

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

ANDRÉ GRAMAIN

Sur les immersions de codimension 1 qui sont des bords

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4^e série, tome 3, n° 2 (1970), p. 111-184

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1970_4_3_2_111_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LES IMMERSIONS DE CODIMENSION 1 QUI SONT DES BORDS

PAR ANDRÉ GRAMAIN.

TABLE DES MATIÈRES.

	Pages.
INTRODUCTION.....	112
CHAPITRE I : <i>Degré normal d'une immersion de codimension 1</i>	114
1. Classe de Thom et caractéristique d'Euler pour les variétés à bord.....	115
2. Définition du degré.....	121
3. Immersions bordantes, théorème de <i>curvatura integra</i>	126
CHAPITRE II : <i>La classification des immersions</i>	130
1. La classification des immersions.....	130
2. Points-bases.....	136
3. Immersions bordantes.....	138
4. Sommes connexes.....	139
CHAPITRE III : <i>Classes des immersions bordantes de S^n dans R^{n+1} ou S^{n+1}</i>	145
1. Le degré normal.....	145
2. Variétés stablement parallélisables.....	146
3. Le noyau de s	150
4. Étude détaillée.....	154
5. Des représentants pour chaque classe bordante.....	155
CHAPITRE IV : <i>Classes des immersions bordantes de S^n dans une variété de dimension $n + 1$</i>	158
1. La construction de l'application J	159
2. Démonstration du théorème 1.....	161
3. Additivité de J et applications.....	165
CHAPITRE V : <i>Les variétés stablement parallélisables</i>	168
1. Immersions dans R^{n+1} et S^{n+1}	169
2. Construction d'immersions dans R^{n+1}	170
3. Immersions bordantes.....	173
APPENDICE : <i>Immersion des surfaces dans R^3</i>	179
BIBLIOGRAPHIE.....	183

INTRODUCTION.

Les travaux de S. Smale sur les immersions différentiables (1959) ont permis d'établir la classification des immersions, c'est-à-dire de caractériser l'ensemble des composantes connexes de l'espace $\text{Imm}(V, M)$ des immersions de V dans M . A l'aide de ces résultats, on a pu résoudre, c'est-à-dire ramener à un problème d'homotopie, le problème de l'extension des immersions. Il s'agit du problème suivant : soit W^{n+1} une variété de bord dW , à quelle condition une immersion de dW dans une variété M^{n+q} est-elle la restriction d'une immersion de W ?

Le seul cas échappant à la méthode est celui de la codimension $q = 1$. Ce problème d'extension des immersions de codimension 1 n'est pas dépourvu d'intérêt : sa solution dans le cas particulier où dW est la sphère S^2 permettrait de résoudre le problème de Poincaré en dimension 3 (cf. [22]). Le seul cas actuellement résolu est le problème de l'extension au disque des immersions du cercle dans le plan. Le problème, qui avait été formulé autrefois par H. Hopf, vient d'être résolu (1967) par S. Blanck (cf. [22]). La complexité et la nature de la solution dans ce cas laissent penser qu'avec des données moins élémentaires on ne peut donner que des solutions partielles.

Il nous a semblé qu'un premier pas dans l'étude du problème général d'extension était la caractérisation à homotopie régulière près des immersions prolongeables. On a oublié la variété W et on s'est posé le problème suivant ⁽¹⁾ : soit $f: V^n \rightarrow M^{n+1}$ une immersion, à quelle condition l'immersion f est-elle régulièrement homotope à la restriction au bord $dW = V$ d'une immersion $g: W \rightarrow M$? La variété M est une variété sans bord, compacte ou non ; on suppose toutes les variétés orientées, et on exige que V soit le bord orienté de W et que g soit une immersion orientée (de codimension 0). Le résultat principal de ce Mémoire est une caractérisation, lorsque V est stablement parallélisable, des classes des immersions bordantes de V dans M .

Pour obtenir cette caractérisation, on a procédé par étapes. La première (chap. III) consiste à calculer toutes les classes d'immersions de S^n dans R^{n+1} qui possèdent une extension (classes bordantes). On calcule en même temps les classes des immersions bordantes de S^n dans S^{n+1} .

⁽¹⁾ Dans [27], R. Wells, en utilisant les travaux de R. Thom ([25]) et la classification des immersions, a calculé les groupes de cobordisme des immersions de codimension q dans R^{n+q} . La relation de cobordisme est moins fine que celle qui se déduit de l'extension des immersions : une immersion est cobordante à 0 si elle est le bord d'une immersion dans $M \times [0, 1]$.

Lorsqu'on a identifié convenablement (classification des immersions) l'ensemble $\pi_0(\text{Imm}(S^n, S^{n+1}))$ à $\pi_n(\mathbf{SO})$, l'ensemble des classes bordantes est le noyau de l'homomorphisme stable de Hopf-Whitehead $J_n : \pi_n(\mathbf{SO}) \rightarrow \Pi_n$. Lorsqu'on a identifié $\pi_0(\text{Imm}(S^n, R^{n+1}))$ à $\pi_n(\mathbf{SO}(n+1))$, l'ensemble des classes bordantes, si $n \geq 2$, est l'image réciproque de $\ker(J_n)$ par l'homomorphisme de stabilisation. La comparaison des deux résultats, en considérant R^{n+1} comme le complémentaire d'un point de S^{n+1} , est assez surprenante pour $n \geq 2$: une immersion de S^n dans R^{n+1} qui est bordante dans S^{n+1} , est régulièrement homotope dans R^{n+1} à une immersion bordante. Ceci se généralise aux immersions d'une variété stablement parallélisable quelconque (chap. V, th. 1).

La seconde étape (chap. V) consiste à construire, pour toute variété stablement parallélisable V^n , une application J_V de $\pi_0(\text{Imm}(V^n, M^{n+1}))$ dans un certain ensemble attaché à M . Le résultat précédent permet de démontrer, si $n \geq 2$, que l'ensemble des classes bordantes est l'image réciproque $J_V^{-1}(O)$ d'un certain point O . C'est la caractérisation cherchée.

Pour la clarté de l'exposition, on a d'abord donné (chap. IV) la construction de J_V dans le cas particulier où $V = S^n$. L'application J_V possède dans ce cas une propriété d'additivité qui la rend plus maniable. Il en résulte en particulier, lorsque M est simplement connexe, que l'ensemble des classes bordantes est un sous-groupe de $\pi_0(\text{Imm}(S^n, M))$ pour la loi de composition induite par la somme connexe. D'autre part, on a donné au chapitre V, à la suite de l'étude de J_V dans le cas général, des propriétés des variétés stablement parallélisables qui découlent à la fois de cette étude et des résultats du chapitre III sur les immersions de S^n dans R^{n+1} .

Tout ceci a nécessité l'examen soigneux des conséquences de la classification des immersions dans le cas de la codimension 1. Le chapitre II est consacré à cela ainsi qu'à l'étude des opérations de somme connexe. Enfin, on a utilisé des conditions nécessaires pour qu'une immersion soit bordante qui s'expriment à l'aide du degré normal. Le degré normal d'une immersion de codimension 1 dans l'espace euclidien a été étudié par H. Hopf. On a généralisé la définition à une variété d'arrivée M quelconque (chap. I). La nouvelle définition, un peu technique, utilise la classe de Thom du fibré tangent $T(M)$. Le degré ainsi défini est un reste mod $\chi(M)$ qui possède des propriétés analogues à celles du degré classique : on a, en particulier, un théorème de *curvatura integra* ⁽²⁾.

(2) Les théorèmes 1 et 2 du chapitre I ont fait l'objet de deux Notes à l'Académie des Sciences (*C. R. Acad. Sc.*, t. 266, série A, 1968, p. 1129-1131 et p. 1223-1225). Les théorèmes 1 et 2 du chapitre III et le théorème 1 du chapitre V ont été annoncés dans une Note au *Bulletin of the A. M. S. : Bounding immersions of codimension 1 in the euclidean space* (*Bull. A. M. S.*, vol. 76, 1970, p. 361-365).

Il m'est donné ici pour la première fois l'occasion de remercier mes professeurs, MM. Robert Désescaut, Gilbert Péronny, Henri Cartan et Nicolas Bourbaki. Ils m'ont enseigné les mathématiques et m'ont donné le goût de m'y consacrer. Qu'ils trouvent ici le témoignage de ma reconnaissance.

Je tiens à remercier, au début de ce Mémoire dont l'élaboration doit beaucoup à ses encouragements, mon ami Valentin Poenaru.

Qu'il me soit permis d'associer à ces remerciements MM. André Haefliger, Jean Cerf et René Thom qui ont accepté de faire partie du jury de cette thèse.

CHAPITRE I.

DEGRÉ NORMAL D'UNE IMMERSION DE CODIMENSION 1.

Soit V une variété différentiable compacte connexe orientée sans bord, de dimension n , et soit M une variété connexe orientée sans bord, compacte ou non, de dimension $n + 1$. Si $f: V \rightarrow M$ est une immersion, on va définir le degré $\alpha(f)$ de cette immersion.

Lorsque M est l'espace euclidien R^{n+1} , on définit classiquement le degré normal de l'immersion f comme le degré de Brouwer de l'application gaussienne $\varphi: V \rightarrow S^n$ qui, à chaque point x de V , associe le vecteur normal unitaire à $f(V)$ en $f(x)$. Le théorème de la *curvatura integra* (H. Hopf [9]) affirme que, lorsque n est pair, le degré de toute immersion f est égal à la moitié de la caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi(V)$ de la source.

Le degré qu'on va définir, lorsque M est arbitraire, est une généralisation de la *curvatura integra*. Cependant, il n'est défini que pour les immersions f telles que l'homomorphisme $H^n(f): H^n(M) \rightarrow H^n(V)$ soit nul. De plus, si M est compacte, le degré $\alpha(f)$ n'est défini que modulo $\chi(M)$ (caractéristique d'Euler du but). On retrouvera néanmoins un théorème de *curvatura integra* comme conséquence du théorème suivant :

THÉORÈME 2. — *Si W est une variété compacte connexe de dimension $n + 1$ à bord $dW = V$, et $g: W \rightarrow M$ une immersion telle que $f = g|_V$, alors :*

$$\begin{aligned} \alpha(f) &= \chi(W) \text{ si } M \text{ n'est pas compacte;} \\ \alpha(f) &\equiv \chi(W) \pmod{\chi(M)} \text{ si } M \text{ est compacte.} \end{aligned}$$

Pour établir ce théorème, on a besoin d'un résultat concernant la caractéristique d'Euler des variétés à bord. La démonstration de ce résultat fait l'objet du premier paragraphe.

1. CLASSE DE THOM ET CARACTÉRISTIQUE D'EULER POUR LES VARIÉTÉS À BORD. — Soit W une variété différentiable compacte connexe orientée de dimension $n + 1$ à bord non vide $V = dW$ (pas nécessairement connexe). On note $T(W)$ son fibré tangent, $T(W)^0$ le complémentaire de la section nulle et $U \in H^{n+1}(T(W), T(W)^0)$ la classe de Thom compatible avec l'orientation de W . Soit $s : V \rightarrow T(W)^0$ une section sortant de W , c'est-à-dire un champ sur V de vecteurs tangents à W et sortant strictement de W . De même, soit $r : V \rightarrow T(W)^0$ une section rentrant dans W , et soit σ (resp. ρ) : $(W, V) \rightarrow (T(W), T(W)^0)$ une section du fibré tangent à W qui prolonge arbitrairement s (resp. r). Il existe évidemment de tels prolongements (partition de l'unité).

THÉORÈME 1. — Si $z \in H^{n+1}(W, V)$ est la classe fondamentale entière, on a

$$(1) \quad \sigma^*(U) = \chi(W) \cdot z,$$

$$(2) \quad \rho^*(U) = \chi(W, V) \cdot z = (-1)^{n+1} \sigma^*(U),$$

où $\chi(W)$ [resp. $\chi(W, V)$] est la caractéristique d'Euler de W [resp. du couple (W, V)] ⁽³⁾.

1.1. L'espace des sections de $T(W)$ est convexe; il en est de même du sous-espace de celles dont la restriction au bord V est strictement sortante. L'application

$$\sigma^* : H^*(T(W), T(W)^0) \rightarrow H^*(W, V)$$

ne dépend donc pas du choix de la section σ . On démontrera le théorème 1 avec une section σ particulière.

Munissons V d'une métrique riemannienne. Soit C un voisinage tubulaire de V dans W et $\varphi : C \rightarrow V \times [0, 1]$ un isomorphisme tel que $\varphi(V) = V \times \{0\}$. On munit W d'une métrique riemannienne qui prolonge la transportée sur C par φ^{-1} de la métrique produit de $V \times [0, 1]$. On prend pour $s : V \rightarrow T(W)^0$ la section normale sortante de longueur 1. Soit $\tau : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ une fonction dérivable telle que

$$(3) \quad \begin{cases} \tau(0) = 0, & \tau(1) = 1, & \tau'(1) = 0, \\ 0 < \tau(t) \leq 2t & \text{pour } t \in]0, 1]. \end{cases}$$

(Par exemple $\tau(t) = \sin\left(\frac{t\pi}{2}\right)$.) En un point $x \in C$, le vecteur $\sigma(x)$ est par définition le vecteur sortant normal à la variété $\varphi^{-1}(y_2)$ de longueur $1 - \tau(y_2)$, où on note $\varphi(x) = (y_1, y_2)$. En un point $x \notin C$, on prend $\sigma(x) = 0$. On a ainsi défini un champ de vecteurs différentiable possédant au bord la propriété demandée.

⁽³⁾ La démonstration qui suit s'inspire de celle de J. Milnor (*Lectures on characteristic classes*, Notes by Stasheff, Princeton University) pour le cas où W est sans bord.

Si ν est un vecteur tangent en x à W , on note $\exp(x, \nu)$ l'extrémité de l'arc de géodésique issu de x tangentiellement à ν , de longueur égale à celle de ν ; pour que le point $\exp(x, \nu)$ existe, il faut évidemment que la longueur de ν soit assez petite pour que l'arc de géodésique ne sorte pas de la variété à bord W . Montrons que, pourvu que $\varepsilon > 0$ soit assez petit, le point $\exp(x, \varepsilon(\nu - \sigma(x)))$ existe pour tout couple (x, ν) où ν est un vecteur tangent en x à W de longueur $|\nu| \leq 1$. Si $x \in W - C$, la distance géodésique de x au bord V de W est strictement plus grande que 1; en outre $\sigma(x) = 0$; dès que $\varepsilon \leq 1$, on a $|\varepsilon\nu| \leq 1 < d(x, V)$, d'où l'existence du point $\exp(x, \varepsilon(\nu - \sigma(x))) \in W - V$. Si $x \in C$, alors $d(x, V) = y_2$. De la relation (3), on déduit que $|\sigma(x)| \geq 1 - 2d(x, V)$; la composante normale sortante du vecteur $\varepsilon(\nu - \sigma(x))$ est donc au plus égale à $2\varepsilon d(x, V)$. Dès que $\varepsilon < \frac{1}{2}$, le point $\exp(x, \varepsilon(\nu - \sigma(x)))$ est défini; il n'est dans V que si $x \in V$.

Si $B(W) \subset T(W)$ est le fibré des vecteurs tangents de longueur $|\nu| \leq 1$, on définit une application continue $h : B(W) \rightarrow W \times W$ en associant à tout couple $(x, \nu) \in B(W)$ le couple $(x, \exp(x, \varepsilon(\nu - \sigma(x)))) \in W \times W$ (où $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$). L'application h envoie la fibre de x dans $B(W)$ dans la fibre de x pour la projection $\text{pr}_1 : W \times W \rightarrow W$. D'autre part, si ε est assez petit, l'application $\nu \mapsto \exp(x, \varepsilon(\nu - \sigma(x)))$ est injective pour tout x : c'est bien connu pour les variétés sans bord et on le démontrerait sans peine ici à cause de la forme particulière de la métrique au voisinage de dW . On supposera désormais que ε satisfait à cette condition supplémentaire. L'application h , qui est alors injective, est un homéomorphisme sur son image.

Notons $S(W)$ le fibré des vecteurs tangents de longueur 1.

LEMME 1. — *L'application $h : B(W) \rightarrow W \times W$ induit une application du couple $(B(W - V), S(W - V))$ dans le couple $((W - V) \times W, (W - V) \times W - \Delta(W - V))$ qui, en cohomologie (et aussi en homologie), donne un isomorphisme*

$$h^* : H^*((W - V) \times W, (W - V) \times W - \Delta(W - V)) \rightarrow H^*(B(W - V), S(W - V)).$$

En effet, le point $(x, x) \in W \times W$ est l'image par h du point

$$(x, \nu = \sigma(x)) \in B(W).$$

Comme $|\sigma(x)| < 1$ pour $x \notin V$, l'image $h(S(W - V))$ ne rencontre pas la diagonale $\Delta(W - V)$.

Comme $\sigma(W) = h^{-1}(\Delta(W))$, l'application étudiée se factorise en

$$\begin{aligned} (B(W - V), S(W - V)) &\xrightarrow{\alpha} (B(W - V), B(W - V) - \sigma(W - V)) \\ &\xrightarrow{\beta} (h(B(W - V)), h(B(W - V)) - \Delta(W - V)) \\ &\xrightarrow{\gamma} ((W - V) \times W, (W - V) \times W - \Delta(W - V)). \end{aligned}$$

L'application α est une équivalence d'homotopie car il existe dans $B(W - V)$ une rétraction par déformation (fibrée) du complémentaire de la section $\sigma(W - V)$ sur $S(W - V)$. L'application β est la restriction de l'homéomorphisme h . L'application γ est une excision car $h(B(W - V))$ est un voisinage fermé de $\Delta(W - V)$ dans $(W - V) \times W$.

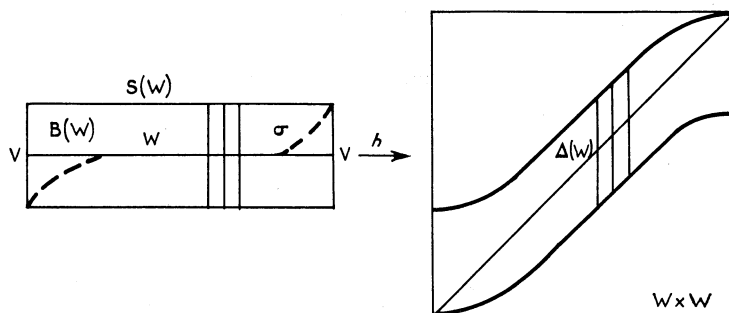


Fig. 1.

Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 H^*(B(W - V), S(W - V)) & \xleftarrow{\sim} & H^*(B(W), S(W)) \\
 \uparrow \simeq h^* & & \\
 H^*((W - V) \times W, (W - V) \times W - \Delta(W - V)) & \xleftarrow{(j \times \text{id})^*} & H^*(W \times W, W \times W - \Delta(W)) \\
 \downarrow (\text{id} \times i)^* & & \\
 H^*((W - V) \times W, (W - V) \times V) & \xleftarrow{(j \times \text{id})^*} & H^*(W \times W, W \times V)
 \end{array}$$

et notons $\omega \in H^{n+1}(W \times W, W \times V)$ l'image de la classe de Thom $U \in H^{n+1}(B(W), S(W))$. Cet élément ω jouit des propriétés suivantes :

(4) la classe ω est dans l'image de l'application

$$H^{n+1}(W \times W, W \times W - \Delta(W)) \longrightarrow H^{n+1}((W - V) \times (W, V)) \xleftarrow{\sim} H^{n+1}(W \times (W, V)),$$

(5) si x est un point intérieur à W , la classe ω induit dans la fibre $\{x\} \times (W, V)$ de $W \times (W, V)$ la classe fondamentale $z \in H^{n+1}(W, V)$ puisqu'on a choisi U compatible avec l'orientation de W ,

(6) par la diagonale $\Delta : (W, V) \rightarrow (W \times W, W \times V)$, la classe ω induit $\Delta^*(\omega) = \sigma^*(U)$ dans $H^{n+1}(W, V)$ puisque $\Delta = h \circ \sigma$.

1.2. On va maintenant démontrer le théorème 1; comme il n'y a pas de torsion dans $H^{n+1}(W, V)$, il suffit de démontrer les formules (1) et (2) dans la cohomologie à valeurs rationnelles. Soit (α_i) une base homogène de $H^*(W; \mathbb{Q})$ où figure $\alpha_0 = 1 \in H^0(W)$, et (β_j) une base homogène

de $H^*(W, V; \mathbf{Q})$ où figure $\beta_0 = z \in H^{n+1}(W, V)$. Alors $(\alpha_i \otimes \beta_j)$ est une base de $H^*(W \times W, W \times V)$ et l'on peut écrire $\omega = \sum_{i,j} a_{ij} \alpha_i \otimes \beta_j$. Il résulte de l'assertion (6) que $\sigma^*(U) = \sum_{i,j} a_{ij} \alpha_i \cdot \beta_j$ (où \cdot désigne le cup-produit).

Soit $b : H(W, V; \mathbf{Q}) \rightarrow \mathbf{Q}$ l'homomorphisme coordonnée sur β_0 , et notons $b_{ji} = b(\alpha_i \cdot \beta_j)$. Comme $\sigma^*(U) \in H^{n+1}(W, V)$, on a

$$(7) \quad \sigma^*(U) = \left(\sum_{i,j} a_{ij} b_{ji} \right) z.$$

L'algèbre $H^*(W)$ opère par cup-produit sur chacun des facteurs de $H^*(W \times (W, V))$. Si $u \in H^*(W)$, ces deux opérations sont respectivement le cup-produit interne par $\mathbf{1} \otimes u = \text{pr}_2^*(u) \in H^*(W \times W)$ et par $u \otimes \mathbf{1} = \text{pr}_1^*(u)$, où pr_1 et pr_2 sont les deux projections de $W \times W$ sur W . Ces deux opérations coïncident sur les classes qui proviennent de $H^*(W \times W, W \times W - \Delta(W))$. En effet, en considérant le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} H^*(B(W-V), S(W-V)) & \longrightarrow & H^*(B(W-V)) & \longleftarrow & (pr_1 \circ h)^* \\ \simeq \uparrow h^* & & \uparrow h^* & & \uparrow h^* \\ H^*((W-V) \times W, (W-V) \times W - \Delta(W-V)) & \longrightarrow & H^*((W-V) \times (W, V)) & \longleftarrow & H^*(W-V) \\ \simeq \uparrow & & \simeq \uparrow & & \uparrow \\ H^*(W \times W, W \times W - \Delta(W)) & & H^*(W \times (W, V)) & \longleftarrow & H^*(W) \end{array}$$

on voit qu'il suffit de démontrer que $(\text{pr}_1 \circ h)^* = (\text{pr}_2 \circ h)^*$. Mais

$$\text{pr}_1 \circ h(x, \nu) = x \quad \text{et} \quad \text{pr}_2 \circ h(x, \nu) = \exp(x, \varepsilon(\nu - \sigma(x))),$$

et en multipliant ε par un paramètre $t \in [0, 1]$ on obtient une homotopie entre ces deux applications.

Il résulte de ceci et de l'assertion (4) que

$$(\alpha_k \otimes \mathbf{1}) \cdot \omega = (\mathbf{1} \otimes \alpha_k) \cdot \omega,$$

soit

$$(\alpha_k \otimes \mathbf{1}) \cdot \left(\sum_{i,j} a_{ij} \alpha_i \otimes \beta_j \right) = (\mathbf{1} \otimes \alpha_k) \cdot \left(\sum_{i,j} a_{ij} \alpha_i \otimes \beta_j \right),$$

soit

$$\sum_{i,j} a_{ij} (\alpha_k \cdot \alpha_i) \otimes \beta_j = \sum_{i,j} (-1)^{\deg \alpha_i \deg \alpha_k} a_{ij} \alpha_i \otimes (\alpha_k \cdot \beta_j),$$

d'où, en prenant les valeurs des deux membres par l'homomorphisme $\text{id} \otimes b$,

$$a_{00} \alpha_k = \sum_{i,j} (-1)^{\deg \alpha_i \deg \alpha_k} a_{ij} b_{jk} \alpha_i$$

car $b(\beta_j)$ est nul sauf pour $\beta_j = \beta_0$ et car $a_{i0} = 0$ pour $i \neq 0$ [puisqu' α_0 est le seul élément de degré 0 de la base (α_i)]. Il résulte de l'assertion (5) que $a_{00} = 1$, et, comme (α_i) est une base, il vient

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_j a_{ij} b_{jk} = 0 \quad \text{si } k \neq i; \\ \sum_j a_{ij} b_{ji} = (-1)^{\deg \alpha_i}. \end{array} \right.$$

Les relations (7) et (8) prouvent que

$$\sigma^*(U) = \sum_i (-1)^{\deg \alpha_i} \cdot z = \chi(W) \cdot z.$$

Ceci démontre la formule (1) du théorème 1.

Les formules (8) prouvent que la matrice $((-1)^{\deg \alpha_i} a_{ij})$ est l'inverse de la matrice (b_{ji}) , d'où

$$\sum_i (-1)^{\deg \alpha_i} a_{ij} b_{ji} = 1$$

et, comme $\deg \alpha_i + \deg \beta_j = n + 1$ si $b_{ji} \neq 0$, on a

$$\sum_{i,j} a_{ij} b_{ji} = (-1)^{n+1} \sum_j (-1)^{\deg \beta_j} = (-1)^{n+1} \chi(W, V).$$

Pour démontrer la formule (2), choisissons la section ρ symétrique de la section σ par rapport à l'origine de chaque fibre; on a alors $\rho^*(U) = \sigma^*(\tilde{U})$, où \tilde{U} est la classe de Thom obtenue à partir de U par la même symétrie. Comme $U = (-1)^{n+1} \tilde{U}$, la formule (2) en résulte.

1.3. *Remarques.* — Il résulte des formules (1) et (2) que

$$(9) \quad \sigma^*(U) - \rho^*(U) = \chi(V) \cdot z.$$

On peut démontrer directement cette relation. Pour chaque composante connexe V_i de V , soit $z_i \in H^n(V)$ la classe fondamentale dont le cobord est $z \in H^{n+1}(W, V)$, soit $T(V_i)$ le fibré tangent et soit $T'(V_i)$ la restriction à V_i de $T(W)$. La classe de Thom U induit dans $H^{n+1}(T'(V_i), T'(V_i)^0)$ la classe de Thom U'_i .

PROPOSITION 1. — *Pour tout $v_i \in H^n(T'(V_i)^0)$ tel que $\delta v_i = U'_i$, on a*

$$s^*(v_i) - r^*(v_i) = \chi(V_i) z_i.$$

La relation (9) résulte de la proposition et du diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} H^n(T(W)^0) & \xrightarrow{\partial} & H^{n+1}(T(W), T(W)^0) \\ \downarrow s^*, r^* & & \downarrow \sigma^*, \rho^* \\ H^n(V) & \longrightarrow & H^{n+1}(W, V). \end{array}$$

Démonstration. — Le résultat ne dépend pas du relèvement φ_i choisi car s^* et r^* sont des rétractions :

$$0 \rightarrow H^n(V_i) \rightarrow H^n(T'(V_i)^0) \rightarrow H^{n+1}(T'(V_i), T'(V_i)^0) \rightarrow 0.$$

Choisissons φ_i dans le noyau de r^* ; alors φ_i est dans l'image de $H^n(T'(V_i)^0, T'_r(V_i)^0)$ [où $T'_r(V_i)$ est constitué des vecteurs tangents ne sortant pas de W] à cause de la factorisation de r par

$$H^n(T'(V_i)^0) \longrightarrow H^n(T'_r(V_i)^0) \xrightarrow{\sim} H^n(V_i).$$

Par projection, le couple $(T'(V_i)^0, T'_r(V_i)^0)$ se déforme en $(T(V_i), T(V_i)^0)$, la section s en la section nulle et φ_i en la classe de Thom de $T(V_i)$ (fig. 2). On a donc

$$\chi(V_i) z_i = s^*(\varphi_i) = s^*(v_i) - r^*(v_i).$$

Remarquons aussi que la démonstration du n° 1.2 est valable quand on remplace \mathbf{Q} par n'importe quel corps K . Il en résulte en particulier qu'à condition de se placer en cohomologie modulo 2, le théorème 1 est encore valable pour les variétés non orientées.

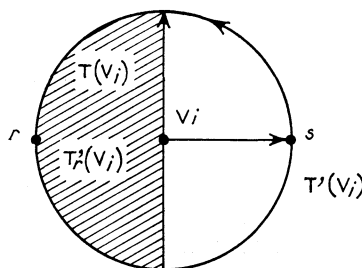


Fig. 2.

Enfin, le fait que la matrice (b_{ji}) soit inversible montre que, pour tout corps K , l'application bilinéaire $b(-, -) : H^*(W; K) \otimes H^*(W, V; K) \rightarrow K$ est non singulière. En particulier, si $n + 1 = 2k$, elle met en dualité $H^k(W)$ et $H^k(W, V)$. Il en résulte que le rang ρ de l'application bilinéaire

$$b(-, -) : H^k(W, V) \otimes H^k(W, V) \rightarrow K$$

est égal à la dimension de l'image de l'homomorphisme

$$j : H^k(W, V) \rightarrow H^k(W).$$

En considérant la suite exacte

$$0 \rightarrow H^0(W, V) \rightarrow H^0(W) \rightarrow \dots \rightarrow H^{k-1}(V) \rightarrow H^k(W, V) \rightarrow \text{Im}(j) \rightarrow 0$$

on voit que la dimension de $\text{Im}(j)$ est la somme alternée des dimensions des autres espaces qui figurent dans la suite exacte. De la dualité, il résulte que

$$\dim H^i(W) = \dim H^{2k-i}(W, V),$$

d'où, en notant la semi-caractéristique

$$\chi^*(V; K) = \sum_{0 \leq i \leq k-1} \dim H^i(V; K),$$

la relation

$$(10) \quad \rho \equiv \chi(W) + \chi^*(V) \pmod{2}.$$

Cette relation est surtout utile lorsque $\rho \equiv 0 \pmod{2}$. C'est le cas lorsque k est impair et K de caractéristique différente de 2. Dans $H^k(W, V)$, on a alors $x.y = -y.x$, et la forme bilinéaire est antisymétrique; donc symplectique et de rang pair. Lorsque $K = \mathbf{Z}/(2)$, la linéarité du cup-carré et la dualité prouvent que $x.x = \varphi_k.x$ ($x \in H^k(W, V)$) où $\varphi_k \in H^k(W)$ n'est autre que la $k^{\text{ième}}$ classe de Wu de W . Si celle-ci est nulle, on a

$$\chi(W) \equiv \chi^*(V) \pmod{2},$$

toujours parce que la forme bilinéaire est symplectique.

2. DÉFINITION DU DEGRÉ.

2.1. *La condition homologique.* — Soient V^n une variété compacte connexe et M^{n+1} une variété compacte ou non, connexe, orientées l'une et l'autre. Pour une immersion $f: V \rightarrow M$, on ne définit le degré que si l'homomorphisme $H^n(f): H^n(M) \rightarrow H^n(V)$ est nul (en cohomologie entière). Cette condition est équivalente à la nullité de l'image dans $H_n(M)$ de la classe fondamentale d'homologie $[V]$. En effet, la condition $H^n(f) = 0$ est équivalente à

$$\begin{aligned} & \forall c \in H^n(M), \langle f^*(c), [V] \rangle = 0, \\ \Leftrightarrow & \forall c \in H^n(M), \langle c, f_*([V]) \rangle = 0, \\ \Leftrightarrow & \text{tout homomorphisme } H_n(M) \rightarrow \mathbf{Z} \text{ s'annule sur } f_*([V]) \text{ (d'après le théo-} \\ & \text{rème des coefficients universels),} \\ \Leftrightarrow & f_*([V]) \text{ est de torsion,} \\ \Leftrightarrow & f_*([V]) = 0 \text{ car la torsion de } H_n(M) \text{ est égale, par les coefficients univer-} \\ & \text{sels, à celle de } H^{n+1}(M) \text{ qui est nulle.} \end{aligned}$$

Il en résulte que la condition homologique est satisfaite lorsque f est la restriction au bord $V = dW$ d'une immersion $g : W^{n+1} \rightarrow M$. De plus, la condition est satisfaite par toute immersion f si $H^n(M)$ est de torsion, ou, par dualité de Poincaré, si $H_1(M)$ est de torsion, en particulier si $\pi_1(M)$ est de torsion (i. e. tout élément est de torsion).

Comme ces conditions sont très larges, on n'essaiera pas de définir un degré modulo l'image de $H^n(f)$ lorsque celle-ci n'est pas nulle.

2.2. *Définition du degré : cas de M non compacte ou de $\chi(M) = 0$ et M compacte.* — Soient $T'(V)$ l'image réciproque par f de $T(M)$, et U_0 la classe de Thom de $T(M)$. L'immersion f induit un homomorphisme des suites exactes de Gysin :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H^n(M) & \longrightarrow & H^n(T(M)^0) & \longrightarrow & H^{n+1}(T(M), T(M)^0) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow 0=H^n(f) & & \downarrow f^* & & \downarrow \simeq \\ 0 & \longrightarrow & H^n(V) & \longrightarrow & H^n(T'(V)^0) & \longrightarrow & H^{n+1}(T'(V), T'(V)^0) \longrightarrow 0. \end{array}$$

Les variétés V et M étant orientées, le fibré normal de l'immersion f est trivial et l'on peut choisir une section normale sortante $s : V \rightarrow T'(V)^0$; deux telles sections sont homotopes. Pour tout relèvement $\nu_0 \in H^n(T(M)^0)$ de la classe U_0 , l'élément $f^*(\nu_0) \in H^n(T'(V)^0)$ ne dépend pas du choix de ν_0 puisque $H^n(f)$ est supposé nul. Si $z' \in H^n(V)$ est la classe fondamentale on définit le degré $\alpha(f)$ par la formule

$$(11) \quad s^* \circ f^*(\nu_0) = \alpha(f) \cdot z'.$$

L'entier relatif ainsi défini ne dépend pas du choix de la section s , mais uniquement de l'homomorphisme f^* . Si deux immersions f et f' sont régulièrement homotopes, les applications tangentes sont homotopes et $f^* = f'^*$.

PROPOSITION 2. — *Deux immersions régulièrement homotopes ont même degré.*

Supposons maintenant que $M = \mathbb{R}^{n+1}$.

PROPOSITION 3. — *Le degré $\alpha(f)$ d'une immersion $f : V \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ est égal à la curvatura integra.*

On a en effet, d'une manière canonique,

$$T(M) = \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \quad \text{et} \quad T(M)^0 = \mathbb{R}^{n+1} \times (\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}).$$

Si l'on choisit pour s la section normale sortante de longueur 1, on a $s^* \circ f^* = \varphi^* : H^n(\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}) \rightarrow H^n(V)$ où φ est l'application gaussienne. L'entier $\alpha(f)$ est le degré en cohomologie de dimension n de $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$, c'est-à-dire tout simplement le degré de φ .

2.3. *Définition du degré : cas de M compacte et $\chi(M) \neq 0$.* — Pour toute section $t : M \rightarrow T(M)$, l'homomorphisme $t^* : H^*(T(M)) \rightarrow H^*(M)$ est un isomorphisme. Dans la suite exacte de Gysin :

$$0 \rightarrow H^n(M) \rightarrow H^n(T(M)^0) \rightarrow H^{n+1}(T(M), T(M)^0) \xrightarrow{\lambda} H^{n+1}(T(M)),$$

on a $t^* \circ \lambda(U_0) = \chi(M) \cdot u$, où u est la classe fondamentale de cohomologie de M qui définit l'orientation compatible avec la classe de Thom U_0 . L'application λ est donc injective et on ne peut pas appliquer la méthode du n° 2.2.

Si $x \in M$ est un point hors de l'image de f , l'immersion f se factorise par la variété non compacte $M - \{x\}$. La classe U_0 induit la classe de Thom U_x de $T(M - \{x\})$, et la suite exacte

$$0 \rightarrow H^n(M) \rightarrow H^n(M - \{x\}) \rightarrow H^{n+1}(M, M - \{x\}) \xrightarrow{\sim} H^{n+1}(M) \rightarrow 0$$

prouve la nullité de $H^n(f_x) : H^n(M - \{x\}) \rightarrow H^n(V)$. On peut donc définir le degré de l'immersion $f_x : V \rightarrow M - \{x\}$.

PROPOSITION 4. — *Si x et y sont deux points de $M - f(V)$, alors*

$$\alpha(f_x) \equiv \alpha(f_y) \quad [\text{mod } \chi(M)].$$

DÉFINITION. — *Le degré de l'immersion f est le reste modulo $\chi(M)$ [indépendant de $x \in M - f(V)$] de l'entier $\alpha(f_x)$.*

Soient y un point de M , D un voisinage de y difféomorphe à une boule fermée de centre y et $t : M \rightarrow T(M)$ une section qui ne s'annule pas sur D . La section t trivialise le fibré $T(M)|_D$ en ce sens qu'il existe une trivialisation pour laquelle la section t est constante. On a alors un isomorphisme

$$t_1 : H^{n+1}(T(M)^0, T(M - \{y\})^0) \xrightarrow{\sim} H^{n+1}(D, D - \{y\})$$

obtenu par la composition

$$\begin{array}{ccc} H^{n+1}(T(M)^0, T(M - \{y\})^0) & \xrightarrow{\text{excision}} & H^{n+1}(T(D)^0, T(D - \{y\})^0) \xrightarrow{t} H^{n+1}(D, D - \{y\}) \\ & & \searrow \cong \\ & \cong \downarrow i & \\ & & H^{n+1}(S^n \times (D, D - \{y\})) \end{array}$$

LEMME 2. — *Si $\nu_y \in H^n(T(M - \{y\})^0)$ est un relèvement de la classe de Thom U_y de $T(M - \{y\})$, par l'application composée*

$$H^n(T(M - \{y\})^0) \xrightarrow{\delta_1} H^{n+1}(T(M)^0, T(M - \{y\})^0) \xrightarrow{i} H^{n+1}(D, D - \{y\}),$$

son image est $t_1 \circ \delta_1(\nu_y) = -\chi(M) \cdot u_y$, où u_y est le générateur local de cohomologie en y .

