de *carcans* et *quotients* :

$$\begin{aligned} \text{carc}_b(P_i^a, g) &= \inf \{ \text{vol}(Y, g|_Y) : Y \text{ sous-variété} \\ &\quad \text{de dimension } bi \text{ de } P_i^a \text{ et } Y \not\sim 0 \text{ (dans } P_i^a) \}, \\ \text{carc}'_b(P_i^a, g) &= \inf \{ \text{vol}(Y, g|_Y) : Y \not\sim P_i^b \text{ (dans } P_i^a) \}, \\ \text{quot}_b(P_i^a, g) &= (\text{vol}(P_i^a, g))^b / (\text{carc}_b(P_i^a, g))^a, \\ \text{quot}'_b(P_i^a, g) &= (\text{vol}(P_i^a, g))^b / (\text{carc}'_b(P_i^a, g))^a. \end{aligned}$$

On a évidemment, pour tous a, b, i, g :

$$(5.1) \quad \text{carc}_b(P_i^a, g) \leq \text{carc}'_b(P_i^a, g), \quad \text{quot}'_b(P_i^a, g) \leq \text{quot}_b(P_i^a, g).$$

Je ne sais pas si l'on a $\text{carc}_b(P_i^a, g) = \text{carc}'_b(P_i^a, g)$; c'est peu probable; voir les dessins de [1].

A ce sujet, dans tout cet article dont le but est l'étude des carcans, nous ne nous préoccupons pas de leur réalisation géométrique, c'est-à-dire de l'existence de sous-variétés minimales de P_i^a muni d'une structure riemannienne g , ceci à l'exception du cas $g = g_0$ ou du cas $i = 1$ et $b = 1$. Dans ce dernier, $Y \not\approx 0$ (dans P_1^a) veut simplement dire que Y est une courbe fermée simple de P_1^a non homotope à 0 au sens de l'homotopie libre (sans point base). En outre, on sait que toute telle classe d'homotopie libre contient une géodésique fermée dont la longueur est la borne inférieure des courbes de cette classe (folk).

Pour le cas $g = g_0$, structure riemannienne canonique de P_i^a , on montrera dans le paragraphe 7 que

$$\text{carc}_b(P_i^a, g_0) = \text{carc}'_b(P_i^a, g_0) = \text{vol}(P_i^b, g_0),$$

et que cette borne inférieure est atteinte pour les $Y \approx P_i^b$ (dans P_i^a).

(5.2) De même qu'en (4.2), on peut définir des $\text{carc}_b(X, g)$, $\text{carc}'_b(X, g)$, $\text{quot}_b(X, g)$, $\text{quot}'_b(X, g)$ pour toute variété riemannienne (X, g) , où X est difféomorphe à P_i^a .

6. THÉORÈME DE WIRTINGER ET GÉNÉRALISATIONS. — Dans tout ce paragraphe, $i = 2, 4, 8$. Les $G_i^{a,b}$ sont définis en (3.13).

Pour calculer les carcans des (P_i^a, g_0) au paragraphe suivant, nous aurons besoin essentiellement du résultat (6.3) ci-dessous.

(6.1) DÉFINITIONS. — Dans un P_i^a , $m \in P_i^a$, un sous-espace vectoriel V de $T_m P_i^a$ est dit un K_i -sous-espace s'il existe b , $0 \leq b \leq a$ et $Y \in G_i^{a,b}$ telle que $m \in Y$ et $V = T_m Y$. Une sous-variété Y de P_i^a est dite une K_i -sous-variété si, pour tout $m \in Y$, l'espace tangent $T_m Y$ est un K_i -sous-espace vectoriel.

(6.2) Remarques. — Pour $i = 2$, les K_2 -sous-variétés sont autres que les sous-variétés analytiques complexes de P_2^a . D'après (3.14), pour tout i tout K_i -sous-espace vectoriel est canoniquement orienté.

(6.3) THÉORÈME. — Sur chaque P_i^a il existe une forme différentielle extérieure ω , de degré i , telle que pour toute sous-variété compacte orientée Y , de dimension ib , de P_i^a , on ait

$$\text{vol}(Y, g_0|_Y) \geq s_{i,b} \int_Y \wedge^b \omega,$$

avec

$$s_{2,b} = \frac{1}{b!}, \quad s_{4,b} = \frac{6}{(2b+1)!}, \quad s_{8,1} = 1 \quad \text{et} \quad s_{8,2} = \frac{7}{66}.$$

De plus, l'égalité n'est atteinte, et l'est alors effectivement, que si Y est une K_i -sous-variété, munie de l'orientation canonique. On appelle ω la forme canonique de P_i^a . En outre, ω est fermée : $d\omega = 0$.

(6.4) *Remarque.* — La forme ω est héréditaire, en ce sens que, pour l'inclusion canonique $P_i^b \subset P_i^a$, la forme canonique de P_i^b n'est autre que la restriction à P_i^b de celle de P_i^a . Ceci résulte du théorème lui-même.

Pour $i = 2$, ce théorème est classique; voir, par exemple, [28].

L'extension à $i = 4$ et $i = 8$ nous semble nouvelle. Le théorème, dans les trois cas, se déduit, selon la technique exposée dans [28], par la formule de Stokes et une inégalité ponctuelle, relative à une forme extérieure de degré i et ses puissances extérieures, sur l'espace vectoriel K_i^a . Pour $i = 2$, la forme est celle de Kähler et l'inégalité est celle de Wirtinger ([14], p. 40). Pour $i = 4$, la forme extérieure de degré 4 est connue : voir [22] et [8], p. 49-50.

Pour $i = 8$, la forme de degré 8 est théoriquement connue [propos. (6.5)]; nous en donnons une expression géométrique en (6.8). En fait, à un scalaire près, pour tout $i = 2, 4, 8$, cette forme canonique est connue depuis longtemps, théoriquement, en vertu de la :

(6.5) PROPOSITION. — Sur P_i^a , pour tout b , $0 \leq b \leq a$, il existe, à un scalaire près, une forme différentielle extérieure et une seule, de degré ib , invariante par U_i^{a+1} . En outre, cette forme est fermée.

Écrivons P_i^a comme espace riemannien symétrique compact $P_i^a = U^{a+1}/W_i^a$. Pour un tel espace, il y a identité entre les formes différentielles extérieures invariantes par U^{a+1} et les formes harmoniques pour la structure riemannienne g_0 . D'après le théorème de Hodge, l'espace vectoriel de ces formes harmoniques, de degré k , est isomorphe au groupe de cohomologie réelle $H^k(P_i^a, \mathbf{R})$ ([29], p. 159). D'après le début du paragraphe 4, la dimension de $H^k(P_i^a, \mathbf{R})$ est nulle sauf si $k = ib$, auquel cas elle vaut 1. Ce qui démontre la proposition.

Maintenant les formes différentielles extérieures sur $P_i^a = U_i^{a+1}/W_i^a$ s'identifient aux formes extérieures sur $T_e P_i^a$ qui sont invariantes par la représentation linéaire d'isotropie \underline{W}_i^a définie en (3.5); comme en (3.5) on identifiera $T_e P_i^a$ avec K_i^a et notera encore par abus \underline{W}_i^a le groupe linéaire transféré de \underline{W}_i^a par cette identification. Par transfert de la définition (6.1) on peut donc maintenant parler de K_i -sous-espace vectoriel de K_i^a ; pour $i = 2$, ceci coïncide avec celle de sous-espace vectoriel complexe de \mathbf{C}^a , pour $i = 4$ avec de sous-espace vectoriel quaternionien de \mathbf{H}^a . Pour $i = 8$, cette notion résulte de la construction de P_8^2 par exemple; voir (3.2).

(6.6) THÉORÈME. — Sur K_i^a il existe une forme extérieure ω_0 invariante par \underline{W}_i^a et ayant la propriété suivante : pour tout sous-espace vectoriel réel V de K_i^a , de dimension réelle ib ($0 \leq b \leq a$) et orienté, si l'on désigne par ν_V la ib -forme volume de V , alors on a

$$\nu_V = k s_{i,b} \overset{b}{\wedge} \omega_0|_V, \quad \text{avec } |k| \geq 1.$$

En outre, $k = 1$ si et seulement si V est un K_i -sous-espace muni de l'orientation canonique.

Démontrons ici que le théorème (6.3) résulte du théorème (6.6). D'abord, à partir de ω_0 on construit ω sur P_i^a , ce que l'on peut faire parce que ω_0 est invariante par \underline{W}_i^a . Il résulte de la proposition (6.5) que cette forme ω est nécessairement fermée. Par construction même, ω a la propriété suivante : $\forall m \in P_i^a$ et quel que soit le sous-espace vectoriel orienté V , de dimension ib , de $T_m P_i^a$, on a $\nu_V = k s_{i,b} \overset{b}{\wedge} \omega|_V$, $|k| \geq 1$. Par intégration sur la sous-variété orientée Y , on en déduit

$$\text{vol}(Y, g_{0Y}) = \int_{m \in Y} \nu_{T_m Y} = \int_Y k s_{i,b} \overset{b}{\wedge} \omega|_{T_m Y} \geq s_{i,b} \int_Y \overset{b}{\wedge} \omega.$$

Nous devons maintenant démontrer le théorème (6.6); ce sera assez long, surtout pour $i = 8$. Pour $i = 2$, le théorème (6.6) est le théorème de Wirtinger; on en trouvera une démonstration rapide dans ([14], p. 40).

Le cas $i = 4$. — Identifions $K_i^a = \mathbf{H}^a$ avec \mathbf{C}^{2a} , et appelons α la forme extérieure de degré de $2 K_i^a$ déduite, par cette identification, de la forme ω_0 de $\mathbf{C}^{2a} = K_i^{2a}$. Le sous-groupe \underline{W}_i^a du groupe linéaire de l'espace vectoriel réel K_i^a , déduit de $W_i^a = \text{Sp}(a) \times \text{Sp}(1)$, peut s'écrire $\text{Sp}(a) \cdot \underline{\text{Sp}}(1)$, où $\underline{\text{Sp}}(1)$ est le groupe des homothéties de K_i^a de rapport un quaternion de norme 1, et où le \cdot indique que l'on a fait le quotient de $\text{Sp}(a) \times \underline{\text{Sp}}(1)$ par \pm identité.

(6.7) LEMME. — Si l'on munit $\underline{\text{Sp}}(1)$ de sa mesure de Haar de masse totale égale à 1, alors on a, pour tout b , $0 \leq b \leq a$, la formule

$$\int_{t \in \underline{\text{Sp}}(1)} \overset{2b}{\wedge} (t^* \alpha) dt = ((2b)!) s_{i,b} \overset{b}{\wedge} \omega_0.$$

Montrons d'abord que l'intégrale à calculer est proportionnelle à $\overset{b}{\wedge} \omega_0$; il suffit, d'après la proposition (6.5), de montrer que cette intégrale est invariante par $\text{Sp}(a) \cdot \underline{\text{Sp}}(1)$. L'invariance par $\underline{\text{Sp}}(1)$ résulte de ce que l'on a fait justement la moyenne par ce groupe; l'invariance par $\text{Sp}(a)$

résulte de ce que $\text{Sp}(a) \subset \text{U}(2a)$, donc α est invariante par $\text{Sp}(a)$; on gagne alors parce que $\text{Sp}(a)$ et $\underline{\text{Sp}}(1)$ commutent. Il faut ensuite calculer le facteur de proportionnalité; ceci résultera de la démonstration ci-dessous.

Démonstration du théorème (6.6) lorsque $i = 4$. — Soit P un $2b$ -uplet orthonormé de vecteurs qui soit une base de V ; alors le théorème de Wirtinger [théorème (6.6) pour $i = 2$] entraîne que, pour tout $t \in \underline{\text{Sp}}(1)$,

$$\left(\bigwedge^{2b} \alpha \right) (t(P)) = ((2b)!) k, \quad \text{avec } |k| \leq 1,$$

puisque $t(P)$ est encore orthonormé. On a donc

$$\left(\int_{\underline{\text{Sp}}(1)} \bigwedge^{2b} t^* \alpha \, dt \right) (P) = \int_{\underline{\text{Sp}}(1)} \left(\bigwedge^{2b} t^* \alpha \right) (P) \, dt = \int_{\underline{\text{Sp}}(1)} \left(\bigwedge^{2b} \alpha \right) (t(P)) \, dt \leq (2b!).$$

L'égalité ne peut être atteinte, et l'est alors effectivement, que (théorème de Wirtinger, $i = 2$) si $t(V)$ est un \mathbf{C} -sous-espace de \mathbf{C}^{2a} , identifié à K_i^a , pour tout $t \in \underline{\text{Sp}}(1)$. On note $\{1, \mathcal{J}, \mathcal{I}, \mathcal{K}\}$ la \mathbf{R} -base canonique de \mathbf{H} . En prenant $t = \text{identité}$, on voit que V est un \mathbf{C} -sous-espace, donc admet une base de la forme $\{x_n\} \cup \{\mathcal{J}x_n\}$ ($n = 1, \dots, b$); prenons pour t l'homothétie de rapport $\frac{1 + \mathcal{J}}{\sqrt{2}}$ et écrivons que $t(V)$ est un \mathbf{C} -sous-espace, ce qui entraîne $(\mathcal{J} - \mathcal{K})x_n$ et $\mathcal{J}(1 + \mathcal{I})x_n = (\mathcal{I} + \mathcal{K})x_n$, pour tout n , sont dans $t(V)$, donc que $t(V)$ contient tous les $\mathcal{J}x_n$ et tous les $\mathcal{K}x_n$. En procédant de même avec $\frac{1 + \mathcal{K}}{\sqrt{2}}$, on trouve finalement que V contient tous les x_n , tous les $\mathcal{J}x_n$, tous les $\mathcal{I}x_n$, tous les $\mathcal{K}x_n$, ce qui montre que l'égalité est atteinte si et seulement si V est un $(K_i = \mathbf{H})$ -sous-espace de K_i^a .

Il faut maintenant calculer le facteur de proportionnalité avec ω_0 ; en fait, jusqu'ici, nous n'avons même pas défini ω_0 ! Posons

$$\omega_0 = \frac{1}{2} \int_{t \in \underline{\text{Sp}}(1)} t^* \alpha \, dt,$$

c'est-à-dire que l'on rend le lemme (6.7) vrai pour $b = 1$; reste donc à regarder le cas $b > 1$. Appliquons le lemme (6.7) avec $a = b$ et le début de la présente démonstration à $V = K_i^a$; alors $t(V) = V$ pour tout $t \in \underline{\text{Sp}}(1)$ et la forme de gauche de la formule du lemme est donc $((2b)!)$ -fois la forme volume de $V = K_i^a$. Quant au facteur de proportionnalité de $\bigwedge^a \omega_0$ avec cette forme volume, il est calculé dans ([8], p. 50). Ce qui achève la démonstration du lemme. Pour une façon différente, quoique plus sophistiquée que le calcul de [8] (qui est un dénombrement en algèbre extérieure), voir (6.13) à la fin de ce paragraphe.

Le cas $i = 8$. — Pour $i = 8$, le seul cas non trivial à considérer est $a = 2$, $b = 1$ et le calcul de $s_{8,2}$. Nous allons donner une formule explicite définissant ω_0 comme forme extérieure de degré 8 sur $K_8^2 = \mathbf{Ca}^2$, et démontrer ensuite le théorème (6.6) pour cette forme ω_0 ; et enfin calculer $\int \omega_0$ (bien que ce soit inutile pour la suite).

L'ensemble des K_8 -droites de K_8^2 forme l'espace projectif P_8^1 , difféomorphe à la sphère S^8 [cf. (3.3)]; on écrira S^8 cet ensemble. Sur K_8^2 opère W_8^2 [cf. (3.2)], et ce groupe W_8^2 permute transitivement les éléments de $P_8^1 = P(K_8^2) = S^8$. Pour $\alpha \in S^8$, nous noterons p_α la projection orthogonale sur le sous-espace α (de dimension 8) de K_8^2 et ξ_α la forme volume canonique de α [cf. (3.14)], tout ceci au sens de la structure euclidienne canonique définie en (3.5) de K_8^2 . Soit $d\alpha$ la mesure de S^8 , invariante par \underline{W}_8^2 et de masse totale 1. Posons

$$(6.8) \quad \tau = \int_{\alpha \in S^8} p_\alpha^* \xi_\alpha d\alpha.$$

La forme cherchée ω_0 sera τ convenablement normée. D'abord :

$$(6.9) \quad \text{LEMME. — } \tau \text{ est invariante par } \underline{W}_8^2.$$

Comme \underline{W}_8^2 préserve la structure euclidienne de K_8^2 , on a, pour tout $\alpha \in S^8$ et tout $g \in \underline{W}_8^2$:

$$p_\alpha \circ g = g \circ p_{g^{-1}(\alpha)} \quad \text{et} \quad g^* \xi_\alpha = \xi_{g^{-1}(\alpha)},$$

d'où

$$\begin{aligned} g^* \tau &= \int_{S^8} g^* p_\alpha^* \xi_\alpha d\alpha = \int_{S^8} (p_\alpha \circ g)^* \xi_\alpha d\alpha = \dots \\ &= \int_{S^8} (g \circ p_{g^{-1}(\alpha)})^* \xi_\alpha d\alpha = \int_{S^8} p_{g^{-1}(\alpha)}^* (g^* \xi_\alpha) d\alpha = \dots \\ &= \int_{S^8} p_{g^{-1}(\alpha)}^* \xi_{g^{-1}(\alpha)} d\alpha = \int_{S^8} p_\alpha^* \xi_\alpha d\alpha = \tau, \end{aligned}$$

la dernière égalité d'intégrales ayant lieu parce que la mesure $d\alpha$ est invariante par \underline{W}_8^2 .

(6.10) LEMME. — Soient $\alpha, \beta \in S^8$, et $\{x, y\}$ un système orthonormé de β ; alors $p_\alpha(x)$ et $p_\alpha(y)$ sont orthogonaux et de même longueur. Si $\{x_i\}$ ($i = 1, \dots, 8$) est une base directe de β et si $\{p_\alpha(x_i)\}$ ($i = 1, \dots, 8$) est une base de α , alors elle est aussi directe.

L'idée est de construire géométriquement $p_\alpha(x)$, en utilisant la submersion riemannienne $f: S^{15} \rightarrow S^8$ de la façon suivante [voir (3.4)]. Soit $\gamma: [0, 1] \rightarrow S^8$ une géodésique de S^8 telle que $\gamma(0) = \beta$ et $\gamma(1) = \alpha$ et $\tilde{\gamma}$ son

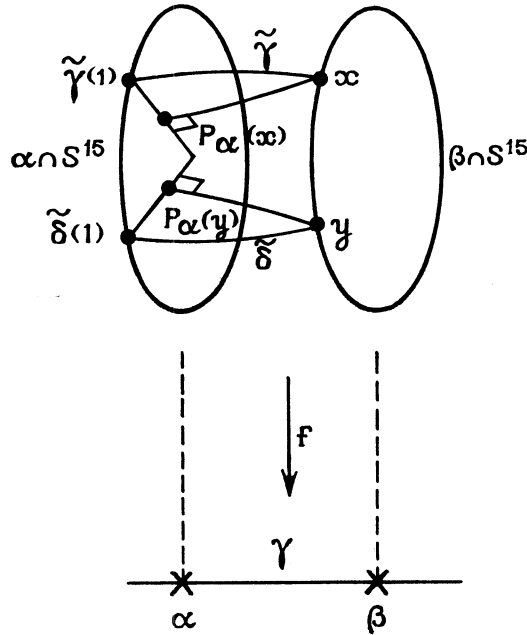
relèvement horizontal dans S^{15} , passant par $\tilde{\gamma}(0) = x$; on sait ([7], p. 61) que $\tilde{\gamma}$ est une géodésique de S^{15} , donc un grand cercle de S^{15} , qui est horizontal donc en particulier orthogonal à la fibre $f^{-1}(\alpha) = \alpha \cap S^{15}$. Ceci implique donc que $p_\alpha(x)$ est porté par $\tilde{\gamma}(1)$, i. e. que l'on a

$$p_\alpha(x) = \frac{\tilde{\gamma}(1)}{\|\tilde{\gamma}(1)\|};$$

puis, si l'on a pris soin de prendre pour γ une plus courte géodésique et si l'on désigne par $d(\cdot, \cdot)$ la distance sur S^8 :

$$\|p_\alpha(x)\| = \cos(d(\alpha, \beta)).$$

Procédons de même avec y : soit $\tilde{\delta}$ la géodésique horizontale de S^{15} , relevant γ et telle que $\tilde{\delta}(0) = y$. Le fait que les deux courbes $\tilde{\gamma}, \tilde{\delta}$ sont



constamment orthogonales à la fibre $f^{-1}(\gamma(t)) = \gamma(t) \cap S^{15}$, que les fibres sont totalement géodésiques (ce qui résulte par exemple de ce que S^8 est un espace symétrique et de l'unicité de la plus courte géodésique joignant deux points voisins) et la formule de la variation première (cf., par exemple, [7], p. 46) entraînent que la distance $\tilde{d}(\tilde{\gamma}(t), \tilde{\delta}(t))$ sur S^{15} est constante. Or « x et y sont orthogonaux dans S^{15} » est équivalent à « $\tilde{d}(x, y) = \frac{\pi}{2}$ »; donc $p_\alpha(x)$ et $p_\alpha(y)$ sont bien orthogonaux, et de même norme, égale à $\cos(d(\alpha, \beta))$.

Si l'on procède de même avec les x_i ($i = 1, \dots, 8$) d'une base de β , on obtient une famille $\{x_i(t)\}$ ($i = 1, \dots, 8$) différentiable de géodésiques de S^{15} , relevant toutes γ , qui est une base de la fibre $f^{-1}(\gamma(t))$ pour tout t , sauf éventuellement $\alpha = f^{-1}(\gamma(1))$ si $d(\alpha, \beta) = \frac{\pi}{2}$, auquel cas tous les $x_i(1)$ sont nuls. En particulier, l'orientation de la base $\{x_i(t)\}$ est continue en t , donc constante.

Démonstration du théorème (6.6) lorsque $i = 8$. — Remarquons d'abord que, en vertu du lemme, le scalaire

$$\int_{S^8} \|p_\alpha(x)\|^8 d\alpha = \int_{S^8} \cos^8(\tilde{d}(x, f^{-1}(\alpha))) d\alpha = \int_{S^8} \cos^8(d(\alpha, f(x))) d\alpha,$$

est indépendant de $x \in S^{15} \subset K_8^2$, parce que \underline{W}_8^2 est transitif sur S^{15} et laisse $d\alpha$ invariante; on notera k la valeur constante de ces intégrales.

Soit V un sous-espace vectoriel réel orienté, de dimension 8, de K_8^2 , et soit $\{x_i\}$ ($i = 1, \dots, 8$) une base positive de V . Alors

$$\tau(x_1, \dots, x_8) = \int_{S^8} \xi_\alpha(p_\alpha(x_1), \dots, p_\alpha(x_8)) d\alpha.$$

Mais

$$(6.11) \quad \xi_\alpha(p_\alpha(x_1), \dots, p_\alpha(x_8)) \leq \|p_\alpha(x_1)\| \dots \|p_\alpha(x_8)\|,$$

d'où

$$(6.12) \quad \tau(x_1, \dots, x_8) \leq \int_{S^8} \|p_\alpha(x_1)\| \dots \|p_\alpha(x_8)\| d\alpha \leq \prod_{i=1}^8 \left(\int_{S^8} \|p_\alpha(x_i)\| d\alpha \right)^{\frac{1}{8}},$$

donc on a toujours, d'après la remarque initiale,

$$\tau(x_1, \dots, x_8) \geq k.$$

Si maintenant $V = \beta \in S^8$ et si $d(\alpha, \beta) \neq \frac{\pi}{2}$, d'après le lemme (6.10) l'ensemble

$$\{\cos(d(\alpha, \beta))^{-1} p_\alpha(x_i)\} \quad (i = 1, \dots, 8)$$

est une base orthonormée directe positive de α , donc il y a égalité dans la formule (6.11), puis dans la formule (6.12) aussi parce que les huit fonctions

$$\alpha \mapsto \|p_\alpha(x_i)\| = \cos(d(\beta, \alpha))$$

sont les mêmes. Donc alors $\tau(x_1, \dots, x_8) = k$. Nous poserons donc

$$\omega_0 = k^{-1} \tau.$$

Le théorème (6.6) est démontré, à l'exception du « en outre » et de la valeur de $s_{8,2}$. Supposons donc V tel que $\tau(x_1, \dots, x_8) = k$; on doit avoir l'égalité atteinte dans l'inégalité (6.12), donc les huit fonctions

$$\alpha \mapsto \|p_\alpha(x_i)\| = \cos(d(\alpha, f(x_i)))$$

doivent être proportionnelles, ce qui implique, en regardant leur valeur en $\alpha = f(x_i)$, que $f(x_i) = f(x_j)$ pour $i = 2, \dots, 8$, c'est-à-dire que $V \in S^8$. Que la base $\{x_i\}$ soit positive résulte alors de ce que l'inégalité (6.11) doit être une égalité. Pour le calcul de $s_{8,2}$, nous donnons ci-dessus une astuce pour calculer plus généralement tous les $s_{i,b}$.

(6.13) CALCUL DES $s_{i,b}$. — Via le théorème de de Rham, ω est un générateur de $H^i(P_i^a, \mathbf{R})$ pour tout a ; en effet, appliquons le théorème (6.3) pour $b = 1$ et $Y = P_i^1 \subset P_i^a$; Y est bien une K_i -sous-variété, donc

$$\int_{P_i^1} \omega = \text{vol}(P_i^1, g_0);$$

donc le générateur de $H^i(P_i^a, \mathbf{Z}) \subset H^i(P_i^a, \mathbf{R})$ est, via de de Rham : $\text{vol}(P_i^1, g_0)^{-1} \cdot \omega$. D'après le début du paragraphe 4, on sait que

$$\overset{b}{\wedge} (\text{vol}(P_i^1, g_0)^{-1} \omega) = \text{vol}(P_i^1, g_0)^{-b} \cdot \overset{b}{\wedge} \omega$$

est le générateur de $H^{ib}(P_i^a, \mathbf{Z})$, donc, toujours à l'aide du théorème (6.3) appliqué à la K_i -sous-variété $P_i^b \subset P_i^a$, on a

$$1 = \int_{P_i^b} \text{vol}(P_i^1, g_0)^{-b} \overset{b}{\wedge} \omega = \text{vol}(P_i^1, g_0)^{-b} \text{vol}(P_i^b, g_0) s_{i,b}^{-1},$$

d'où, pour tout a muet, tous $i = 2, 4, 8$ et tous b :

$$(6.14) \quad s_{i,b} = \text{vol}(P_i^1, g_0)^{-b} \text{vol}(P_i^b, g_0),$$

que l'on calcule explicitement avec les formules (3.7) à (3.12).

Réciproquement, si l'on a calculé les $s_{i,b}$ algébriquement, comme par exemple $s_{2,b}$ dans [14] ou $s_{4,b}$ dans [8], on en déduit les volumes $\text{vol}(P_i^a, g_0)$ à partir des $\text{vol}(P_i^1, g_0)$ qui sont connus puisque ce sont ceux de sphères (de courbure 4).

(6.15) *Remarque.* — Soit (M, g) une variété riemannienne et supposons que sur chaque espace tangent $T_m M$ on ait une forme extérieure ω_m vérifiant un théorème du type du théorème (6.6), pour des sous-espaces vectoriels de dimension donnée de $T_m M$. Alors on en déduira un théorème du type du théorème (6.3), où ω est la forme différentielle extérieure

$\omega : m \mapsto \omega_m$ sur M . Et si, en outre, cette forme ω est fermée, on pourra obtenir des résultats analogues à ceux des paragraphes 7 et 8; cf. remarques (8.5) et (8.6). Voici quelques cas où l'on est dans une telle situation.

(M, g) est une variété dite parfois *symplectique*, c'est-à-dire que M possède une structure presque complexe J , commutant avec g [$g(x, y) = g(Jx, Jy)$ pour tous x, y] et que la forme de Kähler associée à g et J est fermée; il s'agit de la forme ω définie par $\omega(x, y) = g(Jx, y)$ [c'est en particulier le cas si (M, g) est kählérienne]. Alors chaque $T_m M$ est identifiable à \mathbf{C}^a (si $\dim M = 2a$) en sorte que g devienne la structure euclidienne canonique et ω la forme ω_0 du théorème de Wirtinger; voir remarque (8.5).

(M, g) est une variété riemannienne à groupe d'holonomie contenu dans $\text{Sp}(a)$. $\underline{\text{Sp}}(1)$ (ici $\dim M = 4a$); alors ω sera la forme différentielle extérieure de degré 4, canonique, de (M, g) : voir [8]. Le théorème (6.3) sera applicable; voir remarques (7.4).

(M, g) est une variété à groupe d'holonomie G_2 . D'après ([8], p. 64), (M, g) possède une forme de degré 3 et une de degré 4, son adjointe, qui sont à dérivée covariante nulle, *a fortiori* fermées. Si ω_0 est la forme de degré 3, le théorème (6.6) est valable pour tous les sous-espaces vectoriels de dimension 3; il suffit de regarder la chose sur l'espace euclidien \mathbf{R}^7 et la forme α ([8], p. 64); si V est un sous-espace de dimension 3 et $\{x, y, z\}$ une base orthonormée de V , on aura bien

$$\alpha(x, y, z) = (x, y \cdot z) \leq \|x\| \cdot \|y \cdot z\| = \|x\| \cdot \|y\| \cdot \|z\|,$$

parce que les octaves de Cayley sont une algèbre normée. De même en dimension 4. Enfin, il faudrait voir si ce résultat subsiste pour la forme de degré 4 d'une variété à groupe d'holonomie $\text{Spin}(7)$ (cf. [8], p. 66).

7. CALCUL DES CARCANS DES (P_i^a, g_0) .

(7.1) THÉORÈME. — Pour tous i, a, b , on a

$$\text{carc}_b(P_i^a, g_0) = \text{carc}'_b(P_i^a, g_0) = \text{vol}(P_i^b, g_0).$$

On a d'abord évidemment

$$\text{carc}_b(P_i^a, g_0) \leq \text{carc}'_b(P_i^a, g_0) \leq \text{vol}(P_i^b, g_0)$$

parce que, pour l'inclusion canonique $P_i^b \subset P_i^a$, la sous-variété $Y = P_i^b$ vérifie $Y \sim P_i^b$ (dans P_i^a) ainsi que $Y \simeq 0$ (dans P_i^a), puisque la classe fondamentale de $P_i^b \subset P_i^a$ est un générateur de $H_{ib}(P_i^a)$. Pour démontrer les inégalités en sens inverse, il faut procéder différemment selon les valeurs $i = 1$ ou $i = 2, 4, 8$.

Le cas $i = 1$. — L'idée de la démonstration nous a été communiquée par S. S. Chern. Soit $Y \not\approx 0$ (dans P_i^a); d'après le lemme (4.6), on a $Z \cap Y \neq \emptyset$ pour tout $Z \approx P_i^{a-b}$ (dans P_i^a). Appliquons alors la formule de géométrie intégrale ([31], p. 485, form. (12)); on obtient

$$\int_{Z \in G_i^{a,b}} \text{cardinal}(Z \cap Y) \cdot v_{g_0} = \text{vol}(Y, g_0 |_Y),$$

où v_{g_0} est une mesure sur $G_i^{a,b}$ qui est en outre telle que

$$\int_{G_i^{a,b}} v_{g_0} = \text{vol}(P_i^b, g_0).$$

Puisque $\text{cardinal}(Z \cap Y) \geq 1$ pour tout Z , on a

$$\text{carc}_b(P_i^a, g_0) \geq \text{vol}(P_i^b, g_0).$$

D'où le théorème, d'après (5.1).

Le cas $i = 2, 4, 8$. — La démonstration est maintenant calquée sur les pages 1-2 de [28]. Soit $Y \not\approx 0$ (dans P_i^a). Le théorème (6.3) entraîne

$$\text{vol}(Y, g_0 |_Y) \geq s_{i,b} \int_Y \wedge^b \omega.$$

La classe fondamentale de Y est, dans $H_{ib}(P_i^a, \mathbf{Z})$, un multiple entier positif k de celle de $P_i^b \subset P_i^a$ (orienter Y convenablement); comme P_i^b est une K_i -sous-variété de P_i^a , le théorème (6.3) montre que

$$\text{vol}(P_i^b, g_0 |_{P_i^b}) = \text{vol}(P_i^b, g_0) = s_{i,b} \int_{P_i^b} \wedge^b \omega.$$

Comme la classe fondamentale de Y est égale, dans $H^{ib}(P_i^a, \mathbf{R})$, à k fois celle de $P_i^b \subset P_i^a$, que la forme ω est fermée [théor. (6.3)], on a donc, d'après Stokes :

$$(7.2) \quad \text{vol}(Y, g_0 |_Y) \geq s_{i,b} \int_Y \wedge^b \omega = k s_{i,b} \int_{P_i^b} \wedge^b \omega = k \text{vol}(P_i^b, g_0).$$

Mais k est entier positif, donc $k \geq 1$, ce qui démontre le théorème.

(7.3) *Remarque.* — La méthode de géométrie intégrale utilisée pour $i = 1$ ne marche pas pour $i = 2, 4, 8$. En effet, il existe bien des formules de géométrie intégrale analogues à la formule utilisée de [31]; voir, par exemple, [9]. Mais la formule de [9] suppose que Y est une K_i -sous-variété.

(7.4) **REMARQUES ET PROBLÈMES.** — Il est naturel de chercher les $Y \not\approx 0$ (dans P_i^a) telles que $\text{vol}(Y, g_0 |_Y) = \text{vol}(P_i^b, g_0)$. La démonstration précé-

dente, lorsque $i = 2, 4, 8$, montre que Y est nécessairement une K_i -sous-variété de P_i^a . Si $i = 2$, c'est donc une sous-variété analytique complexe de P_2^a , compacte, le théorème de Chow entraîne qu'elle est algébrique, auquel cas sa classe fondamentale est k fois celle de P_2^b , k étant ici le degré de Y ; d'après la formule (7.2), le degré doit être 1, donc $Y \approx P_2^b$ (dans P_2^a). Si $i = 4$, d'après le théorème 5 de [16], Y , qui est une sous-variété quaternionique de P_4^a (définition, p. 5 de [16]), est nécessairement totalement géodésique, donc $Y \approx P_4^b$ (dans P_4^a). Pour $i = 8$, il est probable que ceci reste vrai.

Pour $i = 1$, la démonstration du théorème (7.1) montre que, si

$$\text{vol}(Y, g_0|_Y) = \text{vol}(P_1^b, g_0),$$

alors, à l'exception éventuelle d'un ensemble de mesure zéro, toute $Z \approx P_1^{a-b}$ (dans P_1^a) coupe Y en exactement un point; il est probable que ceci entraîne que $Y \approx P_1^b$ (dans P_1^a). Pour $b = 1$, c'est vrai, voir § 5.

Une question connexe est de rechercher s'il existe des Y , sous-variétés de P_i^a , donc la classe fondamentale soit k fois celle $P_i^b \subset P_i^a$, pour k entier positif ≥ 2 et $i = 2, 4, 8$. Pour $i = 2$, ce sont les variétés algébriques de degré k ; pour $i = 4, 8$, la question nous semble ouverte.

8. ASSERTIONS. — D'après le théorème (7.1), nous savons maintenant que

$$\text{quot}'_b(P_i^a, g_0) = \text{quot}_b(P_i^a, g_0) = \frac{(\text{vol}(P_i^a, g_0))^b}{(\text{vol}(P_i^b, g_0))^a}.$$

Les valeurs numériques se calculent à l'aide des formules (3.7) à (3.12).

Introduisons les assertions suivantes, relatives à $0 < b < a$ et des structures riemanniennes g sur un P_i^a :

(8.1) NOTATIONS :

- « $P(a, b; i)$ » : $\exists k > 0$ tel que $\forall g$: $\text{quot}_b(P_i^a, g) \geq k$,
- « $P'(a, b; i)$ » : $\exists k > 0$ tel que $\forall g$: $\text{quot}'_b(P_i^a, g) \geq k$,
- « $I(a, b; i)$ » : $\forall g$: $\text{quot}_b(P_i^a, g) \geq \text{quot}_b(P_i^a, g_0)$,
- « $I'(a, b; i)$ » : $\forall g$: $\text{quot}'_b(P_i^a, g) \geq \text{quot}_b(P_i^a, g_0)$,
- « $IC(a, b; i)$ » : « $I(a, b; i)$ » et $\text{quot}_b(P_i^a, g) = \text{quot}_b(P_i^a, g_0)$
entraîne $(P_i^a, g) = (P_i^a, g_0)$,
- « $IC'(a, b; i)$ » : « $I'(a, b; i)$ » et $\text{quot}'_b(P_i^a, g) = \text{quot}_b(P_i^a, g_0)$
entraîne $(P_i^a, g) = (P_i^a, g_0)$.

Dans les deux dernières assertions, l'égalité entre variétés riemanniennes est à entendre au sens « à un scalaire près » : cf. (3.5).

(8.2) *Remarque.* — Si une assertion « P », « I », « IC » est vraie, alors il en sera de même pour l'assertion analogue que l'on peut définir sur une variété Y difféomorphe à P_i^a , au sens de (4.2).

Dans le tableau de la page 85 de [4], figurait le point de la question pour $b = 1$; il n'y a rien de nouveau depuis, *a fortiori* pour $b \geq 1$. Reprenons cela en détail. Le seul résultat positif connu est le suivant :

(8.3) THÉORÈME [27]. — « IC (2, 1; 1) » est vraie.

A notre connaissance toute autre question, concernant les assertions « P », « P' », « I », « I' », « IC », « IC' » pour d'autres valeurs de a, b, i que 2, 1, 1, est ouverte, à l'exception du résultat négatif suivant :

(8.4) « IC ($a, b; 2$) » est fausse pour tous $0 < b < a$.

Reprenons la démonstration, esquissée en ([4], p. 84) ou ([3], p. 311). L'idée est de considérer sur P_2^a une structure riemannienne kählérienne et différentielle de g_0 . Pour en construire, on considère une fonction réelle f sur P_2^a et pose $g = g_0 + i d' d'' f$ (où $i = \sqrt{-1}$); si les dérivées secondes de f sont assez petites, g sera encore définie positive. Cette structure riemannienne g sera encore à forme de Kähler fermée, car sa forme de Kähler σ est égale à celle ω de g_0 plus $d' d'' f$, qui est bien fermée. Une telle structure riemannienne n'est pas isométrique à g_0 en général; pour le voir, on peut par exemple calculer sa courbure avec la formule (21) de la page 157 de [21].

D'après la remarque (6.15), la démonstration du théorème (6.3) s'applique sans modification autre que le changement de ω en σ , et l'on trouve

$$\text{carc}_b(P_2^a, g) = \frac{1}{b!} \int_{P_2^b} \wedge^b \sigma,$$

et, en prenant $b = a$,

$$\text{vol}(P_2^a, g) = \frac{1}{a!} \int_{P_2^a} \wedge^a \sigma.$$

Mais $\sigma = \omega + d' d'' f = \omega + d(d'' f)$, donc, d'après Stokes,

$$\int_{P_2^a} \wedge^a \sigma = \int_{P_2^a} \wedge^a \omega, \quad \int_{P_2^b} \wedge^b \sigma = \int_{P_2^b} \wedge^b \omega,$$

d'où :

$$\text{quot}_b(P_2^a, g) = \text{quot}_b(P_2^a, g_0), \quad \text{alors que } (P_2^a, g) \neq (P_2^a, g_0)$$

comme on l'a vu plus haut. Ainsi, ou « I ($a, b; 2$) » est fausse, ou « I ($a, b; 2$) » est vraie, mais l'égalité peut être atteinte pour $(P_2^a, g) \neq (P_2^a, g_0)$, donc dans tous les cas « IC ($a, b; 2$) » est fausse.

(8.5) *Remarque.* — La démonstration qui précède montre que l'on a une assertion vraie du type « I ($a, b; 2$) » mais en se restreignant aux structures riemanniennes g sur P_2^a qui sont de la forme $g_0 + id' d'' f$. On aimerait remplacer ces g par les g quelconques sur P_2^a qui sont kählériennes, voire symplectiques. Cela est possible si on se restreint au cas g kählérienne et a impair; en effet, si (P_2^a, J, g) est une structure kählérienne sur P_2^a , où J n'est pas nécessairement la structure complexe canonique J_0 ; d'après [20], il existe un difféomorphisme F de P_2^a tel que $TF \circ J_0 = J \circ TF$. En particulier, $(P_2^a, J_0, F^* g)$ est une structure kählérienne sur P_2^a , associée à la structure complexe canonique cette fois-ci. Mais alors il est classique qu'elle est de la forme $F^* g = k.g_0 + id' d'' f$, $k \in \mathbf{R}_+^*$; donc, d'après ce qui précède,

$$\text{quot}_b(P_2^a, F^* g) = \text{quot}_b(P_2^a, g_0),$$

car les quotients sont homogènes de degré 0. D'autre part, $(P_2^a, F^* g)$ et (P_2^a, g) sont isométriques (définition 2.2), donc

$$\text{quot}_b(P_2^a, F^* g) = \text{quot}_b(P_2^a, g).$$

Si a est pair ou si (P_2^a, g) est seulement symplectique, la question est ouverte.

(8.6) *Remarque.* — On peut se demander si la technique précédente permettrait de montrer que « IC ($a, b; 4$) » et « IC ($a, b; 8$) » sont aussi fausses. D'après ce qui précède, pour $i = 4$, il suffit de trouver sur P_4^a une structure riemannienne g qui soit une analogue quaternionnienne d'une structure symplectique, c'est-à-dire telle qu'en chaque point l'espace tangent admette une forme extérieure de degré 4, satisfaisant le théorème (6.3) et telle que la forme différentielle extérieure, définie sur P_4^a par l'ensemble de ces formes ponctuelles, soit fermée. Ces structures riemanniennes ne semblent pas avoir été étudiées jusqu'à présent, à part avec la condition beaucoup plus forte que le groupe d'holonomie soit contenu dans $\text{Sp}(a) \cdot \text{Sp}(1)$. Mais, sur P_4^a , on ne connaît pas d'exemple de telle structure (à groupe d'holonomie inclus dans $\text{Sp}(a) \cdot \text{Sp}(1)$) autre que g_0 et on sait que g_0 est isolée parmi elles : [2]. Pour le cas $i = 8$, on n'est guère plus renseigné; voir cependant [10].

9. RAPPORT AVEC LES STRUCTURES A GÉODÉSIIQUES TOUTES FERMÉES. — Les variétés riemanniennes (P_i^a, g_0) ont la propriété d'avoir toutes leurs géodésiques fermées simples et de même longueur π . L. W. Green a montré que, réciproquement, toute (P_i^a, g) ayant cette propriété est isométrique

à (P_1^2, g_0) [17]. Tout théorème de ce genre pour des couples (a, i) autres que $(2, 1)$ est ouvert à notre connaissance (voir [25] pour une version infinitésimale). Cependant le résultat ci-dessous établit une liaison entre les assertions IC du paragraphe 8 et un tel théorème :

(9.1) THÉORÈME. — *Supposons « IC' $(a, a - 1; 1)$ » et « I $(a - 1, 1; 1)$ » vraies. Alors, si (P_1^a, g) est une structure riemannienne dont toutes les géodésiques sont fermées simples et de longueur π , on a $(P_1^a, g) = (P_1^a, g_0)$.*

Remarquer d'abord que $\text{carc}_1(P_1^a, g) = \pi$; en effet (§ 5), $\text{carc}_1(P_1^a, g)$ est égale à la longueur d'une géodésique fermée, non homotopiquement triviale, donc de longueur π par hypothèse.

Soit $Y \sim P_1^{a-1}$ (dans P_1^a); je dis que $\text{carc}_1(Y, g|_Y) \geq \pi$. Sinon, en effet, il existerait dans Y une géodésique fermée Z , de longueur π et $Z \not\sim 0$ (dans P_1^{a-1}). D'où [lemme (4.4)] $Z \not\sim 0$ (dans P_1^a), ce qui entraînerait $\text{carc}_1(P_1^a, g) < \pi$. On peut donc appliquer « I $(a - 1, 1; 1)$ » est vraie à notre Y et donc [théor. (7.1)] :

$$\text{vol}(Y, g|_Y) \geq \text{vol}(P_1^{a-1}, g_0).$$

Or ceci a lieu pour toute $Y \sim P_1^{a-1}$ (dans P_1^a), donc, par définition du carcan : $\text{carc}'_{a-1}(P_1^a, g) \geq \text{vol}(P_1^{a-1}, g_0)$. Par application maintenant de « IC' $(a, a - 1; 1)$ » :

$$(9.2) \quad \left(\frac{\text{vol}(P_1^a, g)}{\text{vol}(P_1^a, g_0)} \right)^{a-1} \geq \left(\frac{\text{carc}'_{a-1}(P_1^a, g)}{\text{vol}(P_1^{a-1}, g_0)} \right)^a \geq 1.$$

Appliquons maintenant à une $Y \sim P_1^{a-1}$ (dans P_1^a) la formule de ([31], p. 489), avec ici $L = \pi$:

$$\text{vol}(Y, g|_Y) \geq \text{vol}(P_1^a, g) \frac{\text{vol}(P_1^{a-1}, g_0)}{\text{vol}(P_1^a, g_0)}.$$

Ceci ayant lieu pour toute $Y \sim P_1^{a-1}$ (dans P_1^a), on a donc

$$\text{carc}'_{a-1}(P_1^a, g) \geq \text{vol}(P_1^a, g) \frac{\text{vol}(P_1^{a-1}, g_0)}{\text{vol}(P_1^a, g_0)}.$$

En remplaçant dans (9.2), on trouve

$$\left(\frac{\text{vol}(P_1^a, g)}{\text{vol}(P_1^a, g_0)} \right)^{a-1} \geq \frac{\text{vol}(P_1^a, g)}{\text{vol}(P_1^a, g_0)} \quad \text{d'où} \quad \frac{\text{vol}(P_1^a, g)}{\text{vol}(P_1^a, g_0)} \leq 1.$$

A l'aide de la deuxième inégalité de (9.2), on obtient finalement

$$\text{vol}(P_1^a, g) = \text{vol}(P_1^a, g_0).$$

L'égalité a donc lieu dans (9.2) et « IC' $(a, a - 1; 1)$ » vraie entraîne que $(P_1^a, g) = (P_1^a, g_0)$.

(9.3) *Remarque.* — Actuellement on ne peut pas espérer démontrer le théorème avec seulement « I' » vraie au lieu de « IC' » car on ne sait pas s'il existe $Y \sim P_1^{a-1}$ (dans P_1^a) réalisant le carcan : $\text{vol}(Y, g|_Y) = \text{carc}'_{a-1}(P_1^a, g)$ (sous variété minimale).

10. TRANSITIVITÉS. — Les assertions I ou IC ne sont pas toutes indépendantes; par exemple :

(10.1) PROPOSITION. — *Pout tout i : « $I'(a, b; i)$ » et « $I'(b, c; i)$ » vraies entraîne « $I'(a, c; i)$ » vraie.*

Soit Y quelconque telle que $Y \sim P_i^b$ (dans P_i^a) et Z quelconque $Z \sim P_i^c$ (dans Y) [cf. (4.2)]. D'après le lemme (4.5), on a

$$Z \sim P_i^c \text{ (dans } P_i^a), \quad \text{donc } \text{carc}'_c(P_i^a, g) \leq \text{carc}'_c(Y, g|_Y) \text{ [cf. (5.2)].}$$

D'après la remarque (8.2), en appliquant « $I'(b, c; i)$ » est vraie à Y , on obtient

$$(10.2) \quad \left(\frac{\text{vol}(Y, g|_Y)}{\text{vol}(P_i^b, g_0)} \right)^c \geq \left(\frac{\text{carc}'_c(Y, g|_Y)}{\text{vol}(P_i^c, g_0)} \right)^b \geq \left(\frac{\text{carc}'_c(P_i^a, g)}{\text{vol}(P_i^c, g_0)} \right)^b.$$

Comme « $I'(a, b; i)$ » est vraie :

$$\left(\frac{\text{vol}(P_i^a, g)}{\text{vol}(P_i^a, g_0)} \right)^b \geq \left(\frac{\text{carc}'_b(P_i^a, g)}{\text{vol}(P_i^b, g_0)} \right)^a.$$

Comme la formule (10.2) a lieu pour toute $Y \sim P_i^b$ (dans P_i^a), on a donc bien

$$\left(\frac{\text{vol}(P_i^a, g)}{\text{vol}(P_i^a, g_0)} \right)^b \geq \left(\frac{\text{carc}'_c(P_i^a, g)}{\text{vol}(P_i^c, g)} \right)^{\frac{ab}{c}},$$

ce qu'il fallait démontrer.

On démontrerait de même [voir lemme (4.4)] la

(10.3) PROPOSITION. — « $I'(a, b; i)$ » et « $I(b, c; i)$ » vraies entraîne « $I(a, c; i)$ » vraie. « $IC'(a, b; i)$ » et « $I(a, b; i)$ » vraies entraîne « $IC(a, c; i)$ » vraie.

(10.4) COROLLAIRE. — Si « $I'(a, a-1; i)$ » est vraie pour tout a , alors « $I'(a, b; i)$ » est vraie pour tous a et b . Si « $IC'(a, a-1; i)$ » est vraie pour tout a , alors « $IC'(a, b; i)$ » est vraie pour tous a et b .

11. VERSIONS INFINITÉSIMALES. — Les « $I(a, b; i)$ » étant des questions ouvertes, on peut essayer de les attaquer en linéarisant le problème. Précisément : considérons une famille à un paramètre $t \mapsto g(t)$ de structures

riemanniennes sur un P_i^a ; on en déduit une application

$$(11.1) \quad t \mapsto \text{quot}_b(P_i^a, g(t)).$$

Si « IC ($a, b; i$) » est vraie, alors, pour toute famille $t \mapsto g(t)$ telle que $g(0) = g_0$ et telle que la dérivée $\frac{d(\text{quot}_b(P_i^a, g(t)))}{dt}(0)$ existe, on a nécessairement

$$\frac{d(\text{quot}_b(P_i^a, g(t)))}{dt}(0) = 0.$$

Sans préjuger de la dérivabilité de (11.1), nous allons démontrer la :

(11.2) PROPOSITION. — Soient donnés un P_i^a et un b . Il existe une fonction f , définie sur l'ensemble des structures riemanniennes de P_i^a , telle que $f(g_0) = \text{quot}_b(P_i^a, g_0)$ et telle que, pour toute famille différentiable à un paramètre $t \mapsto g(t)$ de structures riemanniennes sur P_i^a avec $g(0) = g_0$, on ait :

$$\exists \frac{d(f(g(t)))}{dt}(0) = 0 \quad \text{et} \quad f(t) \leq \text{quot}_b(P_i^a, g(t)) \quad \text{pour tout } t.$$

(11.3) Remarques. — Si la dérivée $\frac{d(\text{quot}_b(P_i^a, g(t)))}{dt}(0)$ existe, alors la proposition entraînera que

$$\frac{d(\text{quot}_b(P_i^a, g(t)))}{dt}(0) = 0.$$

Autrement formulée, la proposition (11.2) montre qu'il est vain d'espérer montrer que « IC ($a, b; i$) » ou « I ($a, b; i$) » est fausse avec une famille à un paramètre et un calcul de seule dérivée première.

Pour démontrer la proposition (11.2), l'idée est d'introduire la moyenne, pour une structure riemannienne donnée g sur P_i^a , des $\text{vol}(Y, g|_Y)$ pour tous les $Y \approx P_i^b$ (dans P_i^a). Cette moyenne sera évidemment supérieure ou égale à $\text{carc}_b(P_i^a, g)$. Il faut donc d'abord définir cette moyenne, en mettant une mesure sur $G_i^{a,b}$ et ensuite calculer la dérivée par rapport à t en $t = 0$ de cette valeur moyenne faite pour $g(t)$. Pour ce faire, nous aurons besoin du matériel suivant :

Appelons $E = V_i^{a,b}$ l'ensemble des K_i -sous-espaces [définition (6.1)] de dimension réelle ib de P_i^a et notons

$$p : E \rightarrow P_i^a = P$$

l'application qui à $V \in E$ associe le point $m \in P_i^a$ tel que $V \subset T_m P_i^a$ et

$$q : E \rightarrow G_i^{a,b} = G$$

l'application qui à $V \in E$ associe la K_i -sous-variété $Y \in G$ qui est tangente en $p(V)$ à V . Sur E le groupe $U = U_i^{a+1}$ opère transitivement; soit $K = K_i^{a,b}$ le sous-groupe de U laissant invariant V_0 , où V_0 est le sous-espace vectoriel de $T_e P_i^a$ tel que $q(V_0) = P_i^b \subset P_i^a$ (inclinaison canonique, voir § 3 et $e \in P_i^a$ est associé au vecteur e_{a+1} de la base canonique de K^{a+1}).

Pour le $W = W_i^a$ introduit au paragraphe 3, on a $W \supset K$ et on peut écrire $E = U/K$, $P = U/W$, et la fibration

$$W/K \rightarrow U/K \xrightarrow{r} U/W,$$

la fibre au point base étant $W/K = W_i^a/K_i^{a,b}$, c'est-à-dire l'ensemble des K_i -sous-espaces vectoriels, de dimension réelle ib , de $T_e P_i^a$, qui est une grassmannienne $G' = G_i^{a-1, b-1}$. Soit

$$G' \rightarrow E \xrightarrow{r} P.$$

La fibre $p^{-1}(m)$, pour $m \in P$, est la grassmannienne des K_i -sous-espaces vectoriels de dimension réelle ib de $T_m P$.

La seconde application $q : E \rightarrow G$ peut s'écrire dans la fibration

$$H/K \rightarrow U/K \xrightarrow{q} U/H,$$

où $H = H_i^{a,b}$ est le sous-groupe de U_i^{a+1} qui laisse fixe $P' = P_i^b \subset P_i^a$ ($P' \in G$); on a donc $P' = H/K$ et la fibration

$$P' \rightarrow E \xrightarrow{q} G,$$

où la fibre $q^{-1}(Y)$, pour $Y \in G$, est l'ensemble des $T_m Y$ pour m parcourant Y .

Structures riemanniennes sur E, P, G . — On munit U d'une structure riemannienne biinvariante quelconque (cf. [30], p. 13), d'où une structure riemannienne homogène sur $E = U/K$, $P = U/W$, $G = U/H$. Comme la représentation linéaire d'isotropie $\underline{W} = \underline{W}_i^a$ de P [cf. (3.5)] est irréductible, c'est [cf. (3.5)] que la structure riemannienne ainsi obtenue sur P est la canonique (normer convenablement la structure riemannienne choisie sur U). D'où, d'après le lemme (2.9) :

(11.4) LEMME. — *Pour les structures riemanniennes considérées, $p : E \rightarrow P$ et $q : E \rightarrow G$ sont des submersions riemanniennes.*

(11.5) LEMME. — *Pour toute $Y \in G$, l'application $Y \ni m \mapsto T_m Y \in q^{-1}(Y)$ est une isométrie de la variété riemannienne $Y \subset P$ sur la variété riemannienne $q^{-1}(Y) \subset E$.*

Par définition de la submersion riemannienne $E \rightarrow P$, il suffit de montrer que $q^{-1}(Y)$ est horizontale dans E (pour p). Considérons $\sigma : P \rightarrow P$ la symétrie par rapport à la sous-variété Y . Comme σ transforme une K_i -sous-variété en une K_i -sous-variété, $T\sigma$ opère dans E ; les seuls points fixes de $T\sigma$ sont ceux de $q^{-1}(Y)$ et donc, en $V \in q^{-1}(Y)$, $T_V\sigma$ est la symétrie de l'espace euclidien $T_V E$ par rapport au sous-espace $T_V(q^{-1}(Y))$. Mais $m = p(V)$ étant fixe par σ , c'est que $T_V(p^{-1}(m))$ est globalement invariant par $T\sigma$; comme $T_V(p^{-1}(m)) \cap T_V(q^{-1}(Y)) = 0$, c'est que nécessairement $T_V(p^{-1}(m))$ est inclus dans l'orthogonal de $T_V(q^{-1}(Y))$ dans $T_V E$.

On notera ν_E, ν_P, ν_G les mesures canoniques des structures riemanniennes construites sur E, P, G respectivement et $\text{vol}(E), \text{vol}(P), \text{vol}(G)$ leur masse totale. De même, $\nu_{p^{-1}(m)}$ (resp. $\nu_{q^{-1}(Y)}$) sera la mesure canonique de la structure riemannienne induite sur la fibre $p^{-1}(m) \subset E$ [resp. $q^{-1}(Y) \subset E$]. Mais $\text{vol}(p^{-1}(m))$ est une constante, que l'on notera $\text{vol}(G')$; quant à $\text{vol}(q^{-1}(Y))$, c'est une constante qui, d'après le lemme (11.5), vaut précisément $\text{vol}(P') = \text{vol}(P'_i, g_0)$.

(11.6) LEMME. — Soit M une variété, Y une sous-variété compacte de M et $t \mapsto g(t)$ une famille à un paramètre, différentiable, de structures riemanniennes sur M . Alors

$$\frac{d(\text{vol}(Y, g(t)|_Y))}{dt} = \frac{1}{2} \int_Y \text{trace}_{(g(t)|_Y)}(g'(t)|_Y) \cdot \nu_{(g(t)|_Y)},$$

où la trace est celle définie en (2.18) et où

$$g'(t) = \frac{d(g(t))}{dt}$$

est considéré comme un élément de $S^2(M)$ [cf. (2.18)].

En effet, la formule (2.5) et la formule classique donnant la dérivée d'un déterminant entraînent

$$(v_{g(t)})' = \left. \frac{d(v_{g(t)})}{dt} \right|_{t=0} = \frac{1}{2} \text{trace}_{g(t)} g'(t) \cdot v_{g(t)},$$

formule que l'on applique à $g(t)|_Y$.

Démonstration de la proposition (11.2). — Définissons une fonction c sur les structures riemanniennes sur $P = P'_i$ par

$$c(g) = (\text{vol}(G))^{-1} \int_{Y \in G} \text{vol}(Y, g|_Y) \cdot \nu_G.$$

D'après la définition même du carcan, on a $c(g) \geq \text{carc}_b(P_i^a, g)$ pour toute g . La fonction f satisfaisant les conclusions de la proposition (11.2) sera

$$(11.7) \quad f(g) = \frac{(\text{vol}(P_i^a, g))^b}{(c(g))^a}.$$

On a $f(g) \leq \text{quot}_b(P_i^a, g)$ pour toute g .

Soit maintenant $t \mapsto g(t)$ une famille différentiable à un paramètre de structures riemanniennes sur P , telle que $g(0) = g_0$. Posons $g = g_0$ et $g'(0) = h$. Le lemme (11.6) entraîne

$$(11.8) \quad (\text{vol}(P, g(t))'(0) = \frac{1}{2} \int_P \text{trace}_g h \cdot v_g.$$

Les lemmes (11.6) et (11.5) entraînent que

$$(11.9) \quad (\text{vol}(Y, g(t)|_Y))'(0) = \frac{1}{2} \int_{Y \in q^{-1}(Y)} \text{trace}_{(g|_Y)}(h|_Y) \cdot v_{q^{-1}(Y)},$$

d'où

$$\text{vol}(G) \cdot (c(g(t)))'(0) = \frac{1}{2} \int_{Y \in G} \left(\int_{Y \in q^{-1}(Y)} \text{trace}_{(g|_Y)}(h|_Y) \cdot v_{q^{-1}(Y)} \right) v_G,$$

intégrale double à laquelle on peut appliquer la formule (2.13), puisque $q : E \rightarrow G$ est une submersion riemannienne, d'où

$$\text{vol}(G) \cdot (c(g(t)))'(0) = \frac{1}{2} \int_{V \in E} \text{trace } g|_V (h|_V) \cdot v_E.$$

Appliquons maintenant la formule (2.13) en sens inverse à la submersion riemannienne $p : E \rightarrow P$:

$$(11.10) \quad \text{vol}(G) \cdot (c(g(t)))'(0) = \frac{1}{2} \int_{m \in P} \left(\int_{V \in p^{-1}(m)} \text{trace}_{(g|_V)}(h|_V) \cdot v_{p^{-1}(m)} \right) v_P$$

(11.11) LEMME. — *Pour tout $m \in P$, on a*

$$\int_{V \in p^{-1}(m)} \text{trace}_{(g|_V)}(h|_V) \cdot v_{p^{-1}(m)} = \frac{b}{a} \frac{\text{vol}(P') \cdot \text{vol}(G)}{\text{vol}(P)} (\text{trace}_g h)(m).$$

La proposition (11.2) résultera bien du lemme (11.11), puisque l'on aura alors, d'après (11.10),

$$(11.12) \quad (c(g(t)))'(0) = \frac{1}{2} \frac{b}{a} \frac{\text{vol}(P')}{\text{vol}(P)} \int_P \text{trace}_g h \cdot v_g.$$

Si l'on dérive $t \mapsto f(g(t))$ en $t = 0$ [form. (11.7)], compte tenu de ce que

$$\text{vol}(P) = \text{vol}(P_i^a, g), \quad \text{vol}(P') = \text{vol}(P_i^b, g), \quad c(g(0)) = c(g) = \text{vol}(P')$$

[remplacer dans la définition de $c(g)$ chaque $\text{vol}(Y, g|_Y)$ par $\text{vol}(P')$ et ne pas oublier que l'on a posé $g = g_0$], et si dans cette dérivée on remplace $(\text{vol}(P, g(t)))'(0)$ et $(c(g(t)))'(0)$ par les valeurs des formules (11.8) et (11.12), on trouve bien 0.

Démonstration du lemme (11.11). — Sur l'espace vectoriel euclidien $T_m P$ agit la représentation linéaire du groupe d'isotropie, soit \underline{W}_m , de l'espace homogène $P = P_i^a$. Cette représentation \underline{W}_m est irréductible et contenue dans le groupe orthogonal de $T_m P$. D'autre part, sur l'espace des formes bilinéaires symétriques $S^2(T_m P)$ sur $T_m P$, on a une forme linéaire ξ :

$$\xi : h \mapsto \xi(h) = \int_{V \in p^{-1}(m)} \text{trace}_{(g|_V)}(h|_V) \cdot \nu_{p^{-1}(m)}.$$

Par construction, cette forme linéaire ξ est invariante par \underline{W}_m .

Par dualité, pour la structure euclidienne de $S^2(T_m P)$ déduite canoniquement de celle de $T_m P$, la forme linéaire ξ fournit un élément $\xi^* \in S^2(T_m P)$, lui aussi invariant par \underline{W}_m ; d'après la démonstration du lemme (2.17), on a nécessairement $\xi^* = k.g$. La forme linéaire duale de g étant $h \mapsto \text{trace}_g h$, on a donc $\xi = k.\text{trace}_g$. Reste à calculer k .

Il suffit pour cela de prendre $h = g$, auquel cas

$$\begin{aligned} \text{trace}_g g = \dim T_m P = ia \quad \text{et} \quad \text{trace}_{(g|_V)}(g|_V) = \dim V = ib \quad \text{pour tout } V \in p^{-1}(m), \\ \xi(g) = ib \cdot \text{vol}(p^{-1}(m)) = k \cdot ia, \quad \text{soit} \quad k = \frac{b}{a} \text{vol}(p^{-1}(m)). \end{aligned}$$

Pour calculer la constante $\text{vol}(p^{-1}(m)) = \text{vol}(G')$, appliquons la formule (2.14) à la submersion riemannienne $p : E \rightarrow P$ et à la submersion riemannienne $q : E \rightarrow G$, donc :

$$\text{vol}(E) = \text{vol}(P) \cdot \text{vol}(G') = \text{vol}(P') \cdot \text{vol}(G).$$

12. VERSIONS INFINITÉSIMALES CARACTÉRISTIQUES. — La proposition (11.2) est en quelque sorte une version infinitésimale de « I($a, b; i$) » est vraie. L'analogue pour les « IC » (« inégalités caractéristiques ») est donnée par la :

(12.1) NOTATION. — On désigne, a, b, i étant donnés, par « VIC($a, b; i$) » l'assertion suivante :

si $h \in S^2(P_i^a)$ est tel que $\int_Y \text{trace}_{(g|_Y)}(h|_Y) \cdot \nu_{(g|_Y)} = 0$ pour tout $Y \in G_i^{a,b}$, alors il existe un champ de vecteurs ξ sur P tel que h soit la dérivée de Lie de g par rapport à ξ .

Justifions cela. La conséquence de « IC ($a, b; i$) » vraie est que

$$\text{quot}_b(\mathbb{P}_i^a, g) = \text{quot}_b(\mathbb{P}_i^a, g_0) \quad \text{entraîne} \quad (\mathbb{P}_i^a, g) = (\mathbb{P}_i^a, g_0);$$

ceci signifie [cf. (2.2)] qu'il existe un difféomorphisme Ξ de \mathbb{P}_i^a tel que $\Xi^* g_0 = g$. La version infinitésimale de $\Xi^* g_0 = g$, pour une famille à un paramètre $t \mapsto g(t)$, c'est que $h = g'(0) = \mathcal{L}_\xi g_0$, où \mathcal{L}_ξ désigne la dérivée de Lie. La version infinitésimale de $\text{quot}_b(\mathbb{P}_i^a, g) = \text{quot}_b(\mathbb{P}_i^a, g_0)$, pour la famille $t \mapsto g(t)$, c'est que $(\text{vol}(Y, g(t)|_Y))'(0) = 0$ pour toute $Y \in G_i^{a,b}$ (il n'y a pas, pour calculer la variation première du carcan, à s'occuper de sous-variétés différentes des $Y \in G_i^{a,b}$, parce que toutes ces Y sont des sous-variétés minimales), or $(\text{vol}(Y, g(t)|_Y))'(0)$ est donné par la formule (11.9).

On vérifie aussi que si h est une dérivée de Lie : $h = \mathcal{L}_\xi g_0$, alors

$$\int_Y \text{trace}_{(g|_Y)}(h|_Y) \cdot \nu_{(g|_Y)} = 0 \quad \text{pour toute } Y \in G_i^{a,b} \text{ et tous } a, b, i;$$

comme ce fait ne sera pas utile dans la suite, nous laissons le lecteur le démontrer.

(12.2) *Remarques.* — Les assertions « VIC ($a, b; i$) » nous semblent intéressantes en elles-mêmes; si l'on considère h comme une énergie, la condition sur h est que tous les sous-espaces projectifs de \mathbb{P}_i^a , de dimension b , sont d'énergie nulle.

Pour des h de la forme $h.g$, où f est une fonction numérique sur \mathbb{P}_i^a , la « transformation de Radon » résoud le problème, car elle montre que f est nécessairement nulle (cf. [19], theorem 6.1). Ceci montre en particulier que « VIC (2, 1; 1) » est vraie [comparer avec le théorème (8.3)] car on peut montrer que, sur \mathbb{P}_1^2 , on peut se ramener à n'étudier que des h de la forme $h = f.g$; voir [6], § 5; ceci n'est autre qu'une version infinitésimale de la représentation conforme pour S^2 et \mathbb{P}_1^2 .

Les « VIC ($a, b; i$) » ne sont pas vraies pour tous a, b, i ; en effet, « VIC ($a, b; 2$) » est fautive pour tous a, b , car si l'on prend [cf. (8.4)] $h = id' d'' f$, puis $g(t) = g_0 + t(id' d'' f)$, on a

$$\text{quot}_b(\mathbb{P}_i^a, g(t)) = \text{quot}_b(\mathbb{P}_i^a, g_0)$$

d'après le (8.4); il suffit de prendre une fonction f telle que $g_0 + id' d'' f$ soit à courbure différente de celle de g_0 , alors la dérivée en 0 de la courbure de $g(t)$ sera quelque part différente de 0, donc h ne sera pas une dérivée de Lie.

Les « VIC ($a, b; 1$) » sont particulièrement intéressantes. On a le :

(12.3) THÉORÈME [25]. — « VIC $(a, 1; 1)$ » est vraie pour tout a .

Par contre, nous démontrerons ci-dessous [théorème (12.17)] que « VIC $(a, a - 1; 1)$ » est fausse pour tout $a \geq 3$. Il serait donc intéressant d'étudier les « VIC $(a, b; 1)$ » pour $1 < b < a - 1$.

(12.4) La démonstration du théorème (12.17) est assez longue, la clef est le théorème (12.7) ci-dessous qui nous semble intéressant en lui-même; pour le formuler, voici d'abord quelques définitions.

Dans une variété riemannienne (M, g) , on appellera *hypersphère* de centre $m \in M$ et de rayon r l'ensemble $\Sigma(m, r) = \{n \in M : d(m, n) = r\}$ à la condition que r soit strictement inférieur au rayon d'injectivité de (M, g) en m ; ici $d(\cdot, \cdot)$ désigne la distance sur (M, g) et le rayon d'injectivité en m est, par définition, le plus grand réel tel que l'application exponentielle en m est un difféomorphisme sur la boule de rayon réel. Une hypersphère est donc toujours une sous-variété de M .

L'intégrale d'un $h \in S^2(M)$ sur une hypersphère Σ de (M, g) est

$$(12.5) \quad \int_{\Sigma} h = \int_{m \in \Sigma} \text{trace}_{(g|_{T_m \Sigma})} (h|_{T_m \Sigma}) \cdot v_{(g|_{\Sigma})}.$$

Si l'on note $A^1(M)$ l'ensemble des champs de vecteur C^∞ de M , $A^0(M)$ l'ensemble des fonctions numériques C^∞ sur M , rappelons que l'on définit des opérateurs

$$(12.6) \quad \delta : S^2(M) \rightarrow A^1(M), \quad \delta : A^1(M) \rightarrow A^0(M)$$

(cf. [5], p. 287 ou [6], p. 380). Ceci posé, on a le :

(12.7) THÉORÈME. — Soit (M, g) une variété riemannienne à courbure sectionnelle constante. Alors, pour un $h \in S^2(M)$, il y a équivalence entre les deux ensembles de conditions :

- (i) $\text{trace}_g h = 0$ et $\delta \delta h = 0$;
- (ii) quelle que soit l'hypersphère Σ de M : $\int_{\Sigma} h = 0$.

Ce théorème est local, par exemple (M, g) n'a pas à être complète. On va faire la démonstration pour un $m \in M$ fixé; on peut donc supposer que M est la boule de centre m et de rayon égal au rayon d'injectivité en m ; soit r_0 ce rayon, alors, pour tout $r < r_0$, $\Sigma(m, r)$ sera bien une hypersphère de (M, g) . On fera seulement varier m à la fin de la démonstration du théorème.

Le squelette de la démonstration est le suivant : on introduit le groupe des isométries de (M, g) laissant fixe m , c'est le groupe orthogonal de

l'espace tangent en m , soit G . Puis on introduit sur $S^2(M)$ l'opération « moyenne par G » : $h \rightarrow h^\natural$. Un $h \in S^2(M)$ invariant par G se décompose en une partie radiale et une partie normale aux rayons, qui est proportionnelle à g . Dire que h , invariant par G , est d'intégrale nulle sur toutes les hypersphères de centre m équivaut à dire que sa partie normale est nulle. Il ne reste plus qu'à montrer, puisque les opérations trace_g et $\delta\delta$ commutent avec \cdot^\natural , qu'un h invariant par G , tel que $\text{trace}_g h = 0$ et $\delta\delta h = 0$, est nécessairement nul. Pour ce faire on calcule $\text{trace}_g h$ et $\delta\delta h$ en fonction des dérivées radiales des deux fonctions définissant partie radiale et partie normale; on obtient finalement une équation différentielle ordinaire du second ordre qui n'a pas de solution non nulle et finie à l'origine. Cependant, cette démonstration n'explique pas vraiment le théorème (12.7). Pour sa vraie raison d'être, qui constitue une démonstration rigoureuse dans le cas analytique réel, voir la remarque (12.13).

Soit donc $G = \text{Isom}(m)$ le groupe des isométries de (M, g) laissant m fixe, groupe isomorphe, via \exp_m , au groupe orthogonal $O(T_m M)$, ceci parce que (M, g) est à courbure sectionnelle constante. Munissons G de sa mesure de Haar ds , telle que $\int_G ds = 1$. On définit la *moyenne* h^\natural de $h \in S^2(M)$ par $h^\natural = \int_{s \in G} s^* h ds$, où $s^* h(u, \nu) = h((T s).u, (T s).\nu)$ pour tous $u, \nu \in T_n M, n \in M$. Comme tous les s sont des isométries de (M, g) et que $\delta\delta$ et trace sont des opérateurs linéaires :

$$(12.8) \quad (\delta\delta h)^\natural = \delta\delta (h^\natural), \quad (\text{trace}_g h)^\natural = \text{trace}_g (h^\natural),$$

où l'opération \cdot^\natural sur les fonctions $f \in A^0(M)$ est évidemment

$$f^\natural = \int_{s \in G} (f \circ s) ds.$$

Par construction tout h^\natural est invariant par G et si h est invariant par G , alors $h^\natural = h$. Pour parler avec précision de *partie radiale* et *partie normale* d'un h invariant par G , introduisons un champ de vecteurs radial comme ceci : on appelle $r : M \rightarrow \mathbf{R}$ la fonction distance à m , soit $r(n) = d(m, n)$, et on désigne par $\theta_a^{-1}(b)$ le vecteur tangent à $T_m M$ au point $a \in T_m M$ et parallèle à $b \in T_m M$. On définit alors un champ de vecteurs ξ sur M *en posant*

$$(12.9) \quad \xi(n) = T(\exp_m) \left(\frac{\sin(r(n))}{r(n)} \cdot \theta_{\exp_m^{-1}(n)}^{-1}(\exp_m^{-1}(n)) \right) \quad \text{pour tout } n \in M$$

si (M, g) est de courbure sectionnelle constante 1. Si la courbure sectionnelle est 0, on remplace dans (12.9) $\sin(r(n))$ par $r(n)$, et si elle est -1 , par

sh ($r(n)$). Et sinon on norme convenablement g pour se ramener à l'un de ces trois cas.

On introduit maintenant $\xi \otimes \xi$; vérifions que $\xi \otimes \xi \in S^2(M)$. Il y a un problème de différentiabilité à l'origine; calculons dans $T_m M$ avec le champ transféré de $\xi \otimes \xi : \exp_m^*(\xi \otimes \xi)$. On note toujours r la distance à l'origine dans $T_m M$, on a

$$\exp_m^*(\xi \otimes \xi) = \frac{\sin^2 r}{r^2} (\eta \otimes \eta),$$

où η est le champ identité sur $T_m M$, à savoir $b \mapsto \theta_b^{-1} b$; mais η et $\frac{\sin^2 r}{r^2}$ sont bien C^∞ .

(12.10) LEMME. — Soit $h \in S^2(M)$ invariant par G . Alors il existe $a, b \in A^0(M)$ uniques telles que $h = a(\xi \otimes \xi) + b.g$.

En m , puisque G est transitif sur les directions de $T_m M$, on a $h(m)$ proportionnel à $g(m)$, soit $b(m)$ ce facteur de proportion. En $n \neq m$, G est transitif sur les directions de l'orthogonal $\xi(n)^\perp$ de $\xi(n)$ dans $T_n M$, donc $g(n)$, restreint à $\xi(n)^\perp$, est proportionnel à $g(n)$ restreint à $\xi(n)^\perp$; soit $b(n)$ le facteur de proportionnalité. On a ainsi construit une application $b : M \rightarrow \mathbf{R}$. Montrons d'abord que $b \in A^0(M)$, i. e. que b est C^∞ (ce qui pose un problème en m). Il suffit de montrer qu'il existe $\underline{b} \in C^\infty(\mathbf{R})$, paire et telle que $b(n) = \underline{b}(r(n))$; car, \underline{b} étant paire et C^∞ , il existe $\underline{\underline{b}} \in C^\infty$ telle que $\underline{b}(r) = \underline{\underline{b}}(r^2)$ pour tout r ; d'où $b(n) = \underline{\underline{b}}(r^2(n))$, soit $b = \underline{\underline{b}} \circ r^2$, mais $\underline{\underline{b}}$ et r^2 étant C^∞ le théorème des fonctions composées fait gagner. Pour calculer \underline{b} , il suffit de travailler le long d'une géodésique $t \mapsto \gamma(t)$ passant par m en $t = 0$ et de vitesse constante 1; d'où $r(\gamma(t)) = |t|$. Soit encore $t \mapsto u(t)$ un champ de vecteurs le long de γ , orthogonal au champ $t \mapsto \gamma'(t)$ et unitaire; on peut prendre $u \in C^\infty$. Alors

$$\underline{b}(t) = b(\gamma(t)) = -\frac{h(u(t), u(t))}{g(u(t), u(t))} = h(u(t), u(t)),$$

qui est bien C^∞ en t puisque $h \in S^2(M)$; la valeur est bonne en $t = 0$, car

$$\underline{b}(0) = b(m) = \frac{h(u(0), u(0))}{g(u(0), u(0))}$$

par définition de $b(m)$. La parité de \underline{b} résulte de ce que G contient la symétrie par rapport à m .

Considérons $h - b.g \in S^2(M)$, qui est encore C^∞ donc et encore invariant par G . Par construction, $(h - b.g)(m) = 0$; en $m \neq n$, $(h - b.g)(n)$ est nul sur $\xi(n)^\perp$; un tel élément de $S^2(T_n M)$ est nécessairement proportionnel

à $(\xi \otimes \xi)(n)$, parce que G induit sur $T_n M$, entre autres, la symétrie par rapport à $\xi(n)$. Posons donc

$$(h - b.g)(n) = a(n)(\xi \otimes \xi)(n);$$

il faut montrer que a est C^∞ . On procède comme pour b ; en $t \neq 0$, on a

$$a(\gamma(t)) = \frac{(h - b.g)(\gamma'(t), \gamma'(t))}{\sin^2 t} \quad (\text{resp. } t^2, \text{ sh}^2 t),$$

où le numérateur est une fonction paire de t , puisque h et b sont invariants par G , et cette fonction est nulle en 0; donc il existe $c \in C^\infty$ telle que le numérateur soit égal pour tout t à $t^2 \cdot c(t^2)$; le quotient par $\sin^2 t$ (resp. t^2 , $\text{sh}^2 t$) est lui aussi C^∞ .

(12.11) LEMME. — Soient $a, b \in A^0(M)$ deux fonctions sur M et invariantes par G . On désignera par a', a'', b', b'' les dérivées premières et secondes radiales de a, b [par exemple, si $t \mapsto \gamma(t)$ est une géodésique telle que

$$\gamma(0) = m \quad \text{et} \quad \|\gamma'(t)\| = 1, \quad a'(\gamma(t)) = \frac{d(a(\gamma(t)))}{dt} \quad \text{et} \quad A''(\gamma(t)) = \frac{d^2(a(\gamma(t)))}{dt^2}].$$

Alors on a les formules :

$$\begin{aligned} \delta\delta(a.\xi \otimes \xi) &= \sin^2 r . a'' + 2(d+1) \sin r \cos r . a' + (d+1)(d \cos^2 r - \sin^2 r) . a \\ &(\text{resp. } r^2 . a'' + 2(d+1) . r . a' + d(d+1) . a, \\ &\text{sh}^2 r . a'' + 2(d+1) \text{sh } r \text{ ch } r . a' + (d+1)(d \text{ch}^2 r + \text{sh}^2 r) . a); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta\delta(b.g) &= -\Delta b = -b'' - \frac{d-1}{\sin r} \cos r . b' \\ &(\text{resp. } -b'' - \frac{d-1}{r} . b', -b'' - \frac{d-1}{\text{sh } r} \text{ch } r . b'), \end{aligned}$$

où d désigne la dimension de M .

On procède par dualité en calculant le produit scalaire global $\langle \delta\delta h, f \rangle$ de $\delta\delta h$ avec une fonction quelconque f , invariante par G et à support dans la boule de centre m , de rayon r_0 ; le produit scalaire global $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de deux tenseurs est l'intégrale de leur produit scalaire en chaque point $(\cdot | \cdot)$, ceci pour la mesure canonique de (M, g) . D'après ([5], form. (2.6), p. 288), on a $\langle \delta\delta h, f \rangle = \langle h, \text{Hess } f \rangle$, où $\text{Hess } f$ désigne le hessien de f : $\text{Hess } f = \nabla df$. Donc, en particulier

$$(\text{Hess } f)(\gamma'(t), \gamma'(t)) = \frac{d^2(f(\gamma(t)))}{dt^2}.$$

D'où

$$A = \langle \delta\delta(a.\xi \otimes \xi), f \rangle = \langle a.\xi \otimes \xi, \text{Hess } f \rangle = \int_M (a.\xi \otimes \xi | \text{Hess } f) . v_g.$$

Mais, $(\xi \otimes \xi | \text{Hess } f) = \text{Hess } f(\xi(t), \xi(t)) = \sin^2 r \cdot f''$, donc

$$A = \int_M \sin^2 r \cdot a \cdot f'' \cdot v_g \quad (\text{resp. } r^2, \text{sh}^2 r).$$

On calcule les intégrales sur M en coordonnées polaires, c'est-à-dire que l'on introduit le difféomorphisme $\varphi : \mathbf{R}_+^* \times S^{d-1} \rightarrow M$; si r désigne la coordonnée sur \mathbf{R}_+^* et σ la mesure canonique de la sphère S^{d-1} , on sait que

$$(12.12) \quad \varphi^* v_g = \sin^{d-1} r \cdot \sigma \wedge dr \quad (\text{resp. } r^{d-1}, \text{sh}^{d-1} r).$$

D'où

$$A = \int_0^{r_0} \int_{S^{d-1}} \sin^{d+1} r \cdot a \cdot f'' \cdot \sigma \wedge dr = K \int_0^{r_0} \sin^{d+1} r \cdot a \cdot f'' \cdot dr,$$

où K désigne le volume de S^{d-1} . On a, par abus, identifié la fonction f sur M et la fonction $f \circ \varphi$ sur \mathbf{R}_+^* , de même pour f'' . En intégrant deux fois par parties, compte tenu de ce que $\text{supp } f \subset]0, r_0[$, on obtient

$$\begin{aligned} K^{-1} A &= \int_0^{r_0} (fa'' \sin^{d+1} r + fa' 2(d+1) \sin^d r \cos r + \\ &\quad + fa(d+1) \sin^{d-1} r \cos^2 r - fa(d+1) \sin^{d+1} r) dr. \end{aligned}$$

En réappliquant (12.12) en sens inverse :

$$\begin{aligned} A &= \langle f, \sin^2 r \cdot a'' + 2(d+1) \sin r \cos r \cdot a' + d(d+1) \cos^2 r \cdot a - (d+1) \sin^2 r \rangle = \dots \\ &= \langle f, \delta\delta(a \xi \otimes \xi) \rangle. \end{aligned}$$

L'égalité ayant lieu pour toute f considérée, c'est que $\delta\delta(a \xi \otimes \xi)$ et la quantité explicitée sont égales, ce qui démontre la première des formules du lemme, dans le cas de courbure 1. Dans les deux autres cas, on trouvera respectivement :

$$K^{-1} A = \int_0^{r_0} fa'' r^{d+1} + 2(d+1) a' r^d + d(d+1) ar^{d-1} dr,$$

$$A = \langle f, r^2 \cdot a'' + 2(d+1) r \cdot a' + d(d+1) a \rangle,$$

$$\begin{aligned} K^{-1} A &= \int_0^{r_0} f(d(d+1) \text{sh}^{d-1} r \text{ch}^2 r \cdot a + (d+1) \text{sh}^{d+1} r \cdot a \\ &\quad + 2(d+1) \text{sh}^d r \text{ch } r \cdot a' + \dots + \text{sh}^{d+1} r \cdot a'') dr, \end{aligned}$$

$$A = \langle f, \text{sh}^2 r \cdot a'' + 2(d+1) \text{sh } r \text{ch } r \cdot a' + d(d+1) \text{ch}^2 r \cdot a + (d+1) \text{sh}^2 r \cdot a \rangle.$$

La deuxième formule est plus facile :

$$\langle \delta\delta(b \cdot g), f \rangle = \langle b \cdot g, \text{Hess } f \rangle = \langle b, \text{trace}_g \text{Hess } f \rangle = \langle b, -\Delta f \rangle = \langle -\Delta b, f \rangle$$

en vertu de ([7], G III.10, p. 127) et du fait qu'il est autoadjoint. Quant à la valeur de Δ en coordonnées polaires et pour des fonctions invariantes

par G , i. e. ne dépendant que de r , elle est classique (cf. par exemple, [7], G. V.3, p. 134).

Démonstration du théorème (12.7). — Partons d'abord avec un $h \in S^2(M)$ tel que $\delta\delta h = \text{trace}_g h = 0$, et faisons la moyenne h^\sharp de h sous l'action de $G = \text{Isom}(m)$. D'après la formule (12.8), h^\sharp vérifie encore $\delta\delta(h^\sharp) = 0$ et $\text{trace}_g(h^\sharp) = 0$; en outre, h est invariant par G , on peut donc l'écrire [lemme (12.10)] $h^\sharp = a.\xi \otimes \xi + b.g$. Mais

$$\text{trace}_g(a.\xi \otimes \xi) = a \sin^2 r \quad \text{et} \quad \text{trace}_g(b.g) = d.b, \quad \text{donc} \quad b = -\frac{1}{d} \sin^2 r.a.$$

En remplaçant b par cette valeur dans la deuxième formule du lemme (12.11), en utilisant la première formule du même lemme, la condition $\delta\delta(h^\sharp) = 0$ entraîne

$$\begin{aligned} \sin^2 r.a'' + (2d+3)\sin r \cos r.a' + (d+2)(d \cos^2 r - \sin^2 r).a &= 0 \\ (\text{resp. } r^2.a''.(2d+3)r.a' + d(d+2)a &= 0, \\ \text{sh}^2 r.a'' + (2d+3)\text{sh} r \text{ch} r.a' + (d+2)(d \text{ch}^2 r + \text{sh}^2 r).a &= 0). \end{aligned}$$

La solution générale sur $\mathbf{R} - \{0\}$ de cette équation différentielle du second ordre est

$$\begin{aligned} &A \sin^{-(d+2)} r + B \cos r \sin^{-(d+2)} r \\ (\text{resp. } &A.r^{-d} + B.r^{-(d+2)}, A.\text{sh}^{-(d+2)} r + B.\text{ch} r \text{sh}^{-(d+2)} r). \end{aligned}$$

Aucune solution de cette équation, autre que la solution nulle, n'est bornée lorsque r tend vers zéro, donc la fonction a , définie sur tout \mathbf{R} et vérifiant cette équation, est nécessairement nulle. Si $a = 0$, alors $b = 0$ et donc $h^\sharp = 0$. Ceci entraîne bien que $\int_{\Sigma(m,r)} h = 0$ pour toute hypersphère $\Sigma(m,r)$ de centre m . En effet, on a la formule

$$\int_{\Sigma(m,r)} h^\sharp = \int_{\Sigma(m,r)} h \quad \text{pour tous } h \text{ et } r.$$

Car, puisqu'un élément $s \in G$ induit une isométrie de $\Sigma(m,r)$, on a

$$\int_{\Sigma(m,r)} s^* h = \int_{\Sigma(m,r)} h \quad \text{pour tout } s \in G, \quad \text{donc} \quad \int_{\Sigma(m,r)} h^\sharp = \int_{\Sigma(m,r)} h.$$

Réciproquement, supposons que $\int_{\Sigma(m,r)} h = 0$ pour tout r . D'après ce qu'on vient de voir, on a $\int_{\Sigma(m,r)} h^\sharp = 0$. Si l'on écrit [lemme (12.10)] $h^\sharp = a.\xi \otimes \xi + b.g$, on aura $\int_{\Sigma(m,r)} h^\sharp = (d-1).b \text{ vol}(\Sigma)$, donc $b(r) = 0$

pour tous $r > 0$, donc pour tous r , d'où $h^{\sharp} = a \cdot \xi \otimes \xi$. En particulier, $h^{\sharp}(m) = 0$, puis

$$(\text{trace}_g h^{\sharp})(m) = (\text{trace}_g h)^{\sharp}(m) = (\text{trace}_g h)(m) = 0,$$

parce que $f(m) = f^{\sharp}(m)$ pour toute fonction f puisque m est fixe par G . En faisant varier m pour un instant, les hypothèses du théorème montrent que $\text{trace}_g h = 0$ sur tout M . Revenant au point fixe m , pour l'écriture $h^{\sharp} = a \cdot \xi \otimes \xi$, on a $\text{trace}_g (h^{\sharp}) = \sin^2 r \cdot a$; mais $\text{trace}_g (h^{\sharp}) = (\text{trace}_g h)^{\sharp} = 0$, donc la fonction a est nulle; mais le lemme (12.11) montre que $\delta\delta h^{\sharp} = 0$. Alors $(\delta\delta (h^{\sharp}))(m) = (\delta\delta h)^{\sharp}(m) = (\delta\delta h)(m) = 0$.

(12.13). *Remarque.* — On peut donner, du théorème (12.7), une explication assez convaincante et qui nous semble sa vraie raison d'être; dans le cas où $h \in S^2(M)$ est analytique réel, ceci fournit une démonstration rigoureuse. Avec les notations précédentes, posons

$$f_h(\varepsilon) = \int_{\Sigma(m, \varepsilon)} h \quad \text{pour tout } \varepsilon > 0;$$

f est une fonction numérique sur \mathbf{R}_+^* . On introduit ses dérivées à l'origine

$$A_h(n) = \frac{d^n (f_h(\varepsilon))}{d\varepsilon^n}(0),$$

pour tout entier n positif. L'idée de base est que la fonction f_h est invariante par $G : f_h = f_{s^*h}$ pour tout $s \in G$, et que $A_h(n)$ est un polynôme en h et ses dérivées covariantes. (cela résulte de la proposition C. II.23 de [7] et de ce que la mesure canonique de $\Sigma(m, \varepsilon)$ est connue parce que (M, g) est à courbure sectionnelle constante). Il en résulte que $A_h(n)$ est un polynôme, en h et ses dérivées covariantes, qui est invariant par G , donc une somme de produits de traces; pour ce genre de raisonnement, voir [24], p. 64 ou [7], p. 216-218 pour plus de détails. On va en déduire que Δ^k désignant le laplacien itéré k fois :

$$(12.14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall n : A_h(n) \text{ est une combinaison linéaire} \\ \text{des } \Delta^k (\text{trace}_g h)(m) \text{ et des } \Delta^s (\delta\delta h)(m). \end{array} \right.$$

Il en résultera bien que si $\text{trace}_g h$ et $\delta\delta h$ sont nuls sur tout M , alors tous les $A_h(n)$ sont nuls, donc que $f_h(\varepsilon) = 0$ pour tout ε si h , donc f , est supposé analytique réel.

Un produit de traces portant sur une dérivée covariante de h est l'une des deux formes :

$$\begin{aligned} & \sum_{a_1, \dots, a_n} \nabla \dots \nabla h_{a_1 a_1} \quad (2n - 2 \text{ signes } \nabla), \\ & \sum_{a_1, \dots, a_n} \nabla \dots \nabla h_{a_1 a_2} \quad (2n - 2 \text{ signes } \nabla), \end{aligned}$$

où, à la place des \cdot , figurent les a_i , chacun deux fois à une place convenable, sauf ceux précisés en indices de h . Maintenant, si l'on pouvait permuter à son aise les a_i en indices sous les ∇ , on ne trouverait plus que deux cas :

$$(12.15) \quad \sum_{a_1, \dots, a_n} \nabla_{a_n} \nabla_{a_n} \dots \nabla_{a_2} \nabla_{a_2} h_{a_1 a_1}.$$

$$(12.16) \quad \sum_{a_1, \dots, a_n} \nabla_{a_n} \nabla_{a_n} \dots \nabla_{a_3} \nabla_{a_3} \nabla_{a_2} \nabla_{a_1} h_{a_1 a_2}.$$

Or que se passe-t-il quand on échange deux indices consécutifs dans les ∇ ? D'après l'identité de Ricci, il s'introduit un terme de correction faisant intervenir le tenseur de courbure de (M, g) ; comme celui-ci a pour seuls termes non nuls les $R_{ijij} = 1$ (resp. $0, -1$), le terme de correction sera lui aussi un produit de traces mais faisant intervenir seulement finalement $2n - 4$ signes ∇ ; ce qui, par récurrence, démontre notre propos. Quant au terme (12.15), c'est visiblement $(-1)^{n-1} \Delta^{n-1} (\text{trace}_g h)$ et le terme (12.16) est $(-1)^{n-2} \Delta^{n-2} (\delta\delta h)$.

(12.17) THÉORÈME. — « VIC $(a, a - 1; 1)$ » est fausse pour tout $a \geq 3$.

Il suffit de trouver sur (P_1^a, g_0) un $h \in S^2(P_1^a)$, non nul, et tel que $\text{trace}_g h = 0$ et $\delta h = 0$. En effet, pour (P_1^a, g_0) , le rayon d'injectivité est égal à $\frac{\pi}{2}$ en tout point m de P_1^a . Du théorème (12.7) on déduit donc que $\int_{\Sigma(m, r)} h = 0$ pour tous m et $r < \frac{\pi}{2}$. Mais lorsque r tend vers $\frac{\pi}{2}$, l'hypersphère $\Sigma(m, r)$ tend vers l'hyperplan projectif m^* dual de m , et, par continuité, l'intégrale $\int_{m^*} h$, qui est égale à la moitié de la limite de $\int_{\Sigma(m, r)} h$ lorsque r tend vers $\frac{\pi}{2}$, est donc nulle; ceci ayant lieu pour tout $m \in P_1^a$, l'hypothèse de nullité de la notation (12.1) est satisfaite, pour $i = 1, b = a - 1$. Reste à voir que h n'est pas une dérivée de Lie. Pour cela rappelons la décomposition de $S^2(M)$ (cf. [6], form. (3.1)) :

$$(12.18) \quad S^2(M) = \delta^{-1}(0) \oplus \delta^*(A^1(M)),$$

valable pour toute variété riemannienne (M, g) , décomposition orthogonale pour le produit scalaire global sur $S^2(M)$ associé à g , où δ^* est l'adjoint formel de δ et égal à la demi-dérivée de Lie de g : $\delta^* \xi = \frac{1}{2} \mathcal{L}_\xi g$. Comme notre h est $\neq 0$ et dans $\delta^{-1}(0)$, il ne pourra pas être dans $\delta^*(A^1(M))$, donc ne sera pas une dérivée de Lie, ce qui achève la démonstration du théorème (12.17) modulo le :

(12.19) THÉORÈME. — Soit, pour une variété riemannienne (M, g) , N le sous-espace de $S^2(M)$ défini par

$$N = \{ h : \text{trace}_g h = 0 \text{ et } \delta h = 0 \}.$$

Alors si (M, g) est compacte, et à courbure sectionnelle constante égale à $+1$ et de dimension ≥ 3 , on a $N \neq \{0\}$.

Avant de donner plus bas la démonstration proprement dite, nous aurons besoin de quelques lemmes relatifs à la décomposition de $S^2(M)$ de Fadeev-Nirenberg; pour ceci et les notations, voir le paragraphe 5 de [7].

(12.20) LEMME. — Soit (M, g) une variété riemannienne compacte à courbure sectionnelle constante égale à 1 ; appelons α^* , β^* les adjoints formés des opérateurs introduits dans ([7], p. 384). Alors, on a

$$N = \alpha^{*-1}(0) \cap \beta^{*-1}(0).$$

On a d'abord les formules explicites :

$$(12.21) \quad \alpha^* h = \delta h + d(\text{trace}_g h), \quad \beta^* h = \delta \delta h + \text{trace}_g h.$$

Ceci se voit en calculant les produits scalaires globaux :

$$\begin{aligned} \langle f, \beta^* h \rangle &= \langle \beta f, h \rangle = \left\langle \text{Hess } f - f \rho + \frac{1}{n-1} f \tau g, h \right\rangle = \dots \\ &= \langle \text{Hess } f + fg, h \rangle = \langle f, \delta \delta h + \text{trace}_g h \rangle \quad [\text{pour toute } f \in A^0(M)], \\ \langle \alpha^* h, \xi \rangle &= \langle h, \alpha \xi \rangle = \langle h, \delta^* \xi + (\delta \xi) g \rangle = \langle \delta^* \xi, \text{trace}_g h \rangle + \langle \delta h, \xi \rangle = \dots \\ &= \langle \xi, d(\text{trace}_g h) + \delta h \rangle \quad [\text{pour tout } \xi \in A^1(M)]. \end{aligned}$$

Les formules (12.21) montrent de suite que $\text{trace}_g h = \delta \delta h = 0$ entraînent $\alpha^* h = \beta^* h = 0$. En sens inverse, en dérivant :

$$\delta \delta h + \delta d(\text{trace}_g h) = \delta \delta h + \Delta(\text{trace}_g h) = 0, \quad \text{donc } \Delta(\text{trace}_g h) = \text{trace}_g h,$$

mais Δ a ses valeurs propres supérieures à 1 ([23], p. 135), donc $\text{trace}_g h = 0$, d'où $\delta h = 0$.

(12.22) LEMME. — Soit (M, g) compacte à courbure sectionnelle constante égale à 1 , et posons

$$Q = \alpha(A^1(M)) \oplus \beta(A^0(M)).$$

Alors on a aussi $Q = \alpha(A^1(M)) + A^0(M).g$ (somme non orthogonale !).

D'après le théorème 5.2 de [7], on a $S^2(M) = Q \oplus N$. Soit d'abord $fg \in A^0(M).g$; on a $\langle fg, h \rangle = \langle f, \text{trace}_g h \rangle$, donc fg est orthogonal

à tous les h de trace nulle, *a fortiori* à tous les $h \in N$, ce qui entraîne que $f.g \in Q$. Réciproquement $\beta f = \text{Hess } f + f.g$, mais

$$\text{Hess } f = \delta^* df = \alpha(df) - \delta df.g \in \alpha(A^1(M)) + A^0(M).g,$$

et βf aussi.

Démonstration du théorème (12.19). — D'après la décomposition de Fadeev-Nirenberg ([6], theorem 5.2), on a : la somme directe orthogonale

$$(12.23) \quad S^2(M) = Q \oplus N.$$

Pour prouver que $N \neq \{0\}$, il suffit de trouver un $h \in S^2(M)$ tel que $h \notin Q$. Or, au sens heuristique du paragraphe 3 de [6], Q représente exactement, dans l'espace tangent en g à la variété des structures riemanniennes sur M , l'espace tangent aux structures riemanniennes conformes à g ; ceci provient de ce que si h est orthogonal à toutes structures riemanniennes conformes à g , on a donc $\langle h, f.g \rangle = 0$ pour toute $f \in A^0(M)$, donc

$$\langle h, f.g \rangle = \langle f, \text{trace}_g h \rangle = 0 \quad \text{pour toute } f,$$

soit $\text{trace}_g h = 0$. Cette remarque heuristique est la clef de ce qui va suivre, il nous faut trouver, au sens infinitésimal, une structure riemannienne sur M qui ne soit pas conforme à g . Intuitivement, il y en a, une structure riemannienne quelconque sur M n'a aucune raison d'être conforme à g , sauf en dimension 2 où elles sont effectivement toutes conformes à g . Pour rendre rigoureux ce qui précède, l'idée est d'introduire le tenseur de courbure de Weyl $W_{g'}$ d'une variété riemannienne (M, g') ; ce tenseur est nul si g' est conforme à g , parce que $W_g = W_{g'}$ si g et g' sont conformes et que $W_g = 0$ puisque les structures à courbure sectionnelle constante sont localement conformes à la structure plate.

(12.24) LEMME. — Soit (M, g) une variété riemannienne compacte, $h \in S^2(M)$ tel que $h = \mathcal{L}_\xi g + f.g$ et soit $t \mapsto g(t)$ une famille à un paramètre de structures riemanniennes telle que $g(0) = g$ et $g'(0) = h$. Alors

$$\frac{dW_{g(t)}}{dt}(0) = 0.$$

En effet, soit $\Xi(t)$ le groupe à un paramètre de difféomorphismes de M engendré par le champ de vecteurs ξ et $F(t)$ une famille de fonctions telle que $F'(0) = f$ et posons $g(t) = \Xi_t^*(F(t).g)$. On a (de même que pour la dérivée d'une application bilinéaire)

$$\frac{d(g(t))}{dt}(0) = \frac{d(\Xi_t^*.g)}{dt}(0) + F'(0).g = \mathcal{L}_\xi g + f.g = h.$$

Mais $W_{g(t)} = W_g$ pour tout t , donc $\frac{dW_{g(t)}}{dt}(0) = 0$. Et il en est de même pour toute autre famille telle que $g'(0) = h$ parce que $\frac{dW_{g(t)}}{dt}(0)$ ne dépend que de h .

Pour terminer la démonstration du théorème (12.19), il n'y a plus qu'à trouver une famille $t \mapsto g(t)$ telle que $\frac{dW_{g(t)}}{dt}(0) \neq 0$. Soit d'abord M de dimension ≥ 4 , m un point quelconque de M et $\{x^i\}$ un système de coordonnées normales en m ; prenons $g(t)$ telle que l'on ait

$$g(t) = g + \frac{t}{12}(x^1 dx^2 - x^2 dx^1)(x^3 dx^4 - x^4 dx^3)$$

localement en m et n'importe quoi ailleurs! D'après la formule classique ([11], p. 243, form. (20')), on a, pour le tenseur de courbure de $g(t)$ en m : $R_{g(t), 1234} = t$, (parce que $R_{g, 1234} = 0$), donc (voir, par exemple, [13], form. (28.12), p. 90)

$$W_{g(t), 1234} = t, \quad \text{d'où} \quad \frac{dW_{g(t)}}{dt}(0) \neq 0,$$

tout ceci en m seulement, mais c'est suffisant.

Si M est de dimension égale à 3, cette méthode est sans valeur parce que $W_{g'} = 0$ pour toute variété riemannienne (M, g') de dimension 3. Dans ce cas, il faut introduire le tenseur R_{ijk} ([13], form. (28.14), p. 91) dont la nullité caractérise les structures conformes. On procédera avec R_{ijk} comme précédemment avec W , le lemme (12.24) reste valable, et on prendra ici pour $g(t)$:

$$g(t) = g + \frac{1}{24}x^3(x^1 dx^3 - x^3 dx^1)(x^2 dx^3 - x^3 dx^2).$$

Si ρ désigne la courbure de Ricci, on aura, par définition de R_{ijk} et avec la formule (20'), p. 243 de [11]:

$$R_{g(t), 123} = \nabla_3 \rho_{12} - \nabla_2 \rho_{13} = \nabla_3 R_{g(t), 1323} - \nabla_2 R_{g(t), 1232} = t,$$

d'où

$$\frac{dR_{g(t), 123}}{dt}(0)(m) = 1 \neq 0.$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] F. J. ALMGREN, *Measure theoretic geometry and elliptic variational problems* (Bull. Amer. Math. Soc., vol. 75, 1969, p. 285-304).
- [2] M. BERGER, *Trois remarques sur les variétés riemanniennes à courbure positive* (C. R. Acad. Sc., t. 263, série A, 1966, p. 76-78).
- [3] M. BERGER, *Geodesics in riemannian geometry*, Tata Institute, Bombay, 1965.
- [4] M. BERGER, *Quelques problèmes de géométrie riemannienne* (L'Enseignement mathématique, t. 16, 1970, p. 73-96).

- [5] M. BERGER, *Quelques formules de variation pour une structure riemannienne* (Ann. scient. Éc. Norm. Sup., t. 3, 1970, p. 285-294).
- [6] M. BERGER et D. EBIN, *Some decompositions of the space of symmetric tensors on a riemannian manifold* (Journ. Diff. Geom., vol. 3, 1969, p. 379-392).
- [7] M. BERGER, P. GAUDUCHON et E. MAZET, *Le spectre d'une variété riemannienne*, Springer, Lectures Notes in math. n° 194.
- [8] E. BONAN, *Sur les G-structures de type quaternionien* (Thèse, Paris, 1967).
- [9] J. E. BROTHERS, *Integral geometry in homogeneous spaces* (Trans. Amer. Math. Soc., vol. 124, 1966, p. 480-517).
- [10] R. B. BROWN and A. GRAY, *Riemannian manifolds with holonomy group Spin (9)*, Preprint, University of Maryland.
- [11] E. CARTAN, *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann*, Gauthier-Villars, Paris, 2^e édition, 1951.
- [12] J. DIEUDONNÉ, *Éléments d'analyse*, t. III, Gauthier-Villars, Paris, 1970.
- [13] L. P. EISENHART, *Riemannian geometry*, Princeton University Press, 1949.
- [14] H. FEDERER, *Geometric measure theory*, Springer-Verlag, 1969.
- [15] H. FREUDENTHAL, *Oktaven, Ausnahmegruppen und Oktaven Geometrie*, Utrecht, 1960.
- [16] A. GRAY, *A note on manifolds whose holonomy group is a subgroup of $Sp(n) \cdot Sp(1)$* , Preprint, University of Maryland.
- [17] L. W. GREEN, *Auf Wiedersehensflächen* (Ann. of Math., vol. 78, 1963, p. 289-299).
- [18] S. HELGASON, *Differential geometry and symmetric spaces*, Academic Press, 1962.
- [19] S. HELGASON, *The Radon transform on euclidean spaces, ...* (Acta Mathematica, vol. 113, 1965, p. 153-180).
- [20] F. HIRZEBRUCH and K. KODAIRA, *On the complex projective spaces* (J. Math. pures et appl., t. 36, 1956, p. 201-216).
- [21] S. KOBAYASHI and K. NOMIZU, *Foundations of differential geometry*, vol. II, Interscience Publishers, 1969.
- [22] V. Y. KRAINES, *Topology of quaternionic manifolds* (Trans. Amer. Math. Soc., vol. 122, 1966, p. 357-367).
- [23] A. LICHNEROWICZ, *Géométrie des groupes de transformations*, Dunod, Paris, 1958.
- [24] H. P. Mc KEAN and I. M. SINGER, *Curvature and the eigenvalues of the laplacian* (J. Diff. Geom., vol. 1, 1967, p. 43-70).
- [25] R. MICHEL, *Sur certains tenseurs symétriques des projectifs réels*, Preprint, Université de Marseille; et à paraître au *Journal de mathématiques pures et appliquées*.
- [26] B. O'NEILL, *The fundamental equations of a submersion* (Michigan math. J., vol. 13, 1966, p. 459-469).
- [27] P. M. PU, *Some inequalities in certain non-orientable manifolds* (Pacific J., vol. 11, 1962, p. 55-71).
- [28] G. DE RHAM, *On the area of complex manifolds*, Seminar on several complex variables, Institute of advanced study, 1957-1958.
- [29] G. DE RHAM, *Variétés différentiables*, Hermann, Paris, 1955.
- [30] H. SAMELSON, *On curvature and characteristic of homogeneous spaces* (Michigan math. J., vol. 5, 1958, p. 13-18).
- [31] L. A. SANTALO, *Integral geometry in general spaces*, Proc. Intern. Cong. math., 1950, vol. I.
- [32] N. STEENROD, *Topology of fibre bundles*, Princeton University Press, 1951.

(Manuscrit reçu le 2 juin 1971.)

Marcel BERGER,
11 bis, avenue de Suffren,
75-Paris, 7^e.