

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

JACQUES VEY

Sur la division des domaines de Siegel

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4^e série, tome 3, n° 4 (1970), p. 479-506

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1970_4_3_4_479_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LA DIVISION DES DOMAINES DE SIEGEL

PAR JACQUES VEY.



Soient D un domaine borné dans \mathbf{C}^n , et Γ un groupe d'automorphismes holomorphes de D . On dira que Γ *balaye* D s'il existe un compact $K \subset D$ tel que $\Gamma K = D$; et on dira que Γ *divise* D s'il le balaye, et si, muni de la topologie discrète, il opère proprement dessus. Le domaine D sera dit *balayable* (resp. *divisible*) s'il admet un groupe d'automorphismes holomorphes le balayant (resp. le divisant).

Dans un travail récent [6], W. Kaup, Y. Matsushima et T. Ochiai ont introduit la classe suivante de domaines :

DÉFINITION. — Soient m et n deux entiers, c un nombre réel. Un *S-domaine* d'exposant c dans $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^m$ est un domaine D ayant les deux propriétés suivantes :

1^o Il est isomorphe à un domaine borné, et contient un point de la forme (z, O) , où $z \in \mathbf{C}^n$, et où O désigne l'origine de \mathbf{C}^m .

2^o Il est stable par les transformations holomorphes de \mathbf{C}^{n+m} des trois types suivants :

(a) $(z, \varpi) \mapsto (z + a, \varpi)$ quel que soit $a \in \mathbf{R}^n$;

(b) $(z, \varpi) \mapsto (z, e^{it} \varpi)$ pour tout $t \in \mathbf{R}$;

(c) $(z, \varpi) \mapsto (e^t z, e^{ct} \varpi)$ pour tout $t \in \mathbf{R}$.

Ces domaines sont appelés « domaines de Siegel généralisés » dans [6]. Avant de donner des exemples, énonçons le résultat principal :

THÉORÈME 1. — *Un S-domaine divisible est homogène.*

Compte tenu des résultats classiques de Hano, Koszul et Borel, ceci implique que les S-domaines divisibles sont symétriques.

Donnons maintenant des exemples de S-domaines :

1° Un domaine de Siegel de première espèce dans \mathbf{C}^n est un domaine D

$$D = \{ z \in \mathbf{C}^n \mid \operatorname{Im} z \in \Omega \},$$

où Ω est un cône ouvert convexe et saillant dans \mathbf{R}^n (appelé « domaine tubulaire » dans [6]). La valeur de l'exposant est ici arbitraire (cf. toutefois la remarque 2 ci-dessous).

2° Un domaine de Siegel de deuxième espèce dans $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^m$ est un domaine D défini de la façon suivante : on se donne dans \mathbf{R}^n un cône Ω ouvert convexe saillant, et une application

$$F : \mathbf{C}^m \times \mathbf{C}^m \rightarrow \mathbf{C}^n$$

linéaire sur la première variable, antilinéaire sur la seconde, et telle que :

- (a) quels que soient ϖ et $\varpi' \in \mathbf{C}^m$, $F(\varpi, \varpi') = \overline{F(\varpi', \varpi)}$;
- (b) quel que soit $\varpi \in \mathbf{C}^m$, $F(\varpi, \varpi) \in \overline{\Omega}$;
- (c) et $F(\varpi, \varpi) = 0$ si et seulement si $\varpi = 0$.

Le domaine D est alors défini par

$$D = \{ (z, \varpi) \in \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^m \mid \operatorname{Im} z - F(\varpi, \varpi) \in \Omega \},$$

l'exposant est ici 1/2.

(Dans [6], ces domaines sont appelés « domaines de Pjateckii-Sapiro »); lorsque $m = 0$, on retrouve les domaines de Siegel de première espèce.

3° Soient Ω un cône ouvert convexe saillant dans \mathbf{R}^n , c un nombre réel non nul, et $F : \mathbf{C}^m \rightarrow \overline{\Omega}$ une application continue telle que :

- (a) $F(\lambda\varpi) = |\lambda|^{\frac{1}{c}} F(\varpi)$ quels que soient $\lambda \in \mathbf{C}$ et $\varpi \in \mathbf{C}^m$;
- (b) $F(\varpi) = 0$ si et seulement si $\varpi = 0$.

Alors le domaine D

$$D = \{ (z, \varpi) \in \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^m \mid \operatorname{Im} z - F(\varpi) \in \Omega \}$$

est un S-domaine d'exposant c .

4° Un domaine borné cerclé contenant l'origine dans \mathbf{C}^m est un S-domaine d'exposant nul.

Remarque 1. — Si dans la définition des S-domaines, $n = 0$ et $m \neq 0$, c est nécessairement nul, faute de quoi D contiendrait une droite complexe.

Remarque 2. — Si, par contre, $m = 0$, la valeur de c est affaire de convention; il sera commode de poser qu'elle est égale à $1/2$.

THÉORÈME 2. — *Si un S-domaine d'exposant non nul est balayable, c'est un domaine de Siegel de première ou deuxième espèce.*

THÉORÈME 3. — *Si un S-domaine D d'exposant nul dans $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^m$ est balayable, il est le produit $D_1 \times D_2$ d'un domaine de Siegel de première espèce D_1 dans \mathbf{C}^n et d'un domaine borné D_2 cerclé, contenant l'origine, et homogène, dans \mathbf{C}^m .*

NOTATIONS ET CONVENTIONS :

1° Soit D un domaine dans \mathbf{C}^n , borné ou isomorphe à un domaine borné.

On notera $G(D)$ le groupe des automorphismes holomorphes de D : c'est un groupe de Lie; les sous-groupes d'isotropie sont compacts; si une transformation $g \in G(D)$ conserve un point $p \in D$, et opère trivialement sur l'espace tangent en ce point, c'est la transformation identique [2].

On notera $\mathfrak{g}(D)$ l'algèbre de Lie de $G(D)$: c'est l'algèbre des champs holomorphes sur D , complètement intégrables. Nous appellerons principe de Cartan le résultat bien connu qui veut que si un champ X non nul appartient à $\mathfrak{g}(D)$, le champ iX n'est pas dans $\mathfrak{g}(D)$. Si \mathfrak{h} est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}(D)$, et p un point de D , on notera $\mathfrak{h}(p)$ le sous-espace (réel)

$$\mathfrak{h}(p) = \{X(p) \in T_p \mathbf{C}^n \mid X \in \mathfrak{h}\}$$

de $T_p \mathbf{C}^n$, espace tangent complexe en p à D ; et $\mathfrak{h}^{\mathbf{C}}(p)$ le \mathbf{C} -sous-espace vectoriel de $T_p \mathbf{C}^n$ engendré par $\mathfrak{h}(p)$.

2° Soit D un S-domaine d'exposant c dans $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^m$. Un point p de $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^m$ sera repéré par ses projections z et w sur \mathbf{C}^n et \mathbf{C}^m . Rappelons un résultat fondamental de [6] (théor. 1 et lemme 3.1; la démonstration du lemme ne fait pas jouer l'hypothèse $c = 1/2$) :

THÉORÈME. — *Les champs de $\mathfrak{g}(D)$ sont polynomiaux; leur composante sur \mathbf{C}^n (resp. sur \mathbf{C}^m) est de degré en w inférieur ou égal à 1 (resp. à 2).*

Les entiers k et α variant respectivement de 1 à n et de 1 à m , on posera

$$d_k = \frac{\partial}{\partial z^k}, \quad d_\alpha = \frac{\partial}{\partial w^\alpha};$$

en vertu de la clause 2^o de la définition des S-domaines, $\mathfrak{g}(D)$ contient les champs d_k ($1 \leq k \leq n$) et les champs

$$d' = i \sum_{\alpha=1}^m \omega^\alpha d_\alpha, \quad d = \sum_{k=1}^n z^k d_k + c \sum_{\alpha=1}^m \omega^\alpha d_\alpha.$$

Soient μ et ν deux entiers : $\mathfrak{B}_{\mu\nu}$ désignera l'espace des champs polynomiaux sur $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^m$ de la forme $\sum_k p^k d_k$, où les polynômes p^k sont homogènes de degré μ en z , de degré ν en ω ; et $\mathfrak{W}_{\mu\nu}$ désignera l'espace des champs de la forme $\sum_\alpha q^\alpha d_\alpha$, où les polynômes q^α sont homogènes de degré μ en z , de degré ν en ω . On convient en outre que $\mathfrak{B}_{\mu\nu} = \mathfrak{W}_{\mu\nu} = 0$ si l'un des entiers est strictement négatif. Quel que soit $Z_{\mu\nu} \in \mathfrak{B}_{\mu\nu}$, et $W_{\mu\nu} \in \mathfrak{W}_{\mu\nu}$, on a les formules

$$\begin{aligned} [d, Z_{\mu\nu}] &= (\mu - 1 + c\nu) Z_{\mu\nu}, \\ [d, W_{\mu\nu}] &= (\mu + c(\nu - 1)) W_{\mu\nu}, \\ [d', Z_{\mu\nu}] &= i\nu Z_{\mu\nu}, \\ [d', W_{\mu\nu}] &= i(\nu - 1) W_{\mu\nu}; \end{aligned}$$

en outre, crocheter un champ X avec d_k ($1 \leq k \leq n$) revient à le dériver par rapport à z^k dans la connexion plate canonique sur $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^m$.

1. CONVEXITÉ. — Rappelons d'abord un résultat classique, dû à Siegel : si un domaine borné dans \mathbf{C}^N est balayable, il est holomorphiquement convexe (cf. [7], théor. 6.1 et 6.2; le balayage suffit à entraîner que la métrique de Bergman est complète).

PROPOSITION 1.1. — Soit D un S-domaine dans $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^m$, holomorphiquement convexe, et soit D_1 l'intersection

$$D_1 = D \cap (\mathbf{C}^n \times \{0\}).$$

Alors,

- (a) D_1 est domaine de Siegel de première espèce dans \mathbf{C}^n ;
- (b) si $(z, \omega) \in D$, tous les points $(z, \lambda\omega)$, avec $\lambda \in \mathbf{C}$, $|\lambda| \leq 1$, sont dans D ; en particulier $(z, 0) \in D_1$.

La première clause de la définition des S-domaines garantit que D_1 est non vide.

1^o On va commencer par établir (b). Soit $(\zeta, 0) \in D_1$, et $(z, \omega) \in D$; dans le domaine D , on peut tracer une courbe $t \mapsto (z, \omega)_t = (z_t, \omega_t)$ paramétrée par $[0, 1]$, avec $(z, \omega)_0 = (\zeta, 0)$ et $(z, \omega)_1 = (z, \omega)$.

Pour $t \in [0, 1]$, soit γ_t le cercle

$$\gamma_t = \{ (z_t, e^{is} w_t) \mid s \in \mathbf{R} \}$$

qui est contenu dans D quel que soit t [condition 2^o, (b) de la définition des S-domaines], et soit Δ_t le disque

$$\Delta_t = \{ (z_t, \lambda w_t) \mid \lambda \in \mathbf{C}, |\lambda| \leq 1 \}$$

qui est inclus dans D pour t assez petit [Δ_0 se réduit au point $(\zeta, 0)$]. Enfin, soit

$$E = \{ t \in [0, 1] \mid \Delta_t \subset D \},$$

on va prouver que $E = [0, 1]$.

Il est évident que E est ouvert dans $[0, 1]$. D'autre part, soit

$$K = \bigcup_{t \in [0, 1]} \gamma_t,$$

K est un compact inclus dans D ; et si $t \in E$, le principe du maximum montre que

$$\sup_{\Delta_t} |f| = \sup_{\gamma_t} |f| \leq \sup_K |f|$$

quelle que soit la fonction f holomorphe sur D , i. e. $\Delta_t \subset \hat{K}$. Comme D est holomorphiquement convexe, \hat{K} est compact; si donc θ est adhérent à E , $\Delta_\theta \subset \hat{K} \subset D$, ce qui montre que E est fermé. Par suite, $E = [0, 1]$. En particulier, $\Delta_1 \subset D$, ce qui établit l'assertion (b).

2^o Considérons à présent D_1 . Soit π la projection canonique de $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^n$ sur \mathbf{C}^n : l'assertion (b) montre que $D_1 = \pi(D)$: D_1 est donc connexe. Le domaine D_1 dans \mathbf{C}^n est stable par homothétie de centre O et par translation réelle; par suite,

$$D_1 = \{ z \in \mathbf{C}^n \mid \text{Im } z \in \Omega \},$$

où Ω est un cône ouvert convenable dans \mathbf{R}^n . Comme D est holomorphiquement convexe, D_1 aussi, et donc D_1 est linéairement convexe ([4], théor. 2.5.10), ce qui fait que Ω est linéairement convexe. Reste à voir que Ω est saillant : mais s'il contenait une droite affine réelle $a + \mathbf{R}b$ ($a \in \Omega$, $b \in \mathbf{R}^n$), D_1 et donc D contiendraient la droite affine complexe $ia + \mathbf{C}b$, contrairement au fait que D doit être isomorphe à un domaine borné. Ainsi D_1 est un domaine de Siegel de première espèce.

C. Q. F. D.

2. PROPRIÉTÉS DE DENSITÉ.

PROPOSITION 2.1. — Soient D un domaine borné dans \mathbf{C}^n , et $H^\infty(D)$ l'algèbre de Banach des fonctions holomorphes bornées sur D . Soit Γ un groupe d'automorphismes holomorphes de D balayant D , et a un point de D : pour toute fonction $f \in H^\infty(D)$,

$$\|f\| = \sup_D |f| = \sup_{\Gamma a} |f|.$$

En particulier, si une fonction $f \in H^\infty(D)$ s'annule sur une orbite, elle est identiquement nulle.

Posons, pour p et q dans D ,

$$C_D(p, q) = \sup \{ |f(p) - f(q)| : f \in H^\infty(D), \|f\| = 1 \};$$

il est bien connu (cf. [5], § 2) que C_D est une distance sur D (dite distance de Gleason), invariante par automorphismes; la borne supérieure de la définition est atteinte, et C_D est continue, strictement inférieure à 2 sur $D \times D$; comme ici $\Gamma \setminus D$ est quasi-compact, elle est même complète.

Puisqu'il existe un compact $K \subset D$ (qu'on peut supposer contenir a) tel que $\Gamma K = D$, on peut trouver $\rho < 2$ tel que les translatées de la boule $B(a, \rho)$ de centre a et de rayon ρ recouvrent D : tout point de D se trouve à distance inférieure ou égale à $\rho < 2$ d'un point de l'orbite Γa . Maintenant, soit $f \in H^\infty(D)$, et

$$r = \sup_{\Gamma a} |f| \leq \|f\| = 1.$$

On va prouver que $r = 1$. La fonction f envoie le domaine D dans le disque unité E du plan complexe, et on voit de suite que

$$C_E(f(p), f(q)) \leq C_D(p, q)$$

quels que soient p et q dans D . Alors :

- (1) l'ensemble $f(\Gamma a)$ est inclus dans le disque E_r de centre O et de rayon r ;
- (2) il existe une suite p_n de points de D tels que $|f(p_n)| \rightarrow 1$;
- (3) mais quel que soit n , $f(p_n)$ est à une C_E -distance de $f(\Gamma a)$ inférieure ou égale à $\rho < 2$. Si $r < 1$, cette situation est contradictoire, vu que $C_E(c, f(p_n)) \rightarrow 2$ quel que soit le point c fixé dans E .

En opposition avec ce résultat, on observera qu'il peut fort bien exister une fonction holomorphe sur D (non bornée!), non identiquement nulle, et nulle sur l'orbite Γa : en particulier, si Γ divise D , les orbites sont

discrètes, et D est un ouvert de Stein; l'ensemble $\Gamma a \cup \{b\}$, où b est n'importe quel point de D n'appartenant pas à Γa , est discret dans D , et il existe une fonction holomorphe sur D prenant des valeurs arbitraires sur $\Gamma a \cup \{b\}$: en particulier, la valeur 1 en b et la valeur 0 sur Γa .

Il est facile de voir que si $X \in \mathfrak{g}(D)$, l'ensemble V des zéros de X est fermé pour la topologie de Zariski définie par $H^\infty(D)$, i. e. que quel que soit $a \in D - V$, il existe $f \in H^\infty(D)$ non nulle en a , et nulle sur V . La généralisation suivante jouera un rôle essentiel :

PROPOSITION 2.2. — Soient D un domaine borné dans \mathbf{C}^N , et \mathfrak{h} un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}(D)$. L'ensemble des points $p \in D$, où $\mathfrak{h}^{\mathfrak{C}}(p)$ n'est pas de dimension maximale est fermé pour la topologie de Zariski définie par $H^\infty(D)$.

Donnons une définition :

DÉFINITION 2.1. — Une fonction $f \in H^\infty(D)$ est dite spéciale si quel que soit $X \in \mathfrak{g}(D)$, la fonction Xf , qui est holomorphe sur D , est bornée. On note $SH^\infty(D)$ le sous-espace des fonctions spéciales.

LEMME 2.1. — $SH^\infty(D)$ est dense dans $H^\infty(D)$ pour la convergence uniforme sur tout compact.

On va utiliser un procédé d'approximation inspiré de Gårding [3]. Soit $f \in H^\infty(D)$, et φ une fonction sur le groupe de Lie $G(D)$, à valeurs complexes, de classe C^∞ , à support compact. Considérons, pour $p \in D$, l'intégrale

$$\varphi \star f(p) = \int_{G(D)} \varphi(s) f(s^{-1}p) ds,$$

où ds désigne la mesure de Haar. Comme l'application $s \mapsto f(s^{-1}p)$ de $G(D)$ dans \mathbf{C} est continue, l'intégrale converge, et uniformément lorsque p varie dans un compact de D . Il s'ensuit que la fonction $\varphi \star f$ est holomorphe sur D ; en outre, elle est bornée :

$$\|\varphi \star f\| \leq \|f\| \int_{G(D)} |\varphi|.$$

Soit $\sigma \in G$:

$$\varphi \star f(\sigma p) = \int_{G(D)} \varphi(s) f(s^{-1}\sigma p) ds = \int_{G(D)} \varphi(\sigma s) f(s^{-1}p) ds.$$

Soit $X \in \mathfrak{g}(D)$. En tout état de cause, la dérivée $X. \varphi \star f$ est holomorphe sur D , et

$$\begin{aligned} (1) \quad X. \varphi \star f(p) &= \lim_{t \rightarrow 0} t^{-1} (\varphi \star f(e^{tX}p) - \varphi \star f(p)) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \int_{G(D)} t^{-1} (\varphi(e^{tX}s) - \varphi(s)) f(s^{-1}p) ds. \end{aligned}$$

Considérons X comme un champ de vecteurs invariant à droite sur $G(D)$. D'après le théorème dit des accroissements finis,

$$(2) \quad t^{-1}(\varphi(e^{tX}s) - \varphi(s)) = X\varphi(e^{\theta X}s),$$

où θ est un nombre réel compris entre 0 et t (dépendant de s). La fonction $X\varphi$ sur $G(D)$ est continue, à support compact : le deuxième membre de (2) converge uniformément vers $X\varphi(s)$. Dans l'intégrale (1), on peut se borner à intégrer sur le compact réunion des translatés du support de φ pour $|t| \leq 1$; après permutation de la limite et de l'intégrale, il vient

$$X.\varphi \star f(p) = \int_{G(D)} X\varphi(s) f(s^{-1}p) ds,$$

ce qui montre que $X.\varphi \star f$ est bornée :

$$\|X.\varphi \star f\| \leq \|f\| \int_{G(D)} |X\varphi|$$

et que $\varphi \star f$ est une fonction spéciale.

Soit alors K un compact de D , et $\varepsilon > 0$. Il existe un voisinage V de l'identité dans $G(D)$ tel que

$$|f(s^{-1}p) - f(p)| < \varepsilon$$

quels que soient $p \in K$ et $s \in V$. Soit φ une fonction C^∞ sur $G(D)$, à valeurs réelles positives ou nulles, à support compact inclus dans V , et de moyenne 1 sur $G(D)$. On aura, pour $p \in K$,

$$|\varphi \star f(p) - f(p)| = \int_{G(D)} \varphi(s) |f(s^{-1}p) - f(p)| ds \leq \varepsilon,$$

ce qui prouve la densité de $SH^\infty(D)$ dans $H^\infty(D)$ pour la convergence compacte. (On se convainc facilement qu'il n'y a pas densité pour la convergence uniforme.)

LEMME 2.2. — Soit f_n une suite de fonctions holomorphes sur D , qui converge uniformément sur tout compact vers une fonction g . Si $X \in \mathfrak{g}(D)$, Xf_n converge uniformément sur tout compact vers Xg .

Soient z^1, \dots, z^N les coordonnées canoniques dans \mathbf{C}^N , et $X^j(z)$ les coordonnées de X sur la base $\frac{\partial}{\partial z^j}$: ce sont des fonctions holomorphes sur D , et

$$Xf_n = \sum_{j=1}^N X^j(z) \frac{\partial f_n}{\partial z^j}.$$

Il est notoire que sous les hypothèses faites, $\frac{\partial f_n}{\partial z^j}$ converge vers $\frac{\partial g}{\partial z^j}$: l'assertion en découle trivialement.

Démonstration de la proposition 2.2. — Soit X_1, \dots, X_h une \mathbf{R} -base de \mathfrak{h} , et r un entier. On va voir que l'ensemble V

$$V = \{p \in D \mid \dim_{\mathfrak{g}} \mathfrak{h}^{\mathfrak{g}}(p) < r\}$$

est fermé pour la topologie de Zariski de $H^{\infty}(D)$. Pour que p appartienne à V , il faut et il suffit que quelles que soient les fonctions f_1, \dots, f_N dans $H^{\infty}(D)$, les déterminants d'ordre r extraits de la matrice

$$M(f_1, \dots, f_N)(p) = \begin{pmatrix} X_1 f_1(p) & \dots & X_h f_1(p) \\ \vdots & & \vdots \\ X_1 f_N(p) & \dots & X_h f_N(p) \end{pmatrix}$$

soient tous nuls : on voit que la condition est suffisante en prenant pour f_1, \dots, f_N les coordonnées canoniques dans \mathbf{C}^N , et elle est nécessaire parce que toute relation linéaire entre les $X_j(p)$ amène une relation entre les colonnes de la matrice. Soient $\Delta_m(f_1, \dots, f_N)(p)$ les déterminants d'ordre m extraits de la matrice. Si f_1, \dots, f_N sont dans $SH^{\infty}(D)$, les $\Delta_m(f_1, \dots, f_N)$ sont dans $H^{\infty}(D)$, et identiquement nuls sur V .

Maintenant soit $a \in D - V$. L'un des $\Delta_m(z^1, \dots, z^N)$, disons pour $m = 1$, est non nul en a . Soit U un voisinage compact de a . D'après le lemme 2.1, il existe des fonctions spéciales f_1, \dots, f_N arbitrairement proches de z^1, \dots, z^N respectivement sur U . D'après le lemme 2.2, les fonctions bornées $X_j f_k$ ($1 \leq j \leq h, 1 \leq k \leq N$) vont être arbitrairement proches des fonctions $X_j z^k$ sur U . Il s'ensuit que $\Delta_1(f_1, \dots, f_N)$, qui est une fonction bornée sur D , nulle sur V , va être arbitrairement proche de $\Delta_1(z^1, \dots, z^N)$ sur U , donc non nulle en a . Ceci achève la démonstration.

Nous en arrivons au résultat principal de ce paragraphe :

PROPOSITION 2.3. — *Soient D un domaine borné dans \mathbf{C}^N , et Γ un sous-groupe de $G(D)$ balayant D . Si le sous-espace \mathfrak{h} de $\mathfrak{g}(D)$ est stable par l'action adjointe de Γ sur $\mathfrak{g}(D)$, la dimension de $\mathfrak{h}^{\mathfrak{g}}(p)$ est constante quand p varie dans D .*

Ce résultat s'applique à tout idéal caractéristique de l'algèbre $\mathfrak{g}(D)$: elle-même, son centre, son radical, etc.

Soit V l'ensemble des points de D où la dimension de $\mathfrak{h}^{\mathfrak{g}}(p)$ n'est pas maximale : par essence même, V est différent de D . Il est stable par l'action de Γ sur D , puisque \mathfrak{h} est stable par l'action de Γ sur $\mathfrak{g}(D)$. S'il était non vide, il contiendrait une orbite de Γ , et donc d'après la proposition 2.1,

il serait dense dans D pour la topologie de Zariski définie par $H^\infty(D)$; il serait alors égal à D entier, puisqu'il est fermé pour cette topologie d'après la proposition 2.2 : ce qui est contradictoire.

3. VALEUR DE L'EXPOSANT. — Le but de ce paragraphe est de démontrer le fait suivant :

PROPOSITION 3.1. — *Si un S-domaine est balayable, son exposant est 0 ou 1/2.*

Dans tout ce paragraphe, D désignera un S-domaine dans $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^m$, d'exposant $c \neq 0$, balayable.

LEMME 3.1. — *Tout champ indépendant de z , appartenant à $\mathfrak{g}(D)$, est de la forme*

$$Z_{01} + Z_{00} + W_{01} + W_{00}$$

où $Z_{\mu\nu} \in \mathfrak{B}_{\mu\nu}$, $W_{\mu\nu} \in \mathfrak{W}_{\mu\nu}$, et Z_{00} est une translation réelle sur z . Si, de plus, $c \neq 1/2$, $Z_{01} = W_{00} = 0$.

Soit X un champ de $\mathfrak{g}(D)$ indépendant de z : il est *a priori* de la forme

$$X = Z_{01} + Z_{00} + W_{02} + W_{01} + W_{00}$$

(cf. [6], théor. 1 et lemme 3.1). On a

$$\begin{aligned} (\text{ad } \partial')^2 X &= -Z_{01} - W_{02} - W_{00}, \\ \text{ad } \partial. (\text{ad } \partial')^2 X &= (1 - c)Z_{01} - cW_{02} + cW_{00}. \end{aligned}$$

Tout d'abord,

$$X' = X + (\text{ad } \partial')^2 X = Z_{00} + W_{01}$$

appartient à $\mathfrak{g}(D)$, ainsi que $[\partial, X'] = -Z_{00}$. Comme $\mathfrak{g}(D)$ contient toutes les translations réelles sur z , le principe de Cartan implique que Z_{00} est réel.

Ensuite, on trouve dans $\mathfrak{g}(D)$ le champ

$$X'' = c(\text{ad } \partial')^2 X + \text{ad } \partial. (\text{ad } \partial')^2 X = (1 - 2c)Z_{01} - 2cW_{02},$$

or $[\partial', X''] = iX''$. Par conséquent, $X'' = 0$ et comme nous supposons $c \neq 0$, $W_{02} = 0$: ceci prouve la première assertion du lemme. Si, de plus, $c \neq 1/2$, l'annulation de X'' entraîne celle de Z_{01} . Alors $\mathfrak{g}(D)$ contient les champs

$$\begin{aligned} (\text{ad } \partial')^2 X &= -W_{00}, \\ (\text{ad } \partial')^3 X &= iW_{00} \end{aligned}$$

et donc $W_{00} = 0$.

C. Q. F. D.

LEMME 3.2. — Si $c \neq 1/2$, ∂' est dans le centre de $\mathfrak{g}(D)$.

On va procéder par récurrence sur le degré en z du champ $X \in \mathfrak{g}(D)$. Si ce degré est nul, le lemme 3.1 montre que $X \in \mathfrak{Z}_{0,0} \oplus \mathfrak{W}_{0,1}$ et, par suite, que X et ∂' commutent. Supposons le résultat acquis pour les champs de degré en z inférieur à m , et $X \in \mathfrak{g}(D)$ de degré m en z .

Observons que quel que soit $1 \leq k \leq n$, $[\partial_k, X]$ est de degré en z inférieur ou égal à $m - 1$, donc par l'hypothèse de récurrence,

$$[\partial_k, [\partial', X]] = [\partial', [\partial_k, X]] = 0,$$

i. e. $[\partial', X]$ est indépendant de z . Décomposons X sur les espaces $\mathfrak{Z}_{\mu,\nu}, \mathfrak{W}_{\mu,\nu}$:

$$X = \sum_{\mu=0}^m X_\mu,$$

$$X_\mu = Z_{\mu,1} + Z_{\mu,0} + W_{\mu,2} + W_{\mu,1} + W_{\mu,0}.$$

Le champ

$$[\partial', X_\mu] = iZ_{\mu,1} + iW_{\mu,2} - iW_{\mu,0}$$

est homogène de degré μ en z . Comme $[\partial', X] = \sum_{\mu=0}^m [\partial', X_\mu]$ doit être indépendant de z , tous les $[\partial', X_\mu]$ sont nuls pour $\mu \geq 1$, et

$$[\partial', X] = [\partial', X_0] = iZ_{0,1} + iW_{0,2} - iW_{0,0}.$$

Or $[\partial', X] \in \mathfrak{g}(D)$, étant indépendant de z , doit être dans $\mathfrak{Z}_{0,0} \oplus \mathfrak{W}_{0,1}$ d'après le lemme 3.1 : il est donc nul.

C. Q. F. D.

Soit $D_1 = D \cap (\mathbf{C}^n \times \{0\})$, qui est non vide d'après la définition des S-domaines.

LEMME 3.3. — Si $c \neq 1/2$, D_1 est l'ensemble des zéros communs des champs du centre de $\mathfrak{g}(D)$.

Soit V cet ensemble de zéros communs. Si $(z, \omega) \in V$, ∂' doit s'y annuler, donc $\omega = 0$. Inversement, soit X un champ du centre de $\mathfrak{g}(D)$. Comme X commute avec les ∂_k , il est indépendant de z et donc (lemme 3.1) de la forme $Z_{0,0} + W_{0,1}$; comme il commute avec ∂ , $Z_{0,0} = 0$, et X s'annule sur D_1 .

Démonstration de la proposition 3.1. — Nous avons convenu que si $m = 0$, la valeur de c est $1/2$. Supposons donc $m > 0$. Dans son opération sur $\mathfrak{g}(D)$, un sous-groupe Γ de $G(D)$ qui balaye D conserve le centre \mathfrak{z} de $\mathfrak{g}(D)$. Par conséquent, $\dim \mathfrak{z}^{\mathbf{C}}(p)$ doit être constante quand p varie

dans D (propos. 2.3). Or, si $c \neq 1/2$, cette dimension est nulle sur D , et non nulle ailleurs (lemme 3.3), ce qui est contradictoire.

4. EXPOSANT $1/2$. — Dans tout ce paragraphe, D désigne un S -domaine d'exposant $1/2$ dans $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^m$, qu'on supposera *balayable*.

