ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

JACQUELINE DÉTRAZ

Algèbres de fonctions analytiques dans le disque

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 3, nº 3 (1970), p. 313-352

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1970_4_3_3_313_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 3, 1970, p. 313 à 352.

ALGÈBRES DE FONCTIONS ANALYTIQUES DANS LE DISQUE

PAR JACQUELINE DÉTRAZ.

§ 0. INTRODUCTION. — Soient D le disque unité ouvert T, le cercle unité, E un ensemble de T, on note $\overline{D} = D \cup T$ et

$H^\infty(D)$ l'algèbre des fonctions analytiques bornées dans D;

$H_E(D)$ la sous-algèbre de $H^\infty(D)$ formée des fonctions qui se prolongent continuement à $D \cup E$.

Munies de la norme uniforme sur D, ce sont des algèbres de Banach. Nous allons les étudier ainsi que leurs restrictions à des ensembles de D.

Plus généralement, soient O un ouvert du plan complexe et E un ensemble de la frontière de O, on peut définir de la même façon $H^\infty(O)$ et $H_E(O)$. En ce qui concerne l'algèbre des restrictions $H^\infty(D) | S$ de $H^\infty(D)$ à une suite de Blaschke S, si on note E l'ensemble des points d'accumulation de S, on obtient (§ 1) le théorème suivant qui généralise des résultats de E. Akutowicz-L. Carleson [1] et A. Heard-J. Wells [12] :

Il existe un ouvert O contenant $\overline{D} \setminus E$ tel que

$$H^\infty(D) | S = H^\infty(O) | S,$$
$$H_E(D) | S = H_E(O) | S.$$

On étudie ensuite (§ 2) l'algèbre $H_E(D)$. Une telle algèbre est définie par une relation d'équivalence sur $\mathrm{Sp}\, H^\infty(D)$ et on répond par l'affirmative au problème de savoir si l'application canonique de $\mathrm{Sp}\, H^\infty(D)$ dans $\mathrm{Sp}\, H_E(D)$ est surjective. Pour cela on étudie la frontière de Šilov de $H_E(D)$ en généralisant la méthode utilisée par Newman pour $H^\infty(D)$ et on obtient une caractérisation par les produits de Blaschke analogue à celle de $H^\infty(D)$. On obtient alors le fait que D est dense dans $\mathrm{Sp}\, H_E(D)$ en utilisant le théorème de Carleson qui dit que D est dense dans $\mathrm{Sp}\, H^\infty(D)$.

La 3e partie de ce travail est motivée par l'étude des algèbres $\tilde{A}$:

A étant une algèbre de Banach de fonctions continues sur un compact X, on définit

$\tilde{A} = \{f;\ f \in \mathcal{C}(X),\ \exists M;\ \exists f_n \in A;\ \|f_n\|_A < M;\ f_n - f \to 0$ uniformément sur $K\}$.

Il s'agit d'étudier l'inclusion $A \subset \tilde{A}$ dans le cas des algèbres quotients de l'algèbre A(D) des fonctions analytiques sur D, continues sur $\overline{D}$.

K étant un fermé de $\overline{D}$, on compare donc les trois algèbres :

l'algèbre A(K) des restrictions de A(D) à K,

l'algèbre $\tilde{A}(K)$ correspondant à A(K) par la définition ci-dessus,

l'algèbre B(K) formée des fonctions f de $\mathcal{C}(K)$ telles que $f | K \cap D$ soit dans $H^\infty(D) | K \cap D$.

On obtient des résultats de deux types différents suivant que K est « gros » ou « mince ».

Par exemple, si $m(K \cap T)$ est positive, $A(K) = B(K)$ si et seulement si presque tout point de T est adhérent non tangentiellement à $K \cap T$ et $A(K) = \tilde{A}(K)$ si et seulement si K contient T.

Si, au contraire, $m(K \cap T)$ est nulle et $K \cap D$ est une suite de Blaschke $S = \{\alpha_n;\ n \in \mathbf{N}\}$ on a toujours $\tilde{A}(K) = B(K)$ et $\tilde{A}(K)$ est égal à A(K) si et seulement si S est une suite d'interpolation pour $H^\infty(D)$.

On compare aussi dans ce cas les spectres de $\tilde{A}(K)$ et de A(K). On montre que l'application canonique de $\mathrm{Sp}\,\tilde{A}(K)$ dans $\mathrm{Sp}\,A(K)$ n'est pas toujours un isomorphisme.

Le résultat final est que $A(K) = \tilde{A}(K)$ si et seulement si A(K) est une algèbre fermée dans $\mathcal{C}(K)$, l'algèbre des fonctions continue sur K.

Nous caractérisons enfin (§ 4) les ensembles d'interpolation de l'algèbre $H_E(D)$.

§ 1. Extensions analytiques d'algèbres de restrictions de $H^\infty(D)$. — Soit $S = \{\alpha_n;\ n \in \mathbf{N}\}$ une suite de Blaschke du disque D; on a

$$\sum_{n \in \mathbf{N}} (1 - |\alpha_n|) < \infty$$

et on note E l'ensemble des points d'accumulation de S. Le produit de Blaschke associé à S s'écrit $B(z) = \prod_{n \in \mathbf{N}} \frac{\overline{\alpha}_n}{|\alpha_n|} \frac{\alpha_n - z}{1 - \overline{\alpha}_n z}$.

Dans cette partie, on s'intéresse à l'algèbre des restrictions de $H^\infty(D)$ à S qu'on note $H^\infty(D) | S$. Cette algèbre s'identifie à l'algèbre quotient de $H^\infty(D)$ par l'idéal des fonctions de $H^\infty(D)$ nulles sur S. C'est donc une algèbre de Banach munie de la norme quotient :

$$\|f\|_{H^\infty(D)|S} = \inf\{\|F\|_{H^\infty(D)};\ F\in H^\infty(D);\ F|S=f\} \text{ pour tout } f \text{ de } H^\infty(D)|S;$$

comme toute algèbre de restrictions, le spectre de $H^\infty(D)|S$ est l'adhérence-Zariski $\tilde{S}$ de S dans $\operatorname{Sp} H^\infty(D)$, i. e. l'ensemble des points m de $\operatorname{Sp} H^\infty(D)$ qui annulent toute fonction nulle sur S.

On définit de même l'algèbre $H_E(D)|S$.

1.1. THÉORÈME 1.1. — *Soit* S *une suite de Blaschke, notons* E *l'ensemble de* T *formé des points d'accumulation de* S, *il existe un ouvert* O *contenant* $\overline{D}\setminus E$ *tel que*

$$H^\infty(O)|S = H^\infty(D)|S.$$

La condition que S soit une suite de Blaschke est nécessaire pour l'existence de l'ouvert O; sinon toute fonction de $H^\infty(D)|S$ est la restriction d'une seule fonction de $H^\infty(D)$ et le théorème est évidemment faux.

Considérons alors une fonction F de $H^\infty(D)$, il s'agit de définir une fonction G égale à F sur S et analytique, bornée sur un ouvert contenant $\overline{D}\setminus E$, ne dépendant que de S. Considérons la fonction $F_1(z) = \dfrac{F(z)+\|F\|}{\|F+\|F\|\|}$; c'est une fonction de norme égale à 1, ne s'annulant pas sur D. Si on sait résoudre le problème posé pour F_1 en trouvant la fonction G_1 correspondante, alors la fonction $G(z) = \|F+\|F\|\|\,G_1(z) - \|F\|$ résoudra le problème pour F.

On peut donc supposer que F est de norme $\|F\|\leq 1$ et sans zéros sur D. F s'écrit donc

$$F(z) = \exp -\frac{1}{2\pi}\int_{e^{i\theta}\in T}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\,d\mu(\theta),$$

où μ est une mesure positive sur T.

Nous allons remplacer dans l'intégrale la fonction $\dfrac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}$ par une fonction qui permet de résoudre le problème. Pour cela nous établissons le lemme suivant :

LEMME 1.1. — *Il existe une fonction* $\eta(\alpha)$ *strictement positive, continue, définie sur* $T\setminus E$ *et une fonction* $f(z, \alpha, x)$, *où* z *est dans* $\mathbf{C}$, α *dans* $\mathbf{C}$, x *dans* $\mathbf{R}$, *telle que pour toute fonction* $\varepsilon(\alpha)$ *définie sur* $T\setminus E$ *continue et vérifiant* $0<\varepsilon(\alpha)\leq\eta(\alpha)$, *il existe un ouvert* Δ_ε *de* $\mathbf{C}$ *contenant* $\overline{D}\setminus E$ *tel que la fonction* $f(z, \alpha, \varepsilon(\alpha))$, *où* $(z, \alpha)\in\Delta_\varepsilon\times(T\setminus E)$ *vérifie :*

(i) $f(z, \alpha, \varepsilon(\alpha)) = \dfrac{\alpha+z}{\alpha-z}$ *pour* $(z, \alpha)\in S\times(T\setminus E)$;

(ii) $\operatorname{Re} f(z, \alpha, \varepsilon(\alpha)) \geqq -5$ *pour* $(z, \alpha) \in \Delta_\varepsilon \times (T \setminus E)$;

(iii) *Pour tout compact* K *de* Δ_ε, *il existe une constante* M_K *telle que*

$$|f(z, \alpha, \varepsilon(\alpha))| < M_K \qquad \textit{pour} \quad (z, \alpha) \in K \times (T \setminus E);$$

(iv) $f(z, \alpha, \varepsilon(\alpha))$ *est continue par rapport à* α *et analytique par rapport à* z *pour* $(z, \alpha) \in \Delta_\varepsilon \times (T \setminus E)$.

Pour montrer le lemme, nous allons poser

$$f(z, \alpha, x) = \frac{\alpha(1+x)+z}{\alpha(1+x)-z} + \left(\frac{\alpha+z}{\alpha-z} - \frac{\alpha(1+x)+z}{\alpha(1+x)-z}\right)\left(1 - \frac{B(z)}{B(\alpha)}\right)^2.$$

(i) est clairement vérifié pour toute fonction $\varepsilon(\alpha)$.

D'autre part, f s'écrit $f = f_1 + f_2$, où

$$f_1(z, \alpha, x) = \frac{\alpha(1+x)+z}{\alpha(1+x)-z}$$

et

$$f_2(z, \alpha, x) = \frac{2zx(B(z) - B(\alpha))^2}{(\alpha - z)(\alpha(1+x) - z)(B(\alpha))^2}.$$

Notons ϖ l'ouvert $\{z; |B(z)| < 2; |z| < 2\}$.

Considérons une suite décroissante $\{V_n\}$ de voisinages ouverts de E dans T tel que $\bigcap_{n \in \mathbf{N}} V_n = E$. Alors pour tout n, il existe une constante μ_n telle que

$$\left|\frac{B(z) - B(\alpha)}{z - \alpha}\right| < \mu_n \qquad \text{pour} \quad (z, \alpha) \in [\varpi \times (V_n \setminus V_{n+1})].$$

On choisit comme fonction $\eta(\alpha)$ cherchée, une fonction continue, strictement positive, telle que $\eta(\alpha) < \frac{1}{\mu_n^2}$ si α est dans $V_n \setminus V_{n+1}$.

Soit alors $\varepsilon(\alpha)$ une fonction sur $T \setminus E$ continue, strictement positive et inférieure à $\eta(\alpha)$. Pour chaque α de $T \setminus E$, notons $P(\alpha)$ l'ensemble $\left\{z; \left|\frac{z - \alpha}{z - \alpha(1 + \varepsilon(\alpha))}\right| < 1\right\}$. C'est un demi-plan contenant $\overline{D} \setminus E$.

$\varepsilon(\alpha)$ étant strictement positive, on vérifie que l'ensemble $P = \bigcap_{\alpha \in T \setminus E} P_\alpha$ contient un ouvert Δ' contenant $\overline{D} \setminus E$.

On a

$$\operatorname{Re} f_1(z, \alpha, \varepsilon(\alpha)) > -1 \qquad \text{pour} \quad (z, \alpha) \in P \times (T \setminus E)$$

et

$$|f_2(z, \alpha, \varepsilon(\alpha))| < 4 \qquad \text{pour} \quad (z, \alpha) \in (P \cap \varpi) \times (T \setminus E).$$

On prend alors comme ouvert Δ_ε cherché l'ouvert $\Delta' \cap \mathcal{O}$ qui contient $\overline{\mathrm{D}} \setminus \mathrm{E}$ et on a

$$\operatorname{Re} f(z, \alpha, \varepsilon(\alpha)) > -5 \qquad \text{pour} \quad (z, \alpha) \in \Delta_\varepsilon \times (\mathrm{T} \setminus \mathrm{E}),$$

donc (ii) est vérifié. De plus, pour tout compact K de Δ_ε, $|\alpha(1+\varepsilon(\alpha)) - z|$ est bornée inférieurement pour $(z, \alpha) \in \mathrm{K} \times (\mathrm{T} \setminus \mathrm{E})$, (iii) est donc vérifié. Enfin $\varepsilon(\alpha)$ étant continue et Δ_ε étant contenu dans $\mathcal{O}$, (iv) est vérifié. Le lemme est démontré.

Nous pouvons en déduire facilement le théorème 1.1. En effet, posons

$$\mathrm{H}(z) = \exp - \frac{1}{2\pi} \int_{e^{i\theta} \in \mathrm{T} \setminus \mathrm{E}} f(z, e^{i\theta}, \eta(e^{i\theta})\, d\mu(\theta),$$

où f et η sont les fonctions définies dans le lemme 1.1.

Δ_η étant le domaine correspondant à $\eta(\alpha)$, donné par le même lemme, observons que d'après (iii) et (iv) $\mathrm{H}(z)$ est analytique sur Δ_η et d'après (ii) bornée sur Δ_η par $\exp \frac{5}{2\pi} \mu(\mathrm{T} \setminus \mathrm{E})$. Posons aussi

$$\mathrm{L}(z) = \exp - \frac{1}{2\pi} \int_{e^{i\theta} \in \mathrm{E}} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z}\, d\mu(\theta)$$

et notons $\mathrm{P}'_\alpha = \left\{ z;\ \operatorname{Re} \frac{\alpha + z}{\alpha - z} > -1 \right\}$.

E étant fermé, on vérifie que $\bigcap_{\alpha \in \mathrm{E}} \mathrm{P}'_\alpha$ contient un ouvert Δ' contenant $\overline{\mathrm{D}} \setminus \mathrm{E}$, et sur Δ', $\mathrm{L}(z)$ est analytique et bornée par $\exp \frac{2}{\pi} \mu(\mathrm{E})$.

Notons finalement

$$\mathrm{G}(z) = \mathrm{L}(z)\, \mathrm{H}(z) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{O} = \Delta_\eta \cap \Delta',$$

G appartient à $\mathrm{H}^\infty(\mathrm{O})$ et est égale à F sur S. Le théorème est démontré.

On a alors immédiatement :

Corollaire 1.1. — $\mathrm{H}^\infty(\mathrm{D}) | \mathrm{S} = \mathrm{H}_{\mathrm{T} \setminus \mathrm{E}}(\mathrm{D}) | \mathrm{S}$.

Remarque 1.1. — Ce théorème complète des résultats connus :

E. Akutowicz et L. Carleson [1] ont montré le théorème 1.1 pour des ouverts O de la forme suivante : ils considèrent un nombre fini d'arcs fermés γ sur T disjoints de E et les ouverts O sont bornés d'une part, par, un nombre fini d'arcs analytiques extérieurs à $\overline{\mathrm{D}}$ et rencontrant T aux extrémités des arcs γ et, d'autre part, par les arcs de T complémentaires des arcs γ.

E. A. Heard et J. Wells [12] ont montré le théorème 1.1 pour des suites S de Blaschke qui sont d'interpolation i. e. telles que $\mathrm{H}^\infty(\mathrm{D}) | \mathrm{S}$ est isomorphe à l'algèbre l^∞ des suites bornées.

1.2. On va s'intéresser maintenant au problème analogue pour l'algèbre $H_E(D)$ et pour cela nous allons caractériser l'idéal $I_E(D)|S$ des fonctions de $H_E(D)|S$ nulles sur E. On note S_n la suite $\{\alpha_p;\ p>n\}$,

$$B_n(z)=\prod_{p\leq n}\frac{\overline{\alpha}_p}{\alpha_p}\left(\frac{\alpha_p-z}{1-\overline{\alpha}_p z}\right) \qquad \text{et} \qquad {}_nB(z)=\frac{B(z)}{B_n(z)}.$$

Théorème 1.2. — *Si l'ensemble* E *des points d'accumulation de la suite* S *est de mesure nulle, alors*

$$I_E(D)\,|\,S=\{f;\ f\in H^\infty(D)\,|\,S;\ \|f\|_{H^\infty(D)|S_n}\to 0 \text{ quand } n\to\infty\}.$$

Soit f un élément de $I_E(D)|S$, il existe donc F dans $H_E(D)$, égale à f sur S. Notons F_n la fonction $F(1-{}_nB)$. F_n est égale à f sur S_n donc $\|f\|_{H^\infty(D)|S_n}\leq\|F_n\|_{H^\infty(D)}$. Or, pour tout ε, F étant nulle sur E, il existe un voisinage V de E dans $\overline{D}$ tel que $|F(z)|<\frac{\varepsilon}{2}$ pour z dans $V\cap D$.

