

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

MICHÈLE VERGNE

Étude de certaines représentations induites d'un groupe de Lie résoluble exponentiel

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4^e série, tome 3, n° 3 (1970), p. 353-384

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1970_4_3_3_353_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ÉTUDE DE CERTAINES REPRÉSENTATIONS INDUITES D'UN GROUPE DE LIE RÉSOLUBLE EXPONENTIEL

PAR MICHÈLE VERGNE

INTRODUCTION.

Soient \mathfrak{g} une algèbre de Lie réelle nilpotente et G le groupe de Lie réel simplement connexe d'algèbre de Lie \mathfrak{g} . Kirillov a montré qu'il existe une correspondance bijective entre l'espace \mathfrak{g}^*/G des orbites de G agissant par la représentation coadjointe dans l'espace dual \mathfrak{g}^* de \mathfrak{g} et l'espace \hat{G} des classes de représentations unitaires irréductibles de G [6].

Les résultats de Kirillov qui conduisent à cette correspondance sont les suivants :

A. Toute représentation unitaire irréductible de G peut s'obtenir par induction d'un caractère χ d'un sous-groupe H fermé connexe de G ; soit alors \mathfrak{h} l'algèbre de Lie de H et f le caractère de l'algèbre de Lie \mathfrak{h} défini par $d\chi = if$ (on a donc $f[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] = 0$).

Désignons encore par f une forme linéaire sur \mathfrak{g} prolongeant f sur \mathfrak{h} , et soit B_f la forme bilinéaire alternée sur \mathfrak{g} définie par $B_f(X, Y) = f([X, Y])$. Alors \mathfrak{h} est un sous-espace totalement isotrope maximal pour la forme B_f .

B. Pour toute $f \in \mathfrak{g}^*$, notons $M(f; \mathfrak{g})$ l'ensemble de sous-algèbres \mathfrak{h} de \mathfrak{g} dont le sous-espace vectoriel sous-jacent soit totalement isotrope maximal pour la forme B_f ; et si $\mathfrak{h} \in M(f; \mathfrak{g})$ notons $\rho(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{g})$ la représentation induite à G par le caractère $\chi_{f, \mathfrak{h}}$ du groupe analytique H d'algèbre de Lie \mathfrak{h} dont la différentielle $d\chi_{f, \mathfrak{h}}$ est $if|_{\mathfrak{h}}$.

Soit $f \in \mathfrak{g}^*$, alors il existe un \mathfrak{h} appartenant à $M(f; \mathfrak{g})$. La représentation $\rho(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{g})$ est irréductible et ne dépend pas de la sous-algèbre \mathfrak{h} choisie.

C. On peut donc associer à toute orbite O de G dans \mathfrak{g}^* un élément $\rho(O)$ de \hat{G} en posant

$$\rho(O) = \rho(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{g}) \quad \text{pour } f \in O \text{ et } \mathfrak{h} \in M(f; \mathfrak{g}).$$

L'application ρ est bijective.

Bernat [1] a alors étendu cette correspondance bijective entre \hat{G} et l'espace \mathfrak{g}^*/G à un groupe G résoluble exponentiel (on dit qu'un groupe G est résoluble exponentiel, s'il est résoluble et simplement connexe et si l'application exponentielle de l'algèbre de Lie \mathfrak{g} dans G est un difféomorphisme).

Les résultats de Bernat qui permettent d'établir cette correspondance sont les suivants :

A. reste identique.

Par contre, si $\mathfrak{h} \in M(f; \mathfrak{g})$, il est bien connu que la représentation $\rho(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{g})$ n'est en général pas irréductible. On notera $I(f; \mathfrak{g})$ le sous-ensemble de $M(f; \mathfrak{g})$ formé des \mathfrak{h} telles que $\rho(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{g})$ soit irréductible. Alors l'assertion B doit être remplacée par l'assertion suivante :

B'. Soit $f \in \mathfrak{g}^*$, alors il existe un \mathfrak{h} appartenant à $I(f; \mathfrak{g})$, et la représentation irréductible $\rho(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{g})$ ne dépend pas de la sous-algèbre \mathfrak{h} de $I(f; \mathfrak{g})$ choisie.

On associe alors de même à toute orbite O de G dans \mathfrak{g}^* un élément $\rho(O)$ de \hat{G} , en posant

$$\rho(O) = \rho(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{g}) \quad \text{pour } f \in O \text{ et } \mathfrak{h} \in I(f; \mathfrak{g}).$$

C est alors identique.

Il se pose alors naturellement le problème de la détermination du sous-ensemble $I(f; \mathfrak{g})$ de $M(f; \mathfrak{g})$, et ceci a été résolu par Pukanszky [9]. Rappelons le résultat.

Si $\mathfrak{h} \in M(f; \mathfrak{g})$, alors on démontre immédiatement que $H.f$ est un ouvert de $f + \mathfrak{h}^\perp$ (si \mathfrak{g} est nilpotente, $H.f$ orbite de f par une représentation unipotente du groupe H est aussi fermée d'après un théorème de Rosenlicht, voir [10]); par conséquent, on a $H.f = f + \mathfrak{h}^\perp$ quelle que soit $\mathfrak{h} \in M(f; \mathfrak{g})$.

Le critère d'irréductibilité de Pukanszky s'énonce ainsi : Soit G un groupe résoluble exponentiel; alors \mathfrak{h} appartient à $I(f; \mathfrak{g})$ si et seulement si $H.f = f + \mathfrak{h}^\perp$.

Enfin Pukanszky [8] a aussi montré que si $\mathfrak{h} \in M(f; \mathfrak{g})$, la représentation $\rho(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{g})$ (non nécessairement irréductible) se décompose cependant en somme finie de représentations irréductibles, sans toutefois préciser cette décomposition.

On déterminera dans cet article la décomposition exacte de la représentation $\rho(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{g})$. Énonçons dès à présent le résultat; il s'agit de déterminer les orbites O de G dans \mathfrak{g}^* telles que la représentation $\rho(O)$ intervienne effectivement dans la décomposition de $\rho(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{g})$ et la multiplicité d'une telle représentation.

Le critère d'irréductibilité de Pukanszky ainsi que l'étude d'exemples simples suggèrent que cette décomposition est en rapport avec l'action du groupe H dans l'espace affine $(f + \mathfrak{h}^\perp)$. Ceci est bien le cas : Une représentation $\rho(O)$ intervient dans la décomposition de $\rho(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{g})$ si et seulement si $O \cap (f + \mathfrak{h}^\perp)$ est un ouvert non vide de $(f + \mathfrak{h}^\perp)$. Le groupe H agit dans $O \cap (f + \mathfrak{h}^\perp)$. Il est facile de voir alors que chaque orbite de H dans $O \cap (f + \mathfrak{h}^\perp)$ est ouverte dans $(f + \mathfrak{h}^\perp)$. On démontrera que le nombre $c(O; f; \mathfrak{h})$ de ces orbites est fini et est égal à la multiplicité de la représentation $\rho(O)$ dans la décomposition $\rho(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{g})$.

Cette multiplicité peut être strictement plus grande que 1 comme le montrera l'exemple de la fin de l'article, et contrairement à ce qui avait été un peu trop rapidement conjecturé dans [11].

Enfin nous n'utiliserons dans cet article que les résultats de la thèse de Bernat, et par conséquent un intérêt non négligeable sera de retrouver le critère d'irréductibilité de Pukanszky.

I. — Résultats généraux.

Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur un corps commutatif. Soit B une forme bilinéaire alternée sur V et soit $N(B)$ son noyau, c'est-à-dire

$$N(B) = \{x \in V; B(x, y) = 0 \text{ pour tout } y \in V\}.$$

Soit $\tilde{B} : V \rightarrow V^*$ l'application de V dans son dual définie par $\tilde{B}(x)(y) = B(y, x)$.

Si W est un sous-espace de V , on notera W^\perp l'orthogonal de W dans V^* , c'est-à-dire

$$W^\perp = \{\varphi \in V^*; \varphi(w) = 0 \text{ pour tout } w \in W\}$$

et W^b l'orthogonal de W dans V par rapport à la forme B , c'est-à-dire

$$W^b = \{x \in V; B(x, w) = 0 \text{ pour tout } w \in W\}.$$

On vérifie immédiatement les formules suivantes :

- (a) $\text{Ker } \tilde{B} = N(B), \quad \text{Im } \tilde{B} = N(B)^\perp;$
- (b) $\dim W^b = \dim V - \dim W + \dim(W \cap N(B)),$
- (c) $(W^b)^b = W + N(B);$
- (d) $\tilde{B}(W) = (W^b)^\perp.$

On dit que W est un sous-espace totalement isotrope si la restriction de B à W est identiquement nulle. Alors W est un sous-espace totalement isotrope maximal si et seulement si $W = W^B$, ou encore si et seulement si W est totalement isotrope et si $\dim W = \frac{1}{2}(\dim V + \dim N(B))$.

Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie et f un point de \mathfrak{g}^* . Soit B_f la forme bilinéaire alternée sur \mathfrak{g} définie par $B_f(X, Y) = f([X, Y])$. On a alors

$$N(B_f) = \mathfrak{g}(f) = \{X \in \mathfrak{g}; f([X, Y]) = 0 \text{ pour tout } Y \in \mathfrak{g}\}$$

et $\mathfrak{g}(f)$ est une sous-algèbre de \mathfrak{g} .

Si W est un sous-espace vectoriel de \mathfrak{g} , on notera W^f l'orthogonal de W par rapport à la forme B_f . Si W est un idéal de \mathfrak{g} , W^f est une sous-algèbre de \mathfrak{g} .

Si $X \in \mathfrak{g}$, on notera $X.f$ l'élément de \mathfrak{g}^* défini par

$$(X.f)(Y) = -f([X, Y]) = \tilde{B}_f(X).$$

Si donc W est un sous-espace vectoriel de \mathfrak{g} et si $W.f$ désigne l'espace vectoriel des formes $X.f$ ou $X \in W$, on a d'après la formule (d),

$$(e) \quad W.f = (W^f)^\perp.$$

On notera $S(f; \mathfrak{g})$ l'ensemble des sous-algèbres \mathfrak{h} de \mathfrak{g} telles que le sous-espace vectoriel sous-jacent à \mathfrak{h} soit totalement isotrope pour B_f , c'est-à-dire l'ensemble des sous-algèbres \mathfrak{h} de \mathfrak{g} telles que $f([\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]) = 0$.

Si $\mathfrak{h} \in S(f; \mathfrak{g})$, on dira que \mathfrak{h} est une sous-algèbre subordonnée à f . On notera $M(f; \mathfrak{g})$ l'ensemble des sous-algèbres \mathfrak{h} de \mathfrak{g} telles que le sous-espace vectoriel sous-jacent à \mathfrak{h} soit totalement isotrope maximal pour la forme B_f ; c'est-à-dire l'ensemble des sous-algèbres \mathfrak{h} de \mathfrak{g} telles que $f([\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]) = 0$ et telle que

$$\dim \mathfrak{h} = \frac{1}{2}(\dim \mathfrak{g} + \dim \mathfrak{g}(f)).$$

PROPOSITION 1. — Soit α un idéal abélien de \mathfrak{g} et $\mathfrak{h} \in M(f; \mathfrak{g})$. Posons $\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{h} \cap \alpha$, $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h}_0 + \alpha$ et $\mathfrak{k} = \mathfrak{h} + \alpha$. Alors :

1° B_f définit par passage aux quotients une forme bilinéaire $B: \mathfrak{h}/\mathfrak{h}_0 \times \alpha/\mathfrak{h} \cap \alpha \rightarrow \mathbf{R}$ qui met en dualité $\mathfrak{h}/\mathfrak{h}_0$ et $\alpha/\mathfrak{h} \cap \alpha$ et induit un isomorphisme de \mathfrak{h}_0 -modules de $\mathfrak{h}/\mathfrak{h}_0$ et de $(\alpha/\mathfrak{h} \cap \alpha)$.

2° On a quel que soit $H_0 \in \mathfrak{h}_0$,

$$\text{Tr}_{\mathfrak{h}'/\mathfrak{h}_0} \text{ad } H_0 = \frac{1}{2}(\text{Tr}_{\mathfrak{h}/\mathfrak{h}_0} \text{ad } H_0 - \text{Tr}_{\mathfrak{h}'/\mathfrak{h}} \text{ad } H_0).$$

3° $\mathfrak{h}' \in M(f; \mathfrak{g})$.

Démonstration. — Comme $f([\mathfrak{h}_0, \mathfrak{a}]) = f([\mathfrak{h}, \mathfrak{h} \cap \mathfrak{a}]) = 0$ B_f définit par passage aux quotients une forme bilinéaire $B : \mathfrak{h}/\mathfrak{h}_0 \times \mathfrak{a}/\mathfrak{h} \cap \mathfrak{a} \rightarrow \mathbf{R}$.

Or si $H \in \mathfrak{h}$ est tel que $B_f(H, \mathfrak{a}) = 0$, alors $H \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{a}^f = \mathfrak{h}_0$; de même, si $A \in \mathfrak{a}$ est tel que $B_f(A, \mathfrak{h}) = 0$, alors $A \in \mathfrak{h}^f \cap \mathfrak{a} = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{a}$. B est donc une dualité.

Les espaces $\mathfrak{h}/\mathfrak{h}_0$ et $\mathfrak{a}/\mathfrak{h} \cap \mathfrak{a}$ sont tous deux munis d'une structure de \mathfrak{h}_0 -modules. Soit $H \in \mathfrak{h}$ et $A \in \mathfrak{a}$ et h et a les images de H et A dans $\mathfrak{h}/\mathfrak{h}_0$ et $\mathfrak{a}/\mathfrak{h} \cap \mathfrak{a}$, alors

$$\begin{aligned} B(H_0 \cdot h, a) + B(h, H_0 \cdot a) &= f([\mathfrak{H}_0, H], A) + f([H, \mathfrak{H}_0, A]) \\ &= f([\mathfrak{H}_0, [H, A]]) = 0, \\ \text{car } H_0 &\in \mathfrak{a}^f \quad \text{et} \quad [H, A] \in \mathfrak{a}. \end{aligned}$$

On a donc démontré le 1^o et ceci prouve, en particulier, que

$$\dim \mathfrak{a} - \dim \mathfrak{h} \cap \mathfrak{a} = \dim \mathfrak{h} - \dim \mathfrak{h}_0$$

et que

$$\text{Tr}_{\mathfrak{h}/\mathfrak{h}_0} \text{ad} H_0 = - \text{Tr}_{\mathfrak{a}/\mathfrak{h} \cap \mathfrak{a}} \text{ad} H_0 \quad \text{si } H_0 \in \mathfrak{h}_0.$$

Montrons que $\mathfrak{h}' \in \mathbf{M}(f; \mathfrak{g})$; il est clair que $\mathfrak{h}' \in \mathbf{S}(f; \mathfrak{g})$.

D'autre part,

$$\dim \mathfrak{h}' = \dim \mathfrak{h}_0 + \dim \mathfrak{a} - \dim \mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{a}.$$

Or, comme $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}^f$,

$$\mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{a} = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{a}.$$

Il vient donc

$$\dim \mathfrak{h} = \dim \mathfrak{h}' \quad \text{et} \quad \mathfrak{h}' \in \mathbf{M}(f; \mathfrak{g}).$$

Il reste à prouver 2^o.

Les \mathfrak{h}_0 -modules $\mathfrak{h}'/\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{h}_0 + \mathfrak{a}/\mathfrak{h}_0 \simeq \mathfrak{a}/\mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{a} = \mathfrak{a}/\mathfrak{h} \cap \mathfrak{a}$ sont canoniquement isomorphes. On a donc

$$\text{Tr}_{\mathfrak{h}'/\mathfrak{h}_0} \text{ad} H_0 = \text{Tr}_{\mathfrak{a}/\mathfrak{h} \cap \mathfrak{a}} \text{ad} H_0 = - \text{Tr}_{\mathfrak{h}/\mathfrak{h}_0} \text{ad} H_0,$$

or

$$\begin{aligned} \text{Tr}_{\mathfrak{k}/\mathfrak{h}_0} \text{ad} H_0 &= \text{Tr}_{\mathfrak{k}/\mathfrak{h}} \text{ad} H_0 + \text{Tr}_{\mathfrak{h}/\mathfrak{h}_0} \text{ad} H_0 \\ &= \text{Tr}_{\mathfrak{k}/\mathfrak{h}'} \text{ad} H_0 + \text{Tr}_{\mathfrak{h}'/\mathfrak{h}_0} \text{ad} H_0. \end{aligned}$$

Par soustraction, on obtient l'égalité cherchée.

Soit $f \in \mathfrak{g}^*$. On note $i(f; \mathfrak{g})$ la dimension d'un sous-espace totalement isotrope maximal pour la forme B_f . Si \mathfrak{k} est une sous-algèbre de \mathfrak{g} , on se permettra de noter $i(f; \mathfrak{k})$ la dimension d'un sous-espace totalement isotrope maximal pour la restriction de la forme B_f à \mathfrak{k} .

LEMME 1. — Soit α un idéal abélien de \mathfrak{g} , alors

$$i(f; \mathfrak{g}) = i(f; \alpha^f).$$

En effet, soit W un sous-espace totalement isotrope maximal pour la forme B_f restreinte à α^f .

On a $\alpha \subset W$, car $\alpha + W$ est un sous-espace totalement isotrope. Il s'agit de prouver que W est un sous-espace totalement isotrope maximal dans \mathfrak{g} . Or ceci est évident, car si $x \in W^f$, alors $x \in \alpha^f$ et donc $x \in W$.

Soit G un groupe de Lie d'algèbre de Lie \mathfrak{g} . G opère dans \mathfrak{g}^* au moyen de la représentation coadjointe. Si $g \in G$ et $f \in \mathfrak{g}^*$, on notera $g.f$ le transformé de f par g et on notera $O(f)$ l'orbite de f sous G . La différentielle de l'application $g \rightarrow g.f$ de G dans \mathfrak{g}^* est l'application de \mathfrak{g} dans \mathfrak{g}^* défini par $X \rightarrow X.f$.

Si $\mathfrak{h} \in S(f; \mathfrak{g})$ et si H est le sous-groupe analytique d'algèbre de Lie \mathfrak{h} , il est clair que $H.f \subset f + \mathfrak{h}^\perp$.

PROPOSITION 2. — Soit $\mathfrak{h} \in M(f; \mathfrak{g})$, alors $H.f$ est un ouvert de $f + \mathfrak{h}^\perp$.

Démonstration. — Comme l'espace affine $f + \mathfrak{h}^\perp$ est stable sous l'action de H , il suffit de démontrer que $H.f$ contient un ouvert de $f + \mathfrak{h}^\perp$. Considérons l'application différentielle à l'origine de l'application $a \rightarrow a.f$ de H dans $f + \mathfrak{h}^\perp$, c'est l'application $H \rightarrow H.f$. L'image $\mathfrak{h}.f$ de \mathfrak{h} par cette application est égale à $(\mathfrak{h}^f)^\perp$ [formule (e)], donc à \mathfrak{h}^\perp . Par conséquent, $H.f$ contient un voisinage de f dans $f + \mathfrak{h}^\perp$.

PROPOSITION 3. — Soit $\mathfrak{h} \in S(f; \mathfrak{g})$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (1) $H.f = f + \mathfrak{h}^\perp$;
- (2) $f + \mathfrak{h}^\perp \subset O(f)$ et $\mathfrak{h} \in M(f; \mathfrak{g})$;
- (3) Quel que soit φ appartenant à \mathfrak{h}^\perp , alors $\mathfrak{h} \in M(f + \varphi; \mathfrak{g})$.

Démonstration (Duflo). (Cette proposition avait été démontrée par Pukanszky [9] dans le cas où \mathfrak{g} était une algèbre résoluble exponentielle.)

(1) \Rightarrow (2) : Il est clair que (1) entraîne la première assertion de (2). Il suffit donc de démontrer que $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}^f$. Considérons l'application $a \rightarrow a.f$ de H dans $f + \mathfrak{h}^\perp$. Elle est surjective par hypothèse. Il existe donc au moins un point h_0 de H tel que la différentielle de cette application au point h_0 soit surjective (théorème de Sard, voir [3]). L'application $X \rightarrow X.(h_0.f)$ de \mathfrak{h} dans \mathfrak{h}^\perp est donc surjective. Or $\mathfrak{h}.(h_0.f) = (\mathfrak{h}^{h_0.f})^\perp$ [formule (e)]. On a donc $\mathfrak{h}^{h_0.f} = \mathfrak{h}$; et \mathfrak{h} étant stable par h_0 on obtient $\mathfrak{h}^f = \mathfrak{h}$.

(2) \Rightarrow (3) : En effet, soit $\varphi \in \mathfrak{h}^\perp$, alors $\mathfrak{h} \in S(f + \varphi; \mathfrak{g})$. Il suffit donc de démontrer que $\dim \mathfrak{g}(f + \varphi) = \dim \mathfrak{g}(f)$. Or $f + \varphi = g.f$, avec $g \in G$, on a donc

$$\mathfrak{g}(f + \varphi) = g.\mathfrak{g}(f) \quad \text{et} \quad \dim \mathfrak{g}(f + \varphi) = \dim \mathfrak{g}(f).$$

(3) \Rightarrow (1) : En effet, si (3) est vérifiée, d'après la proposition 2 toutes les orbites du plan $f + \mathfrak{h}^\perp$ par le groupe H sont ouvertes dans $f + \mathfrak{h}^\perp$ et donc $H.f$ est à la fois ouvert et fermé dans $f + \mathfrak{h}^\perp$ et donc égal à $f + \mathfrak{h}^\perp$.

PROPOSITION 4. — Soit $\mathfrak{h} \in M(f; \mathfrak{g})$. Notons $U(f; \mathfrak{h})$ l'ensemble des orbites O de G dans \mathfrak{g}^* qui rencontrent $f + \mathfrak{h}^\perp$ suivant un ouvert non vide de $f + \mathfrak{h}^\perp$, et notons $V(f; \mathfrak{h})$ l'ensemble des orbites O de la forme $O = O(f + \varphi)$, où $\varphi \in \mathfrak{h}^\perp$ et $\mathfrak{h} \in M(f + \varphi; \mathfrak{g})$.

Alors $U(f; \mathfrak{h}) = V(f; \mathfrak{h})$.

D'autre part, si $O \in U(f; \mathfrak{h})$ et si $f + \varphi$ ($\varphi \in \mathfrak{h}^\perp$) est un point de $O \cap (f + \mathfrak{h}^\perp)$, alors la composante connexe de $O \cap (f + \mathfrak{h}^\perp)$ contenant $f + \varphi$ est égale à $H.(f + \varphi)$.

Démonstration (Duflo). Montrons que $V(f; \mathfrak{h}) \subset U(f; \mathfrak{h})$. Soit $\varphi \in \mathfrak{h}^\perp$ tel que $\mathfrak{h} \in M(f + \varphi; \mathfrak{g})$. Alors

$$f + \varphi \in O(f + \varphi) \cap f + \mathfrak{h}^\perp,$$

donc $E = O(f + \varphi) \cap f + \mathfrak{h}^\perp$ est non vide, il s'agit de montrer que E est ouvert dans $f + \mathfrak{h}^\perp$. Soit $f + \varphi' \in E$, donc $\varphi' \in \mathfrak{h}^\perp$ et $f + \varphi' \in O(f + \varphi)$; par suite,

$$\mathfrak{h} \in S(f + \varphi'; \mathfrak{g}) \quad \text{et} \quad \dim \mathfrak{g}(f + \varphi') = \dim \mathfrak{g}(f + \varphi),$$

par conséquent, $\mathfrak{h} \in M(f + \varphi'; \mathfrak{g})$. Donc, d'après la proposition 2, $H.(f + \varphi') \subset E$ est ouvert dans $f + \mathfrak{h}^\perp$, d'où l'inclusion souhaitée.

Montrons que $U(f; \mathfrak{h}) \subset V(f; \mathfrak{h})$.

Soit $O \in U(f; \mathfrak{h})$ et soit

$$U_1 = \{ \varphi \in \mathfrak{h}^\perp, \text{telles que } \dim \mathfrak{g}(f + \varphi) = \dim \mathfrak{g}(f) \}.$$

La dimension de $\mathfrak{g}(f)$ est égale à la dimension minimale des dimensions de $\mathfrak{g}(f + \varphi)$, $\varphi \in \mathfrak{h}^\perp$ car $\mathfrak{h} \in S(f + \varphi; \mathfrak{g})$ quel que soit $\varphi \in \mathfrak{h}^\perp$. Donc U_1 est un ouvert de Zariski de \mathfrak{h}^\perp non vide et par conséquent dense dans \mathfrak{h}^\perp . Il s'ensuit que l'ensemble $f + U_1$ rencontre $O \cap (f + \mathfrak{h}^\perp)$ en au moins un point $f + \varphi_1$, et donc $O = O(f + \varphi_1)$ appartient à $V(f; \mathfrak{h})$.

Enfin, soient $O \in U(f; \mathfrak{h})$ et $f + \varphi$ un point ($\varphi \in \mathfrak{h}^\perp$) un point de $O \cap (f + \mathfrak{h}^\perp)$. Soit C la composante connexe de l'ouvert $O \cap (f + \mathfrak{h}^\perp)$ contenant $f + \varphi$. C est stable sous l'action de H et pour tout point $f + \varphi'$ de C , $H.(f + \varphi')$ est un ouvert connexe de $O \cap (f + \mathfrak{h}^\perp)$, donc de C . Alors $H.(f + \varphi)$ est un

ouvert de C , dont le complémentaire dans C est réunion de H -orbites ouvertes. Par conséquent, $H.(f + \varphi)$ est ouvert et fermé dans C et, par suite, égal à C .

PROPOSITION 5. — Soit \mathfrak{a} un idéal abélien de \mathfrak{g} , alors $f + (\mathfrak{a}')^\perp \subset O(f)$.

Démonstration. — Comme \mathfrak{a} est abélien, si $A \in \mathfrak{a}$, on a $\exp A.f = f + A.f$. Donc

$$\exp \mathfrak{a}.f = f + \mathfrak{a}.f = f + (\mathfrak{a}')^\perp.$$

II. — Sous-algèbres subordonnées dans une algèbre résoluble exponentielle.

Soient \mathfrak{g} une algèbre de Lie résoluble réelle et V un \mathfrak{g} -module de dimension finie; $V^{\mathbf{C}}$ est alors complètement réductible en tant que $\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}$ -module. Soit

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_i \subset V_{i+1} \subset \dots \subset V_n = V^{\mathbf{C}},$$

avec $\dim_{\mathbf{C}} V_i = i$ une suite de Jordan-Hölder du $\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}$ -module $V^{\mathbf{C}}$. A chaque quotient irréductible de dimension 1, V_{i+1}/V_i , correspond une forme linéaire λ_i sur \mathfrak{g} à valeurs complexes. Ces formes linéaires $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ de \mathfrak{g} dans \mathbf{C} sont indépendantes à l'ordre près de la suite de Jordan-Hölder choisie et sont appelées les poids de \mathfrak{g} dans V . On appelle racines de \mathfrak{g} les poids de la représentation adjointe.

DÉFINITION 1. — Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie résoluble et ρ une représentation de \mathfrak{g} dans V . On dit que V est un \mathfrak{g} -module de type exponentiel, si quel que soit $X \in V$, $\rho(X)$ n'a jamais de valeurs propres imaginaires pures non nulles.

Il est clair que si V est un \mathfrak{g} -module de type exponentiel et si $\mu = \mu_1 + i\mu_2$ est un poids de \mathfrak{g} dans V la partie imaginaire μ_2 de μ doit être proportionnelle à la partie réelle μ_1 . Il revient donc au même de dire que V est un \mathfrak{g} -module de type exponentiel si et seulement si les poids de \mathfrak{g} dans V sont de la forme $(1 + i\alpha)\psi$, où ψ est une forme linéaire réelle sur \mathfrak{g} .

DÉFINITION 2. — Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie résoluble. On dit que \mathfrak{g} est une algèbre résoluble exponentielle si la représentation adjointe de \mathfrak{g} est de type exponentiel ou encore si les racines de \mathfrak{g} sont de la forme $\lambda(1 + i\alpha)$, où λ est une forme linéaire réelle sur \mathfrak{g} et α un nombre réel.

Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie résoluble et G le groupe simplement connexe d'algèbre de Lie \mathfrak{g} et $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$ l'application exponentielle.

PROPOSITION 6 (Dixmier [4]). — Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (1) \mathfrak{g} est une algèbre résoluble exponentielle;
- (2) \exp est un difféomorphisme.

Soit \mathfrak{h} une sous-algèbre de \mathfrak{g} , on sait que le sous-groupe analytique H de G correspondant à \mathfrak{h} est fermé et simplement connexe [5].

D'autre part, il est clair que si \mathfrak{h} est une sous-algèbre d'une algèbre résoluble exponentielle, \mathfrak{h} est une algèbre exponentielle. On obtient donc la :

PROPOSITION 7. — *Soit \mathfrak{h} une sous-algèbre d'une algèbre exponentielle \mathfrak{g} . Alors \exp est un difféomorphisme de \mathfrak{h} sur H .*

LEMME 2. — *Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie résoluble exponentielle. Si A et $B \in \mathfrak{g}$, il existe C et C' appartenant à $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ tels que*

$$\exp A \exp B = \exp(A + B) \exp C = \exp C' \exp(A + B).$$

Démonstration. — Le groupe $[G, G]$ des commutateurs de G est un groupe analytique d'algèbre de Lie $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. D'après la proposition 7, on a donc

$$[G, G] = \exp([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]).$$

Soient $\pi : G \rightarrow G/[G, G]$ et $p : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ les morphismes canoniques. Ils commutent à l'application exponentielle, et donc, le groupe $G/[G, G]$ étant commutatif,

$$\pi(\exp(A + B)) = \exp(pA + pB) = \exp pA \exp pB = \pi(\exp A \exp B),$$

done

$$\exp A \exp B \exp(-(A + B)) \in [G, G] = \exp[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}].$$

Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie résoluble et (M, ρ) un \mathfrak{g} -module de type exponentiel irréductible. Alors $\dim M \leq 2$.

Si $\dim M = 2$, il existe un vecteur A de $M^{\mathbb{C}}$, une forme linéaire λ réelle non nulle sur \mathfrak{g} et un nombre réel α non nul tels que

$$M^{\mathbb{C}} = \mathbf{C}A \oplus \mathbf{C}\bar{A} \quad \text{et} \quad \begin{aligned} \rho(X)A &= (1 + i\alpha)\lambda(X)A & \text{si } X \in \mathfrak{g}, \\ \rho(X)\bar{A} &= (1 - i\alpha)\lambda(X)\bar{A} \end{aligned}$$

Le noyau de la représentation ρ est donc égal au noyau de la forme réelle λ , il est donc de codimension 1.

LEMME 3. — *Soient \mathfrak{g} une algèbre de Lie résoluble, (M, ρ) un \mathfrak{g} -module de type exponentiel irréductible et \mathfrak{h} une sous-algèbre de \mathfrak{g} , alors la restriction de ρ à \mathfrak{h} est, soit triviale, soit irréductible et son noyau est de codimension ≤ 1 .*

En effet, si $\dim M = 1$, le lemme est évident. Si $\dim M = 2$ et si $\lambda|_{\mathfrak{h}} = 0$, $\rho|_{\mathfrak{h}}$ est triviale, sinon $\rho|_{\mathfrak{h}}$ est irréductible.

Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie, on dit qu'un idéal \mathfrak{a} est central si $[\mathfrak{g}, \mathfrak{a}] = 0$, ou encore si $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{z}$, où \mathfrak{z} désigne le centre de \mathfrak{g} .

LEMME 4. — Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie résoluble exponentielle, \mathfrak{a} un idéal non central minimal parmi les idéaux non centraux de \mathfrak{g} . Alors \mathfrak{a} est abélien et $\dim \mathfrak{a}/\mathfrak{z} \cap \mathfrak{a} \leq 2$.

Démonstration. — Le \mathfrak{g} -module $\mathfrak{a}/\mathfrak{z} \cap \mathfrak{a}$ est irréductible. Donc

$$\dim \mathfrak{a}/\mathfrak{z} \cap \mathfrak{a} \leq 2 \quad \text{et} \quad [\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{z} \cap \mathfrak{a}.$$

Si $\dim \mathfrak{a}/\mathfrak{z} \cap \mathfrak{a} = 1$, le lemme est évident. Si $\dim \mathfrak{a}/\mathfrak{z} \cap \mathfrak{a} = 2$, $\mathfrak{a}^{\mathfrak{g}}$ est engendré sur $(\mathfrak{z} \cap \mathfrak{a})^{\mathfrak{g}}$ par deux vecteurs \bar{A} et \bar{A} et il existe une forme linéaire λ non nulle et un nombre réel α non nul tel que, si $X \in \mathfrak{g}$,

$$\begin{aligned} [X, A] &= (1 + i\alpha) \lambda(X) A + U, \\ [X, \bar{A}] &= (1 - i\alpha) \lambda(X) \bar{A} + \bar{U}, \end{aligned} \quad \text{où } U \in (\mathfrak{z} \cap \mathfrak{a})^{\mathfrak{g}},$$

il s'agit de montrer que $[A, \bar{A}] = 0$. Soit $X_0 \in \mathfrak{g}$ tel que $\lambda(X_0) = 1$. On a alors

$$0 = [X_0, [A, \bar{A}]] = (1 + i\alpha) [A, \bar{A}] + (1 - i\alpha) [A, \bar{A}] = 2([A, \bar{A}]).$$

Désormais dans ce chapitre II \mathfrak{g} désignera une algèbre de Lie résoluble exponentielle.

LEMME 5. — Soient \mathfrak{a} un idéal minimal parmi les idéaux non centraux de \mathfrak{g} et $\mathfrak{h} \in \mathcal{M}(f; \mathfrak{g})$. Alors

$$\dim \mathfrak{a}/\mathfrak{h} \cap \mathfrak{a} \leq 2 \quad \text{et si} \quad \dim \mathfrak{a}/\mathfrak{h} \cap \mathfrak{a} = 2, \quad \text{alors } \mathfrak{h} \cap \mathfrak{a} = \mathfrak{z} \cap \mathfrak{a}$$

et la représentation de \mathfrak{g} dans $\mathfrak{a}/\mathfrak{h} \cap \mathfrak{a}$ est irréductible.

Si $\mathfrak{h} \in \mathcal{M}(f; \mathfrak{g})$, \mathfrak{h} contient le centre \mathfrak{z} de \mathfrak{g} . On a donc $\mathfrak{a} \supset \mathfrak{h} \cap \mathfrak{a} \supset \mathfrak{z} \cap \mathfrak{a}$. Or $\dim \mathfrak{a}/\mathfrak{z} \cap \mathfrak{a} \leq 2$ et donc $\dim \mathfrak{a}/\mathfrak{h} \cap \mathfrak{a} \leq 2$, l'égalité n'étant possible que si $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{a} = \mathfrak{z} \cap \mathfrak{a}$.

PROPOSITION 8. — Soient \mathfrak{a} un idéal minimal parmi les idéaux non centraux de \mathfrak{g} et $\mathfrak{h} \in \mathcal{M}(f; \mathfrak{g})$. Soient σ la représentation de \mathfrak{h} dans $\mathfrak{a}/\mathfrak{h} \cap \mathfrak{a}$ et \mathfrak{j} son noyau et soit $\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{a}^f$. Alors :

- (a) la représentation σ est triviale ou irréductible;
- (b) \mathfrak{j} et $\mathfrak{j} + \mathfrak{h}_0$ sont des idéaux de \mathfrak{h} ;
- (c) $\mathfrak{j} + \mathfrak{h}_0 = \mathfrak{h}$ ou \mathfrak{h}_0 , cette dernière éventualité étant exclue si $\dim \mathfrak{h}/\mathfrak{h}_0 = 2$;
- (d) $[\mathfrak{j}, \mathfrak{j}] \subset \mathfrak{j} \cap \mathfrak{h}_0$.

Démonstration. — On a $\dim \mathfrak{a}/\mathfrak{h} \cap \mathfrak{a} \leq 2$. Si $\dim \mathfrak{a}/\mathfrak{h} \cap \mathfrak{a} = 1$, (a) est clair. Si $\dim \mathfrak{a}/\mathfrak{h} \cap \mathfrak{a} = 2$, (a) résulte des lemmes 5 et 3.

Dans tous les cas \mathfrak{j} est de codimension ≤ 1 et $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{j}$, ce qui montre (b).

Montrons (c). Si $\mathfrak{h}_0 \not\subset \mathfrak{j}$, on a $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0 + \mathfrak{j}$. Si $\mathfrak{h}_0 \subset \mathfrak{j}$ et si $\dim \mathfrak{h}/\mathfrak{h}_0 = 1$, on a $\mathfrak{j} = \mathfrak{h}_0$ ou \mathfrak{h} . Reste le cas $\mathfrak{h}_0 \subset \mathfrak{j}$ et $\dim \mathfrak{h}/\mathfrak{h}_0 = 2$. Alors $\mathfrak{h}_0 \neq \mathfrak{j}$ puisque \mathfrak{j} est de codimension ≤ 1 , et il s'agit de prouver que $\mathfrak{j} = \mathfrak{h}$. Supposons donc $\mathfrak{j} \neq \mathfrak{h}$, σ est alors irréductible d'après (a). Rappelons (prop. 1) que B met $\mathfrak{h}/\mathfrak{h}_0$ et $\mathfrak{a}/\mathfrak{h} \cap \mathfrak{a}$ en dualité.

L'orthogonal pour B de $\mathfrak{j}/\mathfrak{h}_0$ est l'image dans $\mathfrak{a}/\mathfrak{h} \cap \mathfrak{a}$ du sous-espace $\mathfrak{a}(\mathfrak{j}) = \{A \in \mathfrak{a}, f([A, \mathfrak{j}]) = 0\}$ et $\mathfrak{h}_0 \subset \mathfrak{j} \subset \mathfrak{h}$ implique par dualité $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{h} \subset \mathfrak{a}(\mathfrak{j}) \subset \mathfrak{a}$. Il suffit dès lors de montrer que $\mathfrak{a}(\mathfrak{j})$ est un \mathfrak{h} -module pour obtenir la contradiction cherchée.

Soient donc $A \in \mathfrak{a}(\mathfrak{j})$, $J \in \mathfrak{j}$ et $H \in \mathfrak{h}_0$, on a

$$f([J, [H, A]]) = f([J, H], A) + f[H, [J, A]],$$

or $[J, H] \in \mathfrak{j}$ et le 1^{er} terme du 2^e membre est donc nul, car $A \in \mathfrak{a}(\mathfrak{j})$.

D'autre part, $[J, A] \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{a}$ car \mathfrak{j} est le noyau de la représentation σ le 2^e terme est donc nul aussi, puisque $f[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] = 0$.

Montrons (d). Il suffit de démontrer que $[\mathfrak{j}, \mathfrak{j}] \subset \mathfrak{a}$, or

$$[[\mathfrak{j}, \mathfrak{j}], \mathfrak{a}] \subset [\mathfrak{j}, [\mathfrak{j}, \mathfrak{a}]] \subset [\mathfrak{j}, \mathfrak{h} \cap \mathfrak{a}] \subset [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}],$$

on a donc $f[[\mathfrak{j}, \mathfrak{j}], \mathfrak{a}] = 0$.

III. — Comparaison de représentations induites par des sous-algèbres subordonnées à une forme f .

Soit G un groupe de Lie; désignons par dg une mesure de Haar à gauche sur G et par Δ_G la fonction module de G de sorte que l'on a

$$\int_G f(gx^{-1}) dg = \Delta_G(x) \int_G f(g) dg$$

pour toute fonction $f \in \mathcal{K}(G)$ espace des fonctions numériques continues à support compact sur G et pour tout $x \in G$.

Soit H un sous-groupe fermé de G. On désigne par $\Delta_{H,G}$ le caractère de H à valeurs dans \mathbf{R}^+ défini par $\Delta_{H,G}(h) = \Delta_H(h)/\Delta_G(h)$.

Soit \mathfrak{h} l'algèbre de Lie de H, on a $\Delta_{H,G}(\exp X) = e^{\text{Tr} \mathfrak{g}/\mathfrak{h} \text{ ad} X}$.

Soit $\mathcal{K}(H, G)$ l'espace des fonctions numériques continues sur G à support compact modulo H et qui vérifient

$$(R.1) \quad \Phi(gh) = \Delta_{H,G}(h) \Phi(g) \quad (g \in G, h \in H),$$

G agit dans cet espace par translation à gauche.

On sait [2] qu'il existe sur $\mathcal{K}(\mathbf{H}, \mathbf{G})$ une forme linéaire positive \mathbf{G} -invariante et une seule (à un scalaire près). On la note $\nu_{\mathbf{H}, \mathbf{G}}$ et on posera

$$\nu_{\mathbf{H}, \mathbf{G}}(F) = \int_{\mathbf{G}/\mathbf{H}} F(g) d\nu_{\mathbf{H}, \mathbf{G}}(g).$$

Dans le cas où $\Delta_{\mathbf{H}}$ et $\Delta_{\mathbf{G}}$ coïncident sur \mathbf{H} (par exemple si \mathbf{H} est distingué dans \mathbf{G}), l'espace $\mathcal{K}(\mathbf{H}, \mathbf{G})$ s'identifie à $\mathcal{K}(\mathbf{G}/\mathbf{H})$ et il existe alors une mesure \mathbf{G} -invariante sur l'espace homogène \mathbf{G}/\mathbf{H} qu'on notera parfois $d\dot{g}$.

Soit \mathbf{U} une représentation unitaire de \mathbf{H} dans un espace de Hilbert \mathcal{H} , et soit F une fonction continue de \mathbf{G} à valeurs dans \mathcal{H} à support compact modulo \mathbf{H} et vérifiant

$$(R.2) \quad F(gh) = \mathbf{U}(h)^{-1} (\Delta_{\mathbf{H}, \mathbf{G}}(h))^{\frac{1}{2}} F(g) \quad (g \in \mathbf{G}, h \in \mathbf{H}).$$

Alors la fonction $g \rightarrow \|F(g)\|^2$ appartient à $\mathcal{K}(\mathbf{H}, \mathbf{G})$ et on pose

$$\|F\|^2 = \int_{\mathbf{G}/\mathbf{H}} \|F(g)\|^2 d\nu_{\mathbf{H}, \mathbf{G}}(g).$$

On réalisera la représentation unitaire $\text{Ind}_{\mathbf{H}}^{\mathbf{G}} \mathbf{U}$ induite à \mathbf{G} de la représentation unitaire \mathbf{U} du groupe \mathbf{H} dans l'espace de Hilbert complété de l'espace des fonctions continues sur \mathbf{G} à valeurs dans \mathcal{H} à support compact modulo \mathbf{H} vérifiant (R. 2) et muni de la norme définie ci-dessus. La représentation unitaire de \mathbf{G} dans cet espace s'effectue par translation à gauche.

Désormais dans ce chapitre et le suivant \mathfrak{g} désignera une algèbre de Lie résoluble exponentielle, et \mathbf{G} le groupe simplement connexe d'algèbre de Lie \mathfrak{g} . Soit $f \in \mathfrak{g}^*$ et soit \mathfrak{h} une sous-algèbre subordonnée à f . On notera $\chi_{f, \mathfrak{h}}$ le caractère unitaire du groupe $\mathbf{H} = \exp \mathfrak{h}$ défini par $\chi_{f, \mathfrak{h}}(\exp X) = e^{i f(X)}$ pour $X \in \mathfrak{h}$ et on notera $\rho(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{g})$ la représentation $\text{Ind}_{\mathbf{H}}^{\mathbf{G}} \chi_{f, \mathfrak{h}}$ du groupe \mathbf{G} . Elle se réalise donc par translations à gauche dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H}(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{g})$ complété de l'espace des fonctions continues sur \mathbf{G} à valeurs dans \mathbf{C} à support compact modulo \mathbf{H} et vérifiant

$$(R.3) \quad f(gh) = \chi_{f, \mathfrak{h}}(h)^{-1} \Delta_{\mathbf{H}, \mathbf{G}}(h)^{\frac{1}{2}} f(g) \quad (g \in \mathbf{G}, h \in \mathbf{H}).$$

Si \mathfrak{k} est une sous-algèbre de \mathfrak{g} et \mathfrak{h} une sous-algèbre subordonnée à f contenue dans \mathfrak{k} , on se permettra de noter $\rho(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{k})$ la représentation $\text{Ind}_{\mathbf{H}}^{\mathbf{K}} \chi_{f, \mathfrak{h}}$.

Il s'agira dans la suite de comparer aux représentations $\rho(f; \mathfrak{h}_1; \mathfrak{g})$ et $\rho(f; \mathfrak{h}_2; \mathfrak{g})$, où \mathfrak{h}_1 et $\mathfrak{h}_2 \in \mathcal{M}(f; \mathfrak{g})$ et pour cela de fabriquer un opérateur $\mathbf{T}_{\mathfrak{h}_2, \mathfrak{h}_1}$ d'entrelacement de ces représentations. Donnons une idée

non rigoureuse de la méthode employée. Il s'agit de trouver un opérateur qui transforme une fonction vérifiant (R. 3) pour $H_1 = \exp \mathfrak{h}_1$ en une fonction vérifiant (R. 3) pour H_2 . Supposons pour simplifier que tous les groupes en question soient unimodulaires. Soit $g \in G$ et $\varphi \in \mathcal{H}(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{g})$, alors la fonction

$$h_2 \rightarrow \varphi(gh_2) \chi_{f, \mathfrak{h}_2}(h_2) \quad (h_2 \in \exp \mathfrak{h}_2 = H_2)$$

est invariante à droite par le sous-groupe $H_1 \cap H_2$ de H_2 .

Posons formellement

$$(R.4) \quad (T_{\mathfrak{h}_2, \mathfrak{h}_1} \varphi)(g) = \int_{H_2/H_1 \cap H_2} \varphi(gh_2) \chi_{f, \mathfrak{h}_2}(h_2) dh_2,$$

où dh_2 désigne une mesure H_2 -invariante sur l'espace homogène $H_2/H_1 \cap H_2$. Si cette intégrale converge quel que soit g , il est clair que $T_{\mathfrak{h}_2, \mathfrak{h}_1} \varphi$ vérifie (R. 3) pour H_2 et que $T_{\mathfrak{h}_2, \mathfrak{h}_1}$ commute à l'action de G par translations à gauche.

Dans la situation tout à fait générale décrite plus haut on ne connaît aucun résultat sur la convergence des intégrales (R. 4). Cependant on montrera que dans des cas très particuliers d'algèbres \mathfrak{h}_1 et \mathfrak{h}_2 , on peut effectivement définir de cette façon un opérateur $T_{\mathfrak{h}_2, \mathfrak{h}_1}$.

On gardera dans la suite les notations de la proposition 8 et de la proposition 4.

LEMME 6. — Soit \mathfrak{v} un supplémentaire de $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{h}$ dans \mathfrak{a} . Alors $\mathfrak{k} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{v}$ et l'application $(H, V) \rightarrow \exp H \exp V$ est un difféomorphisme de $\mathfrak{h} \times \mathfrak{v}$ sur $\exp \mathfrak{k}$.

Démonstration. — Soit φ cette application; on sait qu'elle est analytique; montrons qu'elle est bijective. Notons $K = \exp \mathfrak{k}$, $A = \exp \mathfrak{a}$, $H = \exp \mathfrak{h}$. Comme $\mathfrak{k} = \mathfrak{h} + \mathfrak{a}$ et que \mathfrak{a} est un idéal abélien de \mathfrak{k} , on a $K = H.A$ et $A = \exp \mathfrak{h} \cap \mathfrak{a} \exp \mathfrak{v}$. Donc $K = H \exp \mathfrak{v}$ et φ est surjective.

Soient, par ailleurs, $(H_i, V_i) \in \mathfrak{h} \times \mathfrak{v}$ ($i = 1, 2$) tels que

$$\exp H_1 \exp V_1 = \exp H_2 \exp V_2.$$

Alors \mathfrak{a} étant abélien et \mathfrak{h} exponentielle, il existe $H_3 \in \mathfrak{h}$ tel que

$$\exp(V_2 - V_1) = \exp H_1 (\exp H_2)^{-1} = \exp H_3.$$

L'application \exp étant bijective, on en déduit que

$$V_2 - V_1 \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{v} = 0 \quad \text{et donc que} \quad (H_1, V_1) = (H_2, V_2).$$

Il reste à vérifier que φ^{-1} est analytique. Posons pour $k \in K$

$$\varphi^{-1}(k) = (L(k), M(k))$$

de sorte que $k = \exp L(k) \exp M(k)$, $L(k) \in \mathfrak{h}$, $M(k) \in \mathfrak{v}$. Or l'application canonique $\pi: G \rightarrow H \backslash G$, qui est analytique s'écrit, si on identifie $H \backslash G$ à $\exp \mathfrak{v}$, $k \rightarrow \exp M(k)$. Par suite, l'application M est analytique et ceci entraîne immédiatement que L est analytique.

LEMME 7. — (a) Supposons $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0 + \mathfrak{j}$ et soit \mathfrak{t} un supplémentaire de \mathfrak{h}_0 dans \mathfrak{h} contenu dans \mathfrak{j} . Alors l'application $(T, H_0) \rightarrow \exp T \exp H_0$ est un difféomorphisme de $\mathfrak{t} \times \mathfrak{h}_0$ sur H .

(b) Supposons $\mathfrak{j} = \mathfrak{h}_0$. Soit $X \in \mathfrak{h} - \mathfrak{h}_0$, alors l'application

$$(t, H_0) \rightarrow \exp t X \exp H_0$$

est un difféomorphisme de $\mathfrak{R} \times \mathfrak{h}_0$ sur H .

Démonstration. — Si $\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{j}$, \mathfrak{j} est un idéal de codimension 1 dans \mathfrak{h} et l'assertion (b) est classiquement vérifiée. Supposons donc $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0 + \mathfrak{j}$ et notons φ l'application considérée.

On sait qu'elle est analytique et il suffit de vérifier qu'elle est bijective : le raisonnement fait au lemme 6 prouvera que φ^{-1} est analytique.

Soit $(T_i, H_i) \in \mathfrak{t} \times \mathfrak{h}_0$ ($i = 1, 2$) tels que

$$\exp T_1 \exp H_1 = \exp T_2 \exp H_2.$$

Alors, d'après le lemme 2 et le (d) de la proposition 8, il existe $H_3 \in \mathfrak{h}_0$ tel que

$$\exp(T_1 - T_2) = \exp H_3.$$

Donc $T_1 - T_2 \in \mathfrak{t} \cap \mathfrak{h}_0 = \{0\}$ et φ est injective. Posons

$$H_0 = \exp \mathfrak{h}_0, \quad J = \exp \mathfrak{j}, \quad T = \exp \mathfrak{t}.$$

Comme $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0 + \mathfrak{j}$, que \mathfrak{h}_0 est une sous-algèbre de \mathfrak{h} et \mathfrak{j} un idéal de \mathfrak{h} , on a $H = H_0 \cdot J$. Pour démontrer que φ est surjective, il suffit de vérifier que

$$J = \exp(\mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{j}) \exp \mathfrak{t}, \quad \text{car alors } H = H_0 \exp \mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{j} \cdot T = H_0 \cdot T$$

et pour cela de vérifier que $\exp(\mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{j}) \exp \mathfrak{t}$ qui engendre J , car $\mathfrak{j} = \mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{j} \oplus \mathfrak{t}$, est un sous-groupe. Soient donc

$$(H_i, T_i) \in (\mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{j}) \times \mathfrak{t} \quad (i = 1 \text{ ou } 2).$$

On a

$$\exp H_1 \exp T_1 \exp H_2 \exp T_2 = \exp H_1 \exp(\exp T_1 \cdot H_2) \exp T_1 \exp T_2.$$

Or $\mathfrak{j} \cap \mathfrak{h}_0$ est un idéal dans \mathfrak{j} d'après le (d) de la proposition 8, donc $\exp T_1 \cdot H_2 \in \mathfrak{j} \cap \mathfrak{h}_0$ et il existe $H_3 \in \mathfrak{j} \cap \mathfrak{h}_0$ tel que

$$\exp H_1 \exp(\exp T_1 \cdot H_2) = \exp H_3.$$

D'autre part, d'après le lemme 2, il existe $H_4 \in [j, j] \subset j \cap h_0$ tel que

$$\exp T_1 \exp T_2 = \exp H_4 \exp (T_1 + T_2).$$

Si on note H_5 l'élément de $j \cap h_0$ tel que

$$\exp H_5 = \exp H_3 \exp H_4,$$

on obtient que

$$\exp H_1 \exp T_1 \exp H_2 \exp T_2 = \exp H_5 \exp (T_1 + T_2)$$

et ainsi appartient à $\exp j \cap h_0 \exp t$.

PROPOSITION 9. — Soit α un idéal minimal parmi les idéaux non centraux de \mathfrak{g} et $\mathfrak{h} \in \mathcal{M}(f/\mathfrak{g})$. Supposons que $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0 + \mathfrak{j}$. Soit \mathfrak{t} un supplémentaire de \mathfrak{h}_0 dans \mathfrak{h} contenu dans \mathfrak{j} et soit \mathfrak{v} un supplémentaire de \mathfrak{h} dans $\alpha/\mathfrak{h} \cap \alpha$. Alors :

- (1) la restriction B de B_f à $\mathfrak{t} \times \mathfrak{v}$ est non dégénérée;
- (2) l'application $(T, H_0, V) \rightarrow \exp T \exp H_0 \exp V$ est un difféomorphisme de $\mathfrak{t} \times \mathfrak{h}_0 \times \mathfrak{v}$ sur K ;
- (3) les représentations $\rho(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{k})$ et $\rho(f; \mathfrak{h}'; \mathfrak{k})$ sont équivalentes.

Comme le sous-espace $\mathfrak{h}/\mathfrak{h}_0$ s'identifie à \mathfrak{t} et $\alpha/\mathfrak{h} \cap \alpha$ à \mathfrak{v} , le (1) résulte du (1) de la proposition 1.

Par ailleurs, les lemmes 6 et 7 impliquent (2) et on en déduit facilement que l'application $(H_0, V) \rightarrow \exp H_0 \exp V$ est un difféomorphisme de $\mathfrak{h}_0 \times \mathfrak{v}$ sur H' .

Démontrons que les représentations $\rho(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{k})$ et $\rho(f; \mathfrak{h}'; \mathfrak{k})$ sont équivalentes et pour cela nous allons démontrer qu'on peut construire un opérateur d'entrelacement $T_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}}$ de ces deux représentations en suivant la méthode esquissée plus haut.

Soit ψ une fonction continue à support compact modulo H appartenant à $\mathcal{H}(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{k})$. On a donc

$$(R. 3) \quad \psi(kh) = \chi_{f, \mathfrak{h}}(h)^{-1} \Delta_{H, \mathfrak{k}}(h)^{\frac{1}{2}} \psi(k) \quad (k \in K, h \in H).$$

Soit $k \in K$ et soit $\Phi_{k, \psi}$ la fonction continue sur H' définie par

$$\Phi_{k, \psi}(h') = \psi(kh') \chi_{f, \mathfrak{h}'}(h') \Delta_{H, \mathfrak{k}}(h')^{-\frac{1}{2}}.$$

Le groupe $H \cap H'$ est égal au groupe $\exp(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{h}') = \exp \mathfrak{h}_0 = H_0$ et on a

$$\begin{aligned} \Delta_{H_0, H'}(\exp X) &= e^{\text{Tr} \mathfrak{h}'/\mathfrak{h}_0 \text{ad} X} \quad (X \in \mathfrak{h}_0) \\ &= e^{\frac{1}{2}(\text{Tr} \mathfrak{k}/\mathfrak{h} \text{ad} X - \text{Tr} \mathfrak{k}/\mathfrak{h}' \text{ad} X)} \\ &= (\Delta_{H, \mathfrak{k}}(\exp X))^{\frac{1}{2}} (\Delta_{H', \mathfrak{k}}(\exp X))^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

d'après le (2) de la proposition 1.

En utilisant ce résultat et la relation (R. 3), on voit donc que la fonction $\Phi_{k,\psi}$ vérifie la relation (R. 1), c'est-à-dire

$$(\Phi_{k,\psi})(h/h_0) = \Delta_{H_0, H'}(h_0) \Phi_{k,\psi}(h').$$

D'autre part, comme $K = H'.H$, l'application canonique $K \rightarrow K/H$ induit une surjection $H' \rightarrow K/H$, qui fait de K/H un espace homogène de H' , d'où un difféomorphisme $\lambda: H'/H_0 \rightarrow K/H$. Le support de ψ modulo H étant compact, on voit que le support de $\Phi_{k,\psi}$ est compact modulo H_0 . La fonction $\Phi_{k,\psi}$ appartient donc à l'espace $\mathcal{K}(H_0, H')$ et on pose

$$(T_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}} \psi)(k) = \nu_{H_0, H'}(\Phi_{k,\psi}) = \oint_{H'/H_0} \psi(kh') \chi_{f, \mathfrak{h}'}(h') \Delta_{H', K}(h')^{-\frac{1}{2}} d\nu_{H_0, H'}(h').$$

Il est clair que la fonction $T_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}}(\psi)$ vérifiée la relation (R. 3) pour (K, H') et que $T_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}}$ commute à l'action de G par translations à gauche. Il s'agit de montrer que $T_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}}(\psi)$ appartient à l'espace $\mathcal{X}(f; \mathfrak{h}'; \mathfrak{k})$ et que l'opérateur $T_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}}$ défini sur l'espace des fonctions de $\mathcal{X}(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{k})$ continues à support compact modulo H se prolonge en un isomorphisme unitaire de $\mathcal{X}(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{k})$ sur $\mathcal{X}(f; \mathfrak{h}'; \mathfrak{k})$.

L'espace H'/H_0 s'identifie à \mathfrak{v} et l'espace $\mathcal{K}(H_0, H')$ s'identifie à l'espace $\mathcal{K}(\mathfrak{v})$ des fonctions continues à support compact sur \mathfrak{v} par l'application $(P\Phi)(V) = \Phi(\exp V)$ et la forme $\nu_{H_0, H'}$ s'identifie à la mesure de Lebesgue sur \mathfrak{v} .

D'autre part, si $h' \in \exp \mathfrak{a}$, \mathfrak{a} étant un idéal de \mathfrak{k} contenu dans \mathfrak{h}' on a $\Delta_{H', K}(h') = 1$ et donc

$$(T_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}} \psi)(k) = \int_{\mathfrak{v}} \psi(k \exp V) e^{f(V)} dV.$$

L'espace K/H s'identifie à \mathfrak{v} , et l'application R définie par $(R\psi)(V) = \psi(\exp V)$, où ψ est une fonction continue appartenant à $\mathcal{X}(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{k})$ et V un point de \mathfrak{v} se prolonge en un isomorphisme unitaire de $\mathcal{X}(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{k})$ sur $\mathcal{L}^2(\mathfrak{v})$. De même, K/H' , s'identifie à \mathfrak{t} et l'application R' défini par $(R'\psi')(T) = \psi'(\exp T)$, où ψ' est une fonction continue appartenant à $\mathcal{X}(f; \mathfrak{h}'; \mathfrak{k})$ et T un point de \mathfrak{t} se prolonge en un isomorphisme unitaire de $\mathcal{X}(f; \mathfrak{h}'; \mathfrak{k})$ sur $\mathcal{L}^2(\mathfrak{t})$.

Soit donc Φ une fonction continue à support compact sur \mathfrak{v} . Alors $T_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}}(R^{-1}\Phi)$ vérifiant (R. 3) pour (H', K) , soit $R'.T_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}}.R^{-1}(\Phi)$ la fonction sur \mathfrak{t} définie par

$$(R'.T_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}}.R^{-1})(\Phi)(T) = T_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}}(R^{-1}\Phi)(\exp T)$$

ou encore

$$(R'.T_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}}.R^{-1})(\Phi)(T) = \int_{\mathfrak{v}} (R^{-1}\Phi)(\exp T \exp V) e^{i f(V)} dV;$$

or

$$\exp T \exp V = \exp(\exp T.V) \exp T$$

et

$$\exp T.V = V + [T, V] + W \quad \text{où} \quad [T, V] \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{a}$$

et

$$W \in [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \cap \mathfrak{a}, \quad \text{car} \quad T \in \mathfrak{j} \quad \text{et} \quad [\mathfrak{i}, \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{h} \cap \mathfrak{a}.$$

En utilisant les faits suivants :

$\Delta_{\mathfrak{h}, \mathfrak{k}}$ est trivial sur $\exp \mathfrak{j}$ (car $[\mathfrak{j}, \mathfrak{v}] \subset \mathfrak{h} \cap \mathfrak{a}$ et $\mathfrak{k} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{v}$), $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{a}$ et \mathfrak{t} sont contenus dans \mathfrak{j} , $\chi_{f, \mathfrak{h}}$ est trivial sur $\exp \mathfrak{h}$, \mathfrak{a} est un idéal abélien et $R^{-1}\Phi$ vérifie la relation (R.3), il vient

$$(R^{-1}\Phi)(\exp T \exp V) = \Phi(V) e^{-i f(T, V)} e^{-i f(T)}.$$

et

$$(R'.T_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}}.R^{-1})(\Phi)(T) = e^{-i f(T)} \int_{\mathfrak{v}} \Phi(V) e^{i f(V)} e^{-i B_f(T, V)} dV.$$

Comme la restriction B de B_f à $\mathfrak{t} \times \mathfrak{v}$ est non dégénérée, B_f définit une transformation de Fourier \mathcal{F}_B de $\mathcal{L}^2(\mathfrak{v})$ sur $\mathcal{L}^2(\mathfrak{t})$ et on a donc

$$(R'.T_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}}.R^{-1})(\Phi)(T) = e^{-i f(T)} \mathcal{F}_B(V \rightarrow e^{i(V)} \Phi(V)).$$

Si $\psi = R^{-1}\Phi$, on voit donc que $T_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}}(\psi)$ appartient à $\mathcal{H}(f; \mathfrak{h}'; \mathfrak{k})$ et que $T_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}}$ se prolonge en un isomorphisme unitaire de $\mathcal{H}(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{k})$ sur $\mathcal{H}(f; \mathfrak{h}'; \mathfrak{k})$. Cela termine la démonstration de la proposition 9.

PROPOSITION 10. — Soit \mathfrak{a} un idéal minimal parmi les idéaux non centraux de \mathfrak{g} et soit $\mathfrak{h} \in \mathcal{M}(f; \mathfrak{g})$.

Définissons $\mathfrak{h}_0, \mathfrak{h}', \mathfrak{k}, \mathfrak{j}$ comme précédemment.

Supposons que $\mathfrak{h} \neq \mathfrak{h}_0 + \mathfrak{j}$. Dans ces conditions :

(1) $\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{j}$, $\dim \mathfrak{h} / \mathfrak{h}_0 = \dim \mathfrak{a} / \mathfrak{h} \cap \mathfrak{a} = 1$, \mathfrak{h}_0 et \mathfrak{h}' sont des idéaux de \mathfrak{k} , $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{a} = \mathfrak{z} \cap \mathfrak{a}$, et $[\mathfrak{h}_0, \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{h} \cap \mathfrak{a} = \mathfrak{z} \cap \mathfrak{a}$.

(2) Il existe des vecteurs $H \in \mathfrak{h}_0 - \mathfrak{h}_0$ et $A \in \mathfrak{a} - (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{a})$ tels que

$$\mathfrak{k} = \mathbf{R}H \oplus \mathfrak{h}_0 \oplus \mathbf{R}A,$$

$[H, A] = A$ et $f(A) = 1$. L'application $(x, H_0, y) \rightarrow \exp x H \exp H_0 \exp y A$ est un difféomorphisme de $\mathbf{R} \times \mathfrak{h}_0 \times \mathbf{R}$ sur K .

(3) Si on note pour tout $\nu \in \mathbf{R}$, f_ν la forme linéaire sur \mathfrak{k} définie par les conditions $f_\nu \in f + \mathfrak{h}^\perp$ et $f_\nu(A) = \nu$, alors pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\exp x H f_\nu = f_{e^{-x\nu}}$.

En outre, $\mathfrak{h}' \in \mathcal{M}(f_\nu; \mathfrak{k})$ si et seulement si $\nu \neq 0$, et $\mathfrak{k} \in \mathcal{M}(f_0; \mathfrak{k})$.

(4) Si ν_+ est un nombre réel strictement positif et ν_- un nombre réel strictement négatif, alors

$$\rho(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{k}) \simeq \rho(f_{\nu_+}; \mathfrak{h}'; \mathfrak{k}) \oplus \rho(f_{\nu_-}; \mathfrak{h}'; \mathfrak{k}).$$

Démonstration. — Comme $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0 + \mathfrak{i}$, d'après le (c) de la proposition 8, on a donc

$$\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{i}, \quad \dim \mathfrak{h} / \mathfrak{h}_0 = \dim \mathfrak{a} / \mathfrak{h} \cap \mathfrak{a} = 1.$$

Comme $\mathfrak{h} \neq \mathfrak{i}$, la représentation de \mathfrak{h} dans $\mathfrak{a} / \mathfrak{h} \cap \mathfrak{a}$ n'est pas triviale, *a fortiori* celle de \mathfrak{h} dans $\mathfrak{a} / \mathfrak{z} \cap \mathfrak{a}$. Elle est donc irréductible d'après le lemme 3. L'espace $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{a} / \mathfrak{z} \cap \mathfrak{a}$ étant un sous- \mathfrak{h} -module propre de $\mathfrak{a} / \mathfrak{z} \cap \mathfrak{a}$, on a donc $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{a} = \mathfrak{z} \cap \mathfrak{a}$. D'autre part, comme $\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{i}$, \mathfrak{h}_0 est un idéal de \mathfrak{h} et comme $[\mathfrak{i}, \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{h} \cap \mathfrak{a} \subset \mathfrak{h}_0$, \mathfrak{h}_0 est un idéal de \mathfrak{k} . De même, $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h}_0 + \mathfrak{a}$, somme de deux idéaux est un idéal de \mathfrak{k} . On a donc démontré (1).

Soient alors $H_1 \in \mathfrak{h} - \mathfrak{h}_0$ et $A_1 \in \mathfrak{a} - \mathfrak{a} \cap \mathfrak{h}$. On a

$$[H_1, A_1] = \lambda_1 A_1 + U_1 \quad \text{où } U_1 \in \mathfrak{a} \cap \mathfrak{h} = \mathfrak{z} \cap \mathfrak{a} \text{ et } \lambda_1 \neq 0.$$

Il suffit alors de prendre $H = \lambda_1^{-1} H_1$ et $A = \mu (\lambda_1 A_1 + U_1)$ ($\mu \neq 0$) pour avoir $[H, A] = A$ et comme $f([H, A]) \neq 0$ (car sinon on aurait $f([H, \mathfrak{a}]) = 0$ et $H \in \mathfrak{h}_0$), on peut choisir μ de telle sorte que $f(A) = 1$.

La deuxième assertion de (2) découle du fait que \mathfrak{h}' et \mathfrak{h}_0 sont des idéaux de \mathfrak{k} .

Montrons (3). Comme $H \in \mathfrak{h}$, on a

$$(\exp xH) \cdot f_\nu \in f + \mathfrak{h}^\perp,$$

donc

$$(\exp xH) \cdot f_\nu = f_{\nu'}, \quad \text{avec } \nu' = (\exp xH \cdot f_\nu)(A) = e^{-x\nu}.$$

D'autre part,

$$\mathfrak{h}' \in \mathcal{S}(f_\nu; \mathfrak{k}), \quad \text{car } [\mathfrak{h}', \mathfrak{h}'] \subset [\mathfrak{h}_0, \mathfrak{h}_0] + [\mathfrak{h}_0, \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{h}$$

et, par conséquent,

$$f_\nu[\mathfrak{h}', \mathfrak{h}'] = f[\mathfrak{h}', \mathfrak{h}'] = 0.$$

Si $\nu \neq 0$,

$$\mathfrak{k} \notin \mathcal{S}(f_\nu; \mathfrak{k}), \quad \text{car } f_\nu([\mathfrak{H}, A]) = f_\nu(A) = \nu,$$

et, par conséquent, $\mathfrak{h}' \in \mathcal{M}(f_\nu; \mathfrak{k})$.

On a

$$\mathfrak{k} = \mathfrak{h} + \mathfrak{a} \quad \text{et donc} \quad [\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subset [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] + [\mathfrak{h}, \mathfrak{a}].$$

Écrivons

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{z} \cap \mathfrak{a} \oplus \mathbf{R}A, \quad \text{alors } [\mathfrak{h}, \mathfrak{a}] = [\mathfrak{h}, \mathbf{R}A] = [\mathfrak{h}_0, \mathfrak{a}] \oplus \mathbf{R}A.$$

Il vient

$$[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subset [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] + [\mathfrak{h}_0, \mathfrak{a}] + \mathbf{RA}.$$

Comme $f_0 \in f + \mathfrak{h}^\perp$, que $[\mathfrak{h}_0, \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{h} \cap \mathfrak{a}$ et que $f[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] = \{0\}$, ainsi que $f[\mathfrak{h}_0, \mathfrak{a}]$, on en déduit que

$$f_0[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] = f_0(\mathbf{RA}) = \{0\}.$$

Démontrons le (4). La représentation $\rho(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{k})$ se réalise dans l'espace $\mathcal{H}(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{k})$ complété de l'espace des fonctions numériques continues à support compact modulo \mathbf{H} et vérifiant

$$(R.3) \quad \psi(kh) = \chi_{f, \mathfrak{h}}(h)^{-1} \Delta_{\mathbf{H}, \mathfrak{K}}(h)^{\frac{1}{2}} \psi(k) \quad (k \in \mathbf{K}, h \in \mathbf{H}).$$

Notons que $\Delta_{\mathbf{H}, \mathfrak{K}}$ est trivial sur $\exp \mathfrak{h}_0$, car $[\mathfrak{h}_0, \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{h}$ et que $\delta(\exp \mathbf{H}) = 1$, puisque $[\mathbf{H}, \mathbf{A}] = \mathbf{A}$.

De même, la représentation $\rho(f_\nu; \mathfrak{h}'; \mathfrak{k})$ se réalise dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H}(f_\nu; \mathfrak{h}'; \mathfrak{k})$ complété de l'espace des fonctions numériques continues à support compact modulo \mathbf{H}' et vérifiant

$$(R.3, \nu) \quad \psi(kh') = \chi_{f_\nu, \mathfrak{h}'}(h')^{-1} \psi(k)$$

(on a $\Delta_{\mathbf{H}', \mathfrak{K}} = 1$ puisque \mathfrak{h}' est un idéal de \mathfrak{k}).

De façon analogue à la démonstration du (3) de la proposition 9, on considère si $k \in \mathbf{K}$ et si ψ est une fonction continue à support compact modulo \mathbf{H} de l'espace $\mathcal{H}(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{k})$ la fonction sur \mathbf{H}' ,

$$\Phi_{k, \psi}(h') = \psi(kh') \chi_{f_\nu}(h').$$

Les groupes \mathbf{K}/\mathbf{H} et \mathbf{H}'/\mathbf{H}_0 étant canoniquement isomorphes on en déduit que $\Phi_{k, \psi}$ est à support compact modulo \mathbf{H}_0 et puisque $\Delta_{\mathbf{H}, \mathfrak{K}}$ est trivial sur \mathfrak{h}_0 et que f_ν et f coïncident sur \mathfrak{h}_0 , $\Phi_{k, \psi}$ est invariante à droite par le sous-groupe distingué \mathbf{H}_0 de \mathbf{H}' . On pose alors

$$(T_\nu \psi)(k) = \int_{\mathbf{H}'/\mathbf{H}_0} \psi(kh') \chi_{f_\nu}(h') dh',$$

où dh' désigne la mesure sur \mathbf{H}'/\mathbf{H}_0 invariante par les translations à gauche par \mathbf{H}' .

Il est clair que T_ν commute aux translations à gauche par les éléments de \mathbf{K} et que $T_\nu \psi$ vérifie la relation (R.3, ν).

On se propose de montrer que $T_\nu \psi \in \mathcal{H}(f_\nu; \mathfrak{h}'; \mathfrak{k})$ et que l'opérateur T_ν défini sur l'espace des fonctions continues à support compact modulo \mathbf{H} appartenant à $\mathcal{H}(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{k})$ se prolonge en un opérateur borné de $\mathcal{H}(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{k})$ dans $\mathcal{H}(f_\nu; \mathfrak{h}'; \mathfrak{k})$.

L'application $(y, H_0) \rightarrow \exp y A \exp H_0$ est un difféomorphisme de $\mathbf{R} \times \mathfrak{h}_0$ sur H' ; on a donc

$$(T_\nu \psi)(k) = \int_{\mathbf{R}} \psi(k \exp y A) e^{iy\nu} dy.$$

De même, le difféomorphisme $(y, H) \rightarrow \exp y A \exp H$ permet d'identifier $\mathcal{H}(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{k})$ à $\mathcal{L}^2(\mathbf{R})$ par l'application R , où $(R\psi)(y) = \psi(\exp y A)$, si ψ est une fonction continue de $\mathcal{H}(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{k})$. Pareillement, $\mathcal{H}(f_\nu; \mathfrak{h}'; \mathfrak{k})$ s'identifie à $\mathcal{L}^2(\mathbf{R})$ par l'application R' ou $(R'\psi')(x) = \psi'(\exp x H)$.

Posons, de même,

$$R'(T_\nu \psi)(x) = (T_\nu \psi)(\exp x H),$$

on obtient alors, si Φ est une fonction continue à support compact sur \mathbf{R} ,

$$\begin{aligned} R'.T_\nu.R^{-1}(\Phi) &= \int_{\mathbf{R}} (R^{-1}\Phi)(\exp x H \exp y A) e^{iy\nu} dy \\ &= \int_{\mathbf{R}} R^{-1}\Phi(\exp y e^x A) e^{-ixf(H)} e^{\frac{x}{2}} e^{iy\nu} dy \\ &= e^{\frac{x}{2}} e^{-ixf(H)} \int_{\mathbf{R}} e^{iy\nu} \Phi(y e^x) dy \\ &= e^{-\frac{x}{2}} e^{-if(H)} \int_{\mathbf{R}} e^{ie^{-x\nu}y} \Phi(y) dy \end{aligned}$$

Notons \mathcal{F} la transformée de Fourier sur $\mathcal{L}^2(\mathbf{R})$; il vient

$$R'.T_\nu.R^{-1}(\Phi)(x) = e^{-\frac{x}{2}} e^{-ixf(H)} (\mathcal{F}\Phi)(e^{-x\nu}).$$

Ceci montre que $(R'.T_\nu.R^{-1})(\Phi) \in \mathcal{L}^2(\mathbf{R})$, et donc que si $\psi = R^{-1}\Phi$, que $T_\nu\psi \in \mathcal{H}(f_\nu; \mathfrak{h}'; \mathfrak{k})$.

Soit $\mathcal{L}_+^2(\mathbf{R})$ [resp. $\mathcal{L}_-^2(\mathbf{R})$] l'espace formé des fonctions de $\mathcal{L}^2(\mathbf{R})$ dont la transformée de Fourier est nulle presque partout hors de \mathbf{R}_+ (resp. \mathbf{R}_-), alors si ν est > 0 (resp. < 0), $|\nu|^{\frac{1}{2}} F_\nu$ réalise un isomorphisme unitaire de $\mathcal{L}_+^2(\mathbf{R})$ [resp. $\mathcal{L}_-^2(\mathbf{R})$] sur $\mathcal{L}^2(\mathbf{R})$. Comme $\mathcal{L}^2(\mathbf{R}) = \mathcal{L}_+^2(\mathbf{R}) \oplus \mathcal{L}_-^2(\mathbf{R})$ il en résulte (4) et la proposition 9 est démontrée.

Remarquons que les résultats des propositions 9 et 10 concernant la comparaison des représentations $\rho(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{k})$ et $\rho(f_\nu; \mathfrak{h}'; \mathfrak{k})$ ont été obtenues sans étude précise de la structure de l'algèbre de Lie \mathfrak{k} , mais en construisant directement un opérateur d'équivalence. Ce genre de raisonnement légèrement amélioré conduit à une démonstration plus rapide des résultats de la thèse de Bernat (voir [12]).

IV. — Étude de la représentation $\rho(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{g})$, où $\mathfrak{h} \in M(f; \mathfrak{g})$.

On rappelle que dans tout ce chapitre \mathfrak{g} désigne une algèbre de Lie résoluble exponentielle.

On note $I(f; \mathfrak{g})$ l'ensemble des sous-algèbres $\mathfrak{h} \in S(f; \mathfrak{g})$ telles que la représentation $\rho(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{g})$ soit irréductible.

On utilisera les résultats suivants de la thèse de Bernat [1].

B.1. Quelle que soit $f \in \mathfrak{g}^*$, on a

$$I(f; \mathfrak{g}) \neq \emptyset \quad \text{et} \quad I(f; \mathfrak{g}) \subset M(f, \mathfrak{g}).$$

B.2. Si \mathfrak{h}_1 et $\mathfrak{h}_2 \in I(f; \mathfrak{g})$, alors les représentations $\rho(f; \mathfrak{h}_1; \mathfrak{g})$ et $\rho(f; \mathfrak{h}_2; \mathfrak{g})$ sont équivalentes.

On notera $\rho(f; \mathfrak{g})$ la classe de représentations irréductibles associée à f , c'est-à-dire

$$\rho(f; \mathfrak{g}) = \rho(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{g}) \quad \text{pour} \quad \mathfrak{h} \in I(f; \mathfrak{g}).$$

Il est clair que si $g \in G$, alors

$$\rho(g \cdot f; \mathfrak{g}) = \rho(f; \mathfrak{g});$$

on peut donc associer à toute orbite O du groupe G dans \mathfrak{g}^* une classe de représentations unitaires irréductibles du groupe G qu'on notera $\rho(O)$ défini par

$$\rho(O) = \rho(f; \mathfrak{g}) \quad \text{si} \quad f \in O.$$

B.3. L'application $O \rightarrow \rho(O)$ est injective.

Soit $\mathfrak{h} \in M(f; \mathfrak{g})$. On note, comme dans la proposition 4, $U(f; \mathfrak{h})$ l'ensemble des orbites O de G dans \mathfrak{g}^* qui rencontrent $f + \mathfrak{h}^\perp$ suivant un ouvert non vide de $(f + \mathfrak{h}^\perp)$.

D'autre part, si \mathfrak{k} est un sous-espace de \mathfrak{g} et O une orbite, on note $C(O; f; \mathfrak{k})$ le nombre de composantes connexes de $O \cap (f + \mathfrak{k}^\perp)$.

On se propose de démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME. — Soit $\mathfrak{h} \in M(f; \mathfrak{g})$. Alors :

- (1) $U(f; \mathfrak{h})$ est un ensemble fini;
- (2) Si $O \in U(f; \mathfrak{h})$, $c(O; f; \mathfrak{h})$ est un nombre fini;
- (3) $\rho(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{g}) = \bigoplus_{O \in U(f; \mathfrak{h})} C(O; f; \mathfrak{h}) \rho(O)$.

Ce théorème entraînera, en particulier, la caractérisation suivante de l'ensemble $I(f; \mathfrak{g})$.

COROLLAIRE 1 (Critère de Pukanszky [9]). — Soit $f \in \mathfrak{g}^*$ et $\mathfrak{h} \in S(f; \mathfrak{g})$, alors les conditions suivantes sont équivalentes :

- (1) $H.f = f + \mathfrak{h}^\perp$;
- (2) $f + \mathfrak{h}^\perp \subset O(f)$ et $\mathfrak{h} \in M(f; \mathfrak{g})$;
- (3) Quelle que soit $\varphi \in \mathfrak{h}^\perp$, $\mathfrak{h} \in M(f + \varphi; \mathfrak{g})$;
- (4) $\mathfrak{h} \in I(f; \mathfrak{g})$.

Démonstration. — L'équivalence de (1), (2), (3) a déjà été prouvée à la proposition 3.

D'autre part, (4) \Rightarrow (3), car pour tout $\varphi \in \mathfrak{h}^\perp$

$$\rho(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{g}) = \rho(f + \varphi; \mathfrak{h}; \mathfrak{g})$$

et donc, d'après le résultat B.1 de Bernat, $\mathfrak{h} \in M(f + \varphi; \mathfrak{g})$.

Enfin, si \mathfrak{h} vérifie (2), la formule (3) du théorème 1 montre que $\rho(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{g}) = \rho(O(f))$.

Remarque. — Si \mathfrak{g} est une algèbre de Lie nilpotente, il est bien connu que $I(f; \mathfrak{g}) = M(f; \mathfrak{g})$ et ceci découle d'ailleurs du corollaire ci-dessus, car $H.f$ orbite de f par une représentation unipotente est fermée, et donc égale à $f + \mathfrak{h}^\perp$. Par contre, si \mathfrak{g} est exponentielle, il est connu que $I(f; \mathfrak{g})$ peut être strictement plus petit que $M(f; \mathfrak{g})$. Il suffit pour cela de considérer l'algèbre \mathfrak{g}_2 de base H et A avec la relation $[H, A] = A$ et d'appliquer la proposition 10. On donnera, d'autre part, à la fin de cet article un exemple d'une représentation $\rho(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{g})$, avec $\mathfrak{h} \in M(f; \mathfrak{g})$ égale à la somme de deux fois la représentation $\rho(f)$.

Rappelons un théorème de Mackey [7].

THÉORÈME DE MACKEY. — Soit G un groupe de Lie et $A \subset G$ un sous-groupe abélien fermé invariant de G . Soit χ un caractère de A et K le stabilisateur de χ dans G , c'est-à-dire

$$K = \{g \in G; \chi(gag^{-1}) = \chi(a) \text{ pour tout } a \in A\}.$$

Si U est une représentation unitaire irréductible de K dont la restriction à A soit un multiple de χ , alors $\text{Ind}_K^G U$ est irréductible et si U' est une autre représentation irréductible de K dont la restriction à A soit un multiple de χ , alors $\text{Ind}_K^G U \simeq \text{Ind}_K^G U'$ si et seulement si U est équivalente à U' .

LEMME 8. — Soit $f \in \mathfrak{g}^*$ et \mathfrak{a} un idéal abélien de \mathfrak{g} , alors si $\mathfrak{h} \in I(f; \mathfrak{a}')$, alors la restriction de la représentation $\rho(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{a}')$ à $\exp \mathfrak{a}$ est un multiple de $\chi_{f, \mathfrak{a}}$ et $I(f; \mathfrak{a}') \subset I(f; \mathfrak{g})$.

Démonstration. — Le stabilisateur du caractère $\chi_{f, \alpha}$ du groupe $\exp \alpha = A$ est le groupe $A^f = \exp \alpha^f$, car il est connexe (Pukanzky [8] ou voir [12]) et a évidemment comme algèbre de Lie α^f .

Si $\mathfrak{h} \in I(f; \alpha^f)$, $\mathfrak{h} \in M(f; \alpha^f)$ et, par conséquent, $\alpha \subset \mathfrak{h}$ puisque

$$\alpha + \mathfrak{h} \in S(f; \alpha^f),$$

$\rho = \rho(f; \mathfrak{h}; \alpha^f)$ se réalise donc par translation à gauche dans l'espace $\mathcal{E}(f; \mathfrak{h}; \alpha^f)$ complété de l'espace des fonctions $\psi : A^f \rightarrow \mathbf{C}$ continues à support compact modulo H et telles que

$$\psi(gh) = \chi_{f, \mathfrak{h}}(h)^{-1} \Delta_{H, A^f}(h)^{\frac{1}{2}} \psi(g) \quad (g \in A^f, h \in H).$$

Remarquons que la restriction de Δ_{H, A^f} à A est triviale puisque α est un idéal contenu dans \mathfrak{h} .

Or, α étant abélien, on a si $X \in \alpha^f$ et $A \in \alpha$,

$$(\rho(\exp A) \psi)(\exp X) = \psi(\exp -A \exp X) = \psi(\exp X \exp -(\exp -X)A)$$

et

$$(\exp -X) \cdot A = A - [X, A], \quad \text{or } f[X, A] = 0 \quad \text{puisque } X \in \alpha^f.$$

Il vient donc

$$(\rho(\exp A) \psi)(\exp X) = \psi(\exp X \exp -A \exp [X, A]) = e^{f(A)} \psi(\exp X),$$

on a donc prouvé la 1^{re} partie.

Donc si $\mathfrak{h} \in I(f; \alpha^f)$ d'après le théorème de Mackey, la représentation

$$\rho(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{g}) = \text{Ind}_{A^f}^G \rho(f; \mathfrak{h}; \alpha^f)$$

est irréductible et il s'ensuit que $\mathfrak{h} \in I(f; \mathfrak{g})$.

Passons à la démonstration du théorème 1.

On procède par récurrence sur la dimension de \mathfrak{g} , compte tenu de la proposition 4, on est ramené à vérifier que :

(A) $\rho(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{g})$ est somme finie de représentations irréductibles.

(B) Toute représentation intervenant effectivement dans $\rho(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{g})$ est de la forme $\rho(f + \varphi)$, avec $\varphi \in \mathfrak{h}^\perp$ et $\mathfrak{h} \in M(f + \varphi; \mathfrak{g})$.

(C) Toute représentation associée à une forme $f + \varphi$ ou $\varphi \in \mathfrak{h}^\perp$ et $\mathfrak{h} \in M(f + \varphi; \mathfrak{g})$ intervient dans $\rho(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{g})$ et avec une multiplicité égale à $c(O(f + \varphi), f; \mathfrak{h}; \mathfrak{g})$, nombre de composantes connexes de l'ouvert $O(f + \varphi) \cap f + \mathfrak{h}^\perp$.

On se trouve toujours dans l'un des deux cas suivants :

I. Il existe un idéal abélien $\neq \{0\}$ sur lequel f s'annule.

II. Si α est un idéal minimal parmi les idéaux non centraux de \mathfrak{g} , alors $\alpha^f \neq \mathfrak{g}$;

En effet, si on n'est pas dans le cas II, alors $f([\mathfrak{g}, \alpha]) = 0$ et f s'annule sur l'idéal abélien non nul $[\mathfrak{g}, \alpha]$.

I. Soit α un idéal abélien $\neq \{0\}$ sur lequel f s'annule, alors $\mathfrak{h} + \alpha \in S(f; \mathfrak{g})$, donc $\mathfrak{h} \supset \alpha$. Soient $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}/\alpha$, $\pi : G \rightarrow G/A$ et $p : \mathfrak{g} \rightarrow \tilde{\mathfrak{g}}$ les applications canoniques, \tilde{f} l'image de f dans $\tilde{\mathfrak{g}}^*$ et $\tilde{\mathfrak{h}} = p(\mathfrak{h})$. Alors

$$\rho(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{g}) = \rho(\tilde{f}; \tilde{\mathfrak{h}}; \tilde{\mathfrak{g}}) \circ \pi,$$

Comme $\tilde{\mathfrak{h}} \in M(\tilde{f}; \tilde{\mathfrak{g}})$, par hypothèse de récurrence, on a

$$\rho(\tilde{f}; \tilde{\mathfrak{h}}; \tilde{\mathfrak{g}}) = \bigoplus_{\substack{O(\tilde{f} + \tilde{\varphi}) \\ \in V(\tilde{f}; \tilde{\mathfrak{h}}; \tilde{\mathfrak{g}})}} c(O(\tilde{f} + \tilde{\varphi}); \tilde{f}; \tilde{\mathfrak{h}}; \tilde{\mathfrak{g}}) \rho(O(\tilde{f} + \tilde{\varphi}); \tilde{\mathfrak{g}})$$

et, par conséquent,

$$\rho(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{g}) = \bigoplus_{\substack{O(\tilde{f} + \tilde{\varphi}) \\ \in V(\tilde{f}; \tilde{\mathfrak{h}}; \tilde{\mathfrak{g}})}} c(O(\tilde{f} + \tilde{\varphi}); \tilde{f}; \tilde{\mathfrak{h}}; \tilde{\mathfrak{g}}) \rho(O(\tilde{f} + \tilde{\varphi}); \tilde{\mathfrak{g}}) \circ \pi,$$

ce qui démontre (A).

Posons $\varphi = \tilde{\varphi} \circ p$, on a

$$\rho(O(\tilde{f} + \tilde{\varphi}); \tilde{\mathfrak{g}}) \circ \pi = \rho(O(f + \varphi))$$

et si $\tilde{\mathfrak{h}} \in M(\tilde{f} + \tilde{\varphi}; \tilde{\mathfrak{g}})$,

$$\mathfrak{h} \in M(f + \varphi; \mathfrak{g}),$$

ce qui démontre (B).

Enfin si $\varphi \in \mathfrak{h}^\perp$ est telle que $\mathfrak{h} \in M(f + \varphi; \mathfrak{g})$, comme $\mathfrak{h} \supset \alpha$, $\varphi \supset \alpha^\perp$ et si $\tilde{\varphi} \in \tilde{\mathfrak{g}}^*$ est telle que $\varphi = \tilde{\varphi} \circ p$,

$$\tilde{\mathfrak{h}} \in M(\tilde{f} + \tilde{\varphi}; \tilde{\mathfrak{g}}).$$

De plus, la bijection canonique $i : \alpha^\perp \rightarrow \tilde{\mathfrak{g}}^*$ induit un homéomorphisme entre

$$O(f + \varphi; \mathfrak{g}) \cap (f + \mathfrak{h}^\perp) \quad \text{et} \quad O(\tilde{f} + \tilde{\varphi}; \tilde{\mathfrak{g}}) \cap (\tilde{f} + \mathfrak{h}^\perp),$$

ce qui démontre (C).

II. On note α un idéal minimal parmi les idéaux non centraux de \mathfrak{g} et on suppose que $\alpha^f \neq \mathfrak{g}$.

II.a. Supposons d'abord que $\mathfrak{h} \supset \alpha$, on a alors $\alpha \subset \mathfrak{h} \subset \alpha^f \subset \mathfrak{g}$.

Notons $\psi \rightarrow \bar{\psi}$ l'application de restriction $\mathfrak{g}^* \rightarrow (\alpha^f)^*$.

On a évidemment

$$\mathfrak{h} \in \mathbf{M}(\bar{f}; \mathfrak{a}') \quad \text{et} \quad \rho(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{g}) = \text{Ind}_{\Delta \mathfrak{A}'}^{\mathfrak{G}} \rho(\bar{f}; \mathfrak{h}; \mathfrak{a}').$$

Par hypothèse de récurrence,

$$\rho(\bar{f}; \mathfrak{h}; \mathfrak{a}') = \bigoplus_{\substack{\mathbf{O}(\bar{f} + \bar{\varphi}) \\ \in \mathbf{V}(\bar{f}; \mathfrak{h}; \mathfrak{a}')}} c(\mathbf{O}(\bar{f} + \bar{\varphi}), \bar{f}; \mathfrak{h}; \mathfrak{a}') \rho(\mathbf{O}(\bar{f} + \bar{\varphi}); \mathfrak{a}')$$

et donc

$$\rho(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{g}) = \bigoplus_{\substack{\mathbf{O}(\bar{f} + \bar{\varphi}) \\ \in \mathbf{V}(\bar{f}; \mathfrak{h}; \mathfrak{a}')}} c(\mathbf{O}(\bar{f} + \bar{\varphi}), \bar{f}; \mathfrak{h}; \mathfrak{a}') \text{Ind}_{\Delta \mathfrak{A}'}^{\mathfrak{G}} \rho(\mathbf{O}(\bar{f} + \bar{\varphi}); \mathfrak{a}').$$

Soit $\varphi \in \mathfrak{g}^*$ un prolongement de $\bar{\varphi} \in \mathfrak{h}^\perp$, alors $\varphi \in \mathfrak{a}^\perp$, donc $\mathfrak{a}^{\mathfrak{f}+\varphi} = \mathfrak{a}'$.
Du lemme 8, il résulte que

$$\text{Ind}_{\Delta \mathfrak{A}'}^{\mathfrak{G}} \rho(\mathbf{O}(\bar{f} + \bar{\varphi}); \mathfrak{a}') = \rho(\mathbf{O}(f + \varphi); \mathfrak{g}),$$

ce qui démontre (A).

D'autre part, d'après le lemme 1, si $\mathfrak{h} \in \mathbf{M}(\bar{f} + \bar{\varphi}; \mathfrak{a}')$, alors $\mathfrak{h} \in \mathbf{M}(f + \varphi; \mathfrak{g})$, ce qui démontre (B).

Enfin, soit $\varphi \in \mathfrak{g}^*$ tel que $\varphi \in \mathfrak{h}^\perp$ et $\mathfrak{h} \in \mathbf{M}(f + \varphi; \mathfrak{g})$, alors $\bar{\varphi} \in \mathfrak{h}^\perp$ et $\mathfrak{h} \in \mathbf{M}(\bar{f} + \bar{\varphi}; \mathfrak{g})$ et, par conséquent, la représentation

$$\rho(\mathbf{O}(f + \varphi); \mathfrak{g}) = \text{Ind}_{\Delta \mathfrak{A}'}^{\mathfrak{G}} \rho(\mathbf{O}(\bar{f} + \bar{\varphi}); \mathfrak{a}')$$

intervient effectivement dans $\rho(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{g})$. Le théorème de Mackey montre que les représentations $\text{Ind}_{\Delta \mathfrak{A}'}^{\mathfrak{G}} \rho(\mathbf{O}(\bar{f} + \bar{\varphi}); \mathfrak{a}')$ sont toutes non équivalentes.

La multiplicité de la représentation $\rho(\mathbf{O}(f + \varphi); \mathfrak{g})$ dans $\rho(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{g})$ est donc égale à $c(\mathbf{O}(\bar{f} + \bar{\varphi}), \bar{f}; \mathfrak{h}; \mathfrak{a}')$.

Soit $\varphi \in \mathfrak{h}^\perp$ et considérons l'application de restriction $r: \mathfrak{g}^* \rightarrow (\mathfrak{a}')^*$, alors

$$r((\mathbf{O}(f + \varphi)) \cap (f + \mathfrak{h}^\perp)) = \mathbf{O}(\bar{f} + \bar{\varphi}) \cap (\bar{f} + \mathfrak{h}^\perp)$$

et $\mathbf{O}(f + \varphi) \cap (f + \mathfrak{h}^\perp)$ est l'image réciproque de sa projection.

En effet, soit $f + \varphi' \in (f + \mathfrak{h}^\perp) \cap \mathbf{O}(f + \varphi)$, alors

$$\rho(\mathbf{O}(f + \varphi')) = \rho(\mathbf{O}(f + \varphi)) = \text{Ind}_{\Delta \mathfrak{A}'}^{\mathfrak{G}} \rho(\mathbf{O}(\bar{f} + \bar{\varphi}); \mathfrak{a}') = \text{Ind}_{\Delta \mathfrak{A}'}^{\mathfrak{G}} \rho(\mathbf{O}(\bar{f} + \bar{\varphi}); \mathfrak{a}').$$

D'après le théorème de Mackey et le résultat B.3 de Bernat, il en résulte que $\bar{f} + \bar{\varphi}' \in \mathbf{O}(\bar{f} + \bar{\varphi}; \mathfrak{a}')$.

Réciproquement, soit $\bar{f} + \bar{\varphi}' \in (\bar{f} + \mathfrak{h}^\perp) \cap O(\bar{f} + \bar{\varphi})$ et soit $\varphi' \in \mathfrak{h}^\perp$ un prolongement quelconque de $\bar{\varphi}'$. On a alors

$$\text{Ind}_{\Lambda f}^{\mathfrak{G}} \rho(O(\bar{f} + \bar{\varphi}'); \mathfrak{a}') = \text{Ind}_{\Lambda f}^{\mathfrak{G}} \rho(O(\bar{f} + \bar{\varphi}); \mathfrak{a}') = \rho(O(f + \varphi'); \mathfrak{g}) = \rho(O(f + \varphi); \mathfrak{g}),$$

ce qui prouve que $f + \varphi' \in O(f + \varphi) \cap (f + \mathfrak{h}^\perp)$ d'après B.3.

On a donc, quelle que soit $\varphi \in \mathfrak{h}^\perp$ et $\mathfrak{h} \in M(f + \varphi; \mathfrak{g})$,

$$c(O(f + \varphi); f; \mathfrak{h}; \mathfrak{g}) = c(O(\bar{f} + \bar{\varphi}); \bar{f}; \mathfrak{h}; \mathfrak{a}'),$$

ce qui prouve (C).

On suppose désormais que $\mathfrak{a} \not\subset \mathfrak{h}$; on pose $\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{a}'$, $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h}_0 + \mathfrak{a}$ et $\mathfrak{k} = \mathfrak{h} + \mathfrak{a}$ et on note \mathfrak{j} le noyau de la représentation de \mathfrak{h} dans $\mathfrak{a}/\mathfrak{h} \cap \mathfrak{a}$. On distinguera les deux cas $\mathfrak{h}_0 + \mathfrak{j} = \mathfrak{h}$ et $\mathfrak{h}_0 + \mathfrak{j} \neq \mathfrak{h}$.

II. b. Supposons $\mathfrak{h}_0 + \mathfrak{j} = \mathfrak{h}$.

Choisissons \mathfrak{t} et \mathfrak{v} comme dans la proposition 9. On a alors

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{h}_0, \quad \mathfrak{h}' = \mathfrak{h}_0 \oplus \mathfrak{v}, \quad \mathfrak{k} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{h}_0 \oplus \mathfrak{v} \quad \text{et} \quad [\mathfrak{t}, \mathfrak{v}] \subset \mathfrak{h} \cap \mathfrak{a}.$$

De plus, B_f met en dualité \mathfrak{t} et \mathfrak{v} et les représentations $\rho(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{g})$ et $\rho(f; \mathfrak{h}'; \mathfrak{g})$ sont équivalentes. Comme $\mathfrak{h}' \supset \mathfrak{a}$ d'après le cas α , on a

$$\rho(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{g}) = \bigoplus_{\substack{O(f + \varphi') \\ \in V(f; \mathfrak{h}')}} c(O(f + \varphi'), f; \mathfrak{h}'; \mathfrak{g}) \rho(O(f + \varphi')).$$

Ce qui montre A.

Pour montrer (B) il suffit de démontrer que quel que soit $\varphi' \in \mathfrak{h}'^\perp$, il existe $\varphi \in \mathfrak{h}^\perp$ telle que $f + \varphi \in O(f + \varphi')$.

Comme B_f met en dualité \mathfrak{t} et \mathfrak{v} , il existe un élément $V(\varphi') \in \mathfrak{v}$ déterminé de manière unique par l'égalité

$$f([V(\varphi'), T]) = \varphi'(T) \quad \text{pour tout } T \in \mathfrak{t}.$$

Montrons que $\exp V(\varphi') \cdot (f + \varphi')$ appartient à $f + \mathfrak{k}^\perp$. Comme $V(\varphi') \in \mathfrak{h}'$, $\exp V(\varphi') \cdot (f + \varphi')$ appartient à $f + \mathfrak{h}'^\perp$ et il suffit de démontrer que $\exp V(\varphi') \cdot (f + \varphi')$ appartient à $(f + \mathfrak{t}^\perp)$. Or \mathfrak{a} étant abélien, on a puisque $V(\varphi') \in \mathfrak{a}$

$$\exp -V(\varphi') \cdot T = T - [V(\varphi'), T].$$

Donc

$$\exp V(\varphi') \cdot (f + \varphi) (T) = f(T) + \varphi'(T) - f[V(\varphi'), T] = f(T).$$

Pour montrer (C) il suffit de démontrer que si $\varphi \in \mathfrak{h}^\perp$ et est telle que $\mathfrak{h} \in M(f + \varphi; \mathfrak{g})$, il existe $\varphi' \in \mathfrak{h}'^\perp$ telle que $f + \varphi' \in O(f + \varphi)$ et telle que

$$c(O(f + \varphi'); f; \mathfrak{h}'; \mathfrak{g}) = c(O(f + \varphi); f; \mathfrak{h}; \mathfrak{g}).$$

On procède de manière analogue. Soit $\varphi \in \mathfrak{h}^\perp$, il existe un élément $T(\varphi) \in \mathfrak{t}$ déterminé de manière unique par l'égalité

$$f([T(\varphi), V]) = \varphi(V) \quad \text{pour tout } V \in \mathfrak{v}.$$

Alors $(\exp T(\varphi)) \cdot (f + \varphi) \in f + \mathfrak{k}^\perp$. En effet, comme $T(\varphi) \in \mathfrak{h}$,

$$\exp T(\varphi) \cdot (f + \varphi) \in f + \mathfrak{h}^\perp.$$

D'autre part, comme $[\mathfrak{t}, \mathfrak{v}] \subset \mathfrak{h}$, on a

$$(\exp -T(\varphi)) \cdot V = V - [T(\varphi), V] + W, \quad \text{où } W \in [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]$$

et, par conséquent,

$$(\exp T(\varphi) \cdot (f + \varphi))(V) = f(V) + \varphi(V) - f([T(\varphi), V]) = f(V).$$

Soit alors R l'application de $f + \mathfrak{h}^\perp$ dans $f + \mathfrak{k}^\perp$ défini par

$$R(f + \varphi) = \exp T(\varphi) \cdot (f + \varphi)$$

et R' l'application de $f + \mathfrak{h}'^\perp$ dans $f + \mathfrak{k}^\perp$ définie par

$$R'(f + \varphi') = \exp V(\varphi') \cdot (f + \varphi').$$

Les assertions que nous allons prouver :

(1) Soit $\varphi \in \mathfrak{h}^\perp$ et telle que $\mathfrak{h} \in M(f + \varphi; \mathfrak{g})$ et soit C une composante connexe de $O(f + \varphi) \cap (f + \mathfrak{h}^\perp)$, alors $R(C)$ est une composante connexe de $O(f + \varphi) \cap (f + \mathfrak{k}^\perp)$ et l'application $C \rightarrow R(C)$ réalise une bijection entre l'ensemble des composantes connexes de $O(f + \varphi) \cap (f + \mathfrak{h}^\perp)$ et l'ensemble des composantes connexes de $O(f + \varphi) \cap (f + \mathfrak{k}^\perp)$.

(2) Soit $\varphi' \in \mathfrak{h}'^\perp$ et telle que $\mathfrak{h}' \in M(f + \varphi'; \mathfrak{g})$ et soit C' une composante connexe de $O(f + \varphi') \cap (f + \mathfrak{h}'^\perp)$. Alors $R'(C')$ est une composante connexe de $O(f + \varphi') \cap (f + \mathfrak{k}^\perp)$ et l'application $C' \rightarrow R'(C')$ réalise une bijection entre l'ensemble des composantes connexes de $O(f + \varphi') \cap (f + \mathfrak{h}'^\perp)$ et l'ensemble des composantes connexes de $O(f + \varphi') \cap (f + \mathfrak{k}^\perp)$, entraîneront alors (C).

En effet, si $\varphi \in \mathfrak{h}^\perp$ et est telle que $\mathfrak{h} \in M(f + \varphi; \mathfrak{g})$, alors

$$R(f + \varphi) \in O(f + \varphi) \cap (f + \mathfrak{h}'^\perp) \quad \text{et} \quad \mathfrak{h}' \in M(R(f + \varphi), \mathfrak{g}).$$

Par conséquent, la représentation $\rho(O(f + \varphi))$ apparaît effectivement dans $\rho(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{g})$ avec une multiplicité égale à $c(O(f + \varphi); f; \mathfrak{h}'; \mathfrak{g})$.

(2) dit que $c(O(f + \varphi); f; \mathfrak{h}'; \mathfrak{g})$ est égal au nombre de composantes connexes de $O(f + \varphi) \cap (f + \mathfrak{k}^\perp)$.

(1) dit que $c(O(f + \varphi); f; \mathfrak{h}; \mathfrak{g})$ est aussi égal au nombre de composantes connexes de $O(f + \varphi) \cap (f + \mathfrak{k}^\perp)$.

On aura donc l'égalité cherchée

$$C(O(f + \varphi); f; \mathfrak{h}; \mathfrak{g}) = c(O(f + \varphi); f; \mathfrak{h}'; \mathfrak{g}).$$

Démontrons, par exemple, (I) [(2) se démontrerait exactement de la même manière].

Sur $f + \mathfrak{k}^\perp$, l'application R est l'identité [on a $T(\varphi) = 0$].

Si C est une composante connexe de $O(f + \varphi) \cap (f + \mathfrak{h}^\perp)$, C est stable par le groupe H; par conséquent,

$$R(C) \subset C \cap (f + \mathfrak{k}^\perp) \quad \text{et donc} \quad R(C) = C \cap (f + \mathfrak{k}^\perp)$$

est un ouvert connexe de $O(f + \varphi) \cap (f + \mathfrak{k}^\perp)$. Comme

$$O(f + \varphi) \cap (f + \mathfrak{k}^\perp) = \bigcup C \cap (f + \mathfrak{k}^\perp),$$

$$C \in \text{composantes connexes de } O(f + \varphi) \cap (f + \mathfrak{h}^\perp),$$

ceci prouve bien (I) et le cas II.b est traité.

II.c. On suppose désormais que $\mathfrak{h}_0 + \mathfrak{i} \neq \mathfrak{h}$.

On est donc dans la situation de la proposition 10 dont on reprend les notations. Rappelons que si ν_+ (resp. ν_-) est un nombre réel strictement positif (resp. négatif), on a

$$\rho(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{k}) = \rho(f_{\nu_+}; \mathfrak{h}; \mathfrak{k}) \oplus \rho(f_{\nu_-}; \mathfrak{h}'; \mathfrak{k}).$$

Donc si l'on note \tilde{f}_{ν_+} (resp. \tilde{f}_{ν_-}) une forme linéaire sur \mathfrak{g} prolongeant f_{ν_+} (resp. f_{ν_-}), on a

$$\rho(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{g}) = \rho(\tilde{f}_{\nu_+}; \mathfrak{h}'; \mathfrak{g}) \oplus \rho(\tilde{f}_{\nu_-}; \mathfrak{h}'; \mathfrak{g}).$$

Comme $\mathfrak{h}' \supset \mathfrak{a}$, on pourra se ramener à la situation du II.a, si on peut choisir ν^+ et ν^- et \tilde{f}_{ν^+} et \tilde{f}_{ν^-} de sorte que $\mathfrak{h}' \in M(\tilde{f}_{\nu^+}; \mathfrak{g}) \cap M(\tilde{f}_{\nu^-}; \mathfrak{g})$ (on a bien $\tilde{f}_{\nu} \neq 0$, si $\nu \neq 0$, car $\tilde{f}_{\nu}([H, A]) = \nu \neq 0$). Or un tel choix est possible. Soit, en effet, \mathfrak{m} un supplémentaire de \mathfrak{k} dans \mathfrak{g} . Identifions \mathfrak{g}^* à $\mathfrak{k}^* \oplus \mathfrak{m}^*$, la variété linéaire $f + \mathfrak{h}^\perp$ s'identifie alors à $\mathbf{R} \times \mathfrak{m}^*$ par l'application $\tilde{f}_\nu \rightarrow (\nu, \tilde{f}_\nu | \mathfrak{m})$. Comme $\mathfrak{h}' \in S(\tilde{f}_\nu; \mathfrak{g})$ quel que soit ν et \tilde{f}_ν , l'ensemble des couples $(\nu, \varphi) \in \mathbf{R} \times \mathfrak{m}^*$ tel que $\mathfrak{h}' \in M(f_\nu + \varphi; \mathfrak{g})$ est un ouvert de Zariski non vide car $\mathfrak{h}' \in M(f; \mathfrak{g})$, il est donc dense, ce qui établit notre assertion.

Supposons donc que $\mathfrak{h}' \in M(f_{\nu^+}; \mathfrak{g}) \cap M(\tilde{f}_{\nu^+}; \mathfrak{g})$. Alors d'après II.a, on a

$$\begin{aligned} \rho(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{g}) = & \bigoplus_{\substack{0(\tilde{f}_{\nu^+} + \varphi') \\ \in V(\tilde{f}_{\nu^+}; \mathfrak{h}')}} c(O(\tilde{f}_{\nu^+} + \varphi'); \tilde{f}_{\nu^+}; \mathfrak{h}'; \mathfrak{g}) \rho(O(\tilde{f}_{\nu^+} + \varphi')) \\ & \bigoplus_{\substack{0(\tilde{f}_{\nu^-} + \varphi') \\ \in V(\tilde{f}_{\nu^-}; \mathfrak{h}')}} c(O(\tilde{f}_{\nu^-} + \varphi'); \tilde{f}_{\nu^-}; \mathfrak{h}'; \mathfrak{g}) \rho(O(\tilde{f}_{\nu^-} + \varphi')) \end{aligned}$$

ce qui montre (A).

Pour montrer (B) il suffit de montrer que quelque soit $\varphi' \in \mathfrak{h}'^\perp$ et $\nu \neq 0$, il existe $\varphi \in \mathfrak{h}^\perp$ tel que

$$f + \varphi \in O(\tilde{f}_\nu + \varphi').$$

En effet, soit $a(\varphi')$ le nombre réel tel que

$$\tilde{f}_\nu([a(\varphi') \Lambda, \mathbb{H}]) = \varphi'(\mathbb{H}), \quad \text{c'est-à-dire } a(\varphi') = -\frac{\varphi'(\mathbb{H})}{\nu},$$

alors

$$(\exp - a(\varphi') \Lambda) \cdot \mathbb{H} = \mathbb{H} - [a(\varphi') \Lambda, \mathbb{H}]$$

et

$$\exp(a(\varphi') \Lambda) (\tilde{f}_\nu + \varphi') \in \tilde{f}_\nu + \mathfrak{h}'^\perp, \quad \text{car } \Lambda \in \mathfrak{h}'$$

et

$$\exp(a(\varphi') \Lambda) (\tilde{f}_\nu + \varphi')(\mathbb{H}) = f(\mathbb{H}) + \varphi'(\mathbb{H}) - \tilde{f}_\nu[a(\varphi') \Lambda, \mathbb{H}] = f(\mathbb{H}),$$

donc

$$\exp(a(\varphi') \Lambda) (\tilde{f}_\nu + \varphi') \in \tilde{f}_\nu + \mathfrak{k}^\perp \subset f + \mathfrak{h}^\perp.$$

On note R'_ν l'application de $\tilde{f}_\nu + \mathfrak{h}'^\perp$ dans $\tilde{f}_\nu + \mathfrak{k}^\perp$ définie par

$$(R'_\nu)(\tilde{f}_\nu + \varphi') = \exp(a(\varphi') \Lambda) (\tilde{f}_\nu + \varphi')$$

et on remarque comme précédemment que si $\varphi'_0 \in \mathfrak{h}'^\perp$ est telle que $\mathfrak{h}' \in M(\tilde{f}_\nu + \varphi'_0)$, et si C' est une composante connexe de

$$O(\tilde{f}_\nu + \varphi'_0) \cap (\tilde{f}_\nu + \mathfrak{h}'^\perp), \quad \text{alors } R'_\nu(\nu)(C') = C' \cap (\tilde{f}_\nu + \mathfrak{k}^\perp)$$

et que, par conséquent, $R'_\nu(\nu)$ réalise une bijection entre les composantes connexes de $O(\tilde{f}_\nu + \varphi'_0) \cap (\tilde{f}_\nu + \mathfrak{h}'^\perp)$ et celles de $O(\tilde{f}_\nu + \varphi'_0) \cap (\tilde{f}_\nu + \mathfrak{k}^\perp)$ et donc que

$$c(O(\tilde{f}_\nu + \varphi'_0), \tilde{f}_\nu; \mathfrak{h}') = c(O(\tilde{f}_\nu + \varphi'_0), \tilde{f}_\nu, \mathfrak{k}).$$

Démontrons (C).

Soit $\varphi \in \mathfrak{h}^\perp$ et telle que $\mathfrak{h} \in M(f + \varphi; \mathfrak{g})$, alors d'après la formule de la décomposition de $\rho(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{g})$, la multiplicité de la représentation $\rho(O(f + \varphi))$ est égale à

$$c(O(f + \varphi), f_{\nu+}; \mathfrak{h}') + c(O(f + \varphi); \tilde{f}_{\nu-}; \mathfrak{h}').$$

Soit

$$\begin{aligned} (f + \mathfrak{h}^\perp)^+ &= \{f + l \in f + \mathfrak{h}^\perp \text{ tel que } (f + l)(\Lambda) > 0\}, \\ (f + \mathfrak{h}^\perp)^- &= \{f + l \in f + \mathfrak{h}^\perp \text{ tel que } (f + l)(\Lambda) < 0\}, \end{aligned}$$

alors $O(f + \varphi) \cap (f + \mathfrak{h}^\perp)$ est la réunion de

$$O(f + \varphi) \cap (f + \mathfrak{h}^\perp)^+ \quad \text{et} \quad O(f + \varphi) \cap (f + \mathfrak{h}^\perp)^-,$$

car si $f + l \in O(f + \varphi) \cap (f + \mathfrak{h}^\perp)$, alors

$$\mathfrak{h} \in M(f + l; \mathfrak{g}) \quad \text{et donc} \quad (f + l)(\Lambda) \neq 0,$$

d'après le (3) de la proposition 10.

Chacune des composantes connexes de $O(f + \varphi) \cap (f + \mathfrak{h}^\perp)$ est alors contenue, soit dans $(f + \mathfrak{h}^\perp)^+$, soit dans $(f + \mathfrak{h}^\perp)^-$. On notera $c^+(O(f + \varphi), f; \mathfrak{h})$ [resp. $c^-(O(f + \varphi), f; \mathfrak{h})$] le nombre de composantes connexes de $O(f + \varphi) \cap (f + \mathfrak{h}^\perp)^+$ [resp. de $O(f + \varphi) \cap (f + \mathfrak{h}^\perp)^-$]. Il suffit donc de montrer les égalités

$$\begin{aligned} c^+(O(f + \varphi), f; \mathfrak{h}) &= c(O(f + \varphi), \tilde{f}_{\nu^+}; \mathfrak{h}') \\ &= c(O(f + \varphi), \tilde{f}_{\nu^+}; \mathfrak{k}) \end{aligned}$$

d'après le résultat précédent.

De même,

$$\begin{aligned} c^-(O(f + \varphi), f; \mathfrak{h}) &= c(O(f + \varphi), \tilde{f}_{\nu^-}; \mathfrak{h}') \\ &= c(O(f + \varphi), \tilde{f}_{\nu^-}; \mathfrak{k}). \end{aligned}$$

Démontrons que $c^+(O(f + \varphi), f; \mathfrak{h}) = c(O(f + \varphi), \tilde{f}_{\nu^+}; \mathfrak{k})$.

Soit $f + l \in (f + \mathfrak{h}^\perp)^+$, il existe un nombre $x(l)$ défini de manière unique par la condition

$$\exp(x(l)H)(f + l) \in (\tilde{f}_{\nu^+} + \mathfrak{k}^\perp);$$

en effet, comme $\exp(x(l)H)(f + l) \in \tilde{f}_{\nu^+} + \mathfrak{h}^\perp$, il suffit que

$$\exp(x(l)H)(f + l)(\Lambda) = \nu^+.$$

Or ceci donne la condition $e^{-x(l)} = \frac{\nu^+}{(f + l)(\Lambda)}$.

L'application

$$R^+: (f + \mathfrak{h}^\perp)^+ \rightarrow (\tilde{f}_{\nu^+} + \mathfrak{k}^\perp) \subset f + \mathfrak{h}^\perp$$

définie par $R^+(f + l) = \exp(x(l)H)(f + l)$ est telle que si C^+ est une composante connexe de

$$O(f + \varphi) \cap (f + \mathfrak{h}^\perp)^+, \quad R^+(C^+) = C^+ \cap (\tilde{f}_{\nu^+} + \mathfrak{k}^\perp).$$

On voit donc que

$$c^+(O(f + \varphi), f; \mathfrak{h}) = c(O(f + \varphi), \tilde{f}_{\nu^+}; \mathfrak{k})$$

ce qui démontre (C).

La démonstration du théorème 1 est donc terminée.

V. — Un exemple.

L'exemple suivant montre que la multiplicité des représentations intervenant donc $\rho(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{g})$ peut être strictement supérieure à 1.

Considérons l'algèbre résoluble exponentielle (complètement résoluble sur \mathbf{R}) de dimension 5 définie sur la base (h, x, h_0, a, z) par les crochets

$$\begin{aligned} [h, x] &= -x, & [h, h_0] &= 2h_0, & [h, a] &= a, \\ [x, h_0] &= a, & [x, a] &= z. \end{aligned}$$

(Les crochets non écrits étant nuls, ou déduits de ceux-ci par antisymétrisation.)

Soit $f = a^* + z^*$, alors $\mathfrak{g}(f) = \mathbf{R}z$.

Soit $\mathfrak{h} = \mathbf{R}h_0 + \mathbf{R}h + \mathbf{R}z$, alors $\mathfrak{h} \in \mathbf{M}(f; \mathfrak{g})$.

Le plan $f + \mathfrak{h}^\perp$ est l'ensemble des formes $\lambda a^* + z^* + \mu x^*$.

Nous allons montrer que

$$O(f) \cap (f + \mathfrak{h}^\perp) = \{ \lambda a^* + z^* + \mu x^*, \text{ avec } \lambda \neq 0 \},$$

ce qui montrera que l'ouvert $O(f) \cap (f + \mathfrak{h}^\perp)$ a deux composantes connexes et que, de plus, $O(f)$ est la seule orbite rencontrant $f + \mathfrak{h}^\perp$ suivant un ouvert.

D'après le théorème, on aura donc

$$\rho(f; \mathfrak{h}; \mathfrak{g}) = 2\rho(O(f)).$$

Notons f_{-1} la forme $-a^* + z^*$, f_1 la forme f et \mathbf{H} le sous-groupe analytique d'algèbre de Lie \mathfrak{h} .

Remarquons que $O(f) \cap (f + \mathfrak{h}^\perp) \subset \{ \lambda a^* + z^* + \mu x^*, \text{ avec } \lambda \neq 0 \}$, car on a

$$\mathfrak{g}(\lambda a^* + z^* + \mu x^*) = \mathbf{R}z \quad \text{si et seulement si } \lambda \neq 0.$$

Il suffit donc de prouver que :

- (a) $f_{-1} \in O(f_1)$;
- (b) $\mathbf{H}.f_1 = \{ \lambda a^* + z^* + \mu x^*, \text{ avec } \lambda > 0 \}$,
 $\mathbf{H}.f_{-1} = \{ \lambda a^* + z^* + \mu x^*, \text{ avec } \lambda < 0 \}$.

Prouvons (a). On calcule facilement que

$$(\exp tx)f_1 = \left(t + \frac{t^2}{2} \right) h_0^* + (1+t)a^* + z^*,$$

par conséquent, si $t = -2$,

$$(\exp -2x)f_1 = f_{-1}.$$

Prouvons (b) Tout élément du groupe H peut s'écrire d'une manière et d'une seule $\exp \alpha h \exp \beta h_0 \exp \gamma z$.

Des formules

$$(\exp -\beta h_0 \exp -\alpha h)(x) = e^\alpha(x + \beta a),$$

$$(\exp =\beta h_0 \exp -\alpha h)(a) = e^{-\alpha} a.$$

on déduit que

$$(\exp \alpha h \exp \beta h_0 \exp \gamma z)(f_1) = e^{-\alpha} a^* + z^* + \beta e^\alpha x^*$$

et

$$(\exp \alpha h \exp \beta h_0 \exp \gamma z)f_{-1} = -e^{-\alpha} a^* + z^* - \beta e^\alpha x^*,$$

d'où découle évidemment (b).

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] P. BERNAT, *Sur les représentations unitaires des groupes de Lie résolubles* (Ann. scient. Éc. Norm. Sup., t. 82, 1965, p. 37-99).
- [2] N. BOURBAKI, *Intégration*, Hermann, Paris, 1963, chap. 7.
- [3] J. DIEUDONNÉ, *Éléments d'analyse*, t. 3, Gauthier-Villars, Paris, 1970.
- [4] J. DIXMIER, *L'application exponentielle dans les groupes de Lie résolubles* (Bull. Soc. math. Fr., t. 85, 1957, p. 113-121).
- [5] G. HOCHSCHILD, *The structure of Lie Groups*, Holden-Day, Amsterdam, 1965.
- [6] A. A. KIRILLOV, *Représentations unitaires des groupes de Lie nilpotents* (Uspekhi Math. Nauk, t. 17, p. 57-110, en russe).
- [7] G. W. MACKEY, *Unitary representations of groupe extensions* (Acta Math., t. 99, 1958, p. 265-311).
- [8] L. PUKANSZKY, *On the unitary representations of exponential groups* (J. Funct. Anal., t. 2, 1968, p. 73-113).
- [9] L. PUKANSZKY, *On the theory of exponential groups* (Trans. Amer. Math. Soc., t. 126, 1967, p. 487-507).
- [10] L. PUKANSZKY, *Leçons sur les représentations des groupes*, Dunod, Paris, 1967.
- [11] M. VERGNE, *Sous-algèbres subordonnées à un élément du dual d'une algèbre de Lie résoluble exponentielle* (C. R. Acad. Sc., t. 270, série A, 1970, p. 1405-1407).
- [12] *Représentations des groupes de Lie résolubles* (à paraître).

(Manuscrit reçu le 28 septembre 1970.)

Michèle VERGNE,
11, rue Quatrefages,
75-Paris, 5^e.

