G. Darboux

# Recherches sur les surfaces orthogonales

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 1re série*, tome 2 (1865), p. 55-69
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1865_1_2__55_0>

# RECHERCHES

SUR

# LES SURFACES ORTHOGONALES,

PAR M. G. DARBOUX,

AGRÉGÉ PRÉPARATEUR A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

Ces recherches comprennent deux parties distinctes.

Dans la première, je donne quelques propriétés nouvelles des surfaces formant un système triple orthogonal. Ces propriétés correspondent aux propriétés focales des courbes orthogonales, propriétés qui ont été trouvées par M. Kummer (voir *Journal de Crelle*, t. XXXV). Cet éminent géomètre montre que des courbes orthogonales sont toujours homofocales; je fais voir de même que des surfaces orthogonales sont *homofocales*. Il est nécessaire d'adopter pour cela une définition des focales et des foyers d'une surface qui est l'extension naturelle de la définition des foyers dans les courbes.

Dans la deuxième partie j'indique un système de surfaces orthogonales que je crois nouveau et intéressant. Il se compose de surfaces du quatrième degré qui admettent pour ligne double le cercle imaginaire à l'infini. Ces surfaces jouissent de belles propriétés : elles admettent en particulier dix séries de sections circulaires. On ne connaissait pas jusqu'à présent de surface qui admît plus de huit séries de sections circulaires.

Je signalerai encore, pour faire un résumé complet de ce qui se trouve dans mon travail, cette remarque qu'on peut toujours trouver sur une surface l'équation finie d'une ligne de courbure. C'est par là que je commencerai.

## I.

1. Considérons une surface quelconque. Rapportons-la à trois axes rectangulaires, et posons suivant l'usage

$$dz = p\,dx + q\,dy.$$

L'équation des lignes de courbure sera

$$\frac{dx + p\,dz}{dp} = \frac{dy + q\,dz}{dq} = \frac{dz\,(1 + p^2 + q^2)}{p\,dp + q\,dq}.$$

On satisfait à cette équation en posant

$$(1)\qquad 1+p^2+q^2=0,$$

car il vient alors

$$p\,dp+q\,dq=0.$$

D'ailleurs l'équation (1) détermine sur la surface une courbe qui sera ligne de courbure. En d'autres termes, l'équation (1) détermine une *intégrale particulière* et non la *solution particulière*. Si l'on cherche la *solution particulière*, on verra en effet qu'elle est donnée par une équation distincte de l'équation (1) (*).

L'équation (1) détermine les plans pour lesquels le plan tangent est parallèle à l'un des plans tangents du cône

$$x^2+y^2+z^2=0.$$

Ce cône est appelé quelquefois cône asymptote de la sphère. Ainsi on a la propriété suivante :

Menez à une surface tous les plans tangents parallèles à ceux du cône asymptote de la sphère, le lieu des points de contact sera une ligne de courbure de la surface.

On peut se rendre compte *à priori* de ce résultat si singulier. Étudions en effet les développables comprises dans l'équation

$$1+p^2+q^2=0.$$

La normale à l'une de ces surfaces en un point quelconque, c'est la génératrice même de la surface, comme il est facile de le vérifier par un calcul bien simple. Ainsi ces surfaces développables ont pour normales leurs propres génératrices. Il résulte de là que toute courbe tracée sur ces surfaces sera ligne de courbure. En effet, les normales à la surface, le long de cette ligne, forment la surface développable elle-même; elles sont tangentes à l'arête de rebroussement. Toute ligne tracée sur la surface satisfait donc à la définition des lignes de courbure.

Le lieu des centres de courbure est l'arête de rebroussement, mais le rayon de courbure est toujours nul, car pour deux points (XYZ), ($xyz$) pris sur une

(*) On obtient la solution particulière en écrivant que les deux valeurs de $\frac{dy}{dx}$ fournies par l'équation des lignes de courbure sont égales; on a la relation

$$[t(1+p^2)-r(1+q^2)]^2+4\,[pqr-s(1+p^2)]\,[pqt-s(1+q^2)]=0.$$

Cette équation représente une ligne imaginaire pour tous les points de laquelle les deux rayons de courbure sont égaux : c'est l'enveloppe des lignes de courbure. On peut l'appeler *ligne ombilicale;* elle a pour points doubles tous les ombilics de la surface.

même génératrice, on a toujours

$$(X - x)^2 + (Y - y)^2 + (Z - z)^2 = 0 \ (^*).$$

Prenons maintenant une surface quelconque; on peut toujours lui circonscrire une développable comprise dans l'équation (1), et alors la ligne de contact sera, comme nous l'avons vu, une ligne de courbure commune aux deux surfaces.

Il résulte de ce qui précède que si l'équation différentielle des lignes de courbure est de celles qu'on peut intégrer quand on connaît une intégrale particulière, l'intégrale générale pourra être obtenue.