Mais la fonction ${}_nB$ converge uniformément vers 1 en dehors de tout voisinage de E, il existe donc N tel que

$$\sup_{z\in D\setminus V}|1-{}_nB(z)|\leq\frac{\varepsilon}{\|F\|_{H^\infty(D)}}, \qquad \text{pour} \quad n\geq N.$$

Donc $\|F_n\|_{H^\infty(D)}<\varepsilon$ si $n\geq N$ et $\|f\|_{H^\infty(D)|S_n}\to 0$ quand $n\to\infty$.

Réciproquement, considérons une fonction f de $H^\infty(D)|S$ n'appartenant pas à $I_E(D)|S$ soit ; F une fonction de $H^\infty(D)$ telle que $F|S=f$.

Dire que f n'appartient pas à $I_E(D)|S$, c'est dire qu'il n'existe pas deux fonctions G_1 et G_2 de $H^\infty(D)$ telles que G_1 soit nulle sur S, G_2 soit dans $I_E(D)$ et F s'écrive $F=G_1+G_2$; c'est donc dire que F n'appartient pas à l'idéal $I_E(D)+I_S(D)$, où $I_S(D)$ est l'idéal des fonctions de $H^\infty(D)$ nulles sur S.

Rappelons ([13], p. 160) que l'application qui à tout m de $\operatorname{Sp}H^\infty(D)$ fait correspondre le point $m(z)$ est une application continue de $\operatorname{Sp}H^\infty(D)$ sur $\overline{D}$; elle réalise un homéomorphisme entre D et une partie de $\operatorname{Sp}H^\infty(D)$. Si α est un point de T, l'ensemble $\mathfrak{M}_\alpha=\{m;\ m\in\operatorname{Sp}H^\infty(D);\ m(z)=\alpha\}$ s'appelle la fibre de $\operatorname{Sp}H^\infty(D)$ au-dessus de α.

Or si on considère l'algèbre $\hat{H}^\infty(D)$, transformée de Gelfand de $H^\infty(D)$, l'idéal $\hat{I}_E(D)$ est l'ensemble de fonctions de $\hat{H}^\infty(D)$ nulles sur $\bigcup_{\alpha\in E}\mathfrak{M}_\alpha$. E étant un fermé de mesure nulle, d'après le théorème classique de Fatou ([13], p. 80) il existe une fonction g de $A(D)$ telle que

$$\begin{aligned} g(z) &= 1 \quad \text{pour } z \text{ dans } E,\\ |g(z)| &< 1 \quad \text{pour } z \text{ dans } \overline{D}\setminus E, \end{aligned}$$

La transformée de Gelfand $\hat{g}$ dans $\hat{H}^\infty(D)$ est donc telle que

$$\hat{g}(m) = 1 \quad \text{pour } m \text{ dans } \bigcup_{\alpha \in E} \mathfrak{M}_\alpha, \qquad \alpha \in E,$$

$$|\hat{g}(m)| < 1 \quad \text{pour } m \text{ dans } \operatorname{Sp} H^\infty(D) \setminus \bigcup_{\alpha \in E} \mathfrak{M}_\alpha,$$

ce qui signifie que $\bigcup \mathfrak{M}_\alpha$ est un ensemble pic pour $\hat{H}^\infty(D)$: on peut alors en conclure (*cf.* [9], corollaire 1) que $\hat{I}_E(D) + \hat{I}_S(D)$ est fermé dans $\hat{H}^\infty(D)$.

L'idéal $I_E(D) + I_S(D)$ est donc fermé; F n'appartenant pas à cet idéal il existe un nombre a tel que

(*) $$\|F - G\|_{H^\infty(D)} > a \quad \text{pour tout } G \text{ dans } I_E(D) + I_S(D).$$

D'autre part, E étant de mesure nulle, il résulte du théorème de Rudin ([13], p. 81) que $A(D)|E = \mathcal{C}(E)$; comme $B_n^{-1}|E$ appartient à $\mathcal{C}(E)$, on déduit qu'il existe une suite $\{F_n\}$ de fonctions de $A(D)$ telle que $F_n|E = B_n^{-1}|E$.

Si G est une fonction de l'idéal $I_{S_n}(D)$ formé des fonctions de $H^\infty(D)$ nulles sur S_n, la fonction GF_nB_n est dans $I_S(D)$ et la fonction $G - GF_nB_n$ est dans $I_E(D)$ donc G est dans $I_E(D) + I_S(D)$. D'où $I_{S_n}(D) \subset I_E(D) + I_S(D)$ et d'après l'inégalité (★) on a donc

$$\|F - G\|_{H^\infty(D)} > a \quad \text{pour tout } G \text{ dans } I_{S_n}(D),$$

soit $\|f\|_{H^\infty(D)|S_n} > a$.

Donc si f n'appartient pas à $I_E(D)|S$, $\|f\|_{H^\infty(D)|S_n}$ ne tend pas vers zéro.

C. Q. F. D.

Nous pouvons maintenant déduire le théorème correspondant au théorème 1.1 pour l'algèbre $H_E(D)$:

THÉORÈME 1.3. — *Soit* S *une suite de Blaschke; notons* E *l'ensemble de ses points d'accumulation sur* T*; si* $m(E) = 0$ *il existe un ouvert* O *contenant* $\overline{D} \setminus E$ *tel que* $H_E(D)|S = H_E(O)|S$.

La condition $m(E) = 0$ est naturelle. En effet, si $m(E)$ est positive, alors toute fonction de $H_E(D)|S$ est la restriction d'une seule fonction de $H_E(D)$; si $E \neq T$, on considère une fonction F de $H_E(D)$ n'appartenant pas à $A(D)$, $F|S$ n'appartient donc pas à $A(D)|S$ donc à aucun $H_E(O)|S$ quel que soit O ouvert contenant $\overline{D} \setminus E$ et le théorème est faux. Si $E = T$, $\overline{D} \setminus E = D$ et le théorème est une trivialité (on prend $O = D$).

Supposons donc $m(E) = 0$. Soient f une fonction de $H_E(D)|S$, et F une fonction de $H_E(D)$ telle que $F|S = f$.

D'après le théorème 1.1 ci-dessus, il existe un ouvert O_1 contenu dans $\mathcal{O} = \{z; |z| < 2; |B(z)| < 2\}$ contenant $\overline{D} \setminus E$ tel que $H^\infty(O_1)|S = H^\infty(D)|S$.

On considère alors un ouvert O contenu dans O_1, connexe, simplement connexe, contenant $\overline{D} \setminus E$ et dont la frontière est une courbe de Jordan rectifiable contenant E et on a encore $H^\infty(O)|S = H^\infty(D)|S$. On sait aussi [4] que la transformation conforme τ de O sur D se prolonge en un homéomorphisme continu de $\overline{O}$ sur $\overline{D}$ qu'on note encore τ et τ applique l'ensemble E de mesure nulle sur un ensemble E' de T de mesure nulle.

D'après le théorème de Rudin ([13], p. 81), $A(D)|E' = \mathcal{C}(E')$; il existe donc une fonction G de A(D) égale à $F \circ \tau^{-1}$ sur E'; la fonction $F_1 = G \circ \tau$ est une fonction de $H_E(O)$ égale à F sur E.

La fonction $F - F_1$ appartient donc à $I_E(D)$; donc d'après le théorème 1.2,

$$\| F - F_1 \|_{H^\infty(D)|S_n} \to 0 \quad \text{quand } n \to \infty.$$

Or les algèbres $H^\infty(O)|S$ et $H^\infty(D)|S$ étant égales, elles ont des normes équivalentes, donc on a aussi $\| F - F_1 \|_{H^\infty(O)|S_n} \to 0$ quand $n \to \infty$.

D'autre part, O étant contenu dans $\mathcal{O}$, $B \circ \tau^{-1}$ est une fonction de $H^\infty(D)$ non identiquement nulle sur $\tau(S) = S'$. Donc S' est une suite de Blaschke et on a

$$\| (F - F_1) \circ \tau^{-1} | S'_n \|_{H^\infty(D)|S'_n} = \| F - F_1 \|_{H^\infty(O)|S_n},$$

donc $\| (F - F_1) \circ \tau^{-1} | S'_n \|_{H^\infty(D)|S'_n}$ tend vers 0 quand on tend vers $+\infty$ et d'après le théorème 1.2, $(F - F_1) \circ \tau^{-1} | S$ appartient à $I_{E'}(D)|S'$; donc $f - F_1|S$ appartient à $I_E(O)|S$. F_1 appartenant à $H_E(O)$, on en déduit que f est dans $H_E(O)|S$ et le théorème est démontré.

§ 2. Étude du spectre de $H_E(D)$. — Dans ce paragraphe, nous étudions le spectre de l'algèbre $H_E(D)$ formée des fonctions qui se prolongent continuement sur un ensemble E de T.

2.1. En ce qui concerne $H^\infty(D)$ son spectre a été étudié en détail, un résultat essentiel est le « théorème de la couronne » de Carleson [3] qui dit que D est dense dans $\mathrm{Sp}\, H^\infty(D)$. Nous allons principalement montrer que si E est un ensemble quelconque de T, ce résultat est valable pour l'algèbre $H_E(D)$; et pour cela nous allons étudier l'application canonique de $\mathrm{Sp}\, H^\infty(D)$ dans $\mathrm{Sp}\, H_E(D)$ qui à tout homomorphisme de $H^\infty(D)$ associe sa restriction à $H_E(D)$.

Rappelons tout d'abord ([13], p. 161), que si F est une fonction de $H^\infty(D)$, F (resp. $|F|$) s'étend continuement en un point α de T si et seulement si sa transformée de Gelfand $\hat{F}$ (resp. $|\hat{F}|$) est constante sur la fibre $\mathfrak{M}_\alpha$ de α dans $\mathrm{Sp}\, H^\infty(D)$.

L'algèbre $H_E(D)$ est donc la sous-algèbre de $H^\infty(D)$ formée des fonctions dont les transformées de Gelfand sont constantes sur chaque fibre au-dessus des points de E.

Notons $\mathcal{R}_E$ la relation d'équivalence définie sur $\mathrm{Sp}\,H^\infty(D)$ par

$$m\,\mathcal{R}_E\,m' \Leftrightarrow \exists\ \alpha \in E, \qquad m \in \mathfrak{M}_\alpha, \qquad m' \in \mathfrak{M}_\alpha,$$

$H_E(D)$ est alors la sous-algèbre de $H^\infty(D)$ définie par la relation d'équivalence $\mathcal{R}_E$ i. e. la sous-algèbre de $H^\infty(D)$ formée des fonctions dont les transformées de Gelfand sont constantes sur les classes de la relation $\mathcal{R}_E$. Plus généralement, si $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence définie sur le spectre d'une algèbre de Banach A, et si on note $A_{\mathcal{R}}$ la sous-algèbre de A définie par $\mathcal{R}$, on sait que si $\mathcal{R}$ satisfait certaines conditions [5] l'application canonique de $\mathrm{Sp}\,A$ dans $\mathrm{Sp}\,A_{\mathcal{R}}$ est surjective mais qu'en général cette application n'est pas surjective [18].

Nous allons montrer que dans le cas de la relation $\mathcal{R}_E$, l'application $\mathrm{Sp}\,H^\infty(D) \to \mathrm{Sp}\,H_E(D)$ est surjective.

Nous allons d'abord préciser les propriétés de factorisation des fonctions de $H_E(D)$.

Proposition 2.1. — *Soit* F *une fonction de* $H_E(D)$; F *s'écrit* $F = IG$, *où* G *est une fonction extérieure appartenant à* $H_E(D)$ *et* I *une fonction intérieure qui, si* F *ne s'annule pas sur* E, *appartient à* $H_E(D)$.

Soit F une fonction de $H_E(D)$, F s'écrit (*cf.* [13], p. 67) $F = BKG$, où B est un produit de Blaschke, K une fonction singulière, G une fonction extérieure. Soit α un point de E, comme $|F| \leqq |G|$, on a donc $|F(\alpha)| < |\hat{G}(m)|$ pour tout m dans $\mathfrak{M}_\alpha$; d'autre part, ([13], p. 175), $|\hat{B}(m)| = |\hat{K}(m)| = 1$ pour m dans Šilov $H^\infty(D)$, donc $|\hat{G}(m)| = |F(\alpha)|$ pour m dans Šilov $H^\infty(D) \cap \mathfrak{M}_\alpha$; or $|\hat{G}(m)| \leqq \sup\limits_{x \in \check{\mathrm{S}}\mathrm{ilov}\,H^\infty(D) \cap \mathfrak{M}_\alpha} |\hat{G}(x)| = |F(\alpha)|$ pour m dans $\mathfrak{M}_\alpha$ (car $\mathfrak{M}_\alpha$ est un ensemble pic) donc

$$|\hat{G}(m)| = |F(\alpha)| \quad \text{pour } m \text{ dans } \mathfrak{M}_\alpha.$$

Remarquons qu'on peut aussi démontrer cela en utilisant le fait que G vérifie l'égalité de Jensen,

$$\mathrm{Log}\,|G(re^{i\theta})| = \int_{e^{it} \in T} \mathrm{Log}\,|G(e^{it})|\,P_r(\theta - t)\,dt,$$

où P_r est le noyau de Poisson.

Alors, si $F(\alpha) = 0$, G est nul sur $\mathfrak{M}_\alpha$, donc G se prolonge continuement à $D \cup \{\alpha\}$. Si $F(\alpha) \neq 0$, F étant continue sur $D \cup \{\alpha\}$, α n'est pas point d'accumulation des zéros de B donc B est continue en α et $|B(\alpha)| = 1$.

D'autre part, pour tout m de $\mathcal{M}_\alpha$, $|\hat{\mathrm{K}}(m)| = \dfrac{|\hat{\mathrm{G}}(m)|}{|\mathrm{F}(\alpha)|} = 1$; comme on l'a rappelé au début de ce paragraphe, cela signifie que $|\mathrm{K}(z)| \to 1$ lorsque $z \to \alpha$. On sait alors ([13], p. 69) que α ne peut appartenir au support de la mesure singulière définissant K et donc K est continue en α et $|\mathrm{K}(\alpha)| = 1$.

G qui est le quotient de fonctions non nulles en α, continues en α est continue en α.

Donc dans tous les cas G est dans $\mathrm{H}_\mathrm{E}(\mathrm{D})$ et si F ne s'annule pas sur E, $\mathrm{I} = \mathrm{BK}$ est dans $\mathrm{H}_\mathrm{E}(\mathrm{D})$.

C. Q. F. D.

2.2. Nous allons maintenant étudier la frontière de Šilov de $\mathrm{H}_\mathrm{E}(\mathrm{D})$.

Pour $\mathrm{H}^\infty(\mathrm{D})$, la frontière de Šilov a été caractérisée par Newman ([13], p. 175) par le fait que les transformées de Gelfand des produits de Blaschke sont de module 1 sur Šilov $\mathrm{H}^\infty(\mathrm{D})$. Pour cette étude, $\mathrm{H}^\infty(\mathrm{D})$ est considérée, à l'aide du théorème de Fatou, comme sous-algèbre de $\mathrm{L}^\infty(\mathrm{T})$. Nous allons faire une étude analogue pour $\mathrm{H}_\mathrm{E}(\mathrm{D})$.

m désignant la mesure de Lebesgue sur T, on note :

$\mathcal{L}^\infty(\mathrm{T})$ l'algèbre des fonctions mesurables bornées sur T; munie de la norme uniforme sur T c'est une algèbre de Banach;

$\mathrm{L}^\infty(\mathrm{T})$ l'algèbre quotient de $\mathcal{L}^\infty(\mathrm{T})$ par la relation d'équivalence qui identifie des fonctions égales presque partout; munie de la norme quotient (norme sup essentielle) c'est une algèbre de Banach et il existe une projection naturelle de $\mathrm{Sp}\,\mathrm{L}^\infty(\mathrm{T})$ sur T qui à m dans $\mathrm{Sp}\,\mathrm{L}^\infty(\mathrm{T})$ associe le point $m(z)$ de T. L'ensemble $\mathrm{X}_\alpha = \{m;\ m \in \mathrm{Sp}\,\mathrm{L}^\infty(\mathrm{T});\ m(z) = \alpha\}$ s'appelle la fibre de $\mathrm{Sp}\,\mathrm{L}^\infty(\mathrm{T})$ au-dessus de α.

Notons alors $\mathrm{L}_\mathrm{E}(\mathrm{T})$ la sous-algèbre de $\mathrm{L}^\infty(\mathrm{T})$ formée des éléments de $\mathrm{L}^\infty(\mathrm{T})$ dont les transformées de Gelfand sont constantes sur chaque fibre X_α pour α dans E; elle est définie par une relation d'équivalence sur $\mathrm{Sp}\,\mathrm{L}^\infty(\mathrm{T})$ et c'est donc une algèbre de Banach. $\mathrm{L}_\mathrm{E}(\mathrm{T})$ est formée d'éléments qui sont en quelque sorte continus sur E. Plus précisément, on a le lemme suivant :

LEMME 2.1. — *Soit* F *un élément de* $\mathrm{L}_\mathrm{E}(\mathrm{T})$; *pour tout* α *dans* E *et tout* ε, *il existe un arc* I_α *centré en* α *tel que si* λ_α *est la valeur prise par* $\hat{\mathrm{F}}$ *sur* X_α

$$\sup_{\beta \in \mathrm{I}_\alpha} \mathrm{ess}\, |\mathrm{F}(\beta) - \lambda_\alpha| < \varepsilon.$$

Soient α dans T et ε quelconque. Si $\lambda \neq \lambda_\alpha$, $z - \alpha$ et $\mathrm{F} - \lambda$ n'appartiennent pas à un même idéal propre de $\mathrm{L}^\infty(\mathrm{T})$; il existe donc g et h

dans $L^\infty(T)$ tel que

$$(z-\alpha)g+(F-\lambda)h=0, \qquad \text{d'où} \quad g=\frac{1-(F-\lambda)h}{z-\alpha},$$

ce qui signifie que $F-\lambda$ est essentiellement borné inférieurement dans un voisinage de α. Il existe donc ε_λ et un arc $I_\alpha(\lambda)$ centré en α tel que $\sup_{\beta\in I_\alpha(\lambda)} \text{ess}\,|F(\beta)-\lambda|>\varepsilon_\lambda$.

Le fermé $\{|x|\leq\|F\|\}\setminus\{|x-\lambda_\alpha|<\varepsilon\}$ est recouvert par un nombre fini des arcs $[\lambda-\varepsilon_\lambda, \lambda+\varepsilon_\lambda]$, où $\lambda\neq\lambda_\alpha$. Soit $\lambda_1\ldots\lambda_n$ le centre de ces arcs. Alors si on pose $I_\alpha=\bigcap_{p=1}^{n} I_\alpha(\lambda_p)$, on obtient le lemme 2.1.

Considérons maintenant une fonction de $H_E(D)$; si α est dans E pour tout ε, il existe I_α et r_α tels que

$$|F(re^{it})-F(\alpha)|<\varepsilon \qquad \text{pour} \quad e^{it}\in I_\alpha, \qquad r_\alpha<r<1.$$

D'après le théorème de Fatou, les limites non tangentielles de F définissent un élément de $L^\infty(T)$ qui appartient alors, d'après le lemme 2.1, à $L_E(T)$.

$H_E(D)$ s'identifie donc à une sous-algèbre de $L_E(T)$ et on a les inclusions suivantes :

$$\begin{array}{ccc} H_E(D) & \subset & L^\infty(D) \\ \cap & & \cap \\ L_E(T) & \subset & L^\infty(T) \end{array} \qquad \text{d'où les applications} \qquad \begin{array}{ccc} \text{Sp}\,H_E(D) & \longleftarrow & \text{Sp}\,H^\infty(D) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \text{Sp}\,L_E(D) & \longleftarrow & \text{Sp}\,L^\infty(T). \end{array}$$

$L_E(T)$ et $L^\infty(T)$ sont des C^*-algèbres, donc s'identifient par la transformation de Gelfand à l'algèbre de toutes les fonctions continues sur leur spectre.

Notons finalement $H_E(D)^{-1}$ l'ensemble des éléments inversibles de $H_E(D)$ et $\log|H_E(D)^{-1}|$ l'ensemble des logarithmes des modules des éléments inversibles de $H_E(D)$. On a alors le lemme suivant :

LEMME 2.2. — *L'ensemble* $\text{Log}\,|H_E(D)^{-1}|$ *est dense dans l'ensemble des éléments réels de* $L_E(T)$.

Soit F un élément réel de $L_E(T)$, il existe un représentant f de F dans $\mathcal{L}^\infty(T)$ qui est réel et tel que $f(\alpha)=\hat{F}(X_\alpha)$ si α est dans E.

Soit ε un nombre quelconque. D'après le lemme 2.1, pour tout α dans E, il existe un arc I_α ouvert centré en α et K_α un ensemble de mesure nulle inclus dans I_α tel que

$$|f(\beta)-f(\alpha)|<\frac{\varepsilon}{2} \quad \text{pour } \beta \text{ dans } \bar{I}_\alpha\setminus K_\alpha.$$

Notons O l'ouvert $\bigcup_{\alpha\in E} I_\alpha$ et $K=\bigcup_{\alpha\in E} K_\alpha$. Alors O est union dénombrable d'arcs fermés dont les intérieurs sont disjoints et dont l'ensemble des extrémités est sans point d'accumulation dans O. Chacun de ces arcs fermés est recouvert par un nombre fini d'arcs de la famille $\{I_\alpha; \alpha\in E\}$ donc est la réunion d'un nombre fini d'arcs fermés d'intérieurs disjoints, contenu chacun dans un arc $\bar{I}_\alpha$.

On en déduit qu'il existe une suite $\{\alpha_n; n\in \mathbf{N}\}$ de points de E, une suite J_n d'arcs fermés d'intérieurs disjoints tels que l'ensemble des extrémités de ces arcs ne coupe pas $K'=\bigcup_{n\in\mathbf{N}} K_{\alpha_n}$ et est sans point d'accumulations dans O, et tels que $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} J_n = O$ et $J_n\subset \bar{I}_{\alpha_n}$ pour tout n.

On peut alors construire une fonction u de $\mathcal{L}^\infty(T)$ continuement différentiable sur O réelle, telle que

$$(*)\qquad \sup_{z\in T\setminus K'} |u(z)-f(z)|<\varepsilon.$$

En effet, sur $T\setminus O$, on choisit $u=f$.

Sur chaque J_n, on peut choisir u continuement différentiable égale à f aux extrémités de J_n, de dérivée nulle en ces extrémités et telle que $|u(\gamma)-f(\alpha_n)|<\frac{\varepsilon}{2}$ pour γ dans $\mathbf{J}_n$.

La fonction u satisfait aux conditions cherchées.

Il est alors bien connu que la fonction v conjuguée harmonique de u est continue sur O.

La fonction $g(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{e^{i\theta}\in T}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}u(e^{i\theta})\,d\theta$ est donc dans $H_0(D)$, donc dans $H_E(D)$; et $\operatorname{Re} g(re^{it})=\int_{e^{i\theta}\in T} P_r(\theta-t)\,u(e^{i\theta})\,d\theta$.

Posons $G(z)=\exp g(z)$. $G(z)$ est une fonction inversible de $H_E(D)$ et d'après le théorème de Fatou,

$$\operatorname{Log}|G(e^{i\theta})|=u(e^{i\theta})\quad \text{pour presque tout } e^{i\theta} \text{ dans } T.$$

Donc, en remarquant que K' est de mesure nulle, d'après l'inégalité (*) ci-dessus, $\|\operatorname{Log}|G|-f\|_{L_E(T)}<\varepsilon$.

C. Q. F. D.

Quand on considère $H_E(D)$, comme sous-algèbre de $L_E(T)$ donc de $\mathcal{C}(\operatorname{Sp} L_E(T))$, le lemme 2.2 signifie que $H_E(D)$ est *logmodulaire* sur $\operatorname{Sp} L_E(T)$ [14], i. e. que l'ensemble $\operatorname{Log}|H_E^{-1}(D)|$ est dense dans $\mathcal{C}_{\mathbf{R}}(\operatorname{Sp} L_E(T))$.

On déduit aussi la proposition suivante :

PROPOSITION 2.2. — *L'application canonique φ de* $\mathrm{Sp}\,L_E(T)$ *dans* $\mathrm{Sp}\,H_E(D)$ *est un homéomorphisme de* $\mathrm{Sp}\,L_E(T)$ *sur Šilov* $H_E(D)$.

Soit m dans $\mathrm{Sp}\,L_E(T)$ et U un ouvert de $\mathrm{Sp}\,L_E(T)$ contenant m. D'après le lemme 2.2, $H_E(D)$ est logmodulaire sur $\mathrm{Sp}\,L_E(T)$, on peut donc, pour tout ε trouver un élément F de $H_E(D)$ tel que sa transformée de Gelfand $\hat{F}$ dans $L_E(T)$ vérifie $\hat{F}(m) = 1$; $\|F\| = \|\hat{F}\| < 1 + \varepsilon$; $|\hat{F}| < \varepsilon$ sur $\mathrm{Sp}\,L_E(T) \setminus U$; ce qui montre que l'application φ est biunivoque et applique $\mathrm{Sp}\,L_E(T)$ sur Šilov $H_E(D)$.

2.3. Comme pour $H^\infty(D)$ [[13], p. 176] on établit alors les lemmes suivants :

LEMME 2.3. — *Soit Φ un élément de* $\mathrm{Sp}\,H_E(D)$ *tel que* $|\Phi(B)| = 1$ *pour tout produit de Blaschke de* $H_E(D)$, *alors pour tout* F *dans* $H_E(D)$, $\Phi(F)$ *appartient à* $\hat{F}$ [*Šilov* $H_E(D)$].

Soit F un élément de $H_E(D)$ telle que $\hat{F}$ ne s'annule pas sur Šilov $H_E(D)$; alors l'élément $F(e^{i\theta})$ de $L_E(T)$ défini par les limites radiales de F est inversible dans $L_E(T)$ donc essentiellement borné inférieurement sur T.

D'après la proposition 2.1, $F = IG$, où G est une fonction extérieure de $H_E(D)$ et I une fonction intérieure qui appartient à $H_E(D)$ car F ne s'annule pas sur E. Or $|F(e^{i\theta})| = |G(e^{i\theta})|$ et G vérifie l'égalité de Jensen ([13], p. 51).

$$\mathrm{Log}\,|G(re^{i\theta})| = \frac{1}{2\pi}\int_{e^{it}\in T} P_r(\theta - t)\,\mathrm{Log}\,|G(e^{it})|\,dt;$$

donc $|G|$ est borné inférieurement sur D et G est inversible dans $H_E(D)$ donc $\Phi(G) \neq 0$. D'autre part, on sait ([13], p. 175), que I est limite uniforme sur D de produits de Blaschke $B_n(z) = \dfrac{I(z) - \alpha_n}{1 - \bar{\alpha}_n I(z)}$; $B_n(z)$ appartient aussi à $H_E(D)$ et donc $|\Phi(I)| = \lim |\Phi(B_n)| = 1$, donc $\Phi(F) \neq 0$.

C. Q. F. D.

LEMME 2.4. — *Soit Φ un élément de* $\mathrm{Sp}\,H_E(D)$ *et soit u un élément réel de* $L_E(T)$ *tel que* $u = \mathrm{Log}\,|F_u|$, *où* F_u *est dans* $H_E^{-1}(D)$ *on définit* $l(u) = \mathrm{Log}\,|\Phi(F_u)|$.

Alors l s'étend de façon unique en une forme linéaire positive sur $L_E(T)$ *dont la restriction à* $H_E(D)$ *est* Φ.

Remarquons tout d'abord que si $|u| = \big|\mathrm{Log}\,|F_u|\big| \leq 1$, alors $\frac{1}{e} < \Phi(F_u) < e$; d'où $|l(u)| \leq 1$ donc l est une forme additive bornée par 1 sur $\mathrm{Log}\,|H_E^{-1}(D)|$.

Montrons maintenant qu'on peut étendre l en une forme additive sur le sous-espace vectoriel réel engendré par $\mathrm{Log}|\mathrm{H}_{\mathrm{E}}^{-1}(\mathrm{D})|$ et que sur ce sous-espace, l est bornée par 1 :

Soit u un élément réel de $\mathrm{L}_{\mathrm{E}}(\mathrm{T})$ appartenant à ce sous-espace, alors u s'écrit $u = \sum_{j=1}^{n} t_j u_j$, où $u_j = \mathrm{Log}|\mathrm{F}_{u_j}|$ et F_{u_j} est dans $\mathrm{H}_{\mathrm{E}}^{-1}(\mathrm{D})$.

Posons $l(u) = \sum_{j=1}^{n} t_j \mathrm{Log}|\Phi(\mathrm{F}_{u_j})|$; il s'agit de voir que $l(u)$ est indépendant de la décomposition de u :

Si u s'écrit aussi $u = \sum_{j=1}^{n'} t'_j u'_j$, où $u'_j = \mathrm{Log}|\mathrm{F}_{u'_j}|$ et $\mathrm{F}_{u'_j}$ est dans $\mathrm{H}_{\mathrm{E}}^{-1}(\mathrm{D})$, on doit avoir

$$\sum_{j=1}^{n} t_j \mathrm{Log}|\Phi(\mathrm{F}_{u_j})| = \sum_{j=1}^{n'} t'_j \mathrm{Log}|\Phi(\mathrm{F}'_{u_j})|.$$

Il suffit de montrer cette égalité dans le cas où les nombres t_j et t'_j sont rationnels ; alors il existe un entier r tel que les nombres $rt_j = p_j$ et $rt'_j = p'_j$ soient entiers.

Les éléments $\mathrm{F} = \prod_{j=1}^{n} (\mathrm{F}_{u_j})^{p_j}$ et $\mathrm{F}' = \prod_{j=1}^{n} (\mathrm{F}_{u'_j})^{p'_j}$ appartiennent à $\mathrm{H}_{\mathrm{E}}^{-1}(\mathrm{D})$ et par hypothèse, $\log|\mathrm{F}| = \log|\mathrm{F}'|$, ce qui donne, d'après la définition de l, l'égalité cherchée.

D'autre part, l est évidemment additive sous le sous-espace engendré par $\mathrm{Log}\,\mathrm{H}_{\mathrm{E}}^{-1}(\mathrm{D})$ et elle est aussi bornée par 1 sur ce sous-espace car avec les notations ci-dessus :

$$|l(ru)| = |l(\mathrm{Log}|\mathrm{F}|)| \leq \big|\mathrm{Log}|\mathrm{F}|\big| = |ru|,$$

l est donc en fait linéaire et positive sur ce sous-espace (qui comme $\mathrm{H}_{\mathrm{E}}^{-1}(\mathrm{D})$ est dense dans l'ensemble des éléments réels de $\mathrm{L}_{\mathrm{E}}(\mathrm{T})$), car $l(1) = \|l\| = 1$.

D'après le théorème de Hahn-Banach, elle s'étend en une forme linéaire positive sur l'ensemble des éléments réels de $\mathrm{L}_{\mathrm{E}}(\mathrm{T})$ et de façon unique à cause de la densité du sous-espace considéré.

Elle s'étend de façon unique à $\mathrm{L}_{\mathrm{E}}(\mathrm{T})$ en une forme linéaire positive : pour tout $f = u + iv$ de $\mathrm{L}_{\mathrm{E}}(\mathrm{T})$, on pose $l(f) = l(u) + il(v)$.

Il faut vérifier enfin que la restriction de l à $\mathrm{H}_{\mathrm{E}}(\mathrm{D})$ est égale à Φ. Or si F est dans $\mathrm{H}_{\mathrm{E}}(\mathrm{D})$, e^{F} est dans $\mathrm{H}_{\mathrm{E}}^{-1}(\mathrm{D})$ et $\mathrm{Re}\,\mathrm{F} = \mathrm{Log}|e^{\mathrm{F}}|$ est dans $\mathrm{Log}|\mathrm{H}_{\mathrm{E}}^{-1}(\mathrm{D})|$. On a donc $l(\mathrm{Re}\,\mathrm{F}) = \mathrm{Log}|\Phi(e^{\mathrm{F}})| = \mathrm{Log}|e^{\Phi(\mathrm{F})}| = \mathrm{Re}\,\Phi(\mathrm{F})$.

D'où $l(\mathrm{F}) = \Phi(\mathrm{F})$.

C. Q. F. D.

Remarque 2.1. — La démonstration de ce lemme reprend celle faite par Hoffman [14] de l'existence pour une algèbre uniforme A, pour tout homomorphisme Φ sur A, d'une mesure m, représentante de Φ sur Šilov A qui est de Arens-Singer, i. e. telle que

$$\log|\Phi(F)| = \int_{\text{Šilov } A} \log|F|\, dm \quad \text{pour tout F inversible de A.}$$

Le lemme est en fait une autre formulation de l'existence de cette mesure, l'unicité découlant de la logmodularité.

LEMME 2.5. — *Soit* Φ *un élément de* $\mathrm{Sp}\,H_E(D)$ *tel que* $|\Phi(B)| = 1$ *pour tout produit de Blaschke* B *de* $H_E(D)$, *alors* Φ *est dans Šilov* $H_E(D)$.

Soit Φ un tel homomorphisme; d'après le lemme 2.3, $\Phi(F)$ appartient à $\hat{F}\,[\text{Šilov } H_E(D)]$ donc au spectre de F dans $L_E(T)$ d'après la proposition 2.2. l étant l'application définie dans le lemme 2.4 précédent, si u est un élément de $L_E(T)$ qui appartient à $\mathrm{Log}|H_E^{-1}(D)|$ on a $u = \mathrm{Log}|F_u|$, où F_u est dans $H_E^{-1}(D)$ et $l(u) = \mathrm{Log}|\Phi(F_u)|$ est dans l'ensemble

$$\mathrm{Log}(\hat{F}(\mathrm{Sp}\,L_E(T)) = u(\mathrm{Sp}\,L_E(T)).$$

L'ensemble $\mathrm{Log}|H_E^{-1}(D)| + i\,\mathrm{Log}|H_E^{-1}(D)|$ étant dense dans $L_E(T)$ on en déduit que pour tout f de $L_E(T)$, $l(f)$ appartient aussi au spectre de f; on en déduit que l est un homomorphisme de $L_E(T)$ en utilisant le théorème général suivant démontré indépendamment par A. Gleason [11] et J.-P. Kahane-W. Żelazko [16] :

Soit l une forme linéaire continue sur une algèbre de Banach A; si pour tout élément a de A, $l(a)$ appartient au spectre $\hat{a}(\mathrm{Sp}\,A)$ de a, alors l est un homomorphisme.

Dans le cas de $L_E(T)$ on peut aussi démontrer directement ce théorème. En effet, $\hat{L}_E(T)$ est égale à $\mathcal{C}(\mathrm{Sp}\,L_E(T))$, l étant une forme linéaire positive sur $L_E(T)$ il existe donc une mesure μ positive sur $\mathrm{Sp}\,L_E(T)$ telle que pour tout u de $\mathcal{C}(\mathrm{Sp}\,L_E(T))$ il existe m_u dans $\mathrm{Sp}\,L_E(T)$ telle que $\int_{\mathrm{Sp}\,L_E(T)} u(m)\,d\mu = u(m_u)$. On en déduit que μ est une masse de Dirac. En effet, sinon il existe deux fermés F_1 et F_2 de $\mathrm{Sp}\,L_E(T)$, de μ-mesure positive, deux voisinages ouverts disjoints O_1 et O_2 de F_1 et F_2, deux fonctions u_1 et u_2 de $\mathcal{C}_{\mathbf{R}}(\mathrm{Sp}\,L_E(T))$ et un point m_0 de $\mathrm{Sp}\,L_E(T)$ tels que :

$$\mu(O_i \setminus F_i) \leq \frac{1}{2}\mu(F_i), \qquad \|u_i\| = 1 = u_i(m)$$

pour m dans F_i, $u_i(m) = 0$ pour m dans $\mathrm{Sp}\,L_E(T) \setminus O_i$, $i = 1, 2$, et

$$\int_{\mathrm{Sp}\,L_E(T)} u_1(m) + i\,u_2(m)\,d\mu = u_1(m_0) + i\,u_2(m_0).$$

D'où $|u_i(m_0) - \mu(F_i)| = \left| \int_{O_i \setminus F_i} u_i(m)\, d\mu \right| < \frac{1}{2}\mu(F_i)$, $i = 1, 2$, ce qui est impossible puisque

$$u_1(m) = 0 \quad \text{pour } m \text{ dans } O_2$$

et

$$u_2(m) = 0 \quad \text{pour } m \text{ dans } \operatorname{Sp} L_E(T) \setminus O_2.$$

Donc μ est une masse de Dirac et l est un homomorphisme de $L_E(T)$.

On a alors comme pour $H^\infty(D)$ la caractérisation suivante :

Théorème 2.1. — *Soit* Φ *un élément de* $H_E(D)$; *les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) Φ *appartient à Šilov* $H_E(D)$;

(ii) $|\Phi(B)| = 1$ *pour tout produit de Blaschke* B *de* $H_E(D)$;

(iii) $\Phi(B) \neq 0$ *pour tout produit de Blaschke* B *de* $H_E(D)$, *à zéros simples.*

Si (i) est vérifiée, d'après la proposition 2.2 ci-dessus, Φ est la restriction d'un homomorphisme sur $L_E(T)$ qui est de module 1 pour tout élément de $L_E(T)$ de module 1, donc (ii) est vérifiée.

D'après le lemme 2.5 précédent, (ii) implique (i). (ii) implique trivialement (iii). Il reste à vérifier que (iii) implique (ii).

Supposons donc qu'il existe un homomorphisme Φ tel que (ii) ne soit pas vérifiée; il existe alors un produit de Blaschke B de $H_E(D)$ tel que $|\Phi(B)| < 1$.

B s'écrit $B(z) = \prod_{n \in \mathbf{N}} \frac{\overline{\beta}_n}{\beta_n} \left[\frac{\beta_n - z}{1 - \overline{\beta}_n z} \right]^{p_n}$, les points β_n sont distincts; l'ensemble des points d'accumulation de cette suite est disjoint de E et $\sum_{n \in \mathbf{N}} p_n(1 - |\beta_n|) < \infty$.

Choisissons alors une suite $\{q_n; n \in \mathbf{N}\}$ de nombres positifs, croissante vers $+\infty$ et telle que $\sum p_n q_n [1 - |\beta_n|] < \infty$.

Le produit $A(z)$ défini par

$$A(z) = \prod_{n \in \mathbf{N}} \left[\frac{\overline{\beta}_n}{\beta_n} \left(\frac{\beta_n - z}{1 - \overline{\beta}_n z} \right)^{p_n q_n} \right]$$

est un produit de Blaschke et on va montrer ([13], p. 178), que $\Phi(A) = 0$.

En effet, A s'écrit $A = B_N^{q_N} Q_N R_N$, où

$$B_N(z) = \prod_{n \geqq N} \frac{\bar{\beta}_n}{\beta_n} \left(\frac{\beta_n - z}{1 - \bar{\beta}_n z} \right)^{p_n},$$

$$Q_N(z) = \prod_{n < N} \left[\frac{\bar{\beta}_n}{\beta_n} \left(\frac{\beta_n - z}{1 - \bar{\beta}_n z} \right) \right]^{p_n q_n},$$

$$R_N(z) = \prod_{n \geqq N+1}' \left[\frac{\bar{\beta}_n}{\beta_n} \left(\frac{\beta_n - z}{1 - \bar{\beta}_n z} \right) \right]^{p_n [q_n - q_N]}.$$

(iii) étant vérifiée, on a en particulier $|\Phi(z)| = 1$, comme $\frac{B}{B_N}(z)$ et $Q_N(z)$ sont des fonctions de A(D) de module 1 sur T, on a donc

$$|\Phi(Q_N)| = \left| \Phi\left(\frac{B}{B_N}\right) \right| = 1; \qquad \text{d'où} \qquad |\Phi(B_N)| = |\Phi(B)|.$$

Or $|\Phi(R_N)| \leqq 1$, donc $|\Phi(A)| \leqq |\Phi(B)|^{q_N}$; en faisant tendre N vers l'infini on obtient $\Phi(A) = 0$.

Il reste à rendre les zéros de A distincts. Pour cela, pour chaque β_n, on choisit $p_n q_n$ points $\{ \gamma_i^n ; i \leqq p_n q_n \}$ tels que

— tous les points ainsi obtenus en faisant varier n soient distincts;

— l'ensemble des points d'accumulation de cette suite $\{ \gamma_i^n \}$ est le même que celui de la suite $\{ \beta_n \}$;

— $\left| \frac{\gamma_i^n - \beta_n}{1 - \bar{\gamma}_i \beta_n} \right|$ qui est la distance hyperbolique entre γ_i^n et β_n soit inférieure à ε_n, la suite ε_n tendant vers zéro assez rapidement de façon que $\| C_N(z) - A_N(z) \| \to 0$ si $N \to \infty$, où

$$C_N(z) = \prod_{n \geqq N} \prod_{i \leqq p_n q_n} \left[\frac{\bar{\gamma}_i^n}{|\gamma_i^n|} \frac{(\gamma_i^n - z)}{1 - \bar{\gamma}_i^n z} \right]^{p_n q_n}$$

et

$$A_N(z) = \prod_{n \geqq N} \left[\frac{\bar{\beta}_n}{|\beta_n|} \left(\frac{\beta_n - z}{1 - \bar{\beta}_n z} \right) \right]^{p_n q_n}.$$

Alors le produit de Blaschke C associé à la suite $\{ \gamma_i^n \}$ est dans $H_E(D)$ et $|\Phi(C)| \leqq |\Phi(C_N)|$, or $\frac{A}{A_N}$ étant une fonction de A(D) de module 1 sur T on a $|\Phi(A_N)| = |\Phi(A)| = 0$. Donc $|\Phi(C_N)| \to 0$ pour $N \to \infty$.

C est un produit de Blaschke à zéros simples tel que $\Phi(C) = 0$, ce qui contredit (iii).

C. Q. F. D.

Remarque 2.2. — Comme nous l'avons dit au début de ce paragraphe, cette méthode reprend celle utilisée par Newman par $H^\infty(D)$.

Récemment, R. Douglas-W. Rudin [10] et indépendamment **J. P.** Rosay [19] ont trouvé une autre démontration de la caractérisation de Šilov $H^\infty(D)$ en montrant que les produits de Blaschke séparent les points de $\mathrm{Sp}\, H^\infty(D)$. Ils utilisent pour cela le fait que le spectre de $\mathbf{L}^\infty(T)$ est totalement discontinu, ce qui n'est pas le cas des algèbres $L_E(T)$ considérées ici pour des ensembles E quelconques.

Le problème reste donc posé de savoir si les produits de Blaschke de $H_E(D)$ séparent le spectre de $H_E(D)$.

2.4. Nous pouvons maintenant établir le théorème principal de cette partie :

Théorème 2.2. — *L'application canonique* π *de* $\mathrm{Sp}\, H^\infty(D)$ *dans* $\mathrm{Sp}\, H^E(D)$ *est surjective.*

Soit Φ un élément de $H_E(D)$, si Φ appartient à Šilov $H_E(D)$, on sait [17] que Φ est la restriction d'un homomorphisme sur la suralgèbre $H^\infty(D)$ de $H_E(D)$.

Si Φ n'appartient pas à Šilov $H_E(D)$, d'après le théorème 2.1, il existe un produit de Blaschke B de $H_E(D)$ à zéros simples tel que $\Phi(B) = 0$.

Notons $S = \{\beta_n ; n \in \mathbf{N}\}$ la suite des zéros de B, K l'ensemble des points d'accumulation de S; K est disjoint de E.

On considère alors l'algèbre de restrictions $H^\infty(D)|S$; d'après le corollaire 1.1 du théorème 1.1, on sait que $H^\infty(D)|S$ est égale à $H_{T\setminus K}(D)|S$, donc à $H_E(D)|S$. Les spectres de $H^\infty(D)|S$ et $H_E(D)|S$ sont donc isomorphes, l'application π définissant cet isomorphisme.

Or $\mathrm{Sp}\, H_E(D)|S$ est l'adhérence-Zariski $\tilde{S}$ de S dans $\mathrm{Sp}\, H_E(D)$, i.e. l'ensemble des homomorphismes de $H_E(D)$ annulant toute fonction nulle sur S. Or, si F est une fonction de $H_E(D)$ nulle sur S, F s'écrit $F = BG$, où G est aussi une fonction de $H_E(D)$.

Donc $\Phi(F)$ est nul comme $\Phi(B)$ et Φ appartient à $\tilde{S}$; il est donc l'image par π d'un homomorphisme de $\mathrm{Sp}\, H^\infty(D)$. Le théorème est donc démontré.

Le théorème de la couronne de Carleson établit que D est dense dans $\mathrm{Sp}\, H^\infty(D)$, le théorème 2.2 ci-dessus nous donne immédiatement comme corollaire le théorème correspondant pour $H_E(D)$.

Théorème 2.3. — D *est dense dans* $\mathrm{Sp}\, H_E(D)$.

§ 3. Comparaison d'algèbres de restrictions de sous-algèbres de $H^\infty(D)$.

3.1. Soit A une algèbre de Banach de fonctions continues sur un compact X munie d'une norme notée $\| \ \|_A$.

On définit

$$\tilde{A} = \{ f ;\, f \in \mathcal{C}(X) ;\, \exists\, M,\, \exists\, f_n \in A,\, \| f_n \|_A < M,\, \sup_{x \in X} | f_n(x) - f(x) | \to 0 \text{ quand } n \to \infty \}.$$

$\tilde{A}$ est une algèbre qui est de Banach si on la munit de la norme suivante :

$$\| f \|_{\tilde{A}} = \operatorname{Inf} \{ M ;\, \exists\, f_n \in A ;\, \| f_n \| < M,\, \sup_{x \in X} | f_n(x) - f(x) | \to 0 \text{ quand } n \to \infty \} \quad \text{pour tout } f$$

de $\tilde{A}$.

On a toujours $A \subsetneq \tilde{A}$ et si A est fermée dans $\mathcal{C}(X)$, $A = \tilde{A}$.

Les algèbres $\tilde{A}$ ont été étudiées en particulier par N. Varopoulos [22] dans le cadre des algèbres de groupe et des algèbres tensorielles.

Ici nous allons nous intéresser aux algèbres A qui sont des restrictions de l'algèbre A(D). Il s'agit de déterminer si dans ce cas, les algèbres $\tilde{A}$ ont des propriétés particulières.

Dans toute cette partie K désigne un fermé de $\overline{D}$ et on pose

$$S = K \cap D \qquad \text{et} \qquad E = K \cap T.$$

On note aussi :

A(K) l'algèbre de Banach des restrictions à K de l'algèbre A(D), munie de la norme quotient;

$\tilde{A}(K)$ l'algèbre correspondant à A(K) par la définition ci-dessus.

Alors pour tout f de $\tilde{A}(K)$ on a

$$\| f \|_{\tilde{A}(K)} = \inf \{ M ;\, \exists\, F_n \in A(D) ;\, \| F_n \|_{A(D)} < M ;\, \sup_{z \in K} | F_n(z) - f(z) | \to 0 \text{ quand } n \to \infty \}.$$

Dans cette partie nous allons montrer le théorème suivant :

Théorème 3.1. — $A(K) = \tilde{A}(K)$ *si et seulement si* A(K) *est fermée dans* $\mathcal{C}(K)$.

Si f est dans $\tilde{A}(K)$, il existe M et une suite $\{ F_n ;\, n \in \mathbf{N} \}$ de fonctions de A(D) telles que

$$\| F_n \|_{A(D)} < M \qquad \text{et} \qquad \sup_{z \in K} | F_n(z) - f(z) | \to 0 \qquad \text{quand} \quad n \to \infty.$$

D'après la propriété de Montel, il existe une sous-suite de la suite $\{ F_n ;\, n \in \mathbf{N} \}$ qui converge uniformément sur tout compact de D vers une fonction G de $H^\infty(D)$ qui vérifie en particulier $G | S = f | S$. f est donc une fonction continue sur K telle que $f | S$ soit dans l'algèbre des restrictions de $H^\infty(D)$ à S qu'on notera $H^\infty(S)$.

On définit alors

$$B(K) = \{ f,\, f \in \mathcal{C}(K) ;\, f | S \in H^\infty(S) \},$$

B(K) est une algèbre de Banach munie de la norme

$$\|f\|_{B(K)} = \sup\{\|f\|_{H^\infty(S)}, \|f\|_{\mathcal{C}(K)}\} \quad \text{pour tout } f \text{ de } B(K),$$

$\|f\|_{H^\infty(S)}$ désignant la norme quotient sur $H^\infty(S)$.

Nous allons comparer les trois algèbres $A(K)$, $\tilde{A}(K)$, $B(K)$. D'après ce qui précède, on a : $A(K) \overset{\subset}{\to} \tilde{A}(K) \overset{\subset}{\to} B(K)$.