Démonstration du lemme 2. — Le diagramme suivant est commutatif ⁽⁴⁾ :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & H^{n+1}(T(M)^0, T(M - \{y\})^0) & & \\
 & \delta_1 \nearrow & \uparrow i & \nwarrow t_1 & \\
 H^n(T(M - \{y\})^0) & & H^{n+1}(T(M), T(M - \{y\})^0) & & H^{n+1}(D, D - \{y\}) \\
 & \delta_2 \searrow & & \nearrow t_2 & \\
 & & H^{n+1}(T(M), T(M - \{y\})^0) & &
 \end{array}$$

et on va montrer que $t_2 \circ \delta_2(\varphi_y) = -\chi(M) \cdot u_y$.

Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
 H^{n+1}(T(M), T(M)^0) & \xrightarrow{j} & H^{n+1}(T(M), T(M - \{y\})^0) & \longrightarrow & H^{n+1}(T(M - \{y\}), T(M - \{y\})^0) \\
 & & \delta_2 \swarrow & & \searrow \delta \\
 & & H^n(T(M - \{y\})^0) & &
 \end{array}$$

où la composée des flèches horizontales est un isomorphisme qui envoie U_0 sur U_y . Par hypothèse $\delta(\varphi_y) = U_y$, donc $\delta_2(\varphi_y) = j(U_0) + a$ où a provient d'un élément $a' \in H^{n+1}(T(M), T(M - \{y\}))$. Comme $i \circ j(U_0) = 0$, on a

$$t_2 \circ j(U_0) = t_1 \circ i \circ j(U_0) = 0,$$

d'où $t_2 \circ \delta_2(\varphi_y) = t_2(a)$ qu'on va calculer.

Du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 & H^{n+1}(T(M), T(M - \{y\})^0) & \xrightarrow{k} \\
 & \uparrow & \searrow \\
 & H^{n+1}(T(M), T(M - \{y\})) & \longrightarrow H^{n+1}(T(M)) \\
 & \cong \downarrow t_4 & \cong \downarrow t^* \\
 t_2 \curvearrowright & t_3 H^{n+1}(M, M - \{y\}) & \xrightarrow{\sim} H^{n+1}(M) \\
 & \cong \downarrow \text{exc.} & \\
 & H^{n+1}(D, D - \{y\}) &
 \end{array}$$

il résulte que $t_2(a) = t_3(a')$, et, pour démontrer le lemme, il suffit de démontrer que $t^* \circ k(a) = -\chi(M) \cdot u$. Or on a

$$t^* \circ k(a) = t^* \circ k(\delta_2(\varphi_y) - j(U_0)) = -t^* \circ k \circ j(U_0) = -t^* \circ \lambda(U_0) = -\chi(M) \cdot u.$$

Démonstration de la proposition 4. — L'immersion f se factorise par la variété $M - \{x, y\}$. Soient j_x et j_y les injections de $M - \{x\}$ et $M - \{y\}$ respectivement dans $M - \{x, y\}$. Soient φ_x et φ_y les relèvements des classes de Thom U_x et U_y ; alors $j_x^*(\varphi_x)$ et $j_y^*(\varphi_y)$ sont deux relèvements de la classe de Thom $U_{x,y}$ dont on va calculer la différence.

⁽⁴⁾ Les flèches notées t_i sont induites par t .

Avec les notations du diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 H^n(T(M - \{y\})^0) & \xrightarrow{\delta_1} & H^{n+1}(T(M)^0, T(M - \{y\})^0) & \xrightarrow{t_1} & H^{n+1}(D, D - \{y\}) \\
 \downarrow j_y^* & & \simeq \downarrow \text{excision} & & \downarrow = \\
 H^n(T(M - \{x, y\})^0) & \xrightarrow{\delta_0} & H^{n+1}(T(M - \{x\})^0, T(M - \{x, y\})^0) & \xrightarrow{t_0} & H^{n+1}(D, D - \{y\})
 \end{array}$$

on a

$$\begin{aligned}
 \delta_0 \circ j_x^*(v_x) &= 0 \quad \text{puisque } v_x \in H^n(T(M - \{x\})^0), \\
 t_0 \circ \delta_0 \circ j_y^*(v_y) &= t_1 \circ \delta_1(v_y) = -\chi(M) \cdot u_y \quad \text{d'après le lemme 2.}
 \end{aligned}$$

D'où

$$t_0 \circ \delta_0(j_x^*(v_x) - j_y^*(v_y)) = \chi(M) \cdot u_y.$$

Considérons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 H^n(M - \{x\}) & \longrightarrow & H^n(T(M - x)^0) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 H^n(M - \{x, y\}) & \xrightarrow{p} & H^n(T(M - \{x, y\})^0) \\
 \downarrow q & & \downarrow \delta_0 \\
 H^{n+1}(M - \{x\}, M - \{x, y\}) & \longrightarrow & H^{n+1}(T(M - \{x\})^0, T(M - \{x, y\})^0) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 0 & & 0.
 \end{array}$$

Comme $j_x^*(v_x)$ et $j_y^*(v_y)$ sont deux relèvements de la classe de Thom $U_{x,y}$, on a $j_x^*(v_x) - j_y^*(v_y) = p(d)$ où $d \in H^n(M - \{x, y\})$. Comme t est une section non nulle au voisinage de y , l'application t_0 est une inverse de la flèche horizontale du bas et on a, en identifiant par excision $(M - \{x\}, M - \{x, y\})$ et $(D, D - \{y\})$, $t_0 \circ \delta_0 \circ p = q$. Il en résulte que $q(d) = \chi(M) \cdot u_y$. D'où $d = b + \chi(M) \cdot c$ où $q(c) = u_y$ et b provient de $b' \in H^n(M - \{x\})$.

Pour le calcul des degrés,

$$\begin{array}{ccc}
 H^n(M - \{x, y\}) & \longrightarrow & H^n(T(M - \{x, y\})^0) \\
 \downarrow H^n(f_{x,y}) & & \downarrow f_{x,y}^* \\
 H^n(V) & \xrightarrow{s^*} & H^n(T'(V)^0)
 \end{array}$$

on a

$$(\alpha(f_x) - \alpha(f_y)) \cdot z' = s^* \circ f_{x,y}^*(j_x^*(v_x) - j_y^*(v_y)) = H^n(f_{x,y})(d)$$

puisque s^* est une rétraction. Mais $H^n(f_{x,y})(b) = H^n(f_x)(b') = 0$ puisque $H^n(f_x) = 0$. On voit alors que la différence des degrés est un multiple

de $\chi(M)$:

$$(\alpha(f_x) - \alpha(f_y)) \cdot z' = \chi(M) \cdot H^n(f_{x,y})(c).$$

Remarque. — La proposition 2 vaut encore dans le cas de M compacte puisqu'une homotopie régulière peut se décomposer en une suite d'homotopies régulières telles que, pour chacune d'elles, l'image évite un point de M : il suffit alors d'appliquer plusieurs fois la proposition pour les variétés non compactes.

3. IMMERSIONS BORDANTES, THÉORÈME DE *curvatura integra*.

THÉORÈME 2. — Si W est une variété compacte connexe orientée de dimension $n + 1$, à bord $dW = V$, et $g : W \rightarrow M$ une immersion telle que $f = g|_V$, alors :

$$\begin{aligned} \alpha(f) &= \chi(W) \text{ si } M \text{ n'est pas compacte;} \\ \alpha(f) &= \chi(W) \bmod \chi(M) \text{ si } M \text{ est compacte.} \end{aligned}$$

L'immersion $g : W \rightarrow M$ de codimension 0 est supposée compatible avec les orientations de W et M . On dit que l'immersion $f : V \rightarrow M$ est *bordante*, ou, plus précisément, qu'elle borde l'immersion g . Le théorème 2 est valable si V n'est pas connexe avec une définition appropriée du degré (n° 3.3). Comme application de ce cas, on démontre le théorème de *curvatura integra*.

3.1. *Le cas de M non compacte ou de $\chi(M) = 0$.* — Si f se factorise par une immersion $g : W \rightarrow M$ qui préserve l'orientation, la classe U_0 induit la classe U de $T(W)$ et $g^*(\nu_0)$ est un relèvement de U . Soit $\sigma : W \rightarrow T(W)$ une section qui prolonge la section sortante $i \circ s : V \rightarrow T'(V)^0 \rightarrow T(W)^0$; le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^n(T(W)^0) & \xrightarrow{\delta} & H^{n+1}(T(W), T(W)^0) \\ \downarrow s^* \circ i^* & & \downarrow \sigma^* \\ H^n(V) & \xrightarrow{\delta} & H^{n+1}(W, V) \end{array}$$

montre que $\sigma^* \circ \delta \circ g^*(\nu_0) = \delta \circ s^* \circ i^* \circ g^*(\nu_0)$, soit $\sigma^*(U) = \alpha(f) \cdot \delta z'$. Il résulte alors du théorème 1 que $\alpha(f) = \chi(W)$.

3.2. *Le cas de M compacte et $\chi(M) \neq 0$.* — Soit $g : W \rightarrow M$ telle que $f = g|_V$, et soit $x \in M - f(V)$. Puisque W est compacte, l'image réciproque $g^{-1}(x)$ est constituée d'un nombre fini de points isolés (y_i) de W . Soit $\nu \in H^n(T(W)^0)$ un relèvement de la classe de Thom U de W . D'après le théorème 1, on a $\sigma^*(U) = \chi(W) \cdot z$, d'où $\sigma^* \circ \delta(\nu) = \delta \circ s^* \circ i^*(\nu) = \chi(W) \cdot \delta z'$, soit $s^* \circ i^*(\nu) = \chi(W) \cdot z'$. Le degré de $f_x : V \rightarrow M - \{x\}$ est défini par $s^* \circ f^*(\nu_x) = \alpha(f_x) \cdot z'$. D'après la définition du degré de f [modulo $\chi(M)$],

il suffit de démontrer que $s^* \circ i^*(\varphi)$ et $s^* \circ f^*(\varphi_x)$ diffèrent d'un multiple de $\chi(M)$. Cette démonstration, comme celle de la proposition 4, est une simple vérification, compte tenu du lemme 2.

Supposons que D est une boule fermée de centre x dans M assez petite pour que son image réciproque $g^{-1}(D)$ soit une réunion de boules fermées disjointes (D'_i) de centres y_i . On note $g_x : W - (y_i) \rightarrow M - \{x\}$ la restriction de g et $j : W - (y_i) \rightarrow W$ l'injection; on va calculer $j^*(\varphi) - g_x^*(\varphi_x)$. Dans le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} H^n(T(M - \{x\})^0) & \longrightarrow & H^{n+1}(T(M)^0, T(M - \{x\})^0) & \xrightarrow{\sim} & H^{n+1}(D, D - \{x\}) \\ \downarrow s_x^* & & \downarrow & & \downarrow \\ H^n(T(W - (y_i))^0) & \longrightarrow & H^{n+1}(T(W)^0, T(W - (y_i))^0) & \xrightarrow{\sim} & \bigoplus_i H^{n+1}(D'_i, D'_i - \{y_i\}) \end{array}$$

l'image de $\varphi_x \in H^n(T(M - \{x\})^0)$ dans $H^{n+1}(D, D - \{x\})$ est, d'après le lemme 2, égale à $-\chi(M) \cdot u_x$; son image dans $\bigoplus_i H^{n+1}(D'_i, D'_i - \{y_i\})$ est donc $-\chi(M) \cdot \sum_i u_{y_i}$.

Considérons maintenant le diagramme

$$\begin{array}{ccc} H^n(W) & \longrightarrow & H^n(T(W)^0) \\ \downarrow & & \downarrow j^* \\ H^n(W - (y_i)) & \longrightarrow & H^n(T(W - (y_i))^0) \\ \downarrow q & & \downarrow \\ \bigoplus_i H^{n+1}(D'_i, D'_i - \{y_i\}) = H^{n+1}(W, W - (y_i)) & \longrightarrow & H^{n+1}(T(W)^0, T(W - (y_i))^0) \\ \downarrow & & \downarrow \\ & & 0. \end{array}$$

Par g_x (resp. j), U_x (resp. U) induit la classe de Thom de $T(W - (y_i))$. Par suite, $j^*(\varphi) - g_x^*(\varphi_x)$, différence de deux relèvements de cette classe de Thom, provient d'un élément $d \in H^n(W - (y_i))$. D'après le calcul qui précède, on a $q(d) = -\chi(M) \cdot \sum_i u_{y_i}$; d'où $d = b + \chi(M) \cdot c$ où b provient de $b' \in H^n(W)$.

Comme pour la proposition 4, dans

$$\begin{array}{ccccc} H^n(W) & \longrightarrow & H^n(W - (y_i)) & \longrightarrow & H^n(T(W - (y_i))^0) \\ & \searrow 0 & \downarrow & & \downarrow \\ & & H^n(V) & \xrightarrow{\sim} & H^n(T(V)^0) \\ & & & \swarrow s^* & \end{array}$$

$s^* \circ i^*(\varphi - g_x^*(\varphi_x))$ est l'image de d ; c'est un multiple de $\chi(M)$ parce que b donne 0 dans $H^n(V)$.

3.3. *Extension au cas de V non connexe.* — Supposons que V soit union disjointe d'une famille finie de variétés compactes connexes orientées de classes fondamentales $z_i \in H^n(V_i)$. On note $k: H^n(V) \rightarrow \mathbf{Z}$ la somme des coordonnées sur la base (z_i) .

Soit $f: V \rightarrow M$ une immersion telle que l'homomorphisme composé $k \circ H^n(f): H^n(M) \rightarrow H^n(V) \rightarrow \mathbf{Z}$ soit nul. Si M n'est pas compacte, l'entier $\alpha(f) = k \circ s^* \circ f^*(\nu_0)$ ne dépend pas du choix de ν_0 ; c'est, par définition le degré de f . Lorsque M est compacte, la proposition 4 est encore valable, d'où un degré modulo $\chi(M)$.

De même, tous les raisonnements des nos 3.1 et 3.2 restent valables ainsi que le théorème 2.

Notons $f_i = f|V_i$; il résulte de la définition du degré qu'on a :

PROPOSITION 5. — *Si pour tout i l'immersion $f_i: V_i \rightarrow M$ a un degré, alors $f: V \rightarrow M$ a un degré et l'on a*

$$\alpha(f) = \sum_i \alpha(f_i) \quad [\text{mod } \chi(M) \text{ éventuellement}].$$

En particulier, si l'on note $-f: -V \rightarrow M$ la même application que f , la variété $-V$ étant munie de l'orientation opposée à celle de V, et si l'on applique le théorème 2 à l'immersion $g: V \times I \rightarrow M$ d'un voisinage de l'immersion f , on obtient le résultat suivant :

PROPOSITION 6. — *Soit $f: V \rightarrow M$ une immersion telle que $H^n(f) = 0$, on a*

$$\alpha(f) + \alpha(-f) = \chi(V) \quad [\text{mod } \chi(M) \text{ éventuellement}].$$

Mais on peut calculer directement $\alpha(-f)$:

PROPOSITION 7. — *Sous les mêmes hypothèses que la proposition 6, on a*

$$\alpha(-f) = (-1)^n \alpha(f) \quad [\text{mod } \chi(M) \text{ éventuellement}].$$

En effet, si $r: V \rightarrow T'(V)^0$ est la section opposée à s , on a

$$\alpha(-f) = -k \circ r^* \circ f^*(\nu_0).$$

Mais la symétrie par rapport à l'origine dans chaque fibre de $T'(V)$ transforme s en r , $f^*(\nu_0)$ en $(-1)^{n+1} f^*(\nu_0)$ et induit l'identité sur $H^n(V)$. Comme corollaire, on a :

THÉORÈME 3. — *Si n est pair, pour toute immersion $f: V \rightarrow M$ telle que $H^n(f) = 0$, on a $\alpha(f) = \left(\frac{1}{2}\right) \chi(V)$*

Soit maintenant W^{n+1} une variété dont le bord est l'union disjointe de deux variétés V et $-V'$; on dit alors que W est un cobordisme de V à V' . Soit $g: W \rightarrow M$ une immersion et soient f et $-f'$ ses restrictions à V et $-V'$; on dit alors que l'immersion f est *cobordante* à l'immersion f' .

PROPOSITION 8. — *Si $(g, f, -f'): (W, V, -V') \rightarrow M$ est une immersion orientée d'un cobordisme, et si $H^n(f) = 0$, alors $H^n(f') = 0$ et l'on a si n est pair :*

$$\chi(W) = \alpha(f) + \alpha(f') = \left(\frac{1}{2}\right) (\chi(V) + \chi(V'));$$

si n est impair :

$$\chi(W) = \alpha(f) - \alpha(f') \quad [\text{mod } \chi(M) \text{ éventuellement}].$$

C'est une conséquence immédiate des propositions 5, 6 et 7 et du théorème 2.

3.4. Compléments. — Lorsque n est impair, on peut obtenir des résultats partiels sur le degré en utilisant les remarques du n° 1.3

PROPOSITION 9. — *Si $n = 4s + 1$, et si $f: V \rightarrow M$ est une immersion bordante, on a $\alpha(f) \equiv \chi^*(V) \pmod{2}$.*

C'est une conséquence de la formule (10) du n° 1.3 et du fait que $\chi(M)$ est pair si M est compacte.

Si $n = 4s - 1$ et si W est stablement parallélisable (c'est le cas si M l'est), la classe de Wu de W est nulle. Supposons que $\chi(M)$ est pair si M est compacte. D'après un analogue du théorème 2 à coefficients $\mathbf{Z}/(2)$, on a

$$\alpha(f) \equiv \chi(W, \mathbf{Z}/(2)) \pmod{2}, \quad \text{d'où} \quad \alpha(f) \equiv \chi^*(V, \mathbf{Z}/(2)) \pmod{2}.$$

M. Kervaire ([11] et [13]) a démontré que, si n est impair, pour toute immersion $f: V \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ on a $\alpha(f) \equiv \chi^*(V) \pmod{2}$ pourvu que n soit différent de 1, 3 ou 7. D'après ce qui précède, la parité du degré des immersions bordantes est aussi déterminée dans ces cas exceptionnels.

Les résultats qui précèdent s'adaptent facilement lorsque W est un cobordisme d'une variété V à une variété V' .

Exemple. — Soit $f: S^1 \rightarrow S^2$ une immersion générique (auto-intersection transversale aux points doubles). Il n'est pas difficile de voir que le reste mod 2 du nombre des points doubles est différent du degré $\alpha(f)$. Si f est bordante, elle a donc un nombre pair de points doubles.

CHAPITRE II.

LA CLASSIFICATION DES IMMERSIONS.