**2.** Considérons maintenant un système triple de surfaces orthogonales. Voici ce que nous entendons par système triple :

Toute équation

$$f(x, y, z, \lambda) = 0$$

détermine une série de surfaces comprises dans une même équation. Il suffit de faire varier $\lambda$. Les surfaces comprises dans une telle équation ont quelques propriétés bien connues et qu'il suffit de rappeler.

Le degré de l'équation en $\lambda$ détermine le nombre de ces surfaces qui passent par un point de l'espace. Les surfaces ont une enveloppe, et cette enveloppe admet une arête de rebroussement pour tous les points de laquelle trois surfaces sont tangentes. Enfin, sur cette arête il y a un point de rebroussement pour lequel quatre surfaces deviennent tangentes.

Dans le cas où l'équation est du troisième degré en $\lambda$, on a un *système triple*. Si deux surfaces quelconques se coupent à angle droit, on a un système triple orthogonal. Le système formé de surfaces du second degré rentre dans cette définition.

En un point quelconque de l'espace, il passe trois surfaces qui se coupent à angle droit. Les surfaces orthogonales ne peuvent donc pas avoir d'enveloppe réelle. Mais il y a une enveloppe imaginaire que nous allons étudier.

Soient XYZ, X'Y'Z', X''Y''Z'' les coefficients angulaires des normales aux trois surfaces. On a les relations

$$(2)\qquad \begin{cases} XX' + YY' + ZZ' = 0 \\ XX'' + YY'' + ZZ'' = 0 \\ X'X'' + Y'Y'' + Z'Z'' = 0. \end{cases}$$

Mais pour tout point de l'enveloppe les plans tangents à deux des surfaces

---

(*) Ces surfaces ont encore une propriété à peu près évidente. Si on les coupe par des plans parallèles, les projections des courbes de section sur un des plans sécants sont des courbes parallèles, quelle que soit la direction des plans sécants.

coïncident avec le plan tangent de l'enveloppe. On a par conséquent

$$X = X', \quad Y = Y', \quad Z = Z'.$$

La première des relations (2) doit toujours être satisfaite. On a donc

$$(3) \qquad X^2 + Y^2 + Z^2 = 0,$$

ce qui prouve que l'enveloppe est une surface développable satisfaisant à l'équation (1)

$$1 + p^2 + q^2 = 0.$$

De là ce théorème :

Quand on a un système de surfaces orthogonales, ce système a pour enveloppe une surface développable dont les génératrices sont parallèles à celles du cône asymptote de la sphère.

3. Ce théorème se vérifie en particulier pour les surfaces du second degré. Ces surfaces sont comprises dans l'équation

$$\frac{x^2}{a-\lambda} + \frac{y^2}{b-\lambda} + \frac{z^2}{c-\lambda} - 1 = 0.$$

L'équation du plan tangent peut se mettre sous la forme

$$mx + ny + pz = \sqrt{am^2 + bn^2 + cp^2 - \lambda(m^2 + n^2 + p^2)}.$$

Si l'on fait

$$m^2 + n^2 + p^2 = 0,$$

$\lambda$ disparaît, et l'on a un plan tangent à toutes les surfaces.

4. On peut donner une forme élégante au théorème qui précède, en définissant de la manière suivante les foyers et les focales d'une surface.

Dans le plan, pour avoir les foyers d'une courbe, on lui mène les tangentes ayant pour coefficients angulaires

$$\pm\sqrt{-1},$$

c'est-à-dire les tangentes parallèles aux asymptotes du cercle. Les points de rencontre de ces tangentes sont les foyers de la courbe.

De même, dans l'espace, on mènera les plans tangents parallèles à ceux du cône asymptote de la sphère. On formera ainsi une surface développable circonscrite à la proposée; sur chacune des génératrices de cette surface, il y aura un point réel. Le lieu de ces points se composera d'une ou de plusieurs courbes. Ces courbes seront appelées *focales* de la surface. Ce sont elles qui répondent aux foyers des courbes planes. Ce sont des lignes doubles de la surface développable. En effet, par chacun de leurs points réels il passe deux génératrices imaginaires conjuguées.

On peut appeler foyer de la surface tout point des focales, et alors un foyer pourra être défini un point-sphère ayant un double contact avec la surface (*).

5. Avec ces définitions, le théorème que nous avons reconnu pourra s'énoncer ainsi :

Toutes les surfaces faisant partie d'un système orthogonal sont homofocales, c'est-à-dire ont les mêmes focales.

Sous cette forme, le théorème devient la généralisation de celui qui est dû à M. Kummer sur les courbes orthogonales.

6. Mais les systèmes orthogonaux donnent lieu à d'autres propriétés qui n'ont pas d'analogue dans le plan. Ainsi, toute surface faisant partie d'un système orthogonal contient nécessairement une ou plusieurs droites parallèles aux génératrices du cône asymptote de la sphère.

En effet, en tout point de l'enveloppe, il y a deux surfaces tangentes à l'enveloppe et une troisième surface qui la coupe. Toute surface du système touche donc l'enveloppe suivant une courbe et la coupe suivant une autre. Il y a une courbe de contact et une courbe d'intersection. Je dis que cette courbe d'intersection se compose de droites. En effet, la tangente en un quelconque de ses points est l'intersection des plans tangents à la surface et à l'enveloppe. Or, le plan tangent à la surface est perpendiculaire au plan tangent de l'enveloppe, et par suite il contient la normale à l'enveloppe qui est la génératrice de cette surface développable. Cette génératrice est donc l'intersection des deux plans tangents; c'est la tangente à la courbe d'intersection des deux surfaces. Or, il n'y a sur une surface développable que l'arête de rebroussement qui soit tangente à toutes les génératrices. Comme cette solution ne peut convenir, il faut que la courbe d'intersection des deux surfaces se réduise à une ou plusieurs droites.

Ainsi, toute surface du système contient des droites, et le lieu de ces droites forme l'enveloppe du système. Ces droites rencontrent la courbe de contact de la surface avec l'enveloppe sur l'arête de rebroussement.

7. On voit bien d'après cela pourquoi une surface quelconque ne peut faire partie d'un système triple orthogonal. Ainsi il n'y aura pas de système triple

(*) Les définitions précédentes ne sont sans doute pas nouvelles; cependant, comme je ne les ai vues nulle part, j'ai cru devoir les donner avec quelque développement. La définition des focales d'une courbe est analogue à celle des focales d'une surface. On fait passer par chaque tangente de la courbe un plan parallèle à un plan tangent du cône asymptote de la sphère. On a une développable qui admet pour ligne double la courbe proposée. Il y a d'autres lignes doubles qui sont les focales de la proposée. On voit qu'il y a réciprocité entre les courbes focales : si une courbe A est la focale d'une courbe B, réciproquement la courbe B est focale de la courbe A. De plus, si une courbe C est focale de deux courbes A et B, les deux courbes A et B sont focales l'une de l'autre.

Les focales d'une même surface forment un système de courbes dont une quelconque a pour focales toutes les autres.

orthogonal formé de surfaces des ondes, car on ne peut placer aucune droite sur ces surfaces. Les considérations précédentes justifient donc la remarque qu'a faite M. Serret (*Journal de Liouville*, t. XII, p. 242, *Mémoire sur les surfaces orthogonales*), que le nombre des surfaces susceptibles de faire partie d'un système orthogonal pourrait bien être assez limité.

8. Les cônes de même sommet circonscrits aux surfaces orthogonales sont homofocaux. En effet, si par le sommet commun on mène des plans tangents à l'enveloppe développable, ces plans tangents seront évidemment communs à tous les cônes circonscrits. Or, ce sont les plans dont les intersections déterminent les focales. Par suite, les cônes seront homofocaux.

Quand des cônes sont orthogonaux, ils sont aussi homofocaux. Ainsi, une première condition pour que des cônes soient orthogonaux, c'est qu'ils aient les mêmes focales. On est donc en droit de supposer qu'il y aura toute une classe de surfaces orthogonales pour lesquelles les cônes circonscrits seront non-seulement homofocaux, mais aussi orthogonaux. Dans ce cas, deux surfaces orthogonales quelconques pourront être considérées comme lieu des centres de courbure d'une troisième surface, et on pourra trouver l'intégrale première de l'équation des lignes géodésiques. Je ne développe pas les conséquences relatives à ce cas; il n'y aurait qu'à répéter ce qui a déjà été dit à propos des surfaces du second degré.

9. On peut faire aux théorèmes précédents une objection qu'il ne sera peut-être pas inutile d'éclaircir. La voici :

Quand on transforme les surfaces par rayons vecteurs réciproques, la surface développable qui les enveloppe n'est pas transformée en surface développable; les droites se transforment en cercles, et cependant les surfaces restent orthogonales. Les théorèmes précédents sont donc en défaut.

Mais l'objection peut être levée facilement, car les surfaces développables comprises dans l'équation

$$1+p^2+q^2=0$$

se transforment en surfaces développables.

En effet, le cône

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=0$$

se transformant en un cône

$$(x-a')^2+(y-b')^2+(z-c')^2=0,$$

il faut que les génératrices du premier cône deviennent les génératrices du second. Donc toutes les droites parallèles aux génératrices du cône asymptote de la sphère se transforment en droites, et les surfaces gauches ou développables formées de ces droites se transforment en surfaces réglées.

On peut même ajouter cette conséquence, que si l'on transforme une surface par rayons vecteurs réciproques, les focales de la surface transformée sont les transformées des focales de la surface primitive.

## II.

**10.** Je vais donner maintenant un nouveau système de surfaces orthogonales.

Il y a une classe de courbes du quatrième degré, dont l'équation est de la forme

$$(x^2+y^2)^2+u_1(x^2+y^2)+u_2=0,$$

$u_1$ et $u_2$ étant des polynômes du premier et du second degré en $x$, $y$. Ces courbes remarquables ont été étudiées (*voir* CHASLES, *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. XXXVII, et SALMON, *Courbes planes*, p. 123). Aux nombreuses propriétés qu'on leur a trouvées, on peut ajouter celle-ci : elles sont susceptibles de former un système orthogonal (*voir* la Note I à la fin du Mémoire, page 65).

Les surfaces qui correspondent aux courbes précédentes ont une équation de la forme

$$(x^2+y^2+z^2)^2+u_1(x^2+y^2+z^2)+u_2=0, \tag{$\alpha$}$$

$u_1$ et $u_2$ étant comme précédemment des polynômes du premier et du second degré. Nous sommes conduits à chercher si ces surfaces peuvent former un système triplement orthogonal.

Prenons les surfaces les plus simples, celles dont l'équation est de la forme

$$(x^2+y^2+z^2)^2+\alpha^2x^2+\beta^2y^2+\gamma^2z^2-h^4=0. \tag{$\beta$}$$

Soient les équations de deux de ces surfaces :

$$\begin{gathered}
\mathrm{F}=\rho^4+\alpha^2x^2+\beta^2y^2+\gamma^2z^2-h^4=0,\\
\mathrm{F}'=\rho^4+\alpha'^2x^2+\beta'^2y^2+\gamma'^2z^2-h'^4=0,\\
\rho^2=x^2+y^2+z^2.
\end{gathered}$$

Écrivons que ces deux surfaces se coupent à angle droit. Nous devrons avoir

$$\frac{d\mathrm{F}}{dx}\cdot\frac{d\mathrm{F}'}{dx}+\frac{d\mathrm{F}}{dy}\cdot\frac{d\mathrm{F}'}{dy}+\frac{d\mathrm{F}}{dz}\cdot\frac{d\mathrm{F}'}{dz}=0,$$

ce qui donne, en tenant compte des équations des deux surfaces,

$$(\alpha^2\alpha'^2+2h^4+2h'^4)x^2+(\beta^2\beta'^2+2h^4+2h'^4)y^2+(\gamma^2\gamma'^2+2h^4+2h'^4)z^2=0.$$

Mais en retranchant les équations des deux surfaces on a

$$(\alpha'^2-\alpha^2)x^2+(\beta'^2-\beta^2)y^2+(\gamma'^2-\gamma^2)z^2+h^4-h'^4=0.$$

Cette équation et la précédente doivent coïncider. On a donc

$$h^4=h'^4$$

$$\frac{\alpha^2-\alpha'^2}{\alpha^2\alpha'^2+4h^4}=\frac{\beta^2-\beta'^2}{\beta^2\beta'^2+4h^4}=\frac{\gamma^2-\gamma'^2}{\gamma^2\gamma'^2+4h^4}=\frac{1}{\lambda^2}.$$

En introduisant le paramètre $\lambda$, on peut exprimer $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$ en fonction de $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, et l'on trouve que les surfaces coupant orthogonalement la surface F ont pour équation

$$(4)\qquad \rho^4+\frac{\alpha^2\lambda^2-4h^4}{\alpha^2+\lambda^2}x^2+\frac{\beta^2\lambda^2-4h^4}{\beta^2+\lambda^2}y^2+\frac{\gamma^2\lambda^2-4h^4}{\gamma^2+\lambda^2}z^2-h^4=0.$$

L'équation précédente détermine un système triple de surfaces. Elle est en effet du troisième degré en $\lambda$. Je dis que ce système triple est orthogonal. Soient en effet les équations de deux surfaces comprises dans l'équation (4) :

$$\rho^4+\alpha'^2x^2+\beta'^2y^2+\gamma'^2z^2-h^4=0,$$
$$\rho^4+\alpha''^2x^2+\beta''^2y^2+\gamma''^2z^2-h^4=0.$$

On a par conséquent

$$\alpha'^2=\frac{\alpha^2\lambda^2-4h^4}{\alpha^2+\lambda^2},\quad \alpha''^2=\frac{\alpha^2\mu^2-4h^4}{\alpha^2+\mu^2}.$$

On déduit de là

$$\frac{\alpha'^2\alpha''^2+4h^4}{\alpha'^2-\alpha''^2}=\frac{\mu^2\lambda^2+4h^4}{\mu^2-\lambda^2},$$

et par suite

$$\frac{\alpha'^2\alpha''^2+4h^4}{\alpha'^2-\alpha''^2}=\frac{\beta'^2\beta''^2+4h^4}{\beta'^2-\beta''^2}=\frac{\gamma'^2\gamma''^2+4h^4}{\gamma'^2-\gamma''^2},$$

ce qui prouve que les deux surfaces se coupent à angle droit.

Si l'on transforme par rayons vecteurs réciproques, on aura un système orthogonal formé de surfaces dont les équations auront la forme ($\alpha$).

Le système précédent comprend comme cas particulier le système des surfaces du second degré. Il suffit de faire $h^4=\infty$.

**11.** Il nous reste à dire quelques mots des propriétés géométriques des surfaces comprises dans la forme ($\beta$).

D'abord, si l'on mène un rayon partant du centre, le produit des longueurs interceptées est constant. La surface est donc réciproque par rapport à elle-même.

Mais la propriété essentielle de ces surfaces est la suivante : toute sphère les coupe suivant une courbe qui appartient à une surface du second degré.

En effet, l'équation d'une sphère est de la forme

$$\rho^2=P,$$

P étant un polynôme du premier degré. Si on remplace $\rho^2$ par P dans l'équation de la surface, on a une équation du second degré.

Il suit de là que la surface considérée a des sections circulaires. Toute sphère doublement tangente la coupe suivant deux cercles. En effet, la courbe d'intersection de la sphère et de la surface a dans ce cas deux points doubles, la sphère est donc doublement tangente à la surface du second degré qui passe par la courbe d'intersection, et par suite cette courbe d'intersection se décompose en deux cercles. Nous retrouverons ces sections circulaires en étudiant les sections planes de la surface.

**12.** La surface ayant une ligne double, le cercle imaginaire à l'infini, les sections planes auront deux points doubles, les points imaginaires placés à l'infini sur le cercle. Les sections planes sont donc ces courbes du quatrième degré dont nous avons parlé au n° **10**, et qui sont susceptibles de former un système orthogonal. Il y aura des ovales de Cassini, des ovales de Descartes, etc.

La section par un plan tangent simple aura un point double. Elle rentre donc dans la classe des lemniscates (*voir* CHASLES, *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. XXXVII) ou réciproques de coniques. On peut mener du point double deux tangentes à la courbe autres que les tangentes au point double. Il y aura donc deux tangentes doubles passant par chaque point de la surface.

Enfin la courbe de section par un plan tangent double aura en tout quatre points doubles; elle doit donc se composer de deux cercles.

Ainsi les sections circulaires seront données par les plans tangents doubles. Étudions la distribution de ces plans tangents doubles.

On peut mettre l'équation $(\beta)$ sous une des cinq formes :

$$(\rho^2+h^2)^2+(\alpha^2-2h^2)x^2+(\beta^2-2h^2)y^2+(\gamma^2-2h^2)z^2=0,$$
$$(\rho^2-h^2)^2+(\alpha^2+2h^2)x^2+(\beta^2+2h^2)y^2+(\gamma^2+2h^2)z^2=0,$$
$$\left(\rho^2+\frac{\alpha^2}{2}\right)^2+(\beta^2-\alpha^2)y^2+(\gamma^2-\alpha^2)z^2+h^4-\frac{\alpha^4}{4}=0,$$
$$\left(\rho^2+\frac{\beta^2}{2}\right)^2+(\alpha^2-\beta^2)x^2+(\gamma^2-\beta^2)z^2+h^4-\frac{\beta^4}{4}=0,$$
$$\left(\rho^2+\frac{\gamma^2}{2}\right)^2+(\alpha^2-\gamma^2)x^2+(\beta^2-\gamma^2)y^2+h^4-\frac{\gamma^4}{4}=0.$$

On voit que les deux cônes et les trois cylindres obtenus en supprimant dans les cinq équations précédentes le premier terme sont doublement tangents à la surface. Leurs plans tangents seront donc des plans tangents doubles de la surface. On verrait, en cherchant les sections circulaires au moyen des sphères doublement tangentes (ce qui donne un calcul élégant), qu'il n'y a pas d'autre plan tangent double. Ainsi les plans des sections circulaires se répartissent en 5 séries, et il passe 10 sections circulaires en chaque point de la surface.

**13.** Les lignes de courbure sont à la rencontre de la surface $(\beta)$ et des cônes dont l'équation est

$$\frac{(\alpha^4+4h^4)}{\alpha^2+\lambda^2}x^2+\frac{(\beta^4+4h^4)}{\beta^2+\lambda^2}y^2+\frac{\gamma^4+4h^4}{\gamma^2+\lambda^2}z^2=0.$$

Ces cônes sont tangents à 4 plans fixes. Ainsi les lignes de courbure ont pour enveloppe 4 sections planes de la surface qui se coupent aux ombilics. Il y a donc 24 ombilics.

Ces sections planes tangentes aux lignes de courbure sont très-remarquables; elles se composent de 4 droites. En effet, le plan tangent à l'ombilic coupe la surface suivant un cercle de rayon nul, et, par suite, suivant un autre cercle. La section se compose d'un cercle et d'un point cercle, ou, si l'on veut, deux droites imaginaires. Il y a donc sur la surface des droites imaginaires se coupant deux à deux aux ombilics. Ces droites sont au nombre de 16. On peut voir dans ce fait de l'existence de droites sur une surface du quatrième degré la vérification d'un résultat obtenu dans la première partie.

**14.** On peut former évidemment avec les surfaces précédentes un système de coordonnées orthogonales qui comprendra comme cas particulier le système des coordonnées elliptiques. J'aurai peut-être occasion de revenir sur ces nouvelles coordonnées. J'ai pu obtenir de nouveaux systèmes de surfaces orthogonales analogues à ceux que M. Roberts a obtenus par les coordonnées elliptiques. Ce système peut aussi être employé pour l'intégration des équations abéliennes.

**15.** On obtiendrait les focales en cherchant le lieu des sphères de rayon nul doublement tangentes à la surface. Mais on peut obtenir trois d'entre elles d'une manière plus simple. Dans l'équation

$$\rho^4+\frac{\alpha^2\lambda^2-4h^4}{\alpha^2+\lambda^2}x^2+\frac{\beta^2\lambda^2-4h^4}{\beta^2+\lambda^2}y^2+\frac{\gamma^2\lambda^2-4h^4}{\gamma^2+\lambda^2}z^2-h^4=0,$$

faisons $\lambda^2=-\alpha^2$ : la surface se réduira à la portion du plan des $yz$ limitée par la courbe

$$(y^2+z^2)^2-\frac{4h^4+\beta^2\alpha^2}{\beta^2-\alpha^2}y^2-\frac{4h^4+\gamma^2\alpha^2}{\gamma^3-\alpha^2}z^2-h^4=0.$$

Cette courbe est ligne double de l'enveloppe, c'est donc une des focales. On trouverait de même des focales dans les autres plans coordonnés. Mais une seule est suffisante pour définir la surface développable qui sert d'enveloppe au système.

---

Les résultats contenus dans ces Recherches ont été communiqués à l'Académie des Sciences le 1er août 1864. Le même jour, M. Moutard communiquait une Note concernant le système nouveau que nous avons étudié. Mais M. Moutard avait présenté le résultat de ses recherches le samedi 30 juillet à la Société Philomathique. Je ne songe donc pas à lui contester la priorité. Il m'est trop agréable de m'être rencontré dans mon premier travail avec un aussi habile géomètre. Je crois devoir reproduire une Note que M. Serret a présentée à l'Académie le 8 août 1864 et qui établit que je n'ai pu avoir connaissance des recherches de M. Moutard :

« J'ai eu l'honneur de communiquer à l'Académie le résumé d'un travail de M. G. Darboux, actuellement élève de l'École Normale supérieure.

» Ce travail, qui se rapporte à la théorie des surfaces orthogonales, contient, entre autres résultats importants, la découverte d'un *système triple* très-remarquable formé de surfaces du quatrième degré et que l'auteur considère à juste titre comme nouveau.

» Mais, par une coïncidence singulière, notre confrère, M. Ossian Bonnet, s'était chargé de présenter le même jour à l'Académie une Note de M. Moutard, dans laquelle se trouve établi le résultat que M. Darboux avait obtenu de son côté.

» Il est certain qu'aucun des deux auteurs n'a pu avoir connaissance du travail de l'autre; mais il est de mon devoir de déclarer que M. Darboux m'a remis son Mémoire *in extenso* dans le courant du mois de juin. J'ai voulu l'étudier dans tous ses détails avant de le présenter à l'Académie. Malheureusement mes occupations ne m'ont pas permis de le faire immédiatement. »

M. Moutard avait déjà publié des articles très-intéressants sur les surfaces du quatrième ordre qui appartiennent à une classe de surfaces qu'il propose d'appeler *anallagmatiques* (voir *l'Institut*, 11 mai 1864; *Nouvelles Annales*, 1864). C'est en cherchant les lgnes de courbure de ces surfaces qu'il a rencontré le système orthogonal (voir *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 1[er] août 1864).

---

## NOTE I.

### *Sur les courbes du quatrième degré qui ont deux points doubles à l'infini sur le cercle.*

1. Ces courbes sont, comme nous l'avons vu, les sections planes des surfaces du quatrième ordre qui forment le nouveau système orthogonal.

Elles ont été étudiées complétement, et l'on connaît leurs principales propriétés.

Elles ont seize foyers situés quatre à quatre sur des cercles orthogonaux. Si on les transforme par rayons vecteurs réciproques, la transformée se compose des ovales de Descartes toutes les fois que le pôle de transformation est en un des seize foyers. Il y a quatre points du plan par rapport auxquels la courbe est à elle-même sa réciproque. Ces points sont les quatre centres des cercles des foyers qui sont aussi les points de rencontre des tangentes doubles à la courbe.

On obtient ces courbes d'une infinité de manières en faisant la projection stéréographique de la courbe d'intersection d'une sphère et d'une surface du second degré (*). On peut même les regarder comme la projection stéréographique des coniques sphériques. Il suffit de prendre le pôle de transformation aux points de rencontre de la sphère ayant pour grand cercle le cercle des quatre foyers et de la perpendiculaire au plan de la courbe menée par le point d'intersection des diagonales du quadrilatère formé par les quatre foyers. La courbe plane admet alors pour transformée une conique sphérique.

2. On peut donc déduire des propriétés des coniques sphériques toutes les propriétés des courbes du quatrième degré, qui en sont les transformées.

En particulier, on sait que l'on peut former sur la sphère un système de coniques sphériques homofocales et orthogonales. On aura donc dans le plan un système formé des courbes du quatrième ordre, orthogonales et homofocales, ce qu'il s'agissait de montrer.

Si l'on cherche l'équation différentielle du système orthogonal formé par les courbes du quatrième ordre, on trouve, en posant $x+y\sqrt{-1}=u$, $x-y\sqrt{-1}=v$,

$$\frac{du}{\sqrt{\varphi(u)}}=\frac{dv}{\sqrt{\varphi(v)}},$$
$$\varphi(x)=\mathrm{A}+\mathrm{B}x+\mathrm{C}x^2+\mathrm{D}x^3+\mathrm{E}x^4.$$

Les considérations précédentes donnent donc un nouveau moyen d'arriver à l'intégrale de l'équation d'Euler. On l'obtient sous une forme assez remarquable :

$$\lambda\sqrt{(u-\alpha)(v-\alpha')}+\mu\sqrt{(u-\beta)(v-\beta')}+\nu\sqrt{(u-\gamma)(v-\gamma')}=0.$$

3. Je terminerai en donnant une propriété nouvelle et intéressante de ces courbes. Cette propriété s'applique à la fois aux courbes planes et à leurs transformées sphériques.

Chacune de ces courbes a trois focales. Ces trois focales sont des courbes de même espèce que la courbe primitive, et les sphères ou les plans que contiennent ces quatre courbes se coupent à angle droit.

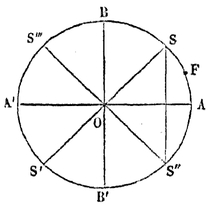
Ces focales jouissent de propriétés métriques. Si on prend trois points arbitrairement sur l'une quelconque des courbes et si l'on désigne par R, R', R'' les distances d'un point de l'espace à ces trois points, les équations des trois autres courbes focales de la première seront de la forme

$$\lambda\mathrm{R}+\mu\mathrm{R}'+\nu\mathrm{R}''=0.$$

(*) Dans un article énoncé dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (1864), j'ai donné cette proposition comme nouvelle. Elle ne diffère pas au fond de la proposition suivante, énoncée par M. Quetelet (*Nouveaux Mémoires de l'Académie de Bruxelles*, V). Toute ligne aplanétique peut être regardée comme la projection stéréographique de la ligne d'intersection d'une sphère et d'un cône du second degré. Mais M. Quetelet n'a pas développé, du moins à ma connaissance, les conséquences de cette intéressante proposition.

C'est la généralisation du théorème trouvé par M. Dupin sur les coniques qui sont focales l'une de l'autre.

Ainsi l'ellipse sphérique admet une focale plane dans chaque plan principal. Si




on rapporte les points du plan principal aux deux axes AA', BB' de la conique, l'équation de la focale est

$$(x^2+y^2+a^2)^2 - a^2x^2\frac{\cos^2\varphi}{\sin^2\alpha} - a^2y^2\frac{\sin^2\varphi}{\cos^2\alpha} = 0,$$

$\varphi$ désignant la demi-distance focale AF, et $\alpha$ le demi-axe AS. La courbe plane a pour foyers les quatre points S, S', S''', S''', et l'on a entre les distances aux trois foyers S, S', S'' la relation

$$r'' = r\cos\alpha - r'\sin\alpha.$$

Ainsi les coniques sphériques ont trois focales planes dans chacun de leurs plans principaux. Elles ont même une focale sphérique, mais cette focale est imaginaire. Toutes ces focales jouissent les unes par rapport aux autres des propriétés métriques que nous avons indiquées. Il semble que ces propriétés ne seront pas inutiles dans l'étude des coniques sphériques.

---

## NOTE II.

### *Sur les surfaces du quatrième degré qui ont pour ligne double le cercle imaginaire à l'infini.*

Ces surfaces jouissent de nombreuses propriétés. M. Moutard les a étudiées d'une manière très-rationnelle et très-complète. Je me propose d'indiquer ici quelques résultats que j'ai rencontrés incidemment. Nous considérerons les surfaces à plans principaux, mais les résultats s'étendent sans peine aux surfaces les plus générales.

Ces surfaces peuvent être considérées comme enveloppes de surfaces du second degré contenues dans l'équation

(6) $$\lambda^2 + 2\lambda(x^2+y^2+z^2-k^2) + ax^2 + by^2 + cz^2 = 0.$$

Toutes les génératrices de ces surfaces du second degré seront tangentes doubles de la surface. D'ailleurs on aura ainsi toutes les tangentes doubles, car en chaque point de la surface du quatrième degré il passe une surface du deuxième degré et deux génératrices de cette surface qui sont les deux tangentes doubles correspondant à ce point. Ainsi l'on aura bien toutes les tangentes doubles. Par un point de l'espace, il passera deux surfaces du second degré et quatre tangentes doubles.

Le cône circonscrit à la surface est évidemment du huitième degré, puisque le degré d'un cône circonscrit est égal à la classe d'une section plane. Il aura quatre arêtes doubles et dix plans tangents doubles qui seront les plans des sections circulaires passant par le sommet du cône.

La considération des surfaces du second degré est encore utile pour trouver les quatre pôles d'une section plane, c'est-à-dire les quatre points de rencontre des tangentes doubles à la courbe qui sont les centres des cercles des foyers.

Si l'on détermine dans l'ensemble des surfaces (6) celles qui sont tangentes au plan sécant, les points de contact seront les pôles cherchés. En effet, les surfaces du second degré seront coupées par le plan sécant suivant deux droites qui seront des tangentes doubles à la courbe de section de la surface du quatrième degré par le plan.

Soit

$$mx + ny + pz - 1 = 0$$

l'équation du plan. Écrivons que la surface (6) lui est tangente, nous aurons l'équation du quatrième degré

$$\frac{1}{2h^2\lambda - \lambda^2} = \frac{m^2}{2\lambda + a} + \frac{n^2}{2\lambda + b} + \frac{p^2}{2\lambda + c},$$

équation du quatrième degré en $\lambda$. Une fois $\lambda$ déterminé, on aura facilement les points de contact.

Les surfaces de révolution dont l'équation est

$$\rho^4 + \alpha^2(x^2 + y^2) + \gamma^2 z^2 - h^4 = 0$$

peuvent être considérées comme engendrées par un cercle tournant autour d'une droite non située dans son plan. L'équation de la surface peut alors être mise sous la forme

$$\lambda . r + \mu . r' + \nu . r'' = 0,$$

$r$, $r'$, $r''$ désignant les distances à trois points de l'axe de révolution.

Par l'intersection de deux surfaces ayant les mêmes plans principaux, on peut faire passer trois surfaces de révolution. Soient en effet les équations

$$\rho^4+\alpha^2 x^2+\beta^2 y^2+\gamma^2 z^2-h^4=0,$$
$$\rho^4+\alpha'^2 x^2+\beta'^2 y^2+\gamma'^2 z^2-h'^4=0.$$

On peut combiner ces équations de manière à rendre égaux deux des coefficients de $x^2$, de $y^2$, de $z^2$.

Ces surfaces ont été rencontrées par M. Besge (*Journal de Mathématiques*, t. XIV) dans la solution d'un problème de Géométrie. Le lieu des points de rencontre des géodésiques tangentes à une ligne de courbure et se coupant sous un angle constant se trouve sur une de ces surfaces ayant mêmes plans principaux que l'ellipsoïde.

M. Besge obtient en effet l'équation en coordonnées elliptiques

$$(\mu^2+\nu^2-2\beta)^2 \operatorname{tang}^2\theta=4\beta(\mu^2+\nu^2)-4\mu^2\nu^2-4\beta^2.$$

On n'a qu'à substituer

$$\mu^2+\nu^2=x^2+y^2+z^2+k,$$
$$\mu^2\nu^2=mx^2;$$

on a une équation de la forme annoncée.

Enfin j'ajouterai que l'on peut déduire ces surfaces des surfaces du second degré par la transformation

$$x=\frac{\lambda x'}{x'^2+y'^2+z'^2-k^2},$$

$$y=\frac{\mu y'}{x'^2+y'^2+z'^2-k^2},$$

$$z=\frac{\nu z'}{x'^2+y'^2+z'^2-k^2}.$$

Cette transformation permet de déduire des différentes formes des équations du second degré les différentes formes des équations de ces surfaces.