Pour cette étude nous allons distinguer deux cas : $m(E) > 0$ et $m(E) = 0$.

3.2. Nous supposons dans tout ce paragraphe que $m(E)$ *est positif.*

Si $E = T$, $A(K)$ est fermée dans $\mathcal{C}(K)$ donc $A(K) = \tilde{A}(K)$.

Si E est différent de T, on considère un produit de Blaschke C dont la suite des zéros $\{\gamma_n; n \in \mathbf{N}\}$ s'accumulent en un point γ de T n'appartenant pas à E. Les produits partiels $C_N(z) = \prod_{n \leq N} \frac{\bar{\gamma}_n}{|\gamma_n|}\left(\frac{\gamma_n - z}{1 - \bar{\gamma}_n z}\right)$ sont des fonctions de A(D) de norme 1, convergeant vers $C(z)$ uniformément sur tout compact de $\bar{D}$ disjoint de γ donc sur K; donc $C|K$ est dans $\tilde{A}(K)$ mais $C|K$ n'appartient pas à A(K) car $m(E)$ est positive et C n'est pas dans A(D). Donc $A(K) \neq \tilde{A}(K)$.

Pour comparer $\tilde{A}(K)$ et A(K) avec B(K) nous allons regarder la façon dont les points de E sont adhérents à S.

Nous rappelons qu'un point $e^{i\theta}$ est dit adhérent non tangentiellement à un ensemble S de D s'il est adhérent à l'intersection de S et d'un secteur de sommet $e^{i\theta}$, symétrique par rapport au rayon issu de $e^{i\theta}$ et d'angle au sommet inférieur à π.

Proposition 3.1. — *S'il existe un ensemble de* E *de mesure positive formé de points qui ne sont pas adhérents non tangentiellement à* S, *alors il existe dans* B(K) *une fonction nulle sur un ensemble de mesure positive de* T, *non identiquement nulle sur* E, *et ne s'annulant pas sur* S.

En effet, pour tout point $e^{i\theta}$ de E′, il existe donc α_θ tel que le triangle isocèle T_θ de sommet $e^{i\theta}$, d'angle en ce sommet égal à $\frac{\pi}{2}$, et de hauteur issue de ce sommet égale à α_θ, ne contienne aucun point de S.

Si on considère une suite α_n tendant vers zéro et si on note E_n l'ensemble des points $e^{i\theta}$ de E tel que α_θ soit supérieur à α_n, alors $\cup E_n = E$, il existe donc n tel que $m(E_n)$ soit positive.

En notant E′ un fermé de mesure positive strictement inférieure à $m(E_n)$, on voit qu'il existe un nombre α tel que pour tout point $e^{i\theta}$ d'un fermé E′ de mesure positive vérifiant $m(E \setminus E') > 0$, les triangles correspondant dont l'angle au sommet $e^{i\theta}$ est égal à $\frac{\pi}{2}$ et la hauteur à α_0 ne contiennent aucun point de S.

$T \setminus E'$ est un ouvert réunion dénombrable d'arcs disjoints I_n et $\sum_{n \in \mathbf{N}} m(I_n) < 1$.

On considère alors une suite $\{a_n; n \in \mathbf{N}\}$ tendant vers l'infini telle que $\sum_{n \in \mathbf{N}} m(I_n)\, a_n < \infty$.

On peut définir sur chaque arc I_n une fonction u_n continuement différentiable, positive, intégrable, supérieure à a_n, tendant vers $+\infty$ aux extrémités de l'arc I_n et telle que

$$\int_{e^{i\theta} \in I_n} u_n(e^{i\theta})\, d\theta \leqq 2\, m(I_n)\, a_n.$$

On définit alors une fonction u sur T :

$$\begin{aligned} u(e^{i\theta}) &= u_n(e^{i\theta}) && \text{pour } e^{i\theta} \text{ dans } I_n, \\ u(e^{i\theta}) &= 0 && \text{pour } e^{i\theta} \text{ dans } E'. \end{aligned}$$

La fonction u est continuement différentiable sur $T \setminus E'$, positive et

$$\int_{e^{i\theta} \in T} u(e^{i\theta})\, d\theta = \sum_{n \in \mathbf{N}} \int_{e^{i\theta} \in I_n} u_n(e^{i\theta})\, d\theta \leqq 2 \sum_{n \in \mathbf{N}} m(I_n)\, a_n < \infty,$$

donc u est intégrable.

Soit $e^{i\theta_0}$ est un point de E' et N un entier quelconque, il existe n tel que $a_p > N$ pour tout $p > n$; et $e^{i\theta_0}$ est adhérent à au plus un des arcs I_p, $p \leqq n$. Soit I_{p_0} cet arc; d'après le choix de u_n, il existe un voisinage V de $e^{i\theta_0}$ dans T tel que $u_{p_0}(e^{i\theta}) > N$ pour $e^{i\theta}$ dans $V \cap I_{p_0}$ et $V \cap I_p = \emptyset$, $p \leqq n$, $p \neq p_0$, D'où $u(e^{i\theta}) > N$ pour $e^{i\theta} \in V \cap (T \setminus E')$.

Donc $u(e^{i\theta})$ tend vers $+\infty$ lorsque $e^{i\theta}$ tend vers un point de E' en restant dans $T \setminus E'$.

On note v la fonction conjuguée de u et on pose

$$F(r e^{i\theta}) = \exp - \frac{1}{2\pi} \int_{e^{it} \in T} [u(e^{it}) + i v(e^{it})]\, P_r(\theta - t)\, dt.$$

u étant positive et intégrable, F est une fonction de $H^\infty(D)$ de norme inférieure à 1 et u étant continuement différentiable sur $T \setminus E'$, F se prolonge continuement à $T \setminus E'$ donc appartient à $H_{T \setminus E'}(D)$ et ne s'annule pas sur $T \setminus E'$.

F ne s'annule pas sur $K \cap D$ et $m(E \setminus E')$ étant positive, F n'est pas identiquement nulle sur E.

Nous allons montrer que $F|S$ se prolonge en une fonction de $B(K)$.

F appartenant à $H_{T \setminus E'}(D)$, il suffira en fait de montrer que $F(re^{i\theta})$ tend vers zéro lorsque $re^{i\theta}$ tend vers un point de E' en restant dans $K \setminus E'$.

Or, d'après le choix de u, si $e^{i\theta_0}$ est un point de E' et N un nombre quelconque, il existe un arc $V = [e^{i\theta_0} - \varepsilon, e^{i\theta_0} + \varepsilon]$ tel que $u(e^{i\theta}) > N$ pour $e^{i\theta} \in V \cap (T \setminus E')$.

D'autre part, d'après le choix de E', tout point $re^{i\theta}$ de $K \setminus E'$ vérifiant $1 \geqq r > 1 - \alpha_0$ et $|e^{i\theta} - e^{i\theta_0}| < \frac{\varepsilon}{2}$, appartient à un triangle Δ dont l'un des côtés est un arc J contenu dans $I_n \cap V$ pour un certain n et dont les demi-autres côtés forment un angle de $\frac{\pi}{4}$ avec les rayons issus des extrémités de l'arc J.

On a alors

$$|F(re^{i\theta})| = \exp - \frac{1}{2\pi} \int_{e^{it} \in T} u(e^{it})\, P_r(\theta - t)\, dt,$$

$$|F(re^{i\theta})| = \exp - \frac{1}{2\pi} \int_{e^{it} \in J} u(e^{it})\, P_r(\theta - t)\, dt \exp - \frac{1}{2\pi} \int_{e^{it} \in T \setminus J} u(e^{it})\, P_r(\theta - t)\, dt,$$

$$|F(re^{i\theta})| \leqq \exp - \frac{N}{2\pi} \int_{e^{i\theta} \in J} P_r(\theta - t)\, dt.$$

Or $\frac{1}{2\pi} \int_{e^{i\theta} \in J} P_r(\theta - t)\, dt$ est la longueur de l'arc dont les extrémités sont les points où les droites joignant $re^{i\theta}$ aux extrémités de l'arc J recoupent le cercle; la valeur minimale lorsque $re^{i\theta}$ est dans Δ est obtenue lorsque $re^{i\theta}$ est au sommet de Δ opposé à J et cette valeur y est supérieure à $\frac{1}{2}$.

Donc $|F(re^{i\theta})| \leqq \exp - \frac{N}{2}$ pour tout $re^{i\theta}$ de K vérifiant

$$r > 1 - \alpha_0, \qquad |e^{i\theta} - e^{i\theta_0}| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$F(re^{i\theta})$ tend donc vers zéro lorsque $re^{i\theta}$ tend vers un point de $T \setminus E''$ en restant dans $K \setminus E'$.

F définit donc une fonction f de $B(K)$ nulle sur le fermé E' de mesure positive, f n'est pas identiquement nulle sur E et f ne s'annule pas sur S.

C. Q. F. D.

THÉORÈME 3.2. — *Si* $E = T$, *les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) $A(K) = B(K)$;

(ii) *Presque tout point de* T *est adhérent non tangentiellement à* S.

En effet, supposons que (ii) soit vérifiée. Soient f une fonction de B (K) et F dans $H^\infty(D)$ telle que $F|S=f|S$. Les limites radiales de F qui existent en presque tout point de T sont alors égales en presque tout point à la valeur de f en ce point. F est donc l'intégrale de Poisson de la fonction continue f et donc appartient à A(D); d'où f est dans A(K).

Si (ii) n'est pas vérifiée d'après la proposition 3.1 précédente, il existe une fonction f de B(K) non identiquement nulle sur K et nulle sur un ensemble de mesure positive; cette fonction ne peut alors appartenir à A(K) et donc $A(K)\neq B(K)$.

C. Q. F. D.

Les ensembles S ayant la propriété (ii) du théorème précédent ont été introduits par L. Brown, A. Shields, K. Zeller [2], qui ont montré par une méthode analogue à celle utilisée dans la proposition 3.1 ci-dessus que la propriété (ii) caractérise les ensembles S de D tels que $\|F\|_{H^\infty(D)}=\sup_{z\in S}|F(z)|$ pour tout F de $H^\infty(D)$.

Les ensembles S ayant la propriété (ii) jouent en quelque sorte un rôle analogue au cercle unité T. Le théorème 3.2 ci-dessus en est une autre illustration.

La proposition suivante donne un résultat partiel dans le cas où $E\neq T$.

Proposition 3.2. — *Si* $\tilde{A}(K)=B(K)$, *alors presque tout point de* E *est adhérent non tangentiellement à* S.

En effet, sinon, d'après la proposition 3.1 ci-dessus, il existe une fonction f de B(K) non identiquement nulle sur E, ne s'annulant pas sur S tel que f soit nulle sur un ensemble de mesure positive E′.

Remarquons que S ne peut pas être vide, sinon par définition on a $\tilde{A}(K)=B(K)=\mathcal{C}(K)$; or si $\tilde{A}(K)$ est égal à $\mathcal{C}(K)$, les normes de ces deux algèbres sont équivalentes et donc une boule de A(K) est dense dans la boule unité de $\mathcal{C}(K)$, on en déduit que A(K) est aussi égal à $\mathcal{C}(K)$, ce qui est impossible car $m(E)$ est positive.

Il existe donc un point $z_0=r_0e^{i\theta_0}$ dans $K\cap D$ et $f(z_0)\neq 0$.

Si f appartient à $\tilde{A}(K)$, il existe une suite $\{F_n;\ n\in\mathbf{N}\}$ de fonctions de A(D) et une constante M telles que

$$\|F_n\|_{A(D)}\leq M;$$

$$\operatorname*{Sup}_{z\in K}|F_n(z)-f(z)|<\frac{1}{n};$$

en particulier, $|F_n(e^{i\theta})|<\frac{1}{n}$ pour $e^{i\theta}$ dans E′.

D'après l'inégalité de Jensen ([13], p. 51), on a

$$\begin{aligned}\operatorname{Log}|F_n(z_0)| &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{e^{i\theta}\in T} \operatorname{Log}|F_n(e^{i\theta})|\, P_{r_0}(\theta_0-\theta)\,d\theta \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{e^{i\theta}\in E'} \operatorname{Log}|F_n(e^{i\theta})|\, P_{r_0}(\theta_0-\theta)\,d\theta + \frac{\operatorname{Log} M}{2\pi}\int_{e^{i\theta}\in T\setminus E'} P_{r_0}(\theta_0-\theta)\,d\theta \\ &\leq -\frac{\operatorname{Log} n}{2\pi}\int_{e^{i\theta}\in E'} P_{r_0}(\theta_0-\theta)\,d\theta + \operatorname{Log} M.\end{aligned}$$

E' étant de mesure positive, si on fait tendre n vers l'infini on obtient $\operatorname{Log}|f(z_0)| = -\infty$, ce qui est impossible puisque $f(z_0) \neq 0$.

Donc f n'est pas dans $\tilde{A}(K)$ et $\tilde{A}(K) \neq B(K)$.

C. Q. F. D.

Réciproquement, je ne sais pas, dans le cas où E est différent de T, si le fait que tout point de E soit adhérent non tangentiellement à S entraîne que $\tilde{A}(K) = B(K)$.

Dans le cas particulier, où E est un arc fermé, si tout point de E est adhérent non tangentiellement à S, cela entraîne que pour toute fonction f de $B(K)$, la fonction F de $H^\infty(D)$ égale à f sur S a des limites radiales qui sont continues sur E; donc F appartient au moins à $H_{\mathring{E}}$, où $\mathring{E}$ est l'arc ouvert d'adhérence E.

On a alors $B(K) = \tilde{A}(K)$ car on peut montrer que la propriété d'approximation suivante qui est valable (dans le cas où E est vide) pour $H^\infty(D)$ est valable :

Toute fonction de $H_E(D)$ est limite d'une suite de fonctions de $A(D)$ bornées uniformément, convergeant uniformément sur tout compact de $D \cup E$.

On obtient comme cas particulier des propositions précédentes :

Proposition 3.3. — *Si* S *est une suite de Blaschke telle que* $m(\overline{S} \cap T)$ *soit positive, alors* $\tilde{A}(K) \neq B(K)$.

Si S est une suite de Blaschke $\{\alpha_n,\ n > 0\}$; notons A le produit de Blaschke associé à la suite $\{\alpha_n;\ n > 1\}$. On définit f par

$$\begin{aligned} f(\alpha_1) &= A(\alpha_1), \\ f(\alpha_n) &= 0 \quad \text{pour } n > 1, \\ f(e^{i\theta}) &= 0 \quad \text{pour } e^{i\theta} \text{ dans E}. \end{aligned}$$

f est donc une fonction de $B(K)$ qui est nulle sur $\overline{S} \cap T$ donc comme dans les démonstrations du théorème 3.1 et de la proposition 3.2 on conclut que $\tilde{A}(K) \neq B(K)$.

3.3. On suppose dans cette partie que $m(\mathrm{E})$ *est nulle.*

Proposition 3.4. — $\tilde{\mathrm{A}}(\mathrm{K}) = \mathrm{B}(\mathrm{K})$.

Soit f un élément de $\mathrm{B}(\mathrm{K})$; $m(\mathrm{E})$ étant nulle, il existe une fonction G de $\mathrm{A}(\mathrm{D})$ égale à f sur E et il suffit de montrer que $f - \mathrm{G}|\mathrm{K}$ est dans $\tilde{\mathrm{A}}(\mathrm{K})$. On peut donc supposer que f est nulle sur E.

Soit n un entier quelconque, f étant continue sur K nulle sur E, il existe p_1 tel que

$$|f(\alpha_p)| < \frac{1}{2n} \qquad \text{pour} \quad p > p_1.$$

E étant un ensemble pic pour $\mathrm{A}(\mathrm{D})$ ([13] p. 80), il existe une fonction G_n de $\mathrm{A}(\mathrm{D})$ de norme 1 égale à 1 sur E telle que

$$\mathrm{G}_n(\alpha_p) < \frac{1}{2n\,\|f\|_{\mathrm{B}(\mathrm{K})}}, \qquad p \leqq p_1.$$

Il existe alors p_2 tel que

$$|\mathrm{G}_n(\alpha_p) - 1| < \frac{1}{4n\,\|f\|_{\mathrm{B}(\mathrm{K})}} \qquad \text{pour} \quad p > p_2.$$

Il existe aussi une fonction F de $\mathrm{H}^\infty(\mathrm{D})$ tel que

$$\mathrm{F}|_{\mathrm{S}} = f \qquad \text{et} \qquad \|\mathrm{F}\|_{\mathrm{H}^\infty(\mathrm{D})} \leqq 2\,\|f\|_{\mathrm{B}(\mathrm{K})}$$

et les fonctions $\mathrm{F}_p(z) = \mathrm{F}\left(\left(1 - \frac{1}{p}\right)z\right)$ sont des fonctions de $\mathrm{A}(\mathrm{D})$ convergeant uniformément sur tout compact de D vers F de norme égale à $\|\mathrm{F}\|$.

Il existe donc m tel que

$$|\mathrm{F}_m(\alpha_p) - \mathrm{F}(\alpha_p)| < \frac{1}{4^n} \qquad \text{pour} \quad p \leqq p_2.$$

Posons alors $\mathrm{H}_n(z) = (1 - \mathrm{G}_n(z))\,\mathrm{F}_m(z)$.

H_n est une fonction de $\mathrm{A}(\mathrm{D})$ telle que

$$\|\mathrm{H}_n\|_{\mathrm{A}(\mathrm{D})} \leqq 4\,\|f\|_{\mathrm{B}(\mathrm{K})},$$
$$\mathrm{H}_n(z) = 0 = f(z) \quad \text{pour } z \text{ dans E}.$$

Si $p > p_2$,

$$|\mathrm{H}_n(\alpha_p) - f(\alpha_p)| \leqq |1 - \mathrm{G}_n(\alpha_p)|.\|\mathrm{F}\| + |f(\alpha_p)| < \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n}.$$

Si $p_1 < p \leqq p_2$,

$$|\mathrm{H}_n(\alpha_p) - f(\alpha_p)| \leqq \|1 - \mathrm{G}_n\|.|\mathrm{F}_m(\alpha_p) - \mathrm{F}(\alpha_p)| + \|\mathrm{G}_n\|.|\mathrm{F}(\alpha_p)| \leqq \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n}.$$

Si $p \leqq p_1$,

$$|\mathrm{H}_n(\alpha_p) - f(\alpha_p)| = |\mathrm{F}_m(\alpha_p) - \mathrm{F}(\alpha_p)| + |\mathrm{G}_n(\alpha_p)|\,\|\mathrm{F}_m\| \leqq \frac{1}{4n} + \frac{1}{2n} < \frac{1}{n}.$$

Il existe donc une suite H_n de fonctions de $A(D)$ telles que

$$\|H_n\|_{A(D)} \leq 4 \|f\|_{B(K)},$$
$$\sup_{z \in K} |H_n(z) - f(z)| \to 0 \quad \text{quand} \quad n \to \infty.$$

f appartient donc à $\tilde{A}(K)$.

On en déduit le résultat connu ([13], p. 208) :

Corollaire 3.1. — *Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) K *est d'interpolation pour* $A(D)$ (i. e. $A(K) = \mathcal{C}(K)$);

(ii) S *est d'interpolation pour* $H^\infty(D)$ (i. e. $H^\infty(S) \sim l^\infty$).

En effet, d'après la propriété de Montel, on a : (i) $\Rightarrow$ (ii).

D'autre part, si (ii) est vérifiée, on a $\tilde{A}(K) = B(K) = \mathcal{C}(K)$, on en déduit, comme on l'a signalé au début de la démonstration de la proposition 3.2 ci-dessus, que $A(K) = \mathcal{C}(K)$.

C. Q. F. D.

Si S n'est pas une suite de Blaschke, on considère la fonction de $H^\infty(D)$, $F(z) = \exp \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z}$, où $e^{i\theta}$ n'appartient pas à E; $F|K$ est dans $B(K)$ mais non dans $A(K)$ car F n'appartient pas à $A(D)$. Donc dans ce cas $\tilde{A}(K) = B(K) \neq A(K)$.

Il reste donc à étudier le cas où $S = \{\alpha_n;\ n \in \mathbf{N}\}$ est une suite de Blaschke qui n'est pas d'interpolation pour $H^\infty(D)$.

Notons :

$$S_n = \{\alpha_p;\ p \geq n\}; \qquad b_p(z) = \frac{\overline{\alpha}_p}{|\alpha_p|} \frac{\alpha_p - z}{1 - \overline{\alpha}_p z},$$
$$B(z) = \prod_{p \in \mathbf{N}} b_p(z); \qquad B_n(z) = \prod_{p \leq n} b_p(z); \qquad {}_nB(z) = \frac{B(z)}{B_n(z)},$$
$$A_n(z) = \prod_{p \neq n} b_p(z); \qquad A_n(\alpha_n) = a_n.$$

Rappelons ([13], p. 202), que les suites S d'interpolation pour $H^\infty(D)$ sont caractérisées par le fait que $\inf_{n \in \mathbf{N}} |a_n| > 0$.

Soit $H_E(D)$ l'algèbre formée des fonctions de $H^\infty(D)$ se prolongeant continuement à E; on note aussi $H_E(K)$ l'algèbre des restrictions de $H_E(D)$ à K et d'après les théorèmes 1.1 et 1.2 du paragraphe 1, on a

$$H_E(K) = A(K),$$
$$H^\infty(S) = H_{T \setminus E}(S).$$

On note finalement $I_A(K)$ [resp. $I_B(K)$] [resp. $I_{H_E}(K)$] l'idéal des éléments de $A(K)$ [resp. $B(K)$] [resp. $H_E(K)$] nuls sur E. On a aussi

$I_A(K) = I_{H_E}(K)$ et d'après le théorème 1.3 du paragraphe 1, les fonctions f de $I_A(K)$ sont caractérisées par le fait que $\| f_{|S_n} \|_{H^\infty(S_n)} \to 0$ quand $n \to \infty$.

On va montrer qu'il n'en est pas de même pour $I_B(K)$:

PROPOSITION 3.5. — *Si* S *est une suite de Blaschke non d'interpolation pour* $H^\infty(D)$, *il existe* f *dans* $I_B(K)$ *tel que* $\| f_{|S_n} \|_{H^\infty(S_n)} \geq 1$ *pour tout* n.

S n'étant pas une suite d'interpolation pour $H^\infty(D)$, il existe une sous-suite $L = \{ n_p;\ p \in \mathbf{N} \}$ telle que $| a_{n_p} | < \frac{1}{p}$.

Comme toute suite de Blaschke contient une suite d'interpolation ([13], p. 204), on peut donc supposer que la suite α_{n_p} est d'interpolation; il existe donc $\delta > 0$ tel que $\prod_{k \neq p} b_{n_k}(\alpha_{n_p}) > \delta$ pour tout p.

Notons $C(z)$ le produit de Blaschke $C(z) = \prod_{n \notin L} b_n(z)$.

Soit f la fonction définie sur K par

$$\begin{aligned} f(z) &= 0 \qquad \text{pour } z \text{ dans E}, \\ f(\alpha_n) &= C(\alpha_n) \quad \text{pour tout } n. \end{aligned}$$

Montrons tout d'abord que f est dans $I_B(K)$; en effet, $C(\alpha_n) = 0$ pour $n \notin L$, et

$$| a_{n_p} | = | C(\alpha_{n_p}) | \times \prod_{k \neq p} b_{n_{k_p}}(\alpha_{n_p}) \quad \text{pour tout } p,$$

d'où

$$| C(\alpha_{n_p}) | < \frac{1}{p\delta} \qquad \text{et} \qquad C(\alpha_n) \to 0 \qquad \text{pour } n \to \infty\,;$$

f appartient donc à $I_B(K)$.

D'autre part, n étant fixé, considérons une fonction F quelconque de $H^\infty(D)$ telle que $F | S_n = f | S_n$. En particulier, $F(\alpha_p) = 0$ pour tout p supérieur à n, n'appartenant pas à L.

Il existe donc une fonction G de $H^\infty(D)$ telle que $F = {}_nCG$, où ${}_nC$ est le produit de Blaschke ${}_nC(z) = \prod_{\substack{k \notin L \\ k > n}} b_k(z)$.

On a alors ${}_nC(\alpha_p) \times G(\alpha_p) = F(\alpha_p)$; soit $G(\alpha_p) = \frac{C}{{}_nC} C(\alpha_p)$.

Or la fonction $\frac{C}{{}_nC}$ est un produit de Blaschke fini qui tend en module vers 1 lorsque $|z|$ tend vers 1. Donc $| G(\alpha_p) | \to 1$ lorsque $p \to \infty$. Or

$$\| F \|_{H^\infty(D)} = \| G \|_{H^\infty(D)} > | G(\alpha_p) |\,; \qquad \text{d'où} \qquad \| F \|_{H^\infty(D)} \geq 1$$

pour tout F dans $H^\infty(D)$ telle que $F|S_n = f|S_n$. La proposition est donc démontrée.

En utilisant les propositions ci-dessus, ainsi que la caractérisation rappelée ci-dessus des fonctions de $I_A(K)$ on a immédiatement le théorème suivant :

THÉORÈME 3.3. — *Si $m(E)$ est nulle, $\tilde{A}(K)$ [qui est égale à $B(K)$] est égale à $A(K)$ [qui est égale à $H_E(K)$] si et seulement si S est une suite d'interpolation pour $H^\infty(D)$.*

On peut montrer aussi un théorème plus général :

THÉORÈME 3.4. — *Si S n'est pas d'interpolation pour $H^\infty(D)$, l'algèbre de Banach $B(K)$ n'est pas séparable.*

Démonstration. — D'après les propriétés des produits de Blaschke, on sait que, pour tout n, il existe n' tel que

$$|{}_kB(\alpha_n)| > \frac{1}{2} \qquad \text{pour} \quad k > n',$$

$$|B_n(\alpha_k)| > \frac{1}{2} \qquad \text{pour} \quad k > n'.$$

Il existe donc un entier m_2 appartenant à la suite $L = \{n_p;\ p \in \mathbf{N}\}$ considérée dans la démonstration de la proposition 3.5 ci-dessus tel que

$$|B_{n_1}(\alpha_{m_2})| > \frac{1}{2}.$$

Il existe alors m_3 dans L tel que

$$|B_{m_2}(\alpha_{m_3})| > \frac{1}{2},$$

$$|{}_{m_3}B(\alpha_{m_2})| > \frac{1}{2}.$$

On construit ainsi par récurrence une sous-suite $L' = \{m_p;\ p \in \mathbf{N}\}$ de la suite L, telle que

$$|B_{m_p}(\alpha_{m_{p+1}})| > \frac{1}{2},$$

$$|{}_{m_{p+1}}B(\alpha_{m_p})| > \frac{1}{2}.$$

Notons :

$$C'(z) = \prod_{n \notin L'} b_n(z),$$

$$T_p = \{\alpha_n;\ m_{p-1} < n \leq m_{p+1}\}.$$

Pour toute partie J de N on définit sur K la fonction f_J par

$$f_J(z) = 0 \quad \text{pour } z \text{ dans E},$$
$$f_J(\alpha_n) = C'(\alpha_n) \prod_{k \in J} b_{m_k}(\alpha_n) \quad \text{pour tout } n.$$

On a : $|f_J(\alpha_n)| < |C'(\alpha_n)| < |C(\alpha_n)|$. Donc f_J est dans $I_B(K)$, car $C(\alpha_n)$ tend vers zéro, lorsque $n \to \infty$.

D'autre part, si J et J' sont deux parties différentes de N, il existe par exemple p appartenant à J' et non à J. Alors $\|f_J - f_{J'}\|_{B(K)} \geq \|f_J - f_{J'}\|_{H^\infty(T_p)}$.

Considérons une fonction F quelconque de $H^\infty(D)$ telle que

$$F \mid T_p = (f_J - f_{J'})\,|_{T_p};$$

en particulier,

$$F(\alpha_n) = 0 \qquad \text{pour} \quad \alpha_n \in T_p \setminus \{\alpha_{m_p}\},$$
$$F(\alpha_{m_p}) = f_J(\alpha_{m_p}).$$

Il existe donc une fonction G de $H^\infty(D)$ telle que

$$F(z) = G(z) \prod_{\substack{m_{p-1} < n \leq m_{p+1} \\ n \neq m_p}} b_n(z),$$

d'où

$$|G(\alpha_{m_p})| \times \prod_{\substack{m_{p-1} \leq n \leq m_{p+1} \\ n \neq m_p}} |b_n(\alpha_{m_p})| = \prod_{k \in J} b_{m_k}(\alpha_{m_p}) \times \prod_{n \notin L'} b_n(\alpha_{m_p}),$$

soit

$$|G(\alpha_{m_p})| \geq \prod_{n > m_{p+1}} b_n(\alpha_{m_p}) \times \prod_{n \leq m_{p-1}} b_n(\alpha_{m_p}) \geq \frac{1}{4},$$

d'où

$$\|F\| = \|G\| > \frac{1}{4}, \qquad \text{et donc} \qquad \|f_J - f_{J'}\|_{B(K)} > \frac{1}{4}.$$

Lorsque J parcourt l'ensemble des parties de **N**, les fonctions f_J forment un ensemble non dénombrable d'éléments de B(K) dont les distances sont supérieures à $\frac{1}{4}$; donc B(K) n'est pas séparable.

C. Q. F. D.

En remarquant que A(K), qui est un espace quotient de l'espace séparable A(D) est séparable, on retrouve comme corollaire de ce théorème 3.4 le théorème 3.3 ci-dessus.

Si on s'intéresse à la norme des injections canoniques données par les inclusions $A(K) \subsetneq \tilde{A}(K) \subsetneq B(K)$, on obtient la proposition suivante :

PROPOSITION 3.6. — *Si* $m(E)$ *est nulle les injections* $A(K) \to \tilde{A}(K)$ *et* $A(K) \to B(K)$ *sont isométriques.*

Il suffit de montrer que pour tout f dans A(K) on a

$$\|f\|_{A(K)} = \|f\|_{B(K)}.$$

Or si f est dans A(K), il existe F dans A(D) telle que $F|K = f$ et

$$\|f\|_{A(K)} = \inf\{\|F+G\|_{A(D)};\quad G \in A(D);\quad G|S = 0\},$$
$$\|f\|_{B(K)} = \inf\{\|F+G\|_{H^\infty(D)};\ G \in H^\infty(D);\ G|S = 0\}.$$

En remarquant que les fonctions de A(D) qui sont nulles sur S sont les fonctions de A(D) qui s'écrivent BG, où G est dans l'idéal $I_A(D)$ des fonctions de A (D) nulles sur E, on obtient

$$\|f\|_{A(K)} = \inf\{\|F+BG\|_{A(D)};\quad G \in I_A(D)\} = \inf\left\{\left\|\frac{F}{B}+G\right\|_{L^\infty(T)};\ G \in I_A(D)\right\},$$

$$\|f\|_{B(K)} = \inf\{\|F+BG\|_{H^\infty(D)};\ G \in H^\infty(D)\} = \inf\left\{\left\|\frac{F}{B}+G\right\|_{L^\infty(T)};\ G \in H^\infty(D)\right\}.$$

Ce qui signifie que $\|f\|_{A(K)}$ (resp. $\|f\|_{B(K)}$) est la norme de $\frac{F}{B}$ dans l'espace quotient $L^\infty(T)/I_A(D)$ [resp. $L^\infty(T)/H^\infty(D)$], donc [$L^\infty(T)$ étant le dual de $L^1(T)$] est la norme de $\frac{F}{B}$ comme forme linéaire sur l'orthogonal $(I_A(D))^\perp$ [resp. $(H^\infty(D))^\perp$] de $I_A(D)$ [resp. $H^\infty(D)$] dans $L^1(T)$.

Montrons que $(I_A(D))^\perp = (H^\infty(D))^\perp$: $(H^\infty(D))^\perp$ est l'ensemble $H^1_0(D)$ des fonctions de $L^1(T)$ telles que $\int_{e^{i\theta}\in T} f(e^{i\theta})\, g(e^{i\theta})\, d\theta = 0$ pour tout g dans A(D) ([13], p. 198).

Soit alors f un élément de $(I_A(D))^\perp$ et g une fonction de A(D) et ε quelconque.

f étant dans $L^1(T)$ et E étant de mesure nulle, il existe un voisinage V de E dans T tel que $\int_{e^{i\theta}\in V} |f(e^{i\theta})|\, d\theta < \frac{\varepsilon}{2\|g\|_{A(D)}}$.

D'après le théorème de Rudin, il existe g' dans A(D) telle que

$$g'_{|E} = g_{|E},$$
$$\|g'\| = \|g\|,$$
$$|g'(e^{i\theta})| \leq \frac{\varepsilon}{2\|f\|_{L^1(T)}} \qquad \text{pour} \quad e^{i\theta} \in T \setminus V,$$

alors

$$\left|\int_{e^{i\theta}\in T} f(e^{i\theta})\, g(e^{i\theta})\, d\theta\right|$$
$$= \left|\int_{e^{i\theta}\in T} f(e^{i\theta})\, g'(e^{i\theta})\, d\theta\right|$$
$$\leq \|g'\| \int_{e^{i\theta}\in V} |f(e^{i\theta})|\, d\theta + \sup_{e^{i\theta}\in T\setminus V} |g'(e^{i\theta})| . \|f\|_{L^1(T)} < \varepsilon \quad \text{pour tout } \varepsilon,$$

donc

$$\int_{e^{i\theta}\in\mathrm{T}} f(e^{i\theta})\, g(e^{i\theta})\, d\theta = 0 \qquad \text{pour tout } g \text{ dans } \mathrm{A}(\mathrm{D}),$$

d'où

$$(\mathrm{I}_{\mathrm{A}}(\mathrm{D}))^{\perp} = (\mathrm{H}^{\infty}(\mathrm{D}))^{\perp} = \mathrm{H}^{1}_{0}(\mathrm{D}).$$

On en déduit que $\|f\|_{\mathrm{A}(\mathrm{K})}$ est égal à $\|f\|_{\mathrm{B}(\mathrm{K})}$ comme norme d'une forme linéaire sur le même espace $\mathrm{H}^{1}_{0}(\mathrm{D})$.

C. Q. F. D.

Finalement, en remarquant que $\mathrm{A}(\mathrm{K})$ est fermée dans $\mathcal{C}(\mathrm{K})$, si et seulement si, ou bien $\mathrm{E} = \mathrm{T}$, ou bien $m(\mathrm{E}) = 0$ et S est d'interpolation pour $\mathrm{H}^{\infty}(\mathrm{D})$, on obtient comme conclusion de l'étude faite, et en particulier de la proposition 3.1 et du théorème 3.3, le théorème 3.1 énoncé au début de cette 3e partie.

3.4. *Étude des spectres de* $\mathrm{A}(\mathrm{K})$ *et* $\tilde{\mathrm{A}}(\mathrm{K})$. — On suppose dans cette partie que $\mathrm{S} = \{\alpha_n;\ n \in \mathbf{N}\}$ est une suite de Blaschke dont l'ensemble E des points d'accumulation sur T est de mesure nulle.

Proposition 7. — *Si* S *est une suite non d'interpolation, l'application canonique* π *de* $\mathrm{Sp}\,\tilde{\mathrm{A}}(\mathrm{K}) = \mathrm{Sp}\,\mathrm{B}(\mathrm{K})$ *dans* $\mathrm{Sp}\,\mathrm{A}(\mathrm{K})$ *n'est pas toujours un isomorphisme.*

D'après ce que nous avons rappelé au début du paragraphe 1, K étant fermé-Zariski pour $\mathrm{A}(\mathrm{D})$ le spectre de $\mathrm{A}(\mathrm{K})$ est K. $\mathrm{B}(\mathrm{K})$ est une sous-algèbre de l'algèbre $\mathrm{H}^{\infty}(\mathrm{S})$ dont le spectre est l'adhérence-Zariski $\tilde{\mathrm{S}}$ de S dans $\mathrm{Sp}\,\mathrm{H}^{\infty}(\mathrm{D})$, et d'après le théorème de factorisation, $\tilde{\mathrm{S}}$ est l'ensemble des éléments m de $\mathrm{Sp}\,\mathrm{H}^{\infty}(\mathrm{D})$ qui annulent le produit de Blaschke associé à S.

Nous allons étudier le cas où E *est réduit à un point* α.

Si F est une fonction de $\mathrm{H}^{\infty}(\mathrm{D})$ telle que $\mathrm{F}|\mathrm{S}$ soit dans $\mathrm{B}(\mathrm{K})$ alors $\mathrm{F}(\alpha_n)$ tend vers une limite λ quand n tend vers l'infini. $\overline{\overline{\mathrm{S}}}$ désignant l'adhérence topologique de S dans $\mathrm{Sp}\,\mathrm{H}^{\infty}(\mathrm{D})$ (qui est contenue dans $\tilde{\mathrm{S}}$) et $\mathfrak{M}_{\alpha}$ la fibre de $\mathrm{Sp}\,\mathrm{H}^{\infty}(\mathrm{D})$ au-dessus de α, tout point Φ de $\overline{\overline{\mathrm{S}}} \cap \mathfrak{M}_{\alpha}$ est point d'accumulation pour S donc $\hat{\mathrm{F}}(\Phi) = \lambda$.

Réciproquement, si F est une fonction de $\mathrm{H}^{\infty}(\mathrm{D})$ telle que $\hat{\mathrm{F}}$ soit égale à une constante λ sur $\overline{\overline{\mathrm{S}}} \cap \mathfrak{M}_{\alpha}$, alors $\mathrm{F}(\alpha_n) \to \lambda$ quand $n \to \infty$: en effet, sinon il existerait une sous-suite $\mathrm{S}' = \{\beta_n;\ n \in \mathbf{N}\}$ de S et un nombre λ' différent de λ tel que $\mathrm{F}(\beta_n) \to \lambda'$ quand $n \to \infty$, donc comme on l'a vu ci-dessus $\hat{\mathrm{F}}$ serait égal à λ' sur $\overline{\overline{\mathrm{S}'}} \subset \overline{\overline{\mathrm{S}}}$, ce qui n'est pas possible.

B(K) est donc la sous-algèbre de $H^\infty(S)$ formée des fonctions dont la transformée de Gelfand dans $H^\infty(S)$ est constante sur $\overline{\overline{S}} \cap \mathfrak{M}_\alpha$.

On sait alors [5] que le spectre de B(K) est l'espace quotient de $\tilde{S}$ par la relation d'équivalence qui identifie à un point tous les points de l'adhérence-Zariski de $\overline{\overline{S}} \cap \mathfrak{M}_\alpha$ dans $\mathrm{Sp}\, H^\infty(S)$.

Donc $\mathrm{Sp}\,B(K) \simeq \dfrac{S}{\widetilde{\overline{\overline{S}} \cap \mathfrak{M}_\alpha}}$, où $\widetilde{\overline{\overline{S}} \cap \mathfrak{M}_\alpha}$ est l'adhérence-Zariski de $\overline{\overline{S}} \cap \mathfrak{M}_\alpha$ dans $\mathrm{Sp}\,H^\infty(D)$.

L'application canonique π de $\mathrm{Sp}\,\tilde{A}(K) = \dfrac{S \cup (\tilde{S} \cap \mathfrak{M}_\alpha)}{\widetilde{\overline{\overline{S}} \cap \mathfrak{M}_\alpha}}$ dans $\mathrm{Sp}\,A(K) \sim S \cup \{\alpha\}$ est donc surjective. Elle est biunivoque sur S et envoie les points de $\dfrac{\tilde{S} \cap \mathfrak{M}_\alpha}{\widetilde{\overline{\overline{S}} \cap \mathfrak{M}_\alpha}}$ au point α. Cette application sera donc injective si et seulement si $\tilde{S} \cap \mathfrak{M}_\alpha = \widetilde{\overline{\overline{S}} \cap \mathfrak{M}_\alpha}$. Si $\overline{\overline{S}} = \tilde{S}$, alors $\tilde{S} \cap \mathfrak{M}_\alpha = \overline{\overline{S}} \cap \mathfrak{M}_\alpha = \overline{\overline{S}} \cap \mathfrak{M}_\alpha$ et l'application π est bijective.

Par exemple, si S est une suite d'interpolation $\tilde{S} = \overline{\overline{S}}$ ([13], p. 205), donc π est bijective [ce qui découle aussi directement du fait que dans ce cas $A(K) = B(K)$].

Si S est une suite non d'interpolation qui est l'union de deux suites d'interpolation S_1 et S_2 ([13], p. 208), alors d'après le théorème 3.1, A(K) est strictement contenu dans $\tilde{A}(K) = B(K)$ et

$$\tilde{S} = \tilde{S}_1 \cup \tilde{S}_2 = \overline{\overline{S}}_1 \cup \overline{\overline{S}}_2 = \overline{\overline{S}}, \qquad \text{donc} \quad \tilde{S} \cap \mathfrak{M}_\alpha = \widetilde{\overline{\overline{S}} \cap \mathfrak{M}_\alpha},$$

et l'application est bijective.

Nous allons maintenant montrer qu'il existe des suites S telles que l'application π ne soit pas un isomorphisme.

Pour cela il suffit de montrer qu'il existe un produit de Blaschke C associé à une suite S tel que $S \cap T = \{\alpha\}$, une fonction F de $H^\infty(D)$, et un point Φ_0 de $\mathfrak{M}_\alpha$, tels que

$$\begin{aligned} \hat{F}(\Phi) &= 0 \quad \text{pour } \Phi \text{ dans } \overline{\overline{S}} \cap \mathfrak{M}_\alpha, \\ \hat{C}(\Phi_0) &= 0, \\ \hat{F}(\Phi_0) &\neq 0. \end{aligned}$$

En effet, alors le point Φ_0 sera dans $\mathfrak{M}_\alpha \cap \tilde{S}$ et non dans $\widetilde{\overline{\overline{S}} \cap \mathfrak{M}_\alpha}$.

Pour cela considérons une suite $Q = \{\alpha_n;\ n \in \mathbf{N}\}$ de Blaschke et le produit de Blaschke associé F. On a montré dans la démonstration du théorème 2.1 qu'il existait une suite $S = \{\gamma_n;\ n \in \mathbf{N}\}$ de Blaschke (obtenue en ajoutant beaucoup de points autour de chaque point de Q) telle que si C est le produit de Blaschke associé à S, alors

$\Phi(C) = 0$ pour tout Φ dans $\mathrm{Sp}\,H^\infty(D)$ tel que $|\Phi(F)| < 1$, et

$F(\gamma_n) \to 0$ quand $n \to \infty$.

Donc $\hat{F}(\Phi) = 0$ pour Φ dans $\overline{\overline{S}} \cap \mathfrak{M}_\alpha$.

Et si on considère un point Φ_0 de $\mathfrak{M}_\alpha$ tel que $|\Phi_0(F)|$ soit inférieur à 1 et non nul. On a

$$\hat{C}(\Phi_0) = 0, \qquad \hat{F}(\Phi_0) \neq 0.$$

C. Q. F. D.

L'étude des spectres de A(K) et B(K) conduit donc à la comparaison des trois ensembles

$$\overline{\overline{S}} \cap \mathfrak{M}_\alpha, \qquad \widetilde{\overline{\overline{S}} \cap \mathfrak{M}_\alpha}, \qquad \tilde{S} \cap \mathfrak{M}_\alpha,$$

Nous allons voir que si $\overline{\overline{S}} \neq \tilde{S}$, $\widetilde{\overline{\overline{S}} \cap \mathfrak{M}_\alpha}$ n'est pas toujours fermé-Zariski.

Si S est une suite de Blaschke obtenue à partir d'une suite Q d'interpolation en rajoutant comme précédemment beaucoup de points autour de chaque point de Q, on a $\overline{\overline{Q}} = \overline{\overline{S}}$ et, d'autre part, $\overline{\overline{Q}} = \tilde{Q}$; donc $\overline{\overline{S}} \cap \mathfrak{M}_\alpha$ est égal à $\tilde{Q} \cap \mathfrak{M}_\alpha$ et est fermé-Zariski.

Supposons maintenant que α étant égal à 1, $S = \{\alpha_n;\ n \in \mathbf{N}\}$ est une suite de Blaschke portée par l'intervalle $[0, 1]$ telle que la distance hyperbolique $\chi(\alpha_n, \alpha_{n+1})$ tende vers zéro quand $n \to \infty$ (*cf.* [20] pour l'étude de telles suites).

Nous allons indiquer rapidement pourquoi dans ce cas $\overline{\overline{S}} \cap \mathfrak{M}_\alpha \neq \widetilde{\overline{\overline{S}} \cap \mathfrak{M}_\alpha}$, en utilisant la décomposition de $\mathrm{Sp}\,H^\infty(D)$ en parts de Gleason qui sont soit des disques soit des points parts [15].

Tous les points de $\overline{\overline{S}} \cap \mathfrak{M}_1$ étant non tangentiels, ce sont des points non parts.

On vérifie aussi que $\overline{\overline{[0, 1]}} \cap \mathfrak{M}_1 = \overline{\overline{S}} \cap \mathfrak{M}_1$. Mais si $\overline{\overline{[0, 1]}} \cap \mathfrak{M}_1$ coupe une part P elle la coupe suivant une infinité non dénombrable de points, donc toute fonction $\hat{F}$ de $H^\infty(D)$ nulle sur $\overline{\overline{S}} \cap \mathfrak{M}_1$ est identiquement nulle sur les parts coupées par $\overline{\overline{[0, 1]}} \cap \mathfrak{M}_1 = \overline{\overline{S}} \cap \mathfrak{M}_1$, donc sur leur adhérence; or si par exemple une telle part P est telle que $\hat{H}^\infty(D)|P$ soit isomorphe à $H^\infty(D)$, l'adhérence de P contient des points parts.

On en déduit que $\widetilde{\overline{\overline{S}} \cap \mathfrak{M}_1}$ contient des points parts alors que $\overline{\overline{S}} \cap \mathfrak{M}_1$ n'en contient pas. Donc $\widetilde{\overline{\overline{S}} \cap \mathfrak{M}_1} \neq \overline{\overline{S}} \cap \mathfrak{M}_1$.

Je ne sais pas si dans ce cas $\widetilde{\overline{\overline{S}} \cap \mathfrak{M}_1} = \tilde{S} \cap \mathfrak{M}_1$.

Une hypothèse raisonnable est la suivante :

Si S est une suite de Blaschke dont les points s'accumulent en un point α de T, alors $\widetilde{\overline{\overline{S}} \cap \mathfrak{M}_1} = \tilde{S} \cap \mathfrak{M}_1$ si et seulement si $\tilde{S} = \overline{\overline{S}}$.

§ 4. Ensembles d'interpolation. — Dans cette partie nous généralisons à des ensembles quelconques de mesure nulle de T, les théorèmes classiques de Fatou et Rudin caractérisant les fermés de mesure nulle comme ensembles pics et ensembles d'interpolation pour l'algèbre A(D) et nous obtenons une caractérisation des ensembles d'interpolation pour l'algèbre $H_E(D)$ qui généralise les résultats obtenus dans [12].

On notera $\mathcal{C}_b(X)$ l'algèbre des fonctions continues bornées sur un espace topologique X.

4.1. Théorème 4.1. — *Soit* E *un ensemble quelconque de* T, *les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $m(E) = 0$;

(ii) *Pour tout ouvert* O *contenant* E, *pour tout* ε *positif, il existe une fonction* F *de* $H_{E \cup (T \setminus \overline{E})}(D)$ *telle que* $\|F\| = 1$, $F(z) = 1$ *pour* z *dans* E, *et* $|F(z)| < \varepsilon$ *pour* z *dans* $D \setminus O$.

(ii) $\Rightarrow$ (i). En effet, soit F une fonction donnée par la condition (ii). Alors E est contenu dans l'ensemble $E' = \{e^{i\theta},\ 1 - F(re^{i\theta}) \to 0,\ r \to 1\}$ qui est un ensemble de mesure nulle.

Pour la réciproque, on démontre tout d'abord le lemme suivant :

Lemme 4.1. — *Soit* E *un ensemble quelconque de mesure nulle de* T. *Pour tout ouvert* O *contenant l'adhérence topologique* $\overline{E}$ *de* E, *et tout* ε *positif, il existe une fonction* F *de* $H_{E \cup (T \setminus \overline{E})}(D)$ *telle que* $\|F\| \leqq 1$, $F(z) = 0$ *pour* z *dans* E, $|F(z) - 1| < \varepsilon$ *pour* z *dans* $D \setminus O$ *et* $\operatorname{Arg} F(z) < \varepsilon$, *pour* z *dans* D.

En effet, il existe une suite $\{U_n\}$ de voisinages de $\overline{E}$, une suite $\{U'_n\}$ de voisinages de E telles que

$$m(U_n \setminus \overline{E}) < \frac{1}{(n+1)^4}, \qquad m(U'_n) < \frac{1}{n^4}, \qquad U'_n \subset U_n, \qquad \overline{U}_n \subset U_{n-1}.$$

Il existe alors une suite $\{f_n\}$ de fonctions définies sur T telle que pour tout n :

f_n est positive et de norme n^2,

f_n est continuement différentiable sur $T \setminus \overline{E}$,

$f_n(e^{i\theta}) = n^2$ pour $e^{i\theta}$ dans U'_n,

$f_n(e^{i\theta}) = 0$ pour $e^{i\theta}$ dans $(T \setminus U_{n-1}) \cup (\overline{E} \setminus U'_n)$.

Posons $f = \sum_{n \in \mathbf{N}} f_n$.

Alors pour tout ouvert disjoint de $\overline{E}$, il n'y a qu'un nombre fini de fonctions de la suite $\{f_n\}$ qui ne sont pas nulles, donc f est continuement différentiable sur $T\setminus\overline{E}$.

D'autre part,

$$\int_{e^{i\theta}\in T} f(e^{i\theta})\,d\theta = \sum_{n\in\mathbf{N}} \int_{e^{i\theta}\in T} f_n(e^{i\theta})\,d\theta \leq \sum_{n\in\mathbf{N}} n^2 \times m(U_{n-1}\setminus\overline{E}) + n^2 m(U'_n) < \infty,$$

donc f est dans $L^1(T)$.

Enfin ([22], p. 105) pour tout $e^{i\theta}$ de E,

$$\liminf f(z) \geq \liminf f_n(z) = n^2 \qquad \text{si} \quad z \to e^{i\theta}.$$

Donc $f(z) \to +\infty$ pour $z \to e^{i\theta}$.

Alors si $\tilde{f}$ désigne la fonction conjuguée de f, $\tilde{f}$ est continue sur $T\setminus\overline{E}$, donc bornée sur $D\setminus O$ et il existe un entier p tel que la fonction

$$F(z) = \frac{1}{[1 + f(z) + i\tilde{f}(z)]^{\frac{1}{p}}}$$

satisfasse aux conditions du lemme.

C. Q. F. D.

Supposons maintenant que E soit un ensemble de mesure nulle et soit O un ouvert contenant E. $O \cap T$ est union dénombrable d'arcs ouverts disjoints J_n. Chacun de ces arcs J_n est union dénombrable d'arcs fermés d'intérieurs disjoints tels que l'ensemble de leurs extrémités est sans point d'accumulation dans J_n. Soit $\{I_n\}$ l'ensemble de tous ces arcs fermés. Quitte à enlever les arcs de cette suite qui ne contiennent aucun point de E, on peut supposer que les points d'accumulation de l'ensemble des extrémités de ces arcs appartiennent à $\overline{E}$.

Il existe alors une suite $\{O_n\}$ d'ouverts tels que $I_n \subset O_n \subset o$, chaque O_n ne coupe que deux autres ouverts de la suite et tout compact de $D\setminus\overline{E}$ ne rencontre qu'un nombre fini d'ouverts de la suite.

ε étant donné, on choisit une suite $\{\varepsilon_n\}$ et un nombre N tel que $\sum_{n\in\mathbf{N}} \varepsilon_n < \frac{\pi}{2}$ et $N\pi(1-\varepsilon_n) > -\operatorname{Log}\varepsilon$; et on applique le lemme 4.1 à l'ensemble $E_n = J_n \cap E$, avec l'ouvert O_n et ε_n; on construit ainsi une suite $\{G_n\}$ de fonctions de $H_{E_n \cup (T\setminus\overline{E}_n)}(D)$ donc de $H_{\overline{E}_n \cup (T\setminus E)}(D)$ telle que $\|G_n\| \leq 1$, $G_n(z) = 0$ pour z dans E_n, $|G_n(z) - 1| < \varepsilon_n$ pour z dans $D\setminus O_n$ et $\operatorname{Arg} G_n(z) < \varepsilon_n$. Le produit $\prod_{n\in\mathbf{N}} G_n$ converge ponctuellement sur D et uniformément sur tout compact de $D \setminus \overline{E}$; donc il définit une fonction de $H_{T \setminus \overline{E}}(D)$; de plus, $G(z) < G_n(z) \to 0$ si z tend vers un point de E_n. Donc $G(z)$ est dans $H_{E \cup (T \setminus \overline{E})}(D)$, de partie réelle positive et $e^{-NG(z)} < \varepsilon$ pour z dans $D \setminus O$. La fonction e^{-NG} satisfait à la condition (ii) du théorème.

COROLLAIRE 4.1. — *Soit* E *un ensemble de mesure nulle de* T, *l'injection canonique de l'algèbre* $H_{E \cup (T \setminus \overline{E})}(D) \mid E$, *munie de la norme quotient, dans* $\mathcal{C}_b(E)$ *est isométrique. En particulier, cette algèbre est une sous-algèbre fermée de* $\mathcal{C}_b(E)$.

En effet, soit f un élément de $H_{E \cup (T \setminus \overline{E})}(D) \mid E$ et ε un nombre quelconque; soit F une fonction de $H_{E \cup (T \setminus \overline{E})}(D)$ telle que $F(e^{i\theta}) = f(e^{i\theta})$ pour $e^{i\theta}$ dans E. F étant continue sur $D \cup E$, il existe un ouvert O contenant E tel que $|F(z)| \leq \|f\|_\infty + \varepsilon$ pour z dans O. D'après le théorème 4.1, il existe une fonction G de $H_{E \cup (T \setminus \overline{E})}(D)$ telle que $\|G\| = 1$, $G(e^{i\theta}) = 1$ pour $e^{i\theta}$ dans E et $|G(z)| < \frac{\varepsilon}{\|F\|}$ pour z dans $D \setminus O$. La fonction FG est égale à f sur E et est de norme inférieure à $\|f\|_\infty + \varepsilon$.

C. Q. F. D.

4.2. THÉORÈME 4.2. — *Soit* E *un ensemble quelconque de* T; *les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $m(E) = 0$;

(ii) $C_b(E) = H_{E \cup (T \setminus \overline{E})}(D) \mid E$.

Si la condition (ii) est vérifiée, le spectre de l'algèbre $H_{E \cup (T \setminus \overline{E})}(D) \mid E$ n'est pas isomorphe au spectre de $H_{E \cup (T \setminus \overline{E})}(D)$; en particulier, il existe une fonction de $H_{E \cup (T \setminus \overline{E})}(D)$ nulle sur E non identiquement nulle; et comme dans le théorème 4.1, on en déduit que $m(E) = 0$.

Réciproquement, supposons que $m(E) = 0$.

L'algèbre $\mathcal{C}_b(E)$ s'identifie à l'algèbre $\mathcal{C}(\check{E})$ où $\check{E}$ désigne le compactifié de Stone-Cech de E, et $H_{E \cup (T \setminus \overline{E})}(D) \mid E$ s'identifie à une sous-algèbre de $\mathcal{C}(\check{E})$ que nous noterons $A(\check{E})$ et qui, d'après le corollaire 4.1, est une algèbre fermée de $\mathcal{C}(\check{E})$ et il suffit de montrer que $A(\check{E})$ est dense dans $\mathcal{C}(\check{E})$.

Pour cela nous considérons deux compacts K_1 et K_2 de $\check{E}$ et ε un nombre quelconque, il existe deux voisinages V_1 et V_2 de K_1 et K_2, compacts et disjoints et nous notons $K'_1 = V_1 \cap E$ et $K'_2 = V_2 \cap E$; du fait que E est dense dans $\check{E}$, tout point de K_1 (resp. K_2) est adhérent à K'_1 (resp. K'_2).

K'_1 et K'_2 sont deux fermés relatifs de E; ils sont donc de mesure nulle et

$$H_{K'_1 \cup (T \setminus \overline{K}'_1)}(D) \subset H_{E \cup (T \setminus \overline{E})}(D).$$

On peut alors appliquer le théorème 4.1 à K'_1 : il existe une fonction F de $H_{K'_1 \cup (T \setminus \overline{K}'_1)}(D)$ donc de $H_{E \cup (T \setminus \overline{E})}(D)$ telle que

$$\|F\| = 1, \qquad F(z) = 1 \quad \text{pour } z \text{ dans } K'_1,$$
$$|F(z)| < \varepsilon \quad \text{pour } z \text{ dans } K'_2.$$

On considère l'image $\check{f}$ de la restriction à E de F dans $A(\check{E})$, et on conclut alors que pour tous compacts disjoints K_1 et K_2 de $\check{E}$, et tout nombre ε, il existe une fonction $\check{f}$ de $A(\check{E})$ telle que

$$\|\check{f}\| = 1, \qquad \check{f}(x) = 1 \quad \text{pour } x \text{ dans } K_1,$$
$$|\check{f}(x)| < \varepsilon \quad \text{pour } x \text{ dans } K_2.$$

On en déduit facilement qu'étant donné une mesure μ sur $\check{E}$ orthogonale à $A(\check{E})$, sa restriction à tout compact est nulle; μ est donc nulle et $A(\check{E})$ est dense dans $\mathcal{C}(\check{E})$ donc égale à $\mathcal{C}(\check{E})$. Le théorème est donc démontré.

Dans le cas où E n'est pas de mesure nulle, on a la proposition suivante :

PROPOSITION 4.1. — *Soit* E *un ensemble quelconque de* T, *alors*

$$\mathcal{C}_b(E) = L_{E \cup (T \setminus \overline{E})}(T) \mid E.$$

Soit f une fonction de $\mathcal{C}_b(E)$ de norme 1.

Pour tout α dans E, il existe un arc ouvert $I(\alpha)$ tel que $|f(\alpha) - f(\beta)| < \frac{1}{4}$ pour β dans $I(\alpha) \cap E$. En décomposant l'ouvert $O = \bigcup_{\alpha \in E} I(\alpha)$ comme dans le théorème 4.1, en arcs fermés d'intérieurs disjoints, on en déduit que O est union dénombrable d'arcs J_n, fermés d'intérieurs disjoints tels que les points d'accumulation de l'ensemble de leurs extrémités appartiennent à $\overline{E}$ et qu'il existe une suite $\{\alpha_n\}$ de points de $E \cap J_n$ avec $|f(\alpha_n) - f(\beta)| < \frac{1}{4}$ pour β dans $E \cap J_n$.

On définit alors sur T une fonction G_1 :

$\|G_1\| < 2$;

$G_1(e^{i\theta}) = 0$ pour $e^{i\theta}$ dans $T \setminus \bigcup_{n \in \mathbf{N}} J_n$.

G_1 est continue sur chaque J_n, de variation totale sur $\overline{J_n \cap E}$ inférieure à $\frac{1}{4}$, $G_1(\alpha_n) = f(\alpha_n)$; de plus, si une des extrémités β_n de J_n appartient à E (resp. à $T \setminus \overline{E}$) on pose $G_1(\beta_n) = f(\beta_n)$ [resp. $G_1(\beta_n) = 0$].

Alors G_1 est continue en chaque point de $E \cup (T \setminus \overline{E})$.

Donc G_1 appartient à $L_{E\cup(T\setminus\overline{E})}(T)$; $\|G_1\| < 2$; et $|f(e^{i\theta}) - G_1(e^{i\theta})| < \frac{1}{2}$ pour $e^{i\theta}$ dans E; par un argument standard de série géométrique en insérant le procédé, on conclut que f est dans $L_{E\cup(T\setminus\overline{E})}(T)$.

C. Q. F. D.

4.3. Définition 4.1. — *Soit* E *un ensemble quelconque de* T. *Un fermé relatif* K *de* $D\cup E$ *est d'interpolation pour* $H_E(D)$ *si* $\mathcal{C}_b(E) = H_E(D)\,|\,K$.

On établit alors le théorème suivant qui généralise le cas de l'algèbre A(D) ([13], p. 208) et le cas où E est ouvert [12].

Théorème 4.3. — *Un fermé relatif* K *de* $D\cup E$ *est d'interpolation pour* $H_E(D)$ *si et seulement si :*

(i) $m(K\cap E) = 0$;

(ii) $K\cap D$ *est une suite d'interpolation pour* $H^\infty(D)$ [i. e. $H^\infty(D)\,|\,K\cap D \sim l^\infty$].

On vérifie facilement que les conditions (i) et (ii) sont nécessaires. Réciproquement, supposons que (i) et (ii) soient vérifiées; remarquons tout d'abord que

$$H_{(K\cap E)\cup T\setminus(\overline{K\cap E})}(D) \subset H_E(D).$$

Soit f une fonction de $\mathcal{C}_b(E)$. D'après le théorème 4.2, il existe une fonction F de $H_E(D)$ égale à f sur $K\cap E$ et il suffit d'interpoler la fonction $f - F\,|\,K$.

On peut donc supposer que f est nulle sur $K\cap E$ et de norme inférieure ou égale à 1. On sait, d'après le corollaire 1.1 de la 1re partie, que

$$H^\infty(D)\,|\,K\cap D = H_{T\setminus\overline{K\cap D}}(D)\,|\,K\cap D,$$

donc

$$l^\infty \sim H_{E\setminus K}(D)\,|\,K\cap D.$$

Il existe alors une constante M ne dépendant que de K et de E et une fonction F_1 de $H_{E\setminus K}(D)$ telle que

$$\|F_1\| < M \qquad \text{et} \qquad F_1(\alpha) = f(\alpha) \quad \text{pour } \alpha \text{ dans } K\cap D.$$

Et il existe un ouvert O contenant $K\cap E$ tel que

$$F_1(\alpha) < \frac{1}{4} \quad \text{pour } \alpha \text{ dans } K\cap O.$$

D'autre part, d'après le théorème 4.1, il existe une fonction F_2 de $H_E(D)$ telle que

$$\|F_2\| = 1, \qquad F_2(\alpha) = 0 \quad \text{pour } \alpha \text{ dans } K\cap E$$

et

$$|F_2(\alpha)| > \frac{1}{2M} \quad \text{pour } \alpha \text{ dans } D \setminus O.$$

Alors la fonction $F_1 F_2$ est dans $H_E(D)$, nulle sur $K \cap E$

$$\|F_1 F_2\| < M \qquad \text{et} \qquad |F_1 F_2(\alpha) - f(\alpha)| < \frac{1}{2} \quad \text{pour } \alpha \text{ dans } K.$$

Par le même argument standard que précédemment, on en déduit que f est dans $H_E(D) | K$.

C. Q. F. D.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] E. AKUTOWICZ and L. CARLESON, *The analytic continuation of interpolatory functions* (*J. Anal. Math.*, 1959-1960, p. 223-247).

[2] L. BROWN, A. SHIELDS and K. ZELLER, *On absolutely convergent exponential sums* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 96, 1960, p. 162-183).

[3] L. CARLESON, *Interpolation by bounded analytic functions and the corona problem* (*Annals of Math.*, vol. 76, 1962, p. 547-559).

[4] E. COLLINGWOOD and A. LOHWATER, *The theory of cluster sets*, Cambridge University Press.

[5] J. DÉTRAZ, *Sous-algèbres d'algèbres de Banach* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 264, série A, 1967, p. 187-189).

[6] J. DÉTRAZ, *Algèbres de restrictions du disque* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 268, série A, 1969, p. 853-856).

[7] J. DÉTRAZ, *Algèbres de restrictions du disque* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 269, série A, 1969, p. 688-691).

[8] J. DÉTRAZ, *Étude du spectre d'algèbres de fonctions analytiques sur le disque unité* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 269, série A, 1969, p. 833-835).

[9] J. DÉTRAZ, *Somme d'idéaux dans l'algèbre de Banach* (sous presse).

[10] R. DOUGLAS and W. RUDIN, *Approximation by inner functions* (*Pacific J. Math.*, vol. 31, 1969, p. 313-320).

[11] A. GLEASON, *A characterisation of maximal ideals* (*J. Anal. Math.*, vol. 19, 1967, p. 171-172).

[12] A. HEARD and J. WELLS, *An interpolation problem for subalgebras of* H^∞ (*Pacific J. Math.*, vol. 28, 1969, p. 543-553).

[13] K. HOFFMAN, *Banach spaces of analytic functions*, Prentice Hall.

[14] K. HOFFMAN, *Analytic functions and logmodular Banach algebras* (*Acta Math.*, vol. 108, 1962, p. 271-317).

[15] K. HOFFMAN, *Bounded analytic functions and Gleason parts* (*Ann. Math.*, vol. 86, 1967, p. 74-111).

[16] J.-P. KAHANE and W. ŽELAZKO, *A characterization of maximal ideals in commutative Banach algebras* (*Studia Math.*, vol. 29, 1968, p. 339-343).

[17] M. Naimark, *Normed rings*, P. Nordhoff.

[18] J. P. Rosay, *Sur un problème posé par W. Rudin* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 267, série A, 1968, p. 922-925).

[19] J. P. Rosay, *Séparation des points du spectre de* $H^\infty(D)$ *par les fonctions intérieures*, Sém. Anal. fonctionnelle de Grenoble, 1968-1969.

[20] M. Rosenfeld et M. Weiss, *Bounded analytic functions tending radially to zero* (*Proc. London Math. Soc.*, vol. 18, 1968, p. 714-726).

[21] N. Varopoulos, *On a problem of A. Beurling* (*J. Funct. Analysis*, vol. 2, 1968, p. 24-30).

[22] A. Zygmund, *Trigonometrie series*, vol. 1, Cambridge University Press.

(Manuscrit reçu le 15 juillet 1970.)

Jacqueline Détraz,
Département de Mathématiques,
Faculté des Sciences,
91-Orsay.