Soit, pour λ entier supérieur ou égal à -1 ,

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_\lambda &= \mathfrak{g}(D) \cap (\mathfrak{B}_{\lambda+1,0} \oplus \mathfrak{W}_{\lambda,1}), \\ \mathfrak{g}_{\lambda+1/2} &= \mathfrak{g}(D) \cap (\mathfrak{B}_{\lambda+1,1} \oplus \mathfrak{W}_{\lambda,2} \oplus \mathfrak{W}_{\lambda+1,0}), \end{aligned}$$

on définit ainsi une famille de sous-espaces de $\mathfrak{g}(D)$, indexée par

$$\Lambda = \{ \lambda \in \mathbf{R} : 2\lambda \in \mathbf{Z}, \lambda \geq -1 \}.$$

On vérifie immédiatement que l'opérateur $\text{ad } \partial$ conserve les sous-espaces \mathfrak{g}_λ , $\lambda \in \Lambda$, et que si $X \in \mathfrak{g}_\lambda$,

$$\text{ad } \partial \cdot X = \lambda X.$$

Tenant compte de ce que les champs de $\mathfrak{g}(D)$ ont leur composante sur \mathbf{C}^n de degré en ω inférieur ou égal à 1 , et leur composante sur \mathbf{C}^m de degré en ω inférieur ou égal à 2 , ([6], lemme 3.1) on en déduit que

$$\mathfrak{g}(D) = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{g}_\lambda$$

et que les \mathfrak{g}_λ sont les espaces propres de l'opérateur $\text{ad } \partial$; l'algèbre $\mathfrak{g}(D)$ est donc graduée :

$$[\mathfrak{g}_\lambda, \mathfrak{g}_\mu] \subset \mathfrak{g}_{\lambda+\mu}$$

quels que soient λ et μ dans Λ . On montre en fait ([6], théor. 4) que $\mathfrak{g}_\lambda = (0)$ si $\lambda \geq 3/2$:

$$\mathfrak{g}(D) = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_{-1/2} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_{1/2} \oplus \mathfrak{g}_1.$$

Le principe de Cartan montre tout de suite que \mathfrak{g}_{-1} est constitué par les translations réelles sur z ; ∂ et ∂' sont évidemment dans \mathfrak{g}_0 ; quant aux champs de $\mathfrak{g}_{-1/2}$, ils sont de la forme

$$X = a_\alpha^k w^\alpha \partial_k + c^\alpha \partial_\alpha,$$

où les a_α^k , c^α sont des constantes complexes (convention d'indices); ce qui fait que

$$(1) \quad [\partial', X] = i a_\alpha^k w^\alpha \partial_k - i c^\alpha \partial_\alpha.$$

Notons $c(X)$ le vecteur de \mathbf{C}^m de coordonnées c^α (c'est la valeur de X à l'origine) : la formule (1) montre :

(1) que si $c(X) = 0$, $X = 0$;

(2) que les valeurs en un point $(z, 0)$ des champs de $\mathfrak{g}_{-1/2}$, i. e. les vecteurs $c(X)$ quand X décrit $\mathfrak{g}_{-1/2}$, forment un \mathbf{C} -sous-espace vectoriel de \mathbf{C}^m . Il en résulte que la dimension de $\mathfrak{g}_{-1/2}$ est paire, et inférieure ou égale à $2m$. Le but de ce paragraphe est d'établir le point suivant :

PROPOSITION 4.1. — *Si le S-domaine $D \subset \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^m$ d'exposant $1/2$ est balayable, $\dim_{\mathbf{R}} \mathfrak{g}_{-1/2} = 2m$.*

Il n'y a évidemment rien à démontrer si $m = 0$: nous pouvons donc supposer dans la suite que $m > 0$. Par ailleurs, il serait facile de voir que si $\mathfrak{g}_{-1/2} = (0)$, \mathcal{O}' est central, et d'en déduire par des considérations analogues à celle du paragraphe 3 une contradiction; mais cette remarque ne nous sera pas utile.

Soit $2h$ la dimension de $\mathfrak{g}_{-1/2}$.

LEMME 4.1. — *Il existe une \mathbf{R} -base $X_1, \dots, X_h, Y_1, \dots, Y_h$ de $\mathfrak{g}_{-1/2}$, telle que $Y_j = [\mathcal{O}', X_j]$; les vecteurs $c_j = c(X_j)$ sont alors \mathbf{C} -indépendants dans \mathbf{C}^m .*

Cela résulte du fait que l'application $X \mapsto c(X)$ de $\mathfrak{g}_{-1/2}$ dans \mathbf{C}^m est injective, et que son image est un \mathbf{C} -sous-espace; et de la formule (1).

LEMME 4.2. — *En tout point $p \in \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^m$, les valeurs des champs $X_1, \dots, X_h, \mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_n$ sont \mathbf{C} -indépendantes.*

En effet, soit $p = (z, \omega) \in \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^m$, et $\lambda^1, \dots, \lambda^h, \mu^1, \dots, \mu^n$ des nombres complexes tels que

$$\lambda^1 X_1(p) + \dots + \lambda^h X_h(p) + \mu^1 \mathcal{O}_1 + \dots + \mu^n \mathcal{O}_n = 0.$$

Séparant les composantes sur \mathbf{C}^n et \mathbf{C}^m , il vient en particulier

$$\lambda^1 c_1 + \dots + \lambda^h c_h = 0,$$

et comme les c_j sont \mathbf{C} -indépendants dans \mathbf{C}^m , tous les λ^j et tous les μ^j sont nuls.

LEMME 4.3. — *Quel que soit $p \in D$, les vecteurs $X_1(p), \dots, X_h(p), \mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_n$ forment une \mathbf{C} -base de $\mathfrak{g}(D)^{\mathbf{C}}(p)$.*

Le \mathbf{C} -sous-espace engendré par $X_1(p), \dots, \mathcal{O}_n$ est de dimension sur \mathbf{C} $h + n$ d'après le lemme 4.2, et il est inclus dans $\mathfrak{g}(D)^{\mathbf{C}}(p)$. Par ailleurs, D étant balayable, la proposition 2.3 montre que $\mathfrak{g}(D)^{\mathbf{C}}(p)$ est de dimension constante. Il suffit donc de constater que sa dimension est $h + n$ en un point particulier de D , par exemple un point de D de la forme $(ia, 0)$ avec $a \in \mathbf{R}^n$.

Soit donc $A \in \mathfrak{g}_{-1}$ la translation définie par $A(o, o) = (a, o)$. Il s'agit de voir que si $X \in \mathfrak{g}(D)$, $X(ia, o)$ est combinaison linéaire complexe de $X_1(ia, o), \dots, X_h(ia, o), \partial_1, \dots, \partial_n$.

1° Si $X \in \mathfrak{g}_{-1}$, il est combinaison linéaire (réelle) des ∂_k .

2° Si $X \in \mathfrak{g}_{-1/2}$, il est combinaison linéaire réelle des X_j et des $Y_j = [\partial', X_j]$. Sa valeur en (ia, o) est combinaison linéaire réelle des c_j et des $ic_j = -Y_j(ia, o)$ [formule (1)].

3° Si $X \in \mathfrak{g}_0$, il appartient à $\mathfrak{B}_{10} \oplus \mathfrak{W}_{01}$: sa valeur en (ia, o) est combinaison linéaire complexe des ∂_k .

4° Si $X \in \mathfrak{g}_{1/2}$, le champ $X + \text{ad } \partial' . \text{ad } A . X$ s'annule en (ia, o) (calcul immédiat; cf. [6], form. (5.1) et remarques qui suivent); X y prend donc la même valeur que $-\text{ad } \partial' . \text{ad } A . X \in \mathfrak{g}_{-1/2}$.

5° Si $X \in \mathfrak{g}_1$, le champ $X + \frac{1}{2}(\text{ad } A)^2 X$ s'annule en (ia, o) (cf. [6], form. (5.1)) et X y prend la même valeur que $-\frac{1}{2}(\text{ad } A)^2 X \in \mathfrak{g}_{-1}$.

Démonstration de la proposition 4.1. — En vertu du lemme 4.3, quel que soit $p = (z, \omega) \in D$, la valeur en p du champ ∂ , i. e.

$$\partial(p) = z + \frac{1}{2}\omega,$$

doit être combinaison linéaire complexe des $X_j(p)$ et des ∂_k . Il doit exister des nombres complexes λ^j, μ^k (dépendant de z et ω) tels que :

$$z + \frac{1}{2}\omega = \sum_j \lambda^j X_j(z, \omega) + \sum_k \mu^k \partial_k,$$

ce qui donne, par projection sur \mathbf{C}^m :

$$\frac{1}{2}\omega = \sum_j \lambda^j c_j.$$

Mais la possibilité de résoudre ce système quel que soit $(z, \omega) \in D$ exige que les c_j engendrent (sur \mathbf{C}) \mathbf{C}^m entier. Par conséquent, $h = m$.

C. Q. F. D.

5. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2. — Compte tenu des propositions 3.1 et 4.1, le théorème 2 découle du résultat suivant :

PROPOSITION 5.1. — Soit D un S -domaine d'exposant $\frac{1}{2}$ dans $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^m$, holomorphiquement convexe. Si $\dim_{\mathbf{R}} \mathfrak{g}_{-1/2} = 2m$, D est un domaine de Siegel, de première ou deuxième espèce selon que m est nul ou non.

Dans tout ce qui suit, D désigne un S -domaine satisfaisant les hypothèses de la proposition.

LEMME 5.1. — *Il existe une application $F : \mathbf{C}^m \times \mathbf{C}^m \rightarrow \mathbf{C}^n$, \mathbf{C} -linéaire sur la première variable, antilinéaire sur la deuxième, telle que les champs de $\mathfrak{g}_{-1/2}$ soient les champs*

$$2iF(w, c) + c \in \mathbf{C}^n \oplus \mathbf{C}^m$$

avec c quelconque dans \mathbf{C}^m .

Un champ de $\mathfrak{g}_{-1/2}$ se met sous la forme

$$X = a_{\alpha}^k(X) w^{\alpha} \partial_k + c^{\alpha}(X) \partial_{\alpha}$$

où les $a_{\alpha}^k(X)$ et les $c^{\alpha}(X)$ sont des constantes complexes. Soit $c(X)$ le vecteur de \mathbf{C}^m de coordonnées $c^{\alpha}(X)$; la formule

$$(1) \quad [d', X] = ia_{\alpha}^k(X) w^{\alpha} \partial_k - ic^{\alpha}(X) \partial_{\alpha}$$

montre que $c(X) = 0$ implique $X = 0$ (principe de Cartan) et donc, puisque $\dim_{\mathbf{R}} \mathfrak{g}_{-1/2} = 2m$ que $c(X)$ est arbitraire dans \mathbf{C}^m . Les coefficients $a_{\alpha}^k(X)$ sont des fonctions \mathbf{R} -linéaires de $c(X)$, et la formule (1) montre qu'ils sont multipliés par $-i$ quand $c(X)$ est multiplié par i . Il existe donc des nombres complexes $f_{\alpha\beta}^k$ tels que

$$a_{\alpha}^k(X) = f_{\alpha\beta}^k \overline{c^{\beta}(X)}$$

quel que soit $X \in \mathfrak{g}_{-1/2}$. Soit $F : \mathbf{C}^m \times \mathbf{C}^m \rightarrow \mathbf{C}^n$ l'application définie par

$$F(w, c) = 1/2 i f_{\alpha\beta}^k w^{\alpha} \overline{c^{\beta}} \partial_k,$$

on a bien

$$X = 2iF(w, c(X)) + c(X).$$

avec $c(X)$ arbitraire dans \mathbf{C}^m .

Notation. — Pour c dans \mathbf{C}^m , on note X_c le champ

$$2iF(w, c) + c \in \mathfrak{g}_{-1/2}.$$

LEMME 5.2. — *Quels que soient c et d dans \mathbf{C}^m , $F(c, d) - F(d, c)$ est imaginaire pur; en particulier, $F(c, c)$ est réel.*

En effet, $[X_c, X_d] = 2i(F(c, d) - F(d, c))$ est un élément de \mathfrak{g}_{-1} , donc une translation réelle. En prenant $d = ic$, il vient que

$$F(c, ic) - F(ic, c) = -2iF(c, c)$$

est imaginaire pur; donc $F(c, c)$ est réel.

Démonstration de la proposition 5.1. — Soit $D_1 = D \cap (\mathbf{C}^n \times \{0\})$.
D'après la proposition 1.1,

$$D_1 = \{(z, 0) \mid \operatorname{Im} z \in \Omega\},$$

où Ω est un cône ouvert convexe saillant convenable de \mathbf{R}^n ; en outre, si $(z, w) \in D$, $(z, 0) \in D$. D'autre part, un calcul facile montre que quels que soient $(z, w) \in \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^m$ et $c \in \mathbf{C}^m$,

$$\exp X_c \cdot (z, w) = (z + 2iF(w, c) + iF(c, c), w + c).$$

Cela dit, pour que (z, w) soit dans D , il faut et il suffit que $\exp X_{-w} \cdot (z, w)$ y soit. Or

$$\exp X_{-w} \cdot (z, w) = (z - iF(w, w), 0)$$

et, compte tenu du lemme 5.2, ce point est dans D si et seulement si $\operatorname{Im} z - F(w, w) \in \Omega$. Ainsi

$$(2) \quad D = \{(z, w) \in \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^m \mid \operatorname{Im} z - F(w, w) \in \Omega\}.$$

Introduisons l'application $\tilde{F} : \mathbf{C}^m \times \mathbf{C}^m \rightarrow \mathbf{C}^n$ définie par

$$\tilde{F}(w, w') = 1/2 (F(w, w') + \overline{F(w', w)});$$

elle est \mathbf{C} -linéaire sur la première variable, antilinéaire sur la deuxième, et, à cause du lemme 5.2,

$$\tilde{F}(w, w) = F(w, w) \in \mathbf{R}^n$$

pour tout $w \in \mathbf{C}^m$. L'égalité (2) donne aussi bien

$$D = \{(z, w) \in \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^m \mid \operatorname{Im} z - \tilde{F}(w, w) \in \Omega\},$$

par suite $\mathfrak{g}(D)$ (et en fait $\mathfrak{g}_{-1/2}$) contient les champs

$$X'_c = 2i\tilde{F}(w, c) + c$$

quel que soit $c \in \mathbf{C}^m$: le lemme 5.1 implique que $\tilde{F} = F$, i. e.

$$F(w, w') = \overline{F(w', w)}$$

quels que soient w et w' dans \mathbf{C}^m .

Maintenant, soit $(z, 0) \in D$, et $c \in \mathbf{C}^m$. Quel que soit $t \in \mathbf{R}$, le point

$$\exp tX_c \cdot (z, 0) = (z + it^2 F(c, c), c)$$

est dans D , donc (propos. 1.1), le point

$$(z + it^2 F(c, c), 0)$$

est dans D_1 quel que soit t . Ceci exige que $\text{Im} z + t^2 F(c, c)$ reste dans Ω pour tout $t \in \mathbf{R}$, donc que $F(c, c) \in \bar{\Omega}$.

Finalement, supposons qu'il existe $\varpi \neq 0$ dans \mathbf{C}^m avec $F(\varpi, \varpi) = 0$. Alors, si $(z, 0) \in D$, D contient tous les points $(z, \lambda \varpi)$, où λ décrit \mathbf{C} , ce qui est incompatible avec le fait que D est isomorphe à un domaine borné. Ainsi, $F(\varpi, \varpi) = 0$ exige $\varpi = 0$.

Nous avons établi que

$$D = \{(z, w) \in \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^m \mid \text{Im} z - F(w, w) \in \Omega\},$$

où

- 1° le cône $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ est ouvert, convexe et saillant;
- 2° l'application $F : \mathbf{C}^m \times \mathbf{C}^m \rightarrow \mathbf{C}^n$ a les propriétés suivantes :
 - (a) elle est linéaire sur la première variable, antilinéaire sur la seconde;
 - (b) quels que soient ϖ et ϖ' dans \mathbf{C}^m , $F(\varpi, \varpi) \in \bar{\Omega}$ et

$$F(w, w') = \overline{F(w', w)};$$

- (c) $F(\varpi, \varpi) = 0$ exige que $\varpi = 0$.

Ainsi D est bien un domaine de Siegel.

C. Q. F. D.

6. UNIMODULARITÉ.

PROPOSITION 6.1. — *Soit D un domaine borné dans \mathbf{C}^N . Si D est divisible, le groupe $G(D)$ de ses automorphismes holomorphes est unimodulaire.*

1° Tout d'abord, il est classique que le groupe de Lie $G(D)$ opère proprement sur D (cf. [1], théor. 2, qui exprime précisément cette propriété si l'on tient compte du théorème de Montel et de l'existence d'une distance invariante sur D).

2° Soit Γ un sous-groupe de $G(D)$, divisant D : alors Γ est discret dans $G(D)$. En effet, muni de la topologie discrète, Γ doit opérer proprement dans D : il s'ensuit que les orbites de Γ sont discrètes. Soit (γ_n) une suite d'éléments de Γ convergeant vers 1 dans $G(D)$. Soit a un point de D , V un voisinage de a géodésiquement convexe pour la métrique de Bergman, et a_1, \dots, a_{2n} des points de V tels que les vecteurs tangents en a aux géodésiques joignant a aux a_j forment une base de l'espace tangent en a . A partir d'un certain rang, les suites $\gamma_n a, \gamma_n a_j$ sont stationnaires, et les γ_n stabilisent a en opérant trivialement sur l'espace tangent : il s'ensuit qu'ils sont égaux à 1.

3° Le quotient $\Gamma \backslash G(D)$ est compact. En effet, soit K un compact inclus dans D tel que $\Gamma K = D$, et p un point de D : l'ensemble

$$A = \{f \in G(D) \mid f(p) \in K\}$$

est compact puisque $G(D)$ opère proprement sur D ; et trivialement, $G(D) = \Gamma A$.

4° Ainsi le sous-groupe Γ divise $G(D)$: il en résulte par une argumentation classique (cf. [8]) que $G(D)$ est unimodulaire.

PROPOSITION 6.2. — Soit D un domaine de Siegel. Si le groupe $G(D)$ est unimodulaire, il est transitif sur D .

Soient Ω un cône ouvert convexe saillant dans \mathbf{R}^n , F une application Ω -hermitienne de $\mathbf{C}^m \times \mathbf{C}^m$ dans \mathbf{C}^n (c'est-à-dire ayant les propriétés énumérées dans l'exemple 2°) de l'introduction), et

$$D = \{(z, w) \in \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^m \mid \text{Im } z - F(w, w) \in \Omega\}$$

un domaine de Siegel, qui sera de première ou deuxième espèce selon que m est nul ou non.

L'algèbre $\mathfrak{g}(D)$ est graduée :

$$\mathfrak{g}(D) = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_{-1/2} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_{1/2} \oplus \mathfrak{g}_1,$$

où \mathfrak{g}_λ est l'espace propre de $\text{ad } \partial$ pour la valeur λ (cf. § 3); \mathfrak{g}_{-1} , de dimension n , est constitué par les translations réelles sur z ; $\mathfrak{g}_{-1/2}$, de dimension $2m$, par les champs

$$X(z, w) = 2iF(w, c) + c,$$

où c est arbitraire dans \mathbf{C}^m ; et \mathfrak{g}_0 , qui contient ∂ et ∂' , est formé par les champs de $\mathfrak{g}(D)$ de la forme

$$a_l^k z^l \partial_k + b_\beta^\alpha w^\beta \partial_\alpha,$$

où les b_β^α sont des constantes complexes, et les a_l^k des constantes réelles; ce qui fait que le sous-groupe analytique G_0 obtenu par intégration de \mathfrak{g}_0 conserve la sous-variété $i\Omega \times \{0\}$ de D .

(Tous ces résultats sont établis dans [6], théor. 5.)

LEMME 6.1. — Si $\mathfrak{g}(D)$ est unimodulaire, $\dim \mathfrak{g}_{1/2} = 2m$ et $\dim \mathfrak{g}_1 = n$.

En effet, l'adjointe $\text{ad } \partial$, qui doit être de trace nulle, est égale à λ sur \mathfrak{g}_λ , et d'après ([6], théor. 4, (4))

$$\dim \mathfrak{g}_{1/2} \leq 2m, \quad \dim \mathfrak{g}_1 \leq n.$$

(Noter qu'il en résulte que $\mathfrak{r}_{-1} \oplus \mathfrak{r}_{-1/2} = (\mathfrak{o})$ ([6], théor. 4) par conséquent, \mathfrak{r}_0 commute avec \mathfrak{g}_{-1} et $\mathfrak{g}_{-1/2}$ et ceci entraîne $\mathfrak{r}_0 = (\mathfrak{o})$ comme au théorème 5, (1); ainsi $\mathfrak{g}(D)$ est semi-simple.)

LEMME 6.2. — Si $X \in \mathfrak{g}_1$, X ne s'annule en aucun point de D .

En effet, si $X \in \mathfrak{g}_1$, $\text{ad } X$ est nilpotent. Mais si X s'annule en un point de D , $\text{ad } X$ est semi-simple, les algèbres d'isotropie étant compactes. Par suite, $\text{ad } X = \mathfrak{o}$, donc $[\mathfrak{d}, X] = \mathfrak{o}$, et $X \in \mathfrak{g}_0$, d'où $X = \mathfrak{o}$. (Le même raisonnement s'applique à tout champ X appartenant à un \mathfrak{g}_λ , $\lambda \neq \mathfrak{o}$.)

LEMME 6.3. — Soit $a \in \Omega \subset \mathbf{R}^n$, et A la translation de \mathbf{C}^n définie par $A(\mathfrak{o}, \mathfrak{o}) = (a, \mathfrak{o})$. Si $X \in \mathfrak{g}_1$, et si $[A, X](ia, \mathfrak{o}) = \mathfrak{o}$, $X = \mathfrak{o}$.

Puisque $X \in \mathfrak{g}_1$, il est de la forme

$$X(z, w) = p_{kl}^h z^k z^l \partial_h + q_{k\beta}^z z^k w^\beta \partial_\alpha,$$

les $p_{kl}^h, q_{k\beta}^z$ étant des constantes ([6], form. (4.1)). On a

$$[A, X](z, w) = D_A X(z, w) = 2p_{kl}^h a^k z^l \partial_h + q_{k\beta}^z a^k w^\beta \partial_\alpha,$$

donc

$$[A, X](ia, \mathfrak{o}) = 2ip_{kl}^h a^k a^l \partial_h = -2iX(ia, \mathfrak{o}),$$

par conséquent, si $[A, X]$ s'annule en $(ia, \mathfrak{o}) \in D$, X aussi : donc $X = \mathfrak{o}$ par le lemme 6.2.

LEMME 6.4. — Mêmes notations qu'au lemme 6.3. L'application $(\text{ad } A)^2 : \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_{-1}$ est injective.

Soit $X \in \mathfrak{g}_1$. Un calcul immédiat (cf. [6], form. (5.1) et remarques qui suivent) montre que le champ

$$X + 1/2 (\text{ad } A)^2 X$$

s'annule en $(ia, \mathfrak{o}) \in D$. Si donc $(\text{ad } A)^2 X = \mathfrak{o}$, X s'annule en (ia, \mathfrak{o}) , et $X = \mathfrak{o}$ toujours par le lemme 6.2.

Démonstration de la proposition 6.2. — Comme au lemme 6.3, soient $a \in \Omega$, et A la translation définie par $A(\mathfrak{o}, \mathfrak{o}) = (a, \mathfrak{o})$. Il résulte des lemmes 6.1 et 6.4 que $[A, \mathfrak{g}_1]$, qui est un sous-espace de \mathfrak{g}_0 , est de dimension n . En outre, d'après le lemme 6.3, les champs de $[A, \mathfrak{g}_1]$ ne s'annulent pas en $(ia, \mathfrak{o}) \in D$: puisque \mathfrak{g}_0 conserve $i\Omega \times \{\mathfrak{o}\}$, leurs valeurs en ce point vont fournir tous les vecteurs tangents en (ia, \mathfrak{o}) à $i\mathbf{R}^n \times \{\mathfrak{o}\}$. Comme les vecteurs tangents en ce point à $\mathbf{R}^n \times \{\mathfrak{o}\}$ sont fournis par les translations

réelles sur z , et ceux tangents à $\{0\} \times \mathbf{C}^m$ par $\mathfrak{g}_{-1/2}$, on voit que $\mathfrak{g}(D)$ est transitive au voisinage de $(ia, 0)$, point quelconque de $i\Omega$. Mais tout point de D peut être ramené sur $i\Omega$ par une translation réelle combinée à une transformation

$$\begin{aligned} z &\mapsto z + 2iF(w, c) + iF(c, c), \\ w &\mapsto w + c \end{aligned}$$

($c \in \mathbf{C}^m$; c'est ce qu'on obtient en intégrant les champs de $\mathfrak{g}_{-1/2}$). Il en résulte que $\mathfrak{g}(D)$, et donc $G(D)$, sont transitifs sur D .

C. Q. F. D.

COROLLAIRE. — *Un domaine de Siegel divisible est homogène.*

Il suffit de conjoindre les propositions 6.1 et 6.2.

7. EXPOSANT NUL. — Dans tout ce paragraphe, D désigne un S -domaine d'exposant nul dans $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^m$. Rappelons qu'il est convenu que $\mathfrak{B}_{\mu\nu} = \mathfrak{W}_{\mu\nu} = (0)$ si l'un des entiers μ ou ν est négatif.

LEMME 7.1. — *Soient :*

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}'_{\mu} &= \mathfrak{g}(D) \cap (\mathfrak{B}_{\mu+1,1} \oplus \mathfrak{W}_{\mu,2} \oplus \mathfrak{W}_{\mu,0}), \\ \mathfrak{g}''_{\mu} &= \mathfrak{g}(D) \cap (\mathfrak{B}_{\mu+1,0} \oplus \mathfrak{W}_{\mu,1}), \\ \mathfrak{g}_{\mu} &= \mathfrak{g}'_{\mu} \oplus \mathfrak{g}''_{\mu} \end{aligned}$$

pour tout entier $\mu \geq -1$. Alors :

- (a) $\mathfrak{g}(D) = \bigoplus_{\mu \geq -1} \mathfrak{g}_{\mu}$;
- (b) $\text{ad } \partial | \mathfrak{g}_{\mu} = \mu$;
- (c) $[\mathfrak{g}_{\mu}, \mathfrak{g}_{\mu'}] \subset \mathfrak{g}_{\mu+\mu'}$ quels que soient μ et $\mu' \geq -1$.

Soit X un champ de $\mathfrak{g}(D)$; d'après [6],

$$X = \sum_{\mu \geq 0} \sum_{0 \leq \nu \leq 2} (Z_{\mu\nu} + W_{\mu\nu}),$$

où $Z_{\mu\nu} \in \mathfrak{B}_{\mu\nu}$, $W_{\mu\nu} \in \mathfrak{W}_{\mu\nu}$. Quel que soit le polynôme P à coefficients réels, $\mathfrak{g}(D)$ contient le champ

$$P(\text{ad } \partial) X = \sum_{\mu \geq 0} \sum_{0 \leq \nu \leq 2} P(\mu - 1) Z_{\mu\nu} + P(\mu) W_{\mu\nu},$$

ce qui montre, par un choix convenable de P , que $\mathfrak{g}(D)$ contient les champs

$$X_{\mu} = \sum_{0 \leq \nu \leq 2} (Z_{\mu+1,\nu} + W_{\mu,\nu})$$

quel que soit l'entier $\mu \geq -1$. Maintenant, P désignant toujours un polynôme à coefficients réels, $\mathfrak{g}(D)$ contient les champs

$$P(\text{ad } \partial') X_\mu = P(2i) Z_{\mu+1,2} + P(i) Z_{\mu+1,1} + P(o) Z_{\mu+1,0} \\ + P(i) W_{\mu,2} + P(o) W_{\mu,1} + P(-i) W_{\mu,0},$$

d'où il ressort, par un choix convenable de P , que :

1° $\mathfrak{g}(D)$ contient $Z_{\mu+1,2}$; mais ce champ est multiplié par $2i$ par $\text{ad } \partial'$ il est donc nul d'après le principe de Cartan;

2° $Z_{\mu+1,1} + W_{\mu,2} + W_{\mu,0} \in \mathfrak{g}(D)$;

3° $Z_{\mu+1,0} + W_{\mu,1} \in \mathfrak{g}(D)$.

LEMME 7.2. — \mathfrak{g}_{-1} se réduit aux translations réelles sur la variable z ; et

$$\mathfrak{g}'_\mu = \mathfrak{g}(D) \cap (\mathfrak{w}_{\mu,2} \oplus \mathfrak{w}_{\mu,0}).$$

(a) D'abord, si $X \in \mathfrak{g}_{-1}$, $X \in \mathfrak{B}_{00}$: c'est une translation sur z , et elle est forcément réelle d'après le principe de Cartan.

(b) Ensuite, soit $X \in \mathfrak{g}'_{-1}$: $X \in \mathfrak{B}_{01}$. Mais $[\partial', X] = iX$, donc $X = o$: ceci prouve la première assertion.

(c) Pour la deuxième assertion, on procède par récurrence sur μ ; on vient de la vérifier pour $\mu = -1$. Supposons-la vraie pour l'entier μ , et soit $X \in \mathfrak{g}'_{\mu+1}$: X se décompose

$$X = Z_{\mu+2,1} + W_{\mu+1,2} + W_{\mu+1,0},$$

où $Z_{\alpha\beta} \in \mathfrak{B}_{\alpha\beta}$, etc. Quel que soit l'entier k compris entre -1 et n ,

$$[\partial_k, X] = [\partial_k, Z_{\mu+2,1}] + [\partial_k, W_{\mu+1,2}] + [\partial_k, W_{\mu+1,0}]$$

appartient à \mathfrak{g}'_μ . Il s'ensuit que $[\partial_k, Z_{\mu+2,1}] = o$ quel que soit k , et comme $\mu + 2 \geq -1$, $Z_{\mu+2,1} = o$, i. e.

$$X \in \mathfrak{w}_{\mu+1,2} + \mathfrak{w}_{\mu+1,0}.$$

Le lemme 7.2 est susceptible de l'interprétation géométrique suivante : soit π la projection canonique de $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^m$ sur \mathbf{C}^n , et pour $\zeta \in \pi(D)$, soit

$$D(\zeta) = \{ (\zeta, \omega) \in D \};$$

les sous-variétés $D(\zeta)$ forment une fibration régulière de D .

LEMME 7.3. — Les champs de $\mathfrak{g}(D)$ sont π -projetables.

Il suffit de voir que leurs composantes sur \mathbf{C}^n sont indépendantes de ω , ce qui ressort des lemmes 7.1 et 7.2.

LEMME 7.4. — Pour $\mu \geq 2$, $\mathfrak{g}_\mu = (0)$.

1° Si $\mu \geq 2$, \mathfrak{g}_μ est inclus dans \mathfrak{r} , le radical de $\mathfrak{g}(D)$. En effet, soit λ un autre entier, $\lambda \geq -1$, et $X \in \mathfrak{g}_\mu$, $Y \in \mathfrak{g}_\lambda$. L'opérateur $\text{ad} X \cdot \text{ad} Y$ est de degré au moins 1 sur l'algèbre de Lie graduée $\mathfrak{g}(D)$; il est donc nilpotent, et on voit que X est dans le radical de la forme de Killing de $\mathfrak{g}(D)$: ainsi $\mathfrak{g}_\mu \subset \mathfrak{r}$.

2° Montrons que $\mathfrak{r} \cap \mathfrak{g}_1'' = (0)$. En effet, soit $X \in \mathfrak{r} \cap \mathfrak{g}_1''$:

$$X = Z_{20} + W_{11},$$

où $Z_{20} \in \mathfrak{B}_{20}$, $W_{11} \in \mathfrak{W}_{11}$. Soit $a \in \mathbb{R}^n$ tel que $(ia, 0) \in D$, et $A \in \mathfrak{g}_{-1}$ la translation définie par $A(0, 0) = (a, 0)$. Soit $X' = 1/2(\text{ad} A)^2 X$:

$$X' = 1/2(\text{ad} A)^2 Z_{20}$$

et comme Z_{20} est quadratique en z ,

$$X'(z, w) = Z_{20}(a, w) = -Z_{20}(ia, w);$$

en particulier,

$$X(ia, 0) = Z_{20}(ia, 0) = -X'(ia, 0),$$

i. e. le champ $X + X'$ s'annule en $(ia, 0) \in D$. Comme les algèbres d'isotropie sont compactes, $\text{ad}(X + X')$ est semi-simple. D'un autre côté, nous avons supposé que X est dans \mathfrak{r} : X' s'y trouve aussi; et comme les opérateurs $\text{ad} X$ et $\text{ad} X'$, de degré +1 et -1 respectivement, sont nilpotents, le théorème de Lie montre que $\text{ad}(X + X')$ est nilpotent. Il est donc nul. Il s'ensuit que

$$0 = [\partial, X + X'] = X - X',$$

i. e. $X \in \mathfrak{g}_{-1}$: X est donc nul.

C. Q. F. D.

3° Il est clair maintenant que $\mathfrak{g}_2'' = (0)$. Car si $X \in \mathfrak{g}_2'' \subset \mathfrak{r}$, les champs $[\partial_k, X]$, qui sont dans $\mathfrak{r} \cap \mathfrak{g}_1''$, sont nuls; et comme $X \in \mathfrak{B}_{30} \oplus \mathfrak{W}_{21}$, $X = 0$.

4° Soit $X \in \mathfrak{g}'_2$: $X = W_{22} + W_{20}$, avec $W_{22} \in \mathfrak{W}_{22}$, $W_{20} \in \mathfrak{W}_{20}$. Soit $a \in \mathbb{R}^n$ tel que $(ia, 0) \in D$, et

$$X' = 1/2(\text{ad} A)^2 X$$

($X' \in \mathfrak{g}'_0$). Comme X est quadratique en z ,

$$X'(z, w) = X(a, w) = -X(ia, w),$$

donc le champ $X + X'$ s'annule sur la fibre $D(ia)$. Considérons le jet d'ordre 1 en $(ia, 0)$ de $X + X'$: ce jet est semi-simple, les algèbres d'isotropie étant compactes; il s'annule évidemment sur l'espace tangent $T_{(ia, 0)} D(ia)$, et aussi sur $T_{(ia, 0)} D / T_{(ia, 0)} D(ia)$, parce que X et X' ont une composante nulle sur \mathbf{C}^n (ils conservent la fibration par π). Nilpotent et semi-simple, ce jet est nul; et comme les éléments d'isotropie sont déterminés par leur jet d'ordre 1, $X + X' = 0$, i. e. $X \in \mathfrak{g}_0$, donc $X = 0$. Ainsi $\mathfrak{g}'_2 = (0)$, et $\mathfrak{g}_2 = (0)$.

5° Soit $X \in \mathfrak{g}_3$: les crochets $[d_k, X]$ sont dans \mathfrak{g}_2 , et par conséquent nuls; comme X n'a pas de composante indépendante de z , il est nul. Une récurrence triviale montre ainsi que $\mathfrak{g}_\mu = (0)$ pour $\mu \geq 2$.

Récapitulons :

PROPOSITION 7.4. — Soit D un S -domaine d'exposant nul dans $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^m$; soit

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}'_\mu &= \mathfrak{g}(D) \cap (\mathfrak{W}_{\mu, 2} \oplus \mathfrak{W}_{\mu, 0}), \\ \mathfrak{g}''_\mu &= \mathfrak{g}(D) \cap (\mathfrak{Z}_{\mu+1, 0} \oplus \mathfrak{W}_{\mu, 1}), \\ \mathfrak{g}_\mu &= \mathfrak{g}'_\mu \oplus \mathfrak{g}''_\mu \end{aligned}$$

pour μ entier ≥ -1 . Alors

$$\mathfrak{g}(D) = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1; \quad \text{ad } \partial | \mathfrak{g}_\mu = \mu; \quad [\mathfrak{g}_\mu, \mathfrak{g}_{\mu'}] \subset \mathfrak{g}_{\mu+\mu'}$$

et les champs de $\mathfrak{g}(D)$ sont π -projetables.

Avant d'aller plus loin, nous énoncerons un petit lemme d'algèbre linéaire.

LEMME 7.5. — Soient K un corps commutatif, a et b deux éléments distincts de K , h un entier, et A une quelconque matrice de dimension $h \times h$, à coefficients dans K . La matrice \tilde{A} , de dimension $h \times 2h$

$$\tilde{A} = (A + aI | A + bI)$$

(I , matrice unité $h \times h$) est toujours de rang h .

Soit T l'endomorphisme linéaire de K^h dont la matrice dans la base canonique est la transposée tA de A ; et soit \tilde{T} l'application linéaire de K^h dans $K^h \oplus K^h$ définie par

$$\tilde{T}.x = (T + a)x \oplus (T + b)x,$$

\tilde{T} est manifestement injective, et sa matrice est la transposée ${}^t\tilde{A}$ de \tilde{A} .

8. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 3. — On garde les notations du paragraphe 7, et on suppose de plus D balayable (donc holomorphiquement convexe). Soit \mathfrak{h} la sous-algèbre de $\mathfrak{g}(D)$ engendrée par \mathfrak{g}'_0 et ∂' : elle commute avec les translations (réelles ou non) sur \mathbf{C}^n , et elle opère naturellement par restriction sur les fibres $D(\zeta)$ ($\zeta \in \pi(D)$). L'idée de la démonstration est que \mathfrak{h} est transitive sur les fibres $D(\zeta)$.

LEMME 8.1. — *Les champs de \mathfrak{h} sont indépendants de z , de degré en w inférieur ou égal à 2, et $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}'_0 \oplus \mathfrak{l}$, où*

$$\mathfrak{l} = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{w}_{01}, \quad \mathfrak{g}'_0 = \mathfrak{h} \cap (\mathfrak{w}_{02} \oplus \mathfrak{w}_{00}).$$

Les assertions sur les degrés sont évidentes. Si $X \in \mathfrak{h}$,

$$\begin{aligned} X &= W_{02} + W_{01} + W_{00}, \\ [\partial', X] &= iW_{02} - iW_{00} \in \mathfrak{h}, \end{aligned}$$

donc $W_{02} + W_{00} \in \mathfrak{h} \cap (\mathfrak{w}_{02} + \mathfrak{w}_{00}) = \mathfrak{g}'_0$, et $W_{01} \in \mathfrak{l}$.

LEMME 8.2. — *L'application $c : \mathfrak{h} \rightarrow \mathbf{C}^m$ qui à $X \in \mathfrak{h}$ associe $X(o, o)$ a pour noyau \mathfrak{l} ; elle est injective sur \mathfrak{g}'_0 , et l'image $\mathfrak{h}(o, o)$ est un \mathbf{C} -sous-espace de \mathbf{C}^m : $\mathfrak{h}(o, o) = \mathfrak{h}^{\mathbf{C}}(o, o)$.*

En effet, si $X \in \mathfrak{g}'_0$, $X = W_{02} + W_{00}$, et $X(o, o) = W_{00}$. On a

$$[\partial', X] = iW_{02} - iW_{00},$$

formule qui montre que :

- (1) si $X(o, o) = o$, $X = o$ (principe de Cartan);
- (2) $iX(o, o) = -[\partial', X](o, o)$, i. e. $\mathfrak{h}^{\mathbf{C}}(o, o) = \mathfrak{h}(o, o)$.

LEMME 8.3. — *La dimension de \mathfrak{g}'_0 est paire, inférieure ou égale à $2m$, et \mathfrak{g}'_0 a une base $X_1, \dots, X_h, Y_1, \dots, Y_h$, où $Y_j = [\partial', X_j]$; les vecteurs $X_j(o, o)$ forment une base sur \mathbf{C} de $\mathfrak{h}^{\mathbf{C}}(o, o) = \mathfrak{h}(o, o)$.*

Tout ceci résulte aisément du lemme 8.2.

Soit $D_1 = D \cap (\mathbf{C}^n \times \{o\})$. Puisque D est holomorphiquement convexe, il résulte de la proposition 1.1 que D_1 est un domaine de Siegel de première espèce, que $\pi(D) = D_1$, et que les fibres $D(\zeta)$, pour $\zeta \in D_1$, sont des domaines cerclés dans $\{\zeta\} \times \mathbf{C}^m$, étoilés par rapport à (ζ, o) . La sous-algèbre \mathfrak{h} opère sur les fibres $D(\zeta)$ par restriction; si $X \in \mathfrak{h}$, $X(\zeta, o) = X(o, o)$ et donc

$$\mathfrak{h}(\zeta, o) = \mathfrak{h}(o, o) = \mathfrak{h}^{\mathbf{C}}(o, o) = \mathfrak{h}^{\mathbf{C}}(\zeta, o).$$

LEMME 8.4. — Soit ζ un point de D_1 ; $\mathfrak{g}(D)^{\mathfrak{C}}(\zeta, o)$ admet comme \mathfrak{C} -base $d_1, \dots, d_n, X_1(\zeta, o), \dots, X_h(\zeta, o)$.

Il faut voir que si $X \in \mathfrak{g}(D)$, $X(\zeta, o)$ est combinaison linéaire complexe des $n + h$ vecteurs en question. On procède cas par cas.

- 1° Si $X \in \mathfrak{g}_{-1}$ ou si $X \in \mathfrak{g}'_0$, c'est trivial.
- 2° Si $X \in \mathfrak{g}''_0$, $X = Z_{10} + W_{01}$, donc $X(\zeta, o) = Z_{10}(\zeta, o) \in \mathfrak{C}^n$.
- 3° Si $X \in \mathfrak{g}''_1$, $X = Z_{20} + W_{11}$, donc $X(\zeta, o) = Z_{20}(\zeta, o) \in \mathfrak{C}^n$.
- 4° Si $X \in \mathfrak{g}'_1$, $X \in \mathfrak{W}_{12} + \mathfrak{W}_{10}$ est linéaire en z ; donc

$$X = \sum_k z^k [\partial_k, X]$$

et $[\partial_k, X] \in \mathfrak{g}'_0$, donc $X(\zeta, o) = \sum_k \zeta^k ([\partial_k, X](\zeta, o)) \in \mathfrak{g}'_0{}^{\mathfrak{C}}(\zeta, o) = \mathfrak{h}^{\mathfrak{C}}(\zeta, o)$.

C. Q. F. D.

LEMME 8.5. — L'algèbre \mathfrak{h} opère transitivement sur les fibres $D(\zeta)$, pour $\zeta \in D_1$; de plus, ces dernières sont bornées dans $\mathfrak{C}^n \times \mathfrak{C}^m$.

Puisque D est balayable, la dimension sur \mathfrak{C} de $\mathfrak{g}(D)^{\mathfrak{C}}(z, \varpi)$ est constante quand (z, ϖ) varie dans D (propos. 2.3); en vertu du lemme 8.4, elle est égale à $h + n$. Soit $\zeta \in D_1$, et V un voisinage de (ζ, o) sur lequel les champs $X_1, \dots, X_h, d_1, \dots, d_n$ restent \mathfrak{C} -indépendants, et donc forment toujours une \mathfrak{C} -base de $\mathfrak{g}(D)^{\mathfrak{C}}(z, \varpi)$.

1° Ceci amène d'abord, pour tout $(z, \varpi) \in V$, l'existence de nombres complexes λ_i^k (dépendant de z et ϖ) tels que

$$(1)_j \quad Y_j(z, \varpi) = \sum_k \lambda_j^k X_k(z, \varpi)$$

(les champs X_j, Y_j n'ont pas de composante sur \mathfrak{C}^n). Posons

$$X_j(z, \varpi) = F_j(\varpi) + c_j,$$

où $c_j = X_j(o, o) \in \mathfrak{C}^m$, et où F_j est une application quadratique de \mathfrak{C}^m dans lui-même;

$$Y_j(z, \varpi) = iF_j(\varpi) - ic_j$$

et la relation $(1)_j$ s'écrit

$$\sum_k (\lambda_j^k - i\delta_j^k) F_k(\varpi) + (\lambda_j^k + i\delta_j^k) c_k = o.$$

Soit Λ la matrice $h \times h$ des λ_j^k ; la matrice $(\Lambda - iI; \Lambda + iI)$ est de rang h (lemme 7.5), donc les h relations $(1)_j$ ($1 \leq j \leq h$) sont indépendantes, et sur les $2h$ vecteurs $F_k(\varpi), c_k, h$ s'expriment linéairement en fonction des h autres. Le sous-espace engendré est de dimension inférieure ou égale à h , et comme les $c_j = X_j(o, o)$ forment h vecteurs indépendants dans \mathbf{C}^m (lemme 8.3), on voit qu'on peut exprimer les $F_k(\varpi)$ en fonction des c_j . Ceci prouve que si (z, ϖ) est dans le voisinage V de (ζ, o) , les $F_k(\varpi)$ ($1 \leq k \leq h$) sont dans $\mathfrak{h}(o, o) = \mathfrak{h}^{\mathbf{C}}(o, o)$ (lemme 8.2); par conséquent, les F_k , qui sont quadratiques, prennent leurs valeurs dans $\mathfrak{h}(o, o)$, et il apparaît que $X_j(z, \varpi) \in \mathfrak{h}(o, o)$ quel que soit $(z, \varpi) \in \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^m$.

2° Maintenant, toujours pour la même raison, il doit exister, pour tout $(z, \varpi) \in V$, des nombres complexes μ^j tels que

$$d'(z, \varpi) = \sum_{j=1}^h \mu^j X_j(z, \varpi).$$

Par suite, si $(z, \varpi) \in V$, $i\varpi = d'(z, \varpi)$ est dans $\mathfrak{h}(o, o)$. Ceci exige que $\mathfrak{h}(o, o) = \mathbf{C}^m$.

3° Ainsi $\mathfrak{h}(\zeta, o) = \mathbf{C}^m$ et \mathfrak{h} est transitive en (ζ, o) sur $D(\zeta)$. Soient H le sous-groupe analytique de $G(D)$ correspondant à \mathfrak{h} , et $D'(\zeta)$ l'orbite de (ζ, o) par H : c'est un ouvert de $D(\zeta)$ (qui est connexe puisque étoilé). Soit d la distance de Bergman sur $D(\zeta)$ et $r > 0$ tel que $D'(\zeta)$ contienne la boule $B_{D(\zeta)}((\zeta, o), r)$ de centre (ζ, o) et de rayon r . Alors quel que soit $p \in D'(\zeta)$, la boule $B_{D(\zeta)}(p, r)$ de centre p et de rayon r est incluse dans $D'(\zeta)$. Il en résulte trivialement que $D'(\zeta)$ est fermé dans $D(\zeta)$, i. e. $D'(\zeta) = D(\zeta) : \mathfrak{h}$ est transitive sur $D(\zeta)$.

4° Reste à voir que $D(\zeta)$ est borné dans $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^m$. Soit $\| \cdot \|$ une norme quelconque sur \mathbf{C}^m . Quel que soit $u \in \mathbf{C}^m$, de norme 1, l'intersection de $D(\zeta)$ avec la \mathbf{C} -droite $\{\zeta\} \times \mathbf{C}u$ est un disque (parce que $D(\zeta)$ est cerclé) de rayon $R(u)$ fini (parce que D ne saurait contenir de \mathbf{C} -droite entière). D'un autre côté le bord de $D(\zeta)$ dans $\{\zeta\} \times \mathbf{C}^m$ est inclus dans la variété algébrique réelle

$$V = \{p \in \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^m \mid \dim_{\mathbf{R}} \mathfrak{h}(p) < 2m\},$$

ce qui fait que la fonction $u \mapsto R(u)$ est continue, et donc bornée.

Démonstration du théorème 3. — Comme l'algèbre \mathfrak{h} , et par conséquent le sous-groupe analytique H obtenu par intégration, commutent avec les translations réelles ou non sur z , on voit que les fibres $D(\zeta)$ se déduisent les unes des autres par translation quand ζ varie dans D_1 . Ainsi

$D = D_1 \times D_2$, où $D_2 \subset \{0\} \times \mathbf{C}^m$ est l'orbite de $(0, 0)$ par H ; étant translaté des fibres, D_2 a toutes les propriétés annoncées.

Le théorème 3 a une annexe :

PROPOSITION 8.1. — *Sous les hypothèses du théorème 3,*

$$\mathfrak{g}(D) = \mathfrak{g}(D_1) \oplus \mathfrak{g}(D_2).$$

Commençons par pointer un lemme :

LEMME 8.6. — *Dans la situation du théorème 3, si un champ $X \in \mathfrak{g}(D)$ prend ses valeurs dans \mathbf{C}^n , il est indépendant de z .*

Soit, en effet, X un tel champ : il opère naturellement sur les fibres $D(z)$, $z \in D_1$. Soit $\zeta \in D_1$: la restriction de X à $D(\zeta)$ est un automorphisme holomorphe de $D(\zeta)$. Soit X_ζ le champ

$$X_\zeta(z, w) = X(\zeta, w),$$

il est indépendant de z et coïncide avec X sur $D(\zeta)$. Compte tenu du théorème 3, $X_\zeta \in \mathfrak{g}(D)$. Le champ $X - X_\zeta \in \mathfrak{g}(D)$ est nul sur $D(\zeta)$; considérons son jet d'ordre 1 en $(\zeta, 0)$:

- (1) ce jet est semi-simple, car les algèbres d'isotropie sont compactes;
- (2) il est nul sur l'espace tangent à $D(\zeta)$, soit $T_{(\zeta, 0)} D(\zeta)$;
- (3) il est nul sur le quotient

$$T_{(\zeta, 0)} D / T_{(\zeta, 0)} D(\zeta)$$

parce que X et X_ζ ont une projection nulle sur \mathbf{C}^n . Il en résulte que ce jet est nul, et donc (cf. lemme 7.3, 4°) $X - X_\zeta = 0$, i. e. X est indépendant de z .

C. Q. F. D.

Démonstration de la proposition 8.1. — Puisque $D = D_1 \times D_2$, $\mathfrak{g}(D_1)$ et $\mathfrak{g}(D_2)$ se plongent naturellement dans $\mathfrak{g}(D)$. Il est clair que $\mathfrak{g}_{-1} \subset \mathfrak{g}(D_1)$, et que $\mathfrak{g}'_0 \subset \mathfrak{g}(D_2)$.

1° Soit $X \in \mathfrak{g}''_0$: il est de la forme

$$X = Z_{10} + W_{01},$$

avec $Z_{10} \in \mathfrak{B}_{10}$, etc. Sur D_1 , X et Z_{10} coïncident, et prennent leurs valeurs dans \mathbf{C}^n . Il en résulte que $Z_{10} \in \mathfrak{g}(D)$, donc que $W_{01} \in \mathfrak{g}(D)$; et manifestement $W_{01} \in \mathfrak{g}(D_2)$. Ainsi $X \in \mathfrak{g}(D_1) \oplus \mathfrak{g}(D_2)$.

2° Soit $X \in \mathfrak{g}''_1$: il est de la forme

$$X = Z_{20} + W_{11},$$

avec $Z_{20} \in \mathfrak{B}_{20}$, etc. Le même argument que ci-dessus montre que $Z_{20} \in \mathfrak{g}(D_1)$, et $W_{11} \in \mathfrak{g}(D)$. Le lemme 8.6 exige que W_{11} soit indépendant de z : il est donc nul, et $X \in \mathfrak{g}(D_1)$.

3° Enfin, soit $X \in \mathfrak{g}'$: il est de la forme

$$X = W_{12} + W_{10},$$

donc nul d'après le lemme 8.6.

[Tenant compte de ce que D_2 est symétrique, on pourrait d'ailleurs montrer que $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}(D_2)$.]

9. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1. — Soit D un S -domaine d'exposant c dans $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^m$, divisible.

1° Si l'exposant c est non nul, D est un domaine de Siegel (théor. 2), donc (propos. 6.1 et 6.2, et corollaire) il est homogène.

2° Si l'exposant c est nul, D se factorise en $D_1 \times D_2$ (théor. 3), où D_1 est un domaine de Siegel de première espèce dans \mathbf{C}^n , et D_2 un domaine borné cerclé, contenant l'origine, homogène, dans \mathbf{C}^m ; en outre,

$$\mathfrak{g}(D) = \mathfrak{g}(D_1) \oplus \mathfrak{g}(D_2)$$

(propos. 8.1). Puisque D est divisible, $\mathfrak{g}(D)$ est unimodulaire (propos. 6.4), donc $\mathfrak{g}(D_1)$ est unimodulaire et D_1 homogène (propos. 6.2); ainsi $D = D_1 \times D_2$ est homogène.

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] H. CARTAN, *Sur les fonctions de plusieurs variables complexes; l'itération des transformations intérieures d'un domaine borné* (*Math. Zeitschrift*, t. 35, 1932, p. 760-773).
- [2] H. CARTAN, *Sur les groupes de transformations analytiques*, Hermann, Paris, 1935.
- [3] L. GÅRDING, *Note on Continuous representations of Lie groups* (*Proc. Nat. Acad. Sci.*, vol. 33, 1947, p. 331-332).
- [4] L. HÖRMANDER, *An Introduction to Complex Analysis in several Variables*, Van Nostrand, 1966.
- [5] W. KAUP, *Transformationsgruppen und invariante Metriken* (*Inv. Math.*, t. 3, 1967, p. 43-70).
- [6] W. KAUP, Y. MATSUSHIMA et T. OCHIAI, *On the automorphisms and equivalences of generalized Siegel Domains* (*American J. of Maths.*, 92, 1970, p. 475-498).
- [7] S. KOBAYASHI, *Geometry of bounded Domains* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 92, 1959, p. 267-290).
- [8] J.-L. KOSZUL, *Sous-groupes discrets des groupes de transformations affines admettant une trajectoire convexe* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 259, 1964, p. 3675-3677).

(Manuscrit reçu le 5 octobre 1970.)

Jacques VEY,
 Institut de Mathématiques pures,
 B. P. n° 116,
 38-Saint-Martin-d'Hères.