En 1959, S. Smale ([23]) classifiait les immersions de la sphère dans l'espace euclidien à homotopie régulière près. Plus précisément, l'invariant de Smale $c(f) \in \pi_n(V_{n,p})$ réalise une bijection entre l'ensemble des composantes connexes de l'espace $\text{Imm}_0(S^n, \mathbb{R}^p)$ des immersions basiques (dont le jet en un point-base est fixé) et le groupe $\pi_n(V_{n,p})$ de la variété de Stiefel. En utilisant cette classification ainsi qu'un théorème de fibration, M. Hirsch ([7]) a démontré un théorème général de classification des immersions d'une variété V dans une variété M , et même caractérisé le type faible d'homotopie de l'espace $\text{Imm}(V, M)$. En outre, le théorème de fibration permet, en général, de résoudre le problème de l'extension d'une immersion donnée sur une sous-variété. Ceci ne vaut pas pour l'extension à W^{n+1} d'une immersion de $V = dW$ dans M^{n+1} .

Dans le paragraphe 1, on explicite la classification des immersions dans le cas de la codimension 1 et de la codimension 0, et notamment dans les cas particuliers où la source est stablement parallélisable, ou même une sphère, et où le but est une sphère ou l'espace euclidien. Dans tout ce paragraphe, on ne s'intéresse qu'aux classes d'homotopie régulière libre (c'est-à-dire sans point-base). Au paragraphe 2, on envisage les classes basiques; puis au paragraphe 3, on étudie le comportement comparé de ces deux sortes de classes vis-à-vis du problème de l'extension. Enfin le paragraphe 4 est consacré à la définition et aux propriétés de l'opération de somme connexe de deux immersions. On calcule en particulier le degré d'une somme connexe. On établit aussi que, dans un certain nombre de cas, la classe de la somme connexe ne dépend que des classes des immersions de départ. Ces cas sont particulièrement intéressants car l'ensemble $\pi_0(\text{Imm}(V, M))$ reçoit alors une structure algébrique qui sera utile dans la suite.

1. LA CLASSIFICATION DES IMMERSIONS.

1.1. Soit V une variété compacte (avec ou sans bord) de dimension n et M une variété sans bord, compacte ou non, de dimension p . Rappelons qu'une application différentiable $f: V \rightarrow M$ est une *immersion* si l'application tangente $T(f): T(V) \rightarrow T(M)$ est injective dans chaque fibre. On note $\text{Imm}(V, M)$ l'ensemble des immersions de V dans M ; c'est une partie ouverte de l'espace $C^1(V, M)$ des applications différentiables muni

de la topologie C^1 puisque la condition de rang maximal n pour $T(f)$ sur la variété compacte V est une condition ouverte.

Une *homotopie régulière* (libre) entre deux immersions f_0 et f_1 est un chemin continu $t \mapsto f_t$ dans l'espace $\text{Imm}(V, M)$; c'est donc une application continue $F : V \times I \rightarrow M \times I$ telle que la restriction

$$f_t = F(-, t) : V \times \{t\} \rightarrow M \times \{t\}$$

soit une immersion. D'après le paragraphe 1 de [20], si f_0 et f_1 sont de classe C^r ($1 \leq r \leq \infty$), tout chemin entre f_0 et f_1 est homotope à un chemin pour lequel l'application F est de classe C^r ; l'application F est alors une immersion.

Des propriétés analogues pour les cubes singuliers de l'espace $\text{Imm}(V, M)$ prouvent que les injections canoniques des espaces $C^r(V, M)$ ($r \geq 1$) dans $C^1(V, M)$ induisent des injections des espaces $\text{Imm}(V, M) \cap C^r(V, M)$ des immersions de classe C^r dans $\text{Imm}(V, M)$ qui sont des équivalences d'homotopie faibles.

Lorsqu'on s'intéresse aux groupes d'homotopie des espaces d'immersions, il n'est donc pas besoin de préciser le degré q ($1 \leq q \leq \infty$) de différentiabilité ni la topologie C^r ($1 \leq r \leq q \leq \infty$) choisie. De plus, $\text{Imm}(V, M)$ étant ouvert dans $C^1(V, M)$, c'est un espace localement connexe par arcs et l'ensemble de ses composantes connexes est l'ensemble $\pi_0(\text{Imm}(V, M))$ de ses composantes connexes par arcs.

1.2. Notons $R(T(V), T(M))$ l'espace des applications fibrées de $T(V)$ dans $T(M)$ qui, dans chaque fibre, induisent un monomorphisme, et $T : \text{Imm}(V, M) \rightarrow R(T(V), T(M))$ l'application de dérivation. Le résultat essentiel de [7] (voir aussi [20]) est le

THÉORÈME (d'équivalence d'homotopie faible). — Si $\dim V < \dim M$, l'application

$$T : \text{Imm}(V, M) \rightarrow R(T(V), T(M))$$

est une équivalence d'homotopie faible. En particulier, elle induit une bijection entre les composantes connexes.

Ce résultat est encore vrai pour $\dim V = \dim M$ si V est une variété connexe à bord non vide. Le théorème se démontre en « grim pant sur le squelette » de V à l'aide du théorème suivant ([23], voir aussi [25]) :

THÉORÈME (de fibration) (Smale). — Soit N une sous-variété de V ; si $\dim V < \dim M$, l'application de restriction $\text{Imm}(V, M) \rightarrow \text{Imm}(N, M)$ est une fibration de Serre (lorsque les espaces sont munis de la topologie C^r , $r \geq 2$).

Ce résultat est encore vrai pour $\dim V = \dim M$ pourvu que V soit obtenue à partir de N en n'ajoutant que des anses d'indice inférieur à $n - 1$. Il est en revanche bien connu que l'application $\text{Imm}(V^n, M^n) \rightarrow \text{Imm}(dV, M)$ n'a pas la propriété du relèvement des homotopies. Ce sont précisément les codimensions 0 et 1 que nous étudions dans la suite.

1.3. *Immersions de codimension 1.* — Supposons que la dimension p de M est égale à $n + 1$; supposons aussi que V et M sont orientées et que leurs fibrés tangents sont munis d'une structure riemannienne.

Si $\varphi \in R(T(V), T(M))$, on définit un monomorphisme fibré $\Psi: \theta \oplus T(V) \rightarrow T(M)$ en envoyant le vecteur de base du fibré trivial θ en $x \in V$ sur le vecteur normal unitaire au n -plan orienté $\varphi(T_x(V))$ dans la fibre de $T(M)$. Il est clair que l'application

$$\nu: R(T(V), T(M)) \rightarrow R(\theta \oplus T(V), T(M))$$

obtenue est une équivalence d'homotopie.

Supposons maintenant que V soit stablement parallélisable et soit $c: \theta \oplus T(V) \rightarrow V \times R^{n+1}$ une parallélisation stable. On en déduit un isomorphisme

$$c^*: R(\theta \oplus T(V), T(M)) \rightarrow R(V \times R^{n+1}, T(M)).$$

Ce dernier espace est l'espace des applications de V dans l'espace fibré $T_{n+1}(M)$ des $(n + 1)$ -repères tangents à M [qui se rétracte par déformation sur le fibré principal $\tilde{T}(M)$ de groupe $\mathbf{SO}(n + 1)$ tangent à M].

PROPOSITION 1. — *Si V^n et M^{n+1} sont des variétés orientées, et si $c: \theta \oplus T(V) \rightarrow V \times R^{n+1}$ est une parallélisation stable, l'application*

$$c^* \circ \nu \circ T: \text{Imm}(V, M) \rightarrow \text{Hom}(V, \tilde{T}(M))$$

est une équivalence d'homotopie faible. On a en particulier une bijection

$$\tau(c): \pi_0(\text{Imm}(V, M)) \rightarrow [V, \tilde{T}(M)].$$

Lorsque $V = S^n$, on choisit pour c la trivialisations de $\theta \oplus T(S^n)$ induite par le plongement ordinaire $p: S^n \rightarrow R^{n+1}$, le fibré trivial θ correspondant au vecteur normal sortant.

PROPOSITION 2. — *Si M est une variété orientée de dimension $n + 1$, on a un isomorphisme*

$$\tau: \pi_0(\text{Imm}(S^n, M)) \rightarrow [S^n, \tilde{T}(M)]$$

par lequel l'image du plongement de la sphère comme bord d'un petit disque dans M est $0 \in [S^n, \tilde{T}(M)]$.

Lorsque $V = D^n$, on a, par rétraction homothétique sur le centre, une parallélisation canonique de D^n .

PROPOSITION 3. — *L'application*

$$T_0: \text{Imm}(D^n, M) \rightarrow \tilde{T}(M)$$

qui associe à une immersion son jet en O est une équivalence d'homotopie faible. En particulier $\text{Imm}(D^n, M)$ est connexe si M est connexe.

1.4. *Le cas de $M = R^{n+1}$.* — C'est le cas originalement traité par S. Smale. Soit $f: V^n \rightarrow R^{n+1}$ une immersion; l'application $T(f)$ se prolonge comme au n° 1.3 à $\theta \oplus T(V)$. En composant avec la projection de $T(R^{n+1})$ sur la fibre en o , on obtient la différentielle $t(f): \theta \oplus T(V) \rightarrow R^{n+1}$. Il en résulte qu'une variété qui s'immerge en codimension 1 dans R^{n+1} est stablement parallélisable; la proposition 1 s'applique alors en remarquant que $\tilde{T}(R^{n+1}) = R^{n+1} \times \mathbf{SO}(n+1)$.

PROPOSITION 4. — *Soit V une variété orientée de dimension n ; il existe des immersions de V dans R^{n+1} si et seulement si V est stablement parallélisable. Soit c une parallélisation stable, l'application*

$$c^* \circ t: \text{Imm}(V, R^{n+1}) \rightarrow \text{Hom}(V, \mathbf{SO}(n+1))$$

est une équivalence d'homotopie faible. On a en particulier une bijection

$$\omega: \pi_0(\text{Imm}(V, R^{n+1})) \rightarrow [V, \mathbf{SO}(n+1)].$$

De même, si $V = S^n$ et si c est choisie comme pour la proposition 2 :

PROPOSITION 5. — *On a un isomorphisme*

$$\gamma: \pi_0(\text{Imm}(S^n, R^{n+1})) \rightarrow [S^n, \mathbf{SO}(n+1)]$$

par lequel l'image du plongement ordinaire est o .

Soit maintenant W une variété connexe à bord, de dimension $n+1$. S'il existe une immersion g de W dans R^{n+1} (de codimension 0), la variété W est parallélisée par $t(g)$ et de ce fait orientée. On suppose désormais W orientée et on ne s'intéresse qu'aux immersions qui respectent l'orientation.

PROPOSITION 6. — *Si W^{n+1} est une variété connexe orientée à bord qui soit parallélisable, l'application $g \mapsto t(g)$ de $\text{Imm}(W, R^{n+1})$ dans l'espace des trivialisations de $T(W)$ est une équivalence d'homotopie faible. Si C est une trivialisations particulière, on a une bijection*

$$C^* \circ t: \pi_0(\text{Imm}(W, R^{n+1})) \rightarrow [W, \mathbf{SO}(n+1)].$$

1.5. Voici une autre interprétation qui est parfois commode. Si $T_n(V)$ [resp. $T_n(M)$] est l'espace des n -repères tangents à V (resp. M), l'espace $R(T(V), T(M))$ s'identifie à l'espace des applications équivariantes sous $Gl(n)$ de $T_n(V)$ dans $T_n(M)$. L'application σ de $\text{Hom}_{Gl(n)}(T_n(V), T_n(M))$ dans l'espace des sections du fibré de base V , de fibre $T_n(M)$, associé à $T_n(V)$ [fibré principal de groupe $Gl(n)$], qui, à $\varphi : T_n(V) \rightarrow T_n(M)$, associe la section $x \mapsto (\varphi, \varphi(\varphi))$ [pour un φ quelconque de $T_n(V)$ au-dessus de x], est un homéomorphisme. L'application inverse associe à une section s l'application équivariante $\varphi \mapsto \varpi$ si $(\varphi, \varpi) \in T_n(V) \times T_n(M)$ est un représentant de $s(x)$.

Si f est une immersion, on note $T'(f)$ l'application équivariante correspondant à $T(f)$.

PROPOSITION 7. — *L'application*

$$\sigma \circ T' : \text{Imm}(V, M) \rightarrow S(T_n(V) \times_{Gl(n)} T_n(M))$$

est une équivalence d'homotopie faible.

Dans ce qui précède, on peut, si $T(V)$ et $T(M)$ possèdent une structure riemannienne, prendre les fibrés des n -repères orthonormés et remplacer $Gl(n)$ par $\mathbf{O}(n)$. Si M^{n+1} est orientée, le fibré des n -repères orthonormés tangents à M s'identifie canoniquement par adjonction d'un premier vecteur au fibré $\tilde{T}(M)$ des $(n+1)$ -repères orientés orthonormés, dans lequel $\mathbf{SO}(n)$ opère à gauche comme le sous-groupe de $\mathbf{SO}(n+1)$ formé des rotations qui laissent fixe le premier vecteur. De même, si V est orientée, le fibré $T_n(V)$ est l'union de deux exemplaires du fibré $\tilde{T}(V)$ principal de groupe $\mathbf{SO}(n)$. On a alors

$$\tilde{T}(V) \times_{\mathbf{SO}(n)} \tilde{T}(M) = T_n(V) \times_{Gl(n)} T_n(M).$$

1.6. *Le cas de $M = S^{n+1}$.* — Considérons la fibration $k : \mathbf{SO}(n+2) \rightarrow S^{n+1}$ qui, à un repère de R^{n+2} , associe le premier vecteur. La fibre au-dessus du point $x \in S^{n+1}$ est le groupe des rotations du plan tangent en x à S^{n+1} ; en particulier la fibre au-dessus du pôle nord ($x_1 = 1$) s'identifie canoniquement au groupe $\mathbf{SO}(n+1)$ des rotations de $R^{n+1} = \{0\} \times R^{n+1}$. Cette fibration est donc la fibration principale de groupe $\mathbf{SO}(n+1)$ tangente à S^{n+1} .

Le fibré $\tilde{T}(V) \times_{\mathbf{SO}(n)} \mathbf{SO}(n+2)$, où $\mathbf{SO}(n)$ opère comme le sous-groupe de $\mathbf{SO}(n+2)$ qui laisse fixes les deux premiers vecteurs, n'est autre que le fibré principal de groupe $\mathbf{SO}(n+2)$ associé à $T(V)$. Ses sections correspondent aux trivialisations de $\theta^2 \oplus T(V)$. Si \hat{c} est une trivialisatation particulière, si $\rho \in \text{Hom}(V, \mathbf{SO}(n+2))$ et si $\hat{c}' = \rho \cdot \hat{c}$, on note $\rho = \hat{c}^*(\hat{c}')$.

PROPOSITION 8. — Soit V une variété orientée de dimension n ; il existe des immersions de V dans S^{n+1} si et seulement si V est stablement parallélisable. Soit \hat{c} une trivialisatation de $\theta^2 \oplus T(V)$, l'application

$$\hat{c}^* \circ \sigma \circ T' : \text{Imm}(V, S^{n+1}) \rightarrow \text{Hom}(V, \mathbf{SO}(n+2))$$

est une équivalence d'homotopie faible. On a en particulier une bijection

$$\mu : \pi_0(\text{Imm}(V, S^{n+1})) \rightarrow [V, \mathbf{SO}(n+2)].$$

De même, si $V = S^n$ et si \hat{c} est le stabilisé de $c = t(p)$:

PROPOSITION 9. — On a une bijection

$$\beta : \pi_0(\text{Imm}(S^n, S^{n+1})) \rightarrow [S^n, \mathbf{SO}(n+2)].$$

Les rapports entre les bijections ω (prop. 4) et μ , lorsque la trivialisatation \hat{c} est la stabilisée de c , sont donnés par la proposition suivante :

PROPOSITION 10. — Soit $i : R^{n+1} \rightarrow S^{n+1}$ la projection stéréographique de centre le pôle sud ($x_1 = -1$), le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \pi_0(\text{Imm}(V, R^{n+1})) & \xrightarrow{\omega} & [S, \mathbf{SO}(n+1)] \\ \downarrow i_* & & \downarrow s \\ \pi_0(\text{Imm}(V, S^{n+1})) & \xrightarrow{\mu} & [V, \mathbf{SO}(n+2)] \end{array}$$

[où s est induit par l'injection $\mathbf{SO}(n+1) \rightarrow \mathbf{SO}(n+2)$] est commutatif. En particulier, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \pi_0(\text{Imm}(S^n, R^{n+1})) & \xrightarrow{\gamma} & [S^n, \mathbf{SO}(n+1)] \\ \downarrow i_* & & \downarrow s \\ \pi_0(\text{Imm}(S^n, S^{n+1})) & \xrightarrow{\beta} & [S^n, \mathbf{SO}(n+2)] \end{array}$$

est commutatif.

Démonstration: — Appliquons d'abord la proposition 7 à $M = R^{n+1}$. Le fibré principal tangent à R^{n+1} est $R^{n+1} \times \mathbf{SO}(n+1)$; l'injection $i : R^{n+1} \rightarrow S^{n+1}$ envoie la fibre en 0 sur la fibre au pôle nord : le sous-groupe $\mathbf{SO}(n+1) \subset \mathbf{SO}(n+2)$. La trivialisatation c et la proposition 7 donnent une bijection

$$\omega' = \pi_0(c^* \circ \sigma \circ T') : \pi_0(\text{Imm}(V, R^{n+1})) \rightarrow [V, \mathbf{SO}(n+1)].$$

Si l'on remplace ω par ω' , le diagramme est commutatif du fait que \hat{c} est la stabilisée de c .

Montrons maintenant que $\omega = \omega'$. Par définition, on a $t(f) = \omega(f).c$. D'autre part $T(f) : T(V) \rightarrow T(R^{n+1})$ donne $T'(f) : \hat{T}(V) \rightarrow \mathbf{SO}(n+1)$ telle que $T'(f) = \omega'(f).c'$, où l'application équivariante c' correspond à la trivialisatation c . D'où le résultat.

Remarques. — Lorsqu'on est dans les hypothèses de l'une des propositions 1, 2, 4, 5, 8 ou 9, on note \tilde{f} l'image de la classe d'homotopie régulière d'une immersion f par l'une des bijections $\tau(c)$, τ , ω , γ , μ ou β . Le plus souvent, on considère ces bijections comme des identifications et l'on parle de la classe \tilde{f} de l'immersion f . De plus, comme $\mathbf{SO}(n)$ est un groupe commutatif, l'ensemble $[S^q, \mathbf{SO}(n)]$ est canoniquement isomorphe au groupe commutatif $\pi_q(\mathbf{SO}(n))$; on démontrera plus loin une propriété d'additivité des bijections β et γ (n° 4.5).

2. POINTS-BASES. — Dans tout ce paragraphe, les variétés V^n et M^{n+1} sont orientées et V possède une parallélisation stable c .

2.1. Soit D un petit disque de dimension n plongé dans V avec pour centre un point $\nu \in V$. L'application de restriction $r : \text{Imm}(V, M) \rightarrow \text{Imm}(D, M)$ est une fibration (théorème de fibration) dont la fibre $\text{Imm}_0(V, M)$ est l'espace des immersions dont la restriction à D est fixée.

D'après la proposition 3, l'application $T_0 : \text{Imm}(D, M) \rightarrow \tilde{T}(M)$ qui donne le jet au centre de D est une équivalence d'homotopie faible. On en déduit que l'espace $\text{Imm}_0(V, M)$ a l'homotopie de l'espace des immersions dont le jet en ν est fixé. De plus, tous les espaces $\text{Imm}_0(V, M)$ ont la même homotopie puisque l'espace $\text{Imm}(D, M)$ est connexe par arcs.

D'après les propositions 1 et 3, on a l'isomorphisme suivant entre suites exactes :

$$\begin{array}{ccccccc} \pi_1(\text{Imm}(D, M)) & \longrightarrow & \pi_0(\text{Imm}_0(V, M)) & \longrightarrow & \pi_0(\text{Imm}(V, M)) & \longrightarrow & 0 \\ \simeq \downarrow \tau_0 & & \simeq \downarrow \tau_0(c) & & \simeq \downarrow \tau(c) & & \\ \pi_1(\tilde{T}(M)) & \longrightarrow & [V, \tilde{T}(M)]_0 & \longrightarrow & [V, \tilde{T}(M)] & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

où la ligne du haut est la suite exacte de la fibration r , et où $[V, \tilde{T}(M)]_0$ est l'ensemble des classes d'homotopie basiques, les points-bases étant $\nu \in V$ et le jet $j \in \tilde{T}(M)$ en ν . L'isomorphisme $\tau_0(c)$ provient de la restriction $\text{Imm}_0(V, M) \rightarrow \text{Hom}_0(V, \tilde{T}(M))$ de l'équivalence d'homotopie de la proposition 1. Les composantes connexes de Imm_0 sont les classes d'homotopie régulière basiques (respectant le jet-base).

En particulier, pour $V = S^n$, on a le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} \pi_1(\text{Imm}(D, M)) & \longrightarrow & \pi_0(\text{Imm}_0(S^n, M)) & \longrightarrow & \pi_0(\text{Imm}(S^n, M)) & \longrightarrow & 0 \\ \simeq \downarrow \tau_0 & & \simeq \downarrow \tau_0 & & \simeq \downarrow \tau & & \\ \pi_1(\tilde{T}(M)) & \longrightarrow & \pi_n(\tilde{T}(M)) & \longrightarrow & [S^n, \tilde{T}(M)] & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

et la flèche $\pi_1(\tilde{T}(M)) \rightarrow \pi_n(\tilde{T}(M))$ est l'opération habituelle du groupe fondamental en $j \in \tilde{T}(M)$ sur le $n^{\text{ième}}$ groupe d'homotopie basé au même point.

Considérons la suite exacte d'homotopie

$$\pi_1(\mathbf{SO}(n+1)) \rightarrow \pi_1(\tilde{\mathbf{T}}(\mathbf{M})) \rightarrow \pi_1(\mathbf{M}) \rightarrow 0$$

de la fibration $\tilde{\mathbf{T}}(\mathbf{M})$.

PROPOSITION 11. — *L'image de $\pi_1(\mathbf{SO}(n+1))$ dans $\pi_1(\tilde{\mathbf{T}}(\mathbf{M}))$ opère trivialement dans $\pi_n(\tilde{\mathbf{T}}(\mathbf{M}))$.*

On pourrait donner une démonstration « algébrique » directe. On va donner une démonstration « géométrique », c'est-à-dire utilisant l'interprétation en termes d'immersions. Pour $n \geq 2$, soit ρ le générateur de $\pi_1(\mathbf{SO}(n+1))$; on va construire un représentant f' de $\rho \cdot f$ et montrer qu'il est basiquement régulièrement homotope à f . Soit $\rho_t (t \in [0, 1])$ la rotation d'angle $2\pi t$ autour d'un $(n-1)$ -plan de \mathbf{R}^n . Si on appelle pôle nord le point-base de S^n , on identifie à $S^{n-1} \times [0, 1]$ la couronne tropicale (voisinage de l'équateur). Soit φ l'automorphisme de S^n qui est constant hors des tropiques, et qui, sur la couronne tropicale $S^{n-1} \times [0, 1]$, est défini par $\varphi(x, u) = (\rho_{1-u}(x), u)$. On peut supposer qu'on a rendu φ différentiable au voisinage des tropiques; l'application composée $\varphi \circ f$ est alors un représentant de $\rho \cdot f$. Si l'on repousse la zone tropicale vers le pôle sud, on voit que φ se déforme en l'identité dans l'espace des automorphismes qui sont l'identité au voisinage du pôle nord. Il en résulte une homotopie régulière basique entre f et $\varphi \circ f$.

Pour $n = 1$, la démonstration est la figure suivante :

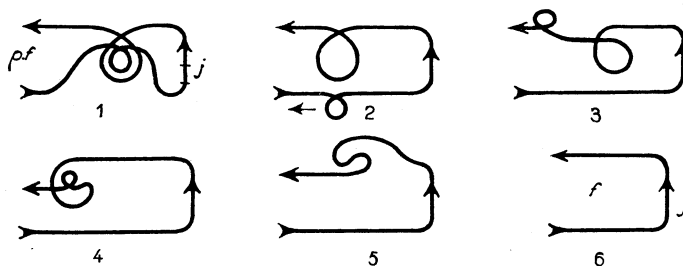


Fig. 3.

PROPOSITION 12. — *On a des suites exactes :*

$$\begin{array}{ccccccc} \pi_1(\mathbf{M}) & \longrightarrow & \pi_0(\text{Imm}_0(S^n, \mathbf{M})) & \longrightarrow & \pi_0(\text{Imm}(S^n, \mathbf{M})) & \longrightarrow & 0 \\ \cong \downarrow & & \simeq \downarrow \tau_0 & & \simeq \downarrow \tau & & \\ \pi_1(\mathbf{M}) & \longrightarrow & \pi_n(\tilde{\mathbf{T}}(\mathbf{M})) & \longrightarrow & [S^n, \tilde{\mathbf{T}}(\mathbf{M})] & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

2.2. Considérons maintenant la suite exacte d'homotopie de la fibration $\tilde{\mathbf{T}}(\mathbf{M})$:

$$\pi_{n+1}(\mathbf{M}) \longrightarrow \pi_n(\mathbf{SO}(n+1)) \longrightarrow \pi_n(\tilde{\mathbf{T}}(\mathbf{M})) \longrightarrow \pi_n(\mathbf{M}) \xrightarrow{\delta} \pi_{n-1}(\mathbf{SO}(n+1)).$$

PROPOSITION 13. — *Une application continue basique $f: S^n \rightarrow M$ est basiquement homotope à une immersion si et seulement si $\delta[f] = 0$, c'est-à-dire si $f^*(T(M))$ est trivial.*

En faisant le quotient par l'action des groupes fondamentaux, comme $\pi_1(\mathbf{SO}(n+1))$ opère trivialement sur $\pi_n(\mathbf{SO}(n+1))$ et sur $\pi_n(\tilde{T}(M))$, on obtient :

PROPOSITION 14. — *La suite*

$$(\Sigma) \quad \pi_n(\mathbf{SO}(n+1)) \xrightarrow{i} [S^n, \tilde{T}(M)] \longrightarrow [S^n, M]$$

est exacte.

On donnera plus loin une interprétation géométrique de l'action i de $\pi_n(\mathbf{SO}(n+1))$ sur l'ensemble $[S^n, \tilde{T}(M)]$ des classes d'immersions de S^n dans M .

2.3. Remarque. — Supposons que M soit simplement connexe. On a alors une surjection $\pi_1(\mathbf{SO}(n+1)) \rightarrow \pi_1(\tilde{T}(M))$. Comme $\pi_1(\mathbf{SO}(n+1))$ opère trivialement dans $[V, \mathbf{SO}(n+1)]_0$ puisque $\mathbf{SO}(n+1)$ est un groupe connexe, il en résulte que $\pi_1(\tilde{T}(M))$ opère trivialement dans $[V, \tilde{T}(M)]_0$. La surjection $\pi_0(\text{Imm}_0(V, M)) \rightarrow \pi_0(\text{Imm}(V, M))$ est donc un isomorphisme.

3. IMMERSIONS BORDANTES. — Si W est une variété orientée de dimension $n+1$, de bord dW , si $j: V \rightarrow dW$ est un isomorphisme (orienté) et si $g: W \rightarrow M^{n+1}$ est une immersion (*orientée*), alors $f = g \circ j: V \rightarrow M$ est une immersion *bordante*, et l'on dit que la classe d'homotopie régulière de f est une classe bordante (que ce soit la classe libre ou la classe basique). Il est clair que la classe libre d'une classe basique bordante est bordante. Réciproquement :

PROPOSITION 15. — *Toute classe basique au-dessus d'une classe libre bordante est elle-même bordante. Autrement dit, si $f_0, f_1 \in \text{Imm}_0(V, M)$ sont librement homotopes et si f_0 est bordante, f_1 est basiquement homotope à une immersion bordante f' .*

Si $V = S^n$, on a une démonstration facile en utilisant le fait (proposition 12) que les classes basiques de f_0 et f_1 diffèrent par l'opération d'un élément de $\pi_1(M)$.

Dans le cas général, on désigne par $\Gamma: I \rightarrow \text{Imm}(D, M)$ le lacet parcouru par le jet en ν dans l'homotopie libre entre f_0 et f_1 . On va construire un chemin d'origine f_0 dans $\text{Imm}(V, M)$ dont l'extrémité f' soit bordante

et dont la projection Γ' dans $\text{Imm}(D, M)$ soit un lacet homotope à Γ : ceci assure que f' est basiquement homotope à f_1 .

Notons $\gamma : I \rightarrow M$ la restriction de Γ au centre o de D . On remplace γ par une immersion qui lui soit homotope. Puis, on déforme Γ en conservant γ de sorte que sur $[0, 1 - \varepsilon]$ la tangente en $t \in I$ à γ soit transversale au plan image de D par $T(\Gamma_t)$ et orientée comme son vecteur normal. Puis, dans $[1 - \varepsilon, 1]$, on déforme γ en un chemin γ' , dont l'image reste au voisinage du point-base $m = f_0(o)$, en lui faisant faire assez de tours sur lui-même pour que la propriété précédente reste vérifiée. Il est clair qu'une immersion $g : W \rightarrow M$ de bord f_0 peut suivre cette déformation Γ' ; d'où le résultat.

4. SOMMES CONNEXES.

4.1. Soient V^n et V'^n deux variétés sans bord, et $f : V \rightarrow M^{n+1}$ et $f' : V' \rightarrow M$ deux immersions. On obtient une *somme connexe* de ces deux immersions de la manière suivante : soit $V \# V'$ la somme connexe de V et V' obtenue en ôtant de V (resp. V') un petit disque D (resp. D') voisinage d'un point $x \in V$ (resp. $x' \in V'$) et en recollant (avec orientations compatibles) $V - D$ à $V' - D'$ à l'aide d'un cylindre $S^{n-1} \times I$ (qu'on appelle le *lien*). Si γ est un chemin dans M d'origine $f(x)$ et d'extrémité $f'(x')$, qui, en ses extrémités, est normal (normale sortante) à $f(V)$ et $f'(V')$, on note $f + f' : V \# V' \rightarrow M$ l'immersion obtenue en recollant (avec arrondissement des arêtes) $f|_{V-D}$, $f'|_{V'-D'}$ et une immersion de $S^{n-1} \times I$ comme petit tube d'âme γ (fig. 4).

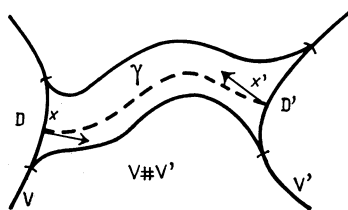


Fig. 4.

L'immersion $f + f'$ dépend des choix de x, x', γ et de l'immersion de $S^{n-1} \times I$: c'est pourquoi on parle d'une somme connexe. La figure 5 ci-dessous montre deux immersions de S^1 dans le plan privé de deux points a et b et deux choix pour leur somme connexe qui ne sont pas homotopes.

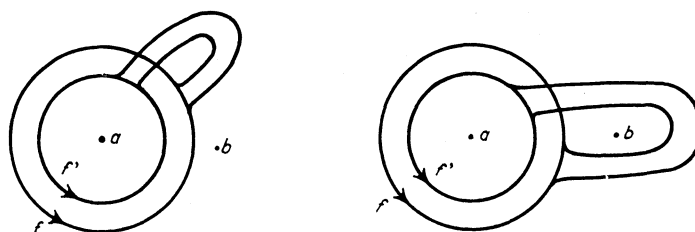


Fig. 5.

4.2. *Degré d'une somme connexe.* — Il y a cependant des propriétés communes à toutes les sommes connexes. Pour énoncer la première, rappelons (chap. I) que $f: V \rightarrow M$ est *cobordante* à $f': V' \rightarrow M$ si l'immersion $f \cup - f': V \cup - V' \rightarrow M$ (où le signe $-$ désigne le changement d'orientation) est une immersion bordante.

PROPOSITION 16. — *Une somme connexe $f + f'$ est librement homotope à une immersion qui est cobordante à l'union $f \cup f'$.*

PROPOSITION 17. — *Si deux des trois immersions f , f' , et $f + f'$ ont un degré, la troisième en a un et l'on a*

$$\alpha(f + f') + 1 = \alpha(f) + \alpha(f') \quad [\text{mod } \chi(M) \text{ éventuellement}].$$

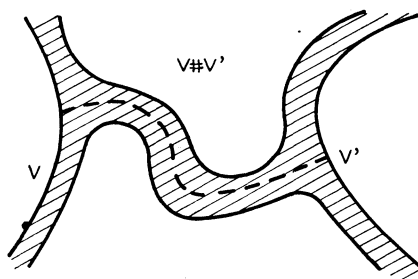


Fig. 6.

Démonstration. — En déplaçant un peu $f + f'$ le long des normales sortantes à $f(V)$ et $f'(V')$, on obtient une immersion de la réunion $-V \cup -V' \cup (V \# V')$ qui est le bord d'une immersion de la variété N (hachurée sur la figure 6) union de $V \times I$, de $V' \times I$ et du petit tube $D^n \times I$ voisinage de γ ; d'où la proposition 16.

La première assertion de la proposition 17 résulte alors de la proposition 8 du chapitre I. D'autre part, la variété N a le type d'homotopie de la somme connexe *topologique* de V et V' , d'où, par Mayer-Vietoris, $\chi(N) = \chi(V) + \chi(V') - 1$. Si n est impair, on a $\chi(V) = \chi(V') = 0$, donc $\chi(N) = -1$. La formule résulte alors de la proposition 8 du chapitre I.

Si n est pair, on a $\alpha(f) = \alpha(-f) = \left(\frac{1}{2}\right)\chi(V)$ (chap. I, th. 3 et prop. 7) et, de même, $\alpha(f') = \alpha(-f') = \left(\frac{1}{2}\right)\chi(V')$ d'où la formule cherchée d'après la proposition 8 du chapitre I.

4.3. Sommes connexes d'immersions bordantes.

PROPOSITION 18. — *Si f et f' sont deux immersions bordantes, toute somme connexe $f + f'$ est bordante.*

C'est évident : il suffit de coller au cobordisme N (prop. 16) les deux immersions que bordent f et f' .

PROPOSITION 19. — *Si f et f' ont des classes bordantes, toute somme connexe $f + f'$ a une classe bordante.*

D'après la proposition 15, l'immersion f est basiquement homotope à une immersion bordante. Si l'on choisit comme point-base le point $x \in V$, il existe donc une homotopie régulière, fixe sur le petit disque D de centre x dans V , entre f et une immersion bordante f_1 . Il en est de même pour f' avec le petit disque D' . Comme ces homotopies régulières sont fixes sur D et D' , elles se recollent avec l'immersion du lien pour donner une homotopie régulière entre $f + f'$ et une somme connexe $f_1 + f'_1$ qui, elle, est bordante d'après la proposition 18.

4.4. *Le cas où M est simplement connexe.* — La somme connexe $V \# V'$ dépend des choix de x, x', D et D' . Mais deux plongements du disque D^n dans V sont isotopes. Il en résulte entre deux sommes connexes un isomorphisme φ qui induit d'une part l'identité sur le lien; il induit d'autre part un isomorphisme de la variété trouée $\overline{V - D}$ correspondant à une somme connexe sur la variété trouée $\overline{V - D_1}$ correspondant à l'autre somme connexe, qui est la restriction d'un automorphisme de V isotope à l'identité. A l'aide d'un tel isomorphisme φ , on peut comparer deux sommes connexes d'immersions $f + f'$ construites avec des données x, x', D, D' distinctes.

LEMME. — *Soient $(V \# V')$ et $(V \# V')_1$ deux sommes connexes et $\varphi : (V \# V') \xrightarrow{\sim} (V \# V')_1$ comme ci-dessus. Si $(f + f')_1 : (V \# V')_1 \rightarrow M$ est une somme connexe construite avec x_1, x'_1, D_1, D'_1 , alors $(f + f')_1 \circ \varphi : (V \# V') \rightarrow M$ est régulièrement homotope à une somme connexe $(f + f') : (V \# V') \rightarrow M$ construite avec x, x', D, D' .*

Ce lemme est évident. Dans ce qui suit, on n'aura donc besoin de considérer qu'une somme connexe $V \# V'$.

PROPOSITION 20. — *Soient $f : V \rightarrow M$ et $f' : V' \rightarrow M'$ deux immersions. Si $\pi_1(M) = 0$, deux sommes connexes $f + f'$ sont régulièrement homotopes.*

Soient D_0 un disque de centre x contenu dans D et D'_0 un disque de centre x' contenu dans D' . On note C et C' les couronnes $\overline{D - D_0}$ et $\overline{D' - D'_0}$. Soient (D_2, D_3) une décomposition de la sphère S^n en deux hémisphères et $p : S^n \rightarrow M$ un plongement de la sphère comme bord d'une petite boule, et tel que $p|_{D_2} = f|_D$ (si l'on identifie D et D_2). On note $\hat{f}' : V' \rightarrow M$ l'immersion définie de la manière suivante : sur $V' - D'$, les immersions f' et \hat{f}' coïncident ; la restriction $\hat{f}'|_{C'}$ est égale à l'immersion du lien $S^{n-1} \times I$, et la restriction $\hat{f}'|_{D'_0}$ est égale à $p|_{D_3}$ (après identification de D'_0 et D_3).

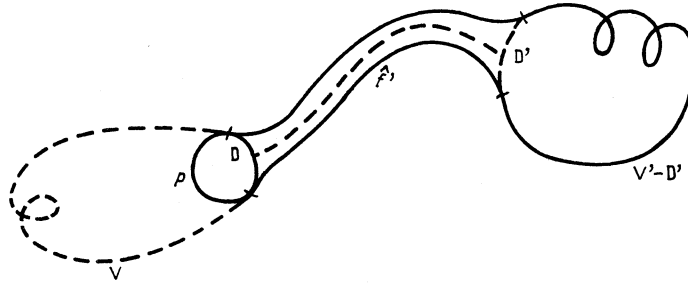


Fig. 7.

La somme connexe $V \# V'$ étant isomorphe à la réunion de $\overline{V - D}$ et $\overline{V' - D'_0}$, la couronne C' est identifiée au lien, et la somme connexe $f + f'$ est égale à f sur $\overline{V - D}$ et à \hat{f}' sur $\overline{V' - D'_0}$. Enfin, par rétraction du lien le long du chemin γ , on obtient une homotopie régulière, fixe sur $\overline{V' - D'}$ entre f' et \hat{f}' .

Soit alors $(f + f')_1$ une autre somme connexe pour laquelle x, x', D, D' sont les mêmes que pour $f + f'$. Les immersions associées \hat{f}' et \hat{f}'_1 sont régulièrement homotopes à f' , donc régulièrement homotopes entre elles. Elles coïncident sur D'_0 . Comme M est simplement connexe, elles sont basiquement homotopes d'après le n° 2.3. Par recollement à $f|_{\overline{V - D}}$, on obtient une homotopie régulière entre $f + f'$ et $(f + f')_1$.

PROPOSITION 21. — *Si M est simplement connexe, la classe d'homotopie régulière de $f + f'$ ne dépend que des classes de $f : V \rightarrow M$ et $f' : V' \rightarrow M$.*

Soit $f + f'$ une somme connexe, et soient $(f_t), (f'_t)$ ($t \in [0, 1]$) des homotopies régulières. Si l'on a choisi D assez petit, la déformation $f_t|_D$ est la restriction à D d'une déformation p_t qui, à chaque étape, est le bord d'une petite boule. D'après le théorème de fibration (n° 1.2), il existe une déformation \hat{f}'_t de \hat{f}' dont les restrictions à D'_0 et $V' - D'$ soient respectivement $p_t|_{D'_0}$ et $f'_t|_{(V' - D')}$. L'immersion \hat{f}'_t coïncide avec f'_t sur $V' - D'$, et elle est régulièrement homotopie à f'_1 (par l'intermédiaire de f').

Il résulte alors du même raisonnement que dans la proposition précédente que l'immersion $h: V \# V' \rightarrow M$ qui, sur $V - D$, coïncide avec $f_1|_{V - D}$ et, sur $V' - D'_0$, coïncide avec \hat{f}'_1 est régulièrement homotope à toute somme connexe $f_1 + f'_1$.

4.5. *Somme connexe avec une immersion de S^n .* — La somme connexe $V \# S^n$ est isomorphe à V . On trouve un tel isomorphisme $\Psi: V \# S^n \rightarrow V$ qui soit l'identité sur $V - D$ en identifiant un petit disque D_0 de centre x contenu dans D à $S^n - D'$, et la couronne $C = D - D_0$ au lien $S^{n-1} \times I$. L'isomorphisme étant ainsi fixé dès qu'on a x, x', D, D' , et compatible avec les isomorphismes φ du n° 4.4, si $f + h: V \# S^n \rightarrow M$ est une somme connexe des immersions $f: V \rightarrow M$ et $h: S^n \rightarrow M$, on notera aussi $f + h$ l'immersion $(f + h) \circ \Psi^{-1}: V \rightarrow M$.

En particulier, si $V = S^n$, il résulte du n° 4.4, lorsque M est simplement connexe, une loi de composition sur l'ensemble $\pi_0(\text{Imm}(S^n, M))$ des classes d'immersions. Munissons l'ensemble $[S^n, \tilde{T}(M)]$ de la loi de composition habituelle (provenant du fait que S^n est une suspension) qui en fait un groupe commutatif (même pour $n = 1$ puisque c'est le quotient du π_n par l'action du π_1).

PROPOSITION 22. — *Si M est simplement connexe, la bijection*

$$\tau: \pi_0(\text{Imm}(S^n, M)) \rightarrow [S^n, \tilde{T}(M)] \quad (\text{cf. prop. 2})$$

est additive. La somme connexe des classes est une loi de groupe commutatif sur $\pi_0(\text{Imm}(S^n, M))$ dont l'élément neutre est la classe du plongement comme bord d'un petit disque.

Soient $f, h: S^n \rightarrow M$, $f + h$ une somme connexe et p et \hat{h} comme dans la proposition 20. Par définition, $\tau(f)$ est la différence entre $\nu \circ T(f)$ et $\nu \circ T(p)$; par conséquent, $\tau(f)$ vaut 0 sur l'hémisphère D . De même, $\tau(h) = \tau(\hat{h})$ est la différence entre $\nu \circ T(\hat{h})$ et $\nu \circ T(p)$ et vaut 0 sur D_3 . Par définition de l'addition dans $[S^n, \tilde{T}(M)]$, la somme $\tau(f) + \tau(h)$ est la différence entre $\nu \circ T(f + h)$ et $\nu \circ T(p)$ puisque $(f + h)|_D = \hat{h}|_D$ et $(f + h)|_{D_3} = f|_{D_3}$.

COROLLAIRE. — *En particulier, les bijections*

$$\begin{aligned} \gamma: \pi_0(\text{Imm}(S^n, \mathbb{R}^{n+1})) &\rightarrow \pi_n(\mathbf{SO}(n+1)), \\ \beta: \pi_0(\text{Imm}(S^n, S^{n+1})) &\rightarrow \pi_n(\mathbf{SO}(n+2)) \end{aligned}$$

sont des isomorphismes de groupes.

Remarque. — Il ne faut pas croire que l'opposée de la classe \tilde{f} soit la classe $(-\tilde{f})$, comme c'est le cas en codimension strictement plus grande

que 1. La proposition 17 montre en effet que l'application $f \mapsto \alpha(f) - 1$ est un homomorphisme du groupe $\pi_0(\text{Imm}(S^n, M))$ dans le groupe des entiers relatifs $[\text{mod } \chi(M)$ éventuellement]. Si n est impair, on a $\alpha(f) = -\alpha(-f)$ (chap. I, prop. 7) d'où $\alpha(\tilde{f} + (\overline{-f})) = -1$ (prop. 17).

4.6. *L'opération $i : \pi_n(\mathbf{SO}(n+1)) \rightarrow [S^n, \tilde{T}(M)]$.* — On est maintenant en mesure de donner une interprétation géométrique de l'application i du n° 2.2. Rappelons que i provient du passage au quotient par les groupes fondamentaux de l'homomorphisme $i' : \pi_n(\mathbf{SO}(n+1)) \rightarrow \pi_n(\tilde{T}(M))$ de la suite exacte de la fibration $\tilde{T}(M)$. L'application i est donc un homomorphisme de groupes.

Soit B^{n+1} un disque ouvert plongé dans M , on identifie par γ le groupe $\pi_n(\mathbf{SO}(n+1))$ et $\pi_0(\text{Imm}(S^n, B))$. On identifie par τ le groupe $[S^n, \tilde{T}(M)]$ et $\pi_0(\text{Imm}(S^n, M))$.

PROPOSITION 23. — *Si $\rho \in \pi_n(\mathbf{SO}(n+1))$, la classe $i(\rho)$ est la classe de l'immersion $h(\rho)$ composée d'un représentant de ρ dans $\text{Imm}(S^n, B)$ et du plongement de B dans M .*

On peut supposer que $\mathbf{SO}(n+1)$ est la fibre de $\tilde{T}(M)$ au centre o de B . Le résultat est alors évident puisque $\nu \circ T(h)$ est homotope à sa projection sur la fibre de o et que γ et τ sont définis à l'aide de la même trivialisations c de $\theta \oplus T(S^n)$.

PROPOSITION 24. — *Si $\rho \in \pi_n(\mathbf{SO}(n+1))$ et si $h(\rho) : S^n \rightarrow M$ est comme dans la proposition 23, on a $\overline{f+h(\rho)} = \rho \cdot \tilde{f}$ pour toute $f \in \text{Imm}(S^n, M)$.*

Même si M n'est pas simplement connexe, une somme connexe $f+h$ ne varie pas lorsque h varie dans une classe d'homotopie régulière pourvu que l'image de h soit contenue dans un disque ouvert contenu dans M . En effet, une telle immersion h est régulièrement homotope à une immersion d'image dans un disque B fixé et dont la classe dans $\text{Imm}(S^n, B)$ ne dépend que de la classe de h dans $\text{Imm}(S^n, M)$ puisque tous les choix de la fibre base de $\tilde{T}(M)$ donnent la même application de $\pi_n(\mathbf{SO}(n+1))$ dans $[S^n, \tilde{T}(M)]$ (prop. 11). Soit alors $f+h$ une somme connexe, par homotopie régulière, on peut supposer que le lien touche $f(S^n)$ au voisinage d'un point x fixé, sans pour cela déformer h . En raccourcissant le lien, on voit que $f+h$ est régulièrement homotope à une somme $f+h'$, où h' , homotope à h , a son image dans un disque B fixé contenant x ainsi que le lien. La démonstration de la proposition 20 s'applique alors aux sommes connexes de lien contenu dans B avec des immersions contenues dans B ; de même, la démonstration de la proposition 21 s'applique aux homotopies régu-

lières h_i d'image contenue dans B : en effet, les immersions \hat{h}' , d'image contenue dans B, sont régulièrement homotopes dans B, car homotopes à h dans M.

Pour démontrer que $\widehat{f + h(\rho)} = \rho \cdot \tilde{f}$, il suffit de démontrer que $\widehat{f + h'} = \rho \cdot \tilde{f}$, avec h' comme plus haut. C'est la démonstration de la proposition 22 qui est encore valable puisque l'image de \hat{h}' est contenue dans B.

Remarque. — Si M n'est pas simplement connexe, il n'y a pas de résultat analogue aux propositions 20, 21 et 22; pour s'en convaincre, il suffit de se reporter au contre-exemple du n° 4.1. Cependant, on vient de démontrer que, si l'immersion $h : S^n \rightarrow M$ a son image contenue dans un disque B contenu dans M, la proposition 20, la proposition 21 et la première assertion de la proposition 22 sont valables.

CHAPITRE III.

CLASSES DES IMMERSIONS BORDANTES DE S^n DANS R^{n+1} OU S^{n+1} .

Dans ce chapitre, on détermine les classes d'homotopie régulière des immersions de la sphère S^n dans l'espace euclidien R^{n+1} et dans la sphère S^{n+1} qui sont bordantes. Si l'on a identifié $\pi_0(\text{Imm}(S^n, R^{n+1}))$ à $\pi_n(\mathbf{SO}(n+1))$ et $\pi_0(\text{Imm}(S^n, S^{n+1}))$ à $\pi_n(\mathbf{SO})$ par les isomorphismes γ et β (voir II.1), et si l'on note $J_n : \pi_n(\mathbf{SO}) \rightarrow \Pi_n [= \pi_{2n+2}(S^{n+2})]$ l'homomorphisme stable de Hopf-Whitehead, les résultats s'énoncent ainsi :

THÉORÈME 1. — *Pour tout n , l'ensemble des classes des immersions bordantes de S^n dans S^{n+1} est le noyau de J_n .*

THÉORÈME 2. — *Pour tout $n \geq 2$, l'ensemble des classes des immersions bordantes de S^n dans R^{n+1} est le noyau de $J_n \circ s$.*

1. LE DEGRÉ NORMAL.

1.1. Soit $f \in \text{Imm}(S^n, R^{n+1})$, le fibré normal de f est trivial. Il en résulte une trivialisatation $t(f) : \theta \oplus T(S^n) \rightarrow R^{n+1}$ où θ est le fibré trivial de rang 1 de base S^n . Si l'on note c la trivialisatation $t(p)$ induite par le plongement ordinaire, il existe un unique élément $\rho \in \pi_n(\mathbf{SO}(n+1))$ tel que $t(f)$ soit homotope à $\rho \cdot c$.

PROPOSITION 1. — *Avec les notations précédentes, on a*

$$\rho = \tilde{f}.$$

Cela résulte immédiatement de la définition de l'isomorphisme γ car l'élément de $R(T(S^n), T(R^{n+1}))$ qui correspond à $\rho.c$ est homotope à $T(f)$.

1.2. Soit $k : \pi_n(\mathbf{SO}(n+1)) \rightarrow \pi_n(S^n) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Z}$ l'homomorphisme obtenu par l'opération de $\mathbf{SO}(n+1)$ sur S^n .

PROPOSITION 2. — *Le degré normal de $f \in \text{Imm}(S^n, R^{n+1})$ vaut*

$$\alpha(f) = 1 + k(\tilde{f}).$$

D'après la proposition 1, le degré normal $\alpha(f)$ est le degré de l'application qui, à $x \in S^n$, associe $\tilde{f}(x).x \in S^n$; mais $k(\tilde{f})$ est le degré de l'application $x \mapsto \tilde{f}(x).x_0$.

Pour n pair, l'homomorphisme k est nul et on a $\alpha(f) = 1 = \frac{1}{2}\chi(S^n)$. Pour n impair $\neq 1, 3$ ou 7 , l'image de k est l'idéal des multiples de 2 et il y a des immersions de tout degré impair. Pour $n = 1, 3$ ou 7 , l'homomorphisme k est surjectif et il y a des immersions de tout degré.

Toute immersion $f' : S^n \rightarrow S^{n+1}$ étant régulièrement homotope à une immersion de la forme $i \circ f$, on en déduit que, pour n impair, le degré $\alpha(f) \pmod{2}$ n'est atteint dans $\text{Imm}(S^n, S^{n+1})$ que pour $n = 1, 3$ ou 7 (chap. I, n° 3.4).

2. VARIÉTÉS STABLEMENT PARALLÉLISABLES.

2.1. Soit W une variété de dimension $n+1$ compacte connexe de bord $dW = S^n$ (c'est-à-dire qu'on s'est donné un isomorphisme de S^n sur dW) et soit $g : W \rightarrow R^{n+1}$ une immersion (orientée). L'application tangente $T(g) : T(W) \rightarrow T(R^{n+1})$ donne, par projection sur la fibre, une parallélisation de W qui induit au bord une trivialisatation de $\theta \oplus T(S^n)$. D'après la proposition 1, cette trivialisatation est homotope à $\tilde{f}.c$, où $f = g|S^n$.

Réciproquement, il résulte de (II, prop. 6) la proposition suivante :

PROPOSITION 3. — *Soit W une variété à bord munie d'une parallélisation, il existe une immersion $g : W \rightarrow R^{n+1}$ (où $n+1 = \dim W$) qui induit une parallélisation homotope à la parallélisation donnée.*

Si $dW = S^n$, la classe \tilde{f} de $f = g|S^n$ ne dépend que la trivialisatation de $\theta \oplus T(S^n)$ induite par la parallélisation de W .

2.2. Sur l'ensemble des triples (W, t, j) où W est une variété à bord de dimension $n+1$, t une trivialisatation de $T(W)$ et $j : S^n \rightarrow dW$ un isomorphisme, considérons la relation $(W_1, t_1, j_1) \sim (W_2, t_2, j_2)$ s'il existe un isomorphisme $h : W_1 \rightarrow W_2$ tel que $j_2^{-1} \circ h \circ j_1$ soit un automorphisme de S^n .

isotope à l'identité et $t_2 \circ T(h)$ soit une trivialisations de $T(W_1)$ homotope à t_1 . C'est clairement une relation d'équivalence et on note B_{n+1} l'ensemble quotient. (Dans la suite, on oubliera souvent j et on écrira seulement $dW = S^n$.)

Avec cette définition, on voit que, dans le n° 2.1, on a construit une application $b : B_{n+1} \rightarrow \pi_n(\mathbf{SO}(n+1))$ dont l'image est constituée des classes de toutes les immersions bordantes de S^n dans R^{n+1} .

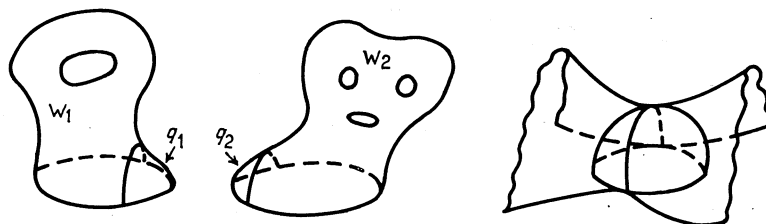


Fig. 8.

Dans le disque $D = D^{n+1}$ de bord S^n , notons C_1 le demi-disque supérieur, C_2 le demi-disque inférieur, D_0 leur frontière commune, D_1 et D_2 les hémisphères supérieur et inférieur de S^n . Étant donnés deux triples (W_i, t_i, j_i) pour $i = 1, 2$, considérons deux plongements $q_i : C_i \rightarrow W_i$ tels que $q_i(D_i) \subset dW_i$. En déformant j_i par isotopie, on peut supposer que $q_i|_{D_i} = j_i|_{D_i}$ et en déformant t_i par homotopie, on peut supposer que $t_i \circ T(q_i) = C|_{C_i}$, où C désigne toujours la trivialisations canonique de $T(D)$. Il est alors clair que les variétés à coins $\overline{W_i - q_i(D_i)}$ se recollent le long de $q_i(D_0)$ par $q_2 \circ q_1^{-1}$ en une variété W dont le bord est isomorphe à S^n , l'isomorphisme $j : S^n \rightarrow dW$ s'obtenant en recollant $j_1|_{D_2}$ et $j_2|_{D_1}$. De plus, les trivialisations t_1 et t_2 se recollent en une trivialisations t . La classe dans B_{n+1} du triple (W, t, j) ne dépend que des classes des triples (W_1, t_1, j_1) et (W_2, t_2, j_2) comme on pourrait le voir facilement.

On a ainsi défini sur B_{n+1} une loi de composition dont on peut démontrer sans peine qu'elle est associative et commutative. Le disque D muni de la parallélisation C en est l'élément neutre. On la nomme *somme connexe au bord*. Pour cette loi B_{n+1} n'est pas en général un groupe.

Remarquons qu'on peut aussi définir B_{n+1} en considérant les variétés W' sans bord de dimension $n+1$ parallélisées sauf en point. La somme connexe au bord des variétés W correspond à la somme connexe ordinaire des variétés sans bord W' .

Notons, en abrégé, W_1 et W_2 deux éléments de B_{n+1} et $W_1 + W_2$ leur somme connexe au bord. La proposition 3 leur fait correspondre des

immersions g_1 , g_2 et g . D'après la définition de $W_1 + W_2$, on peut choisir, pour g , la somme connexe des immersions g_1 et g_2 qu'on obtient en immergeant un petit tube joignant les bords de g_1 et g_2 ; il en résulte que la restriction de g au bord de $W_1 + W_2$ est la somme connexe $f_1 + f_2$ des

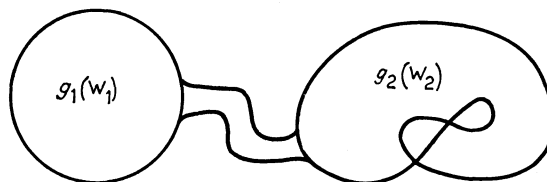


Fig. 9.

immersions $f_i = g_i|_{dW_i}$. On déduit alors de l'additivité de l'isomorphisme γ (voir chap. II, prop. 22) la :

PROPOSITION 4. — *L'application $b : B_{n+1} \rightarrow \pi_n(\mathbf{SO}(n+1))$ est additive. Son image est un sous-monoïde de $\pi_n(\mathbf{SO}(n+1))$ constitué de toutes les classes bordantes.*

2.3. Notons, comme dans [17] (part. II) (voir aussi [26]) A_{n+1} le groupe de cobordisme des variétés presque stablement parallélisées de dimension $n+1$: deux variétés sans bord, munies d'une trivialisations stable de la restriction du fibré tangent au complémentaire d'un point, ont même classe dans A_{n+1} s'il existe un cobordisme qui les relie, muni lui-même d'une parallélisation stable sur le complémentaire d'un chemin joignant les deux points exceptionnels du bord et induisant au bord les parallélisations données. L'ensemble A_{n+1} est un groupe commutatif pour la somme connexe définie comme dans B_{n+1} . En associant à une trivialisations la trivialisations stable qu'elle définit, on obtient un homomorphisme $S : B_{n+1} \rightarrow A_{n+1}$, car deux trivialisations homotopes sont cobordantes.

Soit W' une variété sans bord et W la variété de bord S^n obtenue en ôtant un petit disque de centre $p \in W'$. Comme W a le type d'homotopie d'un complexe de dimension n , il y a correspondance biunivoque entre les classes d'homotopie de parallélisation stable de W et de trivialisations de $\theta \oplus T(W)$. En outre, toute trivialisations de $\theta \oplus T(W)$ est homotope à une trivialisations provenant d'une trivialisations de $T(W)$. D'où, d'une part :

PROPOSITION 5. — *L'homomorphisme S est surjectif.*

D'autre part, l'obstruction à étendre en p une trivialisations stable de $T(W' - \{p\})$ est un élément de $\pi_n(\mathbf{SO}(n+2))$ qui ne dépend que de la classe dans A_{n+1} . On voit sans peine qu'on définit ainsi un homomorphisme $a : A_{n+1} \rightarrow \pi_n(\mathbf{SO}(n+2))$.

PROPOSITION 6. — *Le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} B_{n+1} & \xrightarrow{b} & \pi_n(\mathbf{SO}(n+1)) \\ \downarrow s & & \downarrow s \\ A_{n+1} & \xrightarrow{a} & \pi_n(\mathbf{SO}(n+2)) \end{array}$$

est commutatif.

Si l'on remplace b par la flèche b' où $b'(W, t) \in \pi_n(\mathbf{SO}(n+1))$ est l'obstruction à étendre la vraie trivialisatation t à la variété fermée $W' = W \cup D^{n+1}$, il est clair que le diagramme est commutatif. La proposition résulte alors des formules suivantes :

$$\begin{aligned} (1) \quad & b(W, t) = b'(W, t) - b'(D, C), \\ (2) \quad & s(b'(D, C)) = 0. \end{aligned}$$

Prenons pour disque D l'hémisphère supérieur D_1 de la sphère S^{n+1} , alors $b'(D, C)$ est l'obstruction à étendre à l'hémisphère inférieur D_2 la parallélisation C de l'hémisphère D_1 ou, ce qui revient au même, sa restriction à l'équateur S^n [qui est la trivialisatation c de $\theta \oplus T(S^n)$]. De même, $b'(W, t)$ est l'obstruction à étendre à D_2 la restriction de t à $S^n = dW$, qui, d'après la définition de b est égale à $b(W, t).c$; d'où la formule (1). La formule (2) est une conséquence du fait, bien connu, que la sphère S^{n+1} est stablement parallélisable.

2.4. Étant donnée une variété W de bord S^n munie d'une parallélisation stable, il peut y avoir plusieurs vraies parallélisations qui lui correspondent, donc plusieurs éléments de B_{n+1} . On va démontrer dans un cas particulier qu'ils ont même image par b . Ce résultat est en réalité toujours vrai, comme on le verra plus loin.

PROPOSITION 7. — *Soit W une variété de bord S^n et t une parallélisation telle que $s \circ b(W, t) = 0$; pour toute parallélisation t' stablement équivalente à t , on a $b(W, t) = b(W, t')$.*

Soit W' la variété sans bord obtenue par recollement de W et d'un disque et $p \in W'$ le centre de ce disque. D'après l'hypothèse $s \circ b(W, t) = 0$, la parallélisation stable T de W provenant de t se prolonge à W' . La seule obstruction à trouver une vraie parallélisation de W' sous cette parallélisation stable est un élément $u \in H^{n+1}(W', \pi_n(\mathbf{SO}(n+1))) = \pi_n(\mathbf{SO}(n+1))$. Cette obstruction peut se concentrer en p : pour toute parallélisation t' de $W' - \{p\}$ qui est en dessous de T , l'obstruction au prolongement en p est $u = b'(W, t')$. Mais, d'après la formule (1) ci-dessus, on a

$$b'(W, t') = b'(D, C) + b(W, t').$$

Ceci a lieu pour tout t' , d'où

$$b(W, t) = b(W, t').$$

2.5. *La suite exacte de Kervaire-Milnor.* — D'après [16] (voir aussi [26]), la flèche a se place dans une suite exacte :

$$\dots A_{n+1} \xrightarrow{a} \pi_n(\mathbf{SO}) \xrightarrow{J_n} \Pi_n \longrightarrow A_n \dots,$$

où Π_n est le groupe stable d'homotopie des sphères $\pi_{n+N}(\mathbb{S}^N)$ et $J_n : \pi_n(\mathbf{SO}(n+2)) \rightarrow \pi_{2n+2}(\mathbb{S}^{n+2})$ l'homomorphisme de Hopf-Whitehead. On sait que cette suite exacte n'est autre que la suite exacte d'homotopie du couple $(\mathbf{G}, \mathbf{SO})$ (où \mathbf{G} est la limite par suspension de la suite des espaces \mathbf{G}_q des applications de degré 1 de la sphère S^{q-1} sur elle-même).

Considérons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} B_{n+1} & \xrightarrow{b} & \pi_n(\mathbf{SO}(n+1)) & & \\ \downarrow s & & \downarrow s & & \\ A_{n+1} & \xrightarrow{a} & \pi_n(\mathbf{SO}) & \xrightarrow{J_n} & \Pi_n \\ \downarrow & & & & \\ & & 0 & & \end{array}$$

La surjectivité de S implique que l'image de b est appliquée surjectivement par s sur le noyau de J_n . En conclusion de ce paragraphe, on peut énoncer :

PROPOSITION 8. — *L'ensemble des classes bordantes de $\text{Imm}(\mathbb{S}^n, \mathbb{R}^{n+1})$ est un sous-monoïde de $\pi_n(\mathbf{SO}(n+1))$ contenu dans le noyau de $J_n \circ s$ et rencontrant toutes les fibres de l'application s contenues dans ce noyau.*

Le noyau de J_n est assez bien connu depuis les travaux de J. Adams ([2]); l'homomorphisme s est bien connu suivant les valeurs de n depuis les travaux de R. Bott ([4]), de M. Kervaire ([15]) et de J. Adams ([1]).

3. LE NOYAU DE s .

3.1. Avant de commencer une étude détaillée suivant les valeurs de n , on va donner des résultats généraux sur le noyau de s .

Soit $u \in \pi_n(\mathbf{SO}(n+1))$ le bord du générateur de $\pi_{n+1}(\mathbb{S}^{n+1})$ dans la suite exacte d'homotopie de la fibration $\mathbf{SO}(n+2)/\mathbf{SO}(n+1) = \mathbb{S}^{n+1}$:

$$\pi_{n+1}(\mathbb{S}^{n+1}) \xrightarrow{d} \pi_n(\mathbf{SO}(n+1)) \xrightarrow{s} \pi_n(\mathbf{SO}(n+2)) \longrightarrow 0.$$

Cet élément $u = d(i_{n+1})$ engendre le noyau de s .

PROPOSITION 9. — *On a :*

- (i) $u = b'(D, C)$ (avec les notations du paragraphe 2);
 (ii) Si $(W, t) \in \mathbf{B}_{n+1}$ et si $b'(W, t) = 0$ (autrement dit si t est une parallélisation qui s'étend à la variété sans bord W') alors $b(W, t) = u$.

Les deux assertions sont équivalentes d'après la formule (1) de 2.3. On va démontrer la seconde.

Soit W' la variété sans bord associée à W en recollant un disque de centre p . Si $b'(W, t) = 0$ alors t est la restriction d'une parallélisation de W' . Si $\rho = b(W, t)$, la trivialisatation $\rho.c$ de $\theta \oplus T(S^n)$ se prolonge au disque « extérieur » D . Ceci suffit à caractériser ρ car deux parallélisations de D sont homotopes; on va calculer ρ sur un exemple.

LEMME 1. — *Soit r une symétrie de R^{n+1} par rapport à un n -plan, alors $\rho.c$ est homotope à la trivialisatation composée*

$$r \circ c \circ (-\text{id} \oplus \text{id}) : \theta \oplus T(S^n) \rightarrow \theta \oplus T(S^n) \rightarrow R^{n+1} \rightarrow R^{n+1}.$$

Soit D_2 l'hémisphère inférieur ($x_1 \leq 0$) de S^{n+1} , orienté comme S^{n+1} . L'équateur S^n est le bord $d(-D_2)$ du disque D_2 muni de l'autre orientation (obtenue par projection sur le plan horizontal $x_1 = 0$). La trivialisatation canonique C sur D_2 donne sur $-D_2$ la trivialisatation $r \circ C$, d'où, au bord, $r \circ c : \theta \oplus T(S^n) \rightarrow R^{n+1}$ où θ est la normale sortant de D_2 . Il ne reste plus qu'à changer l'orientation de θ par $-\text{id} : \theta \rightarrow \theta$ pour obtenir la trivialisatation de $\theta \oplus T(S^n)$ qui se prolonge au disque extérieur.

Pour achever de montrer que $\rho = u$, il suffit de montrer que $u.c = r.c.(-\text{id} \oplus \text{id})$. C'est une conséquence du lemme suivant :

LEMME 2. — *On a $r.u.c = c.(-\text{id} \oplus \text{id})$, c'est-à-dire que le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} \theta \oplus T(S^n) & \xrightarrow{c} & S^n \times R^{n+1} \\ \begin{array}{c} -\text{id} \downarrow \text{id} \\ \downarrow \end{array} & & \downarrow r \circ u \\ \theta \oplus T(S^n) & \xrightarrow{c} & S^n \times R^{n+1} \end{array}$$

est commutatif.

Pour construire un représentant de u , il faut construire une application de D^{n+1} dans $\mathbf{SO}(n+2)$ dont le bord soit dans $\mathbf{SO}(n+1)$ et dont la classe modulo $\mathbf{SO}(n+1)$ donne le générateur i_{n+1} de $\pi_{n+1}(S^{n+1})$ quand on identifie le bord de D^{n+1} en un point.

Prenons pour disque D^{n+1} l'hémisphère supérieur de la sphère de rayon 2 de centre $(-1, 0, \dots, 0)$ dans R^{n+2} . On note T l'image réciproque dans D^{n+1} par la projection verticale sur le plan horizontal R^{n+1} du repère canonique T_0 de R^{n+1} . Ceci définit une parallélisation de D^{n+1} . Soit

$\varphi : D^{n+1} \rightarrow S^{n+1}$ la projection radiale horizontale. L'application φ envoie dD^{n+1} au pôle sud. A tout point $x \in D^{n+1}$, associons le repère orienté positivement $(\varphi(x), T_{\varphi(x)}(T))$ qui, après orthogonalisation, donne un élément de $\mathbf{SO}(n+2)$; modulo $\mathbf{SO}(n+1)$, on obtient le générateur i_{n+1} de $\pi_{n+1}(S^{n+1})$. Déplaçons cette application par une rotation R autour d'un n -plan de R^{n+2} de sorte que l'image de dD^{n+1} modulo $\mathbf{SO}(n+1)$ soit le pôle nord : ainsi, le point-base de D^{n+1} va au point-base de $\mathbf{SO}(n+2)$ et notre application représente u .

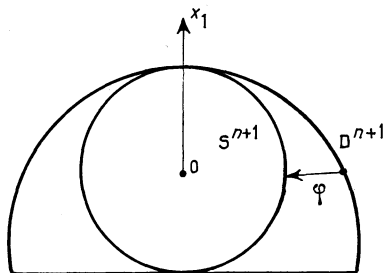


Fig. 10.

Soit $r = R|_{R^{n+1}}$; c'est une symétrie. Le représentant de u est l'application $S^n \rightarrow \mathbf{SO}(n+1)$ qui, à tout $x \in S^n = dD^{n+1}$, associe la transformation linéaire $T_0 \mapsto r \circ T_{\varphi(x)}(T)$. Mais, au bord de D^{n+1} , le repère $T_{\varphi(x)}(T)$ est obtenu à partir de T_0 par symétrie par rapport au plan tangent à S^n en x . Cette symétrie n'est autre que l'application $(- \text{id} \oplus \text{id}) : \theta \oplus T(S^n) \rightarrow \theta \oplus T(S^n)$. Si la trivialisatation canonique c est définie à l'aide de T_0 , on a donc

$$u(T_0) = r \circ c \circ (- \text{id} \oplus \text{id}) \circ c^{-1}(T_0),$$

d'où le lemme 2.

Si on appelle plongement retourné de la sphère S^n dans R^{n+1} le composé du plongement canonique p et d'une symétrie r , il résulte du lemme 2 que u est la classe d'immersion du plongement retourné. D'autre part, il résulte de l'assertion (i) de la proposition 9 que u est l'obstruction à une parallélisation de S^{n+1} . Enfin, comme il existe pour tout n des variétés W' de dimension $n+1$ qui sont parallélisables, par exemple $S^1 \times S^n$ (voir [11]), la classe u est une classe bordante. Si W' est parallélisable, on a $\chi(W') = 0$, et $\alpha(u) = \chi(W)$ vaut 1 si n est pair, -1 si n est impair. Résumons cela en une proposition.

PROPOSITION 10. — *Le générateur u de $\ker(s)$ est la classe du plongement retourné; c'est l'obstruction à la parallélisation de S^{n+1} ; c'est une classe bordante de degré $\alpha(u) = (-1)^n$.*

3.2. Application à $\text{Imm}(S^n, S^{n+1})$.

PROPOSITION 11. — Pour une immersion $f: S^n \rightarrow R^{n+1}$, les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) La classe de $i \circ f: S^n \rightarrow S^{n+1}$ est une classe bordante.
- (ii) $J_n \circ s(\tilde{f}) = 0$.
- (iii) Il existe un entier relatif q tel que $\tilde{f} + qu$ soit la classe d'une immersion bordante (dans R^{n+1}).

Toute immersion de S^n dans S^{n+1} étant régulièrement homotope à une immersion de la forme $i \circ f$, il en résulte le

THÉORÈME 1. — Pour tout n , l'ensemble des classes des immersions bordantes de S^n dans S^{n+1} est le noyau de J_n .

L'équivalence entre (ii) et (iii) est une conséquence évidente de la proposition 8 et du fait que u engendre le noyau de s .

Montrons que (ii) entraîne (i). Si $J_n \circ s(\tilde{f}) = 0$, il existe d'après la proposition 8 une immersion $f': S^n \rightarrow R^{n+1}$ bordante et telle que $s(\tilde{f}) = s(\tilde{f}')$. L'immersion $i \circ f'$ est bordante et régulièrement homotope à $i \circ f$.

Montrons enfin que (i) entraîne (iii). Supposons que l'immersion $i \circ f$ soit régulièrement homotope à une immersion bordante qu'on peut supposer de la forme $i \circ f'$.

LEMME. — Si $i \circ f$ est régulièrement homotope (dans S^{n+1}) à $i \circ f'$ alors $\tilde{f} = \tilde{f}' + qu$ où $q \in \mathbf{Z}$.

Une homotopie régulière dans S^{n+1} se décompose en une suite d'homotopies régulières dans R^{n+1} séparées par un certain nombre de passages au pôle sud (point à l'infini de R^{n+1}). Pour chaque traversée où le pôle sud se déplace relativement à l'image de f dans le sens opposé au vecteur

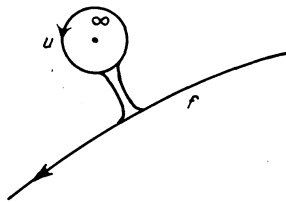


Fig. 11.

normal, l'opération sur f est équivalente à la somme connexe avec une sphère centrée au pôle sud, c'est-à-dire, d'après la proposition 10 avec une immersion de classe u . Une traversée en sens inverse revient donc à soustraire u à la classe de f . D'où le lemme.

Soit maintenant $g' : W \rightarrow S^{n+1}$ un prolongement de $i \circ f'$. L'image réciproque du pôle sud est composée d'un nombre fini de points a_i . Considérons des chemins c_i disjoints entre eux qui joignent chaque a_i au bord de W . Il existe une isotopie de plongement de W dans W , constante sauf au voisinage des images des chemins c_i , d'origine $\text{id}(W)$ et dont l'extrémité ait une image qui évite les points c_i . En la composant avec g' , on voit que $i \circ f'$ est régulièrement homotope à une immersion $i \circ f''$ qui borde une immersion g'' de W dont l'image est contenue dans $i(\mathbb{R}^{n+1})$. D'après le lemme, on a $\tilde{f}' = \tilde{f}'' + q'u$, d'où $\tilde{f} = \tilde{f}'' + (q + q')u$ et f'' est une immersion bordante dans \mathbb{R}^{n+1} .

4. ÉTUDE DÉTAILLÉE (SUIVANT LES VALEURS DE n)

4.1. Pour n impair, l'image de $k_n : \pi_n(\mathbf{SO}(n+1)) \rightarrow \pi_n(S^n)$ contient les multiples de 2 car $k(u) = \alpha(u) - 1 = -2$ (propositions 2 et 10). L'application k_n est surjective si et seulement si la sphère S^n est parallélisable, c'est-à-dire si $n = 1, 3$ ou 7 ([14]). Le noyau de $d_{n-1} : \pi_n(S^n) \rightarrow \pi_{n-1}(\mathbf{SO}(n))$ est égal à l'image de k_n . Il en résulte que le noyau de $s_{n-1} : \pi_{n-1}(\mathbf{SO}(n)) \rightarrow \pi_{n-1}(\mathbf{SO}(n+1))$ est égal à 0 ou $\mathbf{Z}/(2)$ selon que S^n est parallélisable ou non.

Pour n pair, l'homomorphisme J_n est injectif ([2]); on en déduit les résultats suivants :

$n = 2$ ou 6 , $\pi_n(\mathbf{SO}) = 0$ ([4]) et $\pi_n(\mathbf{SO}(n+1)) = 0$. Il n'y a qu'une classe d'immersion de S^n dans S^{n+1} comme dans \mathbb{R}^{n+1} , elle est évidemment bordante.

n pair $\neq 2$ ou 6 , $\pi_n(\mathbf{SO}) = 0$ pour $n \neq 8k$, $\pi_{8k}(\mathbf{SO}) = \mathbf{Z}/(2)$ et $\ker(s) = \{0, u\}$. Il n'y a qu'une classe bordante dans S^{n+1} . Elle provient de deux classes dans \mathbb{R}^{n+1} , bordantes toutes deux : celle au plongement canonique et celle du plongement retourné.

4.2. Pour n impair, du fait que $k_n(u) = -2$, on déduit que u est un élément d'ordre infini de $\pi_n(\mathbf{SO}(n+1))$. Le noyau de s est infini cyclique et k l'envoie bijectivement sur les entiers pairs. Autrement dit, dans $\ker(s)$, tous les degrés sont impairs, et tous les degrés impairs sont atteints.

PROPOSITION 12. — Pour n impair $\neq 1$, toutes les classes de $\ker(s)$ sont bordantes.

Il en résulte le :

THÉORÈME 2. — Pour tout $n \geq 2$, l'ensemble des classes des immersions bordantes de S^n dans \mathbb{R}^{n+1} est le noyau de $J_n \circ s$.

Démonstration du théorème 2. — Pour n pair, c'est le résultat du n° 4.1. Pour n impair, l'ensemble des classes bordantes est un sous-monoïde de $\ker(J_n \circ s)$ contenant un point dans chaque fibre de s (proposition 8) et contenant la fibre de o en entier (proposition 12) : il est donc égal à $\ker(J_n \circ s)$.

Démonstration de la proposition 12. — Comme les classes bordantes constituent un monoïde, il suffit de montrer que u et $-u$ sont des classes bordantes. Pour u , c'est la proposition 10. La classe $-u$ est, dans $\ker(s)$, la classe de degré $\alpha(-u) = 1 + k(u) = 3$. Soit $(W, t) \in B_{n+1}$, pour que $b(W, t) \in \ker(s)$, il faut et suffit que la parallélisation t s'étende en une parallélisation stable de W' . Mais alors, la seule donnée de W' stablement parallélisable suffit à déterminer $b(W, t) \in \ker(s)$, car $\chi(W) = \chi(W') - 1$ est égal au degré qui suffit, dans $\ker(s)$, à déterminer la classe (comparer avec la proposition 7). Dire que $-u$ est une classe bordante, c'est donc dire qu'il existe une variété sans bord stablement parallélisable dont la caractéristique d'Euler soit 4. Pour $n \neq 1$, on peut choisir $W' = S^2 \times S^{n-1}$. Pour $n = 1$, on sait bien qu'il n'en existe pas. Dans ce cas, on a :

THÉORÈME 2'. — *L'ensemble des classes bordantes de S^1 dans R^2 est l'ensemble des classes de degré impair au plus égal à 1.*

En effet, $\pi_1(\mathbf{SO}) = \mathbf{Z}/(2)$ et J_1 est injectif. Dans S^2 , seule la classe de degré impair est bordante. La classe de u est bordante et celle de $-u$ ne l'est pas.

COROLLAIRE. — *Pour tout n , l'ensemble des classes bordantes forme un sous-groupe de $\pi_0(\text{Imm}(S^n, S^{n+1}))$. Pour $n \geq 2$, l'ensemble des classes bordantes forme un sous-groupe de $\pi_0(\text{Imm}(S^n, R^{n+1}))$.*

5. DES REPRÉSENTANTS POUR CHAQUE CLASSE BORDANTE. — On a déjà donné explicitement des représentants d'éléments de B_{n+1} qui bordent la classe u (§ 3) et la classe $-u$ (§ 4). Par somme connexe, on obtient des représentants qui bordent tout élément de $\ker(s)$. Le noyau de J_n est nul sauf pour $n = 4k - 1$ (voir [2]); dans ce cas, on a $\pi_n(\mathbf{SO}) = \mathbf{Z}$; notons j_k l'entier qui engendre $\ker(J_n)$. On trouve le calcul (presque complet) de j_k dans [2]. Dans ce cas, on va construire des représentants au-dessus du générateur de $\ker(J_n)$.

5.1. Supposons d'abord $n \neq 3$ ou 7 . L'application k_n n'est pas surjective; il en résulte que toute immersion de S^n dans R^{n+1} est de degré impair. Pour tout relèvement $m \in \pi_n(\mathbf{SO}(n+1))$ du générateur de $\pi_n(\mathbf{SO})$, l'entier $k(m)$ est pair. Comme $k(u) = -2$, on peut choisir m pour que

$k(m) = 0$. Le couple (u, m) est une base du \mathbf{Z} -module libre $\pi_n(\mathbf{SO}(n+1))$ et on a $k(x.u + y.m) = -2x$.

Si maintenant $n = 3$ ou 7 , l'application k est surjective, et pour tout relèvement m du générateur de $\pi_n(\mathbf{SO})$ l'entier $k(m)$ est impair. Choisissons m pour que $k(m) = 1$. On a encore une décomposition directe de $\pi_n(\mathbf{SO})$, mais on a $k(x.u + y.m) = -2x + y$. Comme $j_1 = 24$ et $j_2 = 240$, toutes les classes bordantes ont une coordonnée y paire donc un degré impair.

5.2. Soit W une variété de dimension $n+1 = 4k$ de bord S^n munie d'une parallélisation stable T et soit W' la variété sans bord correspondante. Calculons l'obstruction $a(W, T)$ à la stable parallélisation de W' . D'après le lemme 2 de [16], on a

$$p_k(W') = \pm a_k(2k-1)! a(W, T),$$

où $p_k(W')$ est la valeur de la classe de Pontrjagin sur la classe fondamentale de W' , et où $a_k = 1$ ou 2 selon que k est pair ou impair. D'autre part, comme W' est stablement parallélisable, la classe p_k est la seule classe de Pontrjagin non nulle et la formule de la signature ([8]) s'écrit

$$(3) \quad \sigma(W') = 2^{2k} (2^{2k-1} - 1) \frac{B_k}{(2k)!} p_k(W').$$

D'où

$$(4) \quad \sigma(W) = \pm 2^{2k-1} (2^{2k-1} - 1) a_k \frac{B_k}{k} a(W, T).$$

Ceci prouve que $a(W, T)$ ne dépend pas de la parallélisation stable T mais seulement de la signature $\sigma(W) = \sigma(W')$ qui est un invariant topologique de W .

Soit t une vraie parallélisation compatible avec T , et notons

$$x.u + y.m = b(W, t).$$

Alors on a

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} y = a(W, T), \\ \chi(W) = 1 + k(b(W, t)) = 1 - 2x \quad \text{si } n \neq 3 \text{ ou } 7, \\ \quad \quad \quad = 1 - 2x + y \quad \text{si } n = 3 \text{ ou } 7. \end{array} \right.$$

La classe $b(W, t)$ ne dépend donc que de $\sigma(W)$ et de $\chi(W)$ qui sont des invariants topologiques de W . Ceci généralise la proposition 7.

PROPOSITION 13. — *Si $n = 4k - 1$, la classe $b(W, t)$ ne dépend que de $\sigma(W)$ et $\chi(W)$. Elle est donnée par les formules (4) et (5).*

5.3. Notons P_{n+1} le groupe de cobordisme stablement parallélisé des variétés dont le bord est une sphère d'homotopie. La signature σ (invariant de cobordisme) définit un homomorphisme dans \mathbf{Z} . Pour $n = 4k - 1 \neq 3$, cet homomorphisme est injectif et son image est l'idéal des multiples de 8 ([17]). On démontre cette dernière assertion en considérant la variété W_1 obtenue par plombage selon le diagramme de E_8 de huit exemplaires du fibré en boules fermées tangent à S^{2k} . On vérifie que $\sigma(W_1) = 8$ et que dW_1 est une sphère d'homotopie ($n \neq 3$).

Si Θ_n est le groupe des n -sphères d'homotopie modulo h -cobordisme (i. e. modulo difféomorphisme car $n \geq 6$), la suite (évidente)

$$A_{n+1} \rightarrow P_{n+1} \rightarrow \Theta_n$$

est exacte ([17], Part. II). La formule (4) montre que la flèche $A_{n+1} \rightarrow P_{n+1}$ se factorise par a . Notons

$$\sigma_k = \pm 2^{2k-1} (2^{2k-1} - 1) a_k \frac{B_k}{k} j_k.$$

C'est la signature d'un élément de A_{n+1} . En conséquence, une variété stablement parallélisable de signature σ_k de bord une sphère d'homotopie a pour bord la vraie sphère et définit un élément de A_{n+1} dont l'obstruction $a(W)$ engendre $\ker(J_n)$.

Soit W_0 la somme connexe au bord de $\frac{\sigma_k}{8}$ exemplaires de W_1 . On a $\sigma(W_0) = \sigma_k$. La variété W_1 a le type d'homotopie d'un bouquet de huit sphères S^{2k} , donc $\chi(W_1) = 9$ et $\chi(W_0) = 1 + \sigma_k$. Il résulte alors des formules (5) que

$$\begin{aligned} b(\dot{W}_0) &= -\frac{\sigma_k}{2} u + j_k \cdot m & \text{si } n \neq 3 \text{ ou } 7, \\ b(W_0) &= 8u + 240 \cdot m & \text{si } n = 7. \end{aligned}$$

5.4. Pour la dimension $n = 3$, on a emprunté le présent exemple à [19]. Soit W' une surface algébrique sans singularité, de degré 4, dans $P_3(\mathbf{C})$. On va montrer que $\sigma(W') = -16$ et $\chi(W') = 24$. De plus la variété W de bord S^3 obtenue en perçant un trou dans W' est stablement parallélisable. On en déduit que $b(W) = 24 \cdot m$.

La famille de tous les monômes de degré 4 en quatre variables définit un plongement de P_3 dans P_{33} de telle sorte que W' en soit une section hyperplane (cf. [10]). D'après le théorème de Lefschetz, on a donc $\pi_1(W') = \pi_1(P_3) = 0$.

Notons $i : W' \rightarrow P_3$ l'inclusion, n le fibré normal de i et $u \in H^2(P_3)$ le générateur canonique. Comme W' est de degré 4, on a

$$\langle i^*(u^2), w' \rangle = \langle u^2, i_*(w') \rangle = 4.$$

La classe d'Euler $c_1(n)$ du fibré normal est la restriction à W' de la classe de Thom $U \in H^2(T, bT)$, où T est un voisinage tubulaire de W' dans P_3 . Si on note p la projection de T et $[W']$ la classe fondamentale de cohomologie, le cup-produit $U \cup p^*([W'])$ induit dans P_3 la classe fondamentale u^3 (isomorphisme de Thom). Il en résulte que U induit dans P_3 la classe duale (Poincaré) de $i_*(\omega')$ et par suite que $c_1(n) = 4i^*(u)$.

Écrivons que $T(W') \oplus n = T(P_3)|W'$, on a

$$(1 + c_1 + c_2)(1 + 4i^*(u)) = i^*(1 + u)^4.$$

D'où $c_1 = 0$ et $c_2 = 6i^*(u^2)$, où c_1 et c_2 sont les classes de Chern de W' . On en déduit que $\chi(W') = \langle c_2, \omega' \rangle = 24$ et que

$$\sigma(W') = \frac{1}{3}p_1(W') = \frac{1}{3}\langle c_1^2 - 2c_2, \omega' \rangle = -16.$$

Il reste à voir que W est parallélisable. On démontre ceci en remarquant que W a l'homologie d'un complexe de dimension 3 et que les classes caractéristiques de $T(W)$ sont nulles.

CHAPITRE IV.

CLASSES DES IMMERSIONS BORDANTES DE S^n DANS UNE VARIÉTÉ DE DIMENSION $n + 1$.

Soit M une variété connexe orientée sans bord, compacte ou non, de dimension $n + 1$. On note $\widehat{M \times R^{n+1}}$ le compactifié d'Alexandrov de $M \times R^{n+1}$. On définit dans ce chapitre une application J de $\pi_0(\text{Imm}(S^n, M))$ dans l'ensemble $[\widehat{M \times R^{n+1}}, S^{n+2}]_0$ des classes d'homotopie basique d'applications, et on démontre le théorème suivant :

THÉORÈME 1. — *Pour tout $n \geq 2$, l'ensemble des classes des immersions bordantes de S^n dans M est le sous-ensemble $J^{-1}(0)$ de $\pi_0(\text{Imm}(S^n, M))$.*

Lorsque $M = R^{n+1}$, le théorème 2 du chapitre III constitue un cas particulier du théorème 1 ci-dessus. Ce cas particulier est utilisé de façon essentielle dans la démonstration du théorème 1.

L'espace $\widehat{M \times R^{n+1}}$ étant une suspension, il en résulte une loi de composition sur $[\widehat{M \times R^{n+1}}, S^{n+2}]_0$. L'application J est additive (pour la somme connexe des immersions) et l'on a :

THÉORÈME 2. — *Pour tout $n \geq 2$, si M est simplement connexe, l'ensemble des classes des immersions bordantes de S^n dans M constitue un sous-groupe de $\pi_0(\text{Imm}(S^n, M))$.*

1. LA CONSTRUCTION DE L'APPLICATION J.

1.1. *La construction de Thom-Pontrjagin.* — Soit $f: S^n \rightarrow M$ une immersion et $n(x)$ ($x \in S^n$) un champ normal sortant. Si on identifie M à la sous-variété $M \times \{0\}$ de $M \times R^{n+1}$, l'immersion f donne lieu à une immersion, encore notée $f: S^n \rightarrow M \times R^{n+1}$, qui possède un $(n+2)$ -champ de vecteurs normaux $(n(x), \nu_1(x), \dots, \nu_{n+1}(x))$, où ν_1, \dots, ν_{n+1} sont les vecteurs de base de R^{n+1} . La dimension $2n+2$ de $M \times R^{n+1}$ est suffisante pour que,

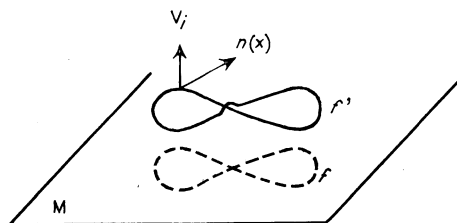


Fig. 12.

d'après les théorèmes de plongement de Whitney ([28], [6]), l'immersion f soit voisine d'un plongement $f': S^n \rightarrow M \times R^{n+1}$. Si l'on choisit le plongement f' assez voisin de f , le $(n+2)$ -champ $(n(x), \nu_1(x), \dots, \nu_{n+1}(x))$ est encore transversal à f' et définit donc une trivialisatation du fibré normal du plongement f' . Si on réalise ce fibré normal par un voisinage tubulaire fermé U de $f'(S^n)$, la trivialisatation donne une application

$$t: (U, \text{fr}(U)) \rightarrow (D^{n+2}, S^{n+1}).$$

Composons l'application t avec la projection de D^{n+2} sur S^{n+2} qui envoie 0 au pôle sud S et le bord au pôle nord N . L'application ainsi obtenue, qui est constante sur la frontière de U , se prolonge sur le complémentaire de U par l'application constante d'image le pôle nord pour donner une application continue $F': M \times R^{n+1} \rightarrow S^{n+2}$. L'image réciproque du pôle sud par F' est la sous-variété $f'(S^n)$.

En raison de la compacité de U , l'application F' , qui est constante hors de U , définit une application F du compactifié d'Alexandrov $\widehat{M \times R^{n+1}}$ de $M \times R^{n+1}$ dans S^{n+2} qui envoie un voisinage de l'infini au pôle nord.

Remarquons qu'il aurait suffi de prendre $M \times R^n$ pour faire cette construction : c'est dans la suite qu'on utilise la dimension de $M \times R^{n+1}$.

1.2. Montrons que la classe d'homotopie de l'application F avec points-bases $\infty \in \widehat{M \times R^{n+1}}$ et $N \in S^{n+2}$ ne dépend que de la classe d'homotopie régulière de f et d'aucun des choix faits au cours de la construction.

D'abord, si U' est un autre voisinage tubulaire de $f'(S^n)$, le théorème d'isotopie des voisinages tubulaires ([5]) nous donne une isotopie de $M \times R^{n+1}$, constante sur $f'(S^n)$, qui transforme U en U' en respectant les trivialisations. Il en résulte une homotopie entre les applications F' correspondantes. Comme on peut supposer que l'isotopie est constante au voisinage de l'infini, on a une homotopie à point-base entre les applications F .

D'autre part, si, au lieu de f' , on choisit un autre plongement f'_1 voisin de f , la dimension $2n + 2$ de $M \times R^{n+1}$ est suffisante pour qu'il existe une petite isotopie de plongements $h : S^n \times I \rightarrow M \times R^{n+1} \times I$ entre f' et f'_1 . Si cette isotopie est assez petite, le $(n + 2)$ -champ $(n(x), \nu_1(x), \dots, \nu_{n+1}(x))$ est transversal au plongement h , et trivialisé son fibré normal. On en déduit une application $T : (X, \text{fr}(X)) \rightarrow (D^{n+2}, S^{n+1})$, où X est un voisinage tubulaire de h ; par construction, cette application induit t (resp. t_1) sur le voisinage tubulaire $U = X \cap (M \times R^{n+1} \times \{0\})$ [resp. $U_1 = X \cap (M \times R^{n+1} \times \{1\})$]. L'application $H' : M \times R^{n+1} \times I \rightarrow S^{n+2}$ obtenue en prolongeant T par une constante hors de X , réalise donc une homotopie entre les applications F' et F'_1 . Pour la même raison de compacité que précédemment, H' induit une homotopie H entre F et F_1 , préservant le point-base à l'infini de $\widehat{M \times R^{n+1}}$.

Soit enfin $h : S^n \times I \rightarrow M \times I$ une homotopie régulière libre entre deux immersions f_0 et f_1 , et soit $N(x)$ un champ normal à h qui soit parallèle aux fibres de la projection sur I . L'immersion composée de h et de l'injection canonique de $M \times I$ dans $M \times I \times R^{n+1}$ possède un $(n + 2)$ -champ normal $(N(x), \nu_1(x), \dots, \nu_{n+1}(x))$. Elle est voisine d'un plongement h' dont la restriction à $S^n \times \{0\}$ (resp. $S^n \times \{1\}$) est un plongement f'_0 (resp. f'_1) dans $M \times \{0\} \times R^{n+1}$ (resp. $M \times \{1\} \times R^{n+1}$) voisin de l'immersion f_0 (resp. f_1). On en déduit comme précédemment, à l'aide d'un voisinage tubulaire de h , une homotopie entre les applications F_0 et F_1 .

1.3. On vient ainsi de définir une application

$$J : \pi_0(\text{Imm}(S^n, M)) \rightarrow [\widehat{M \times R^{n+1}}, S^{n+2}]_0.$$

L'espace $\widehat{M \times R^{n+1}}$, espace de Thom du fibré trivial de rang $n + 1$ de base M , est égal à la $(n + 1)$ ^{ème} suspension $E^{n+1}(\hat{M})$ du compactifié d'Alexandroff \hat{M} de M ; si M est compacte, l'espace \hat{M} est l'union disjointe de M et d'un point.

Soit $\tau : \pi_0(\text{Imm}(S^n, M)) \rightarrow [S^n, \tilde{T}(M)]$ l'isomorphisme défini en (II, prop. 2). On a donc une application

$$J \circ \tau^{-1} : [S^n, \tilde{T}(M)] \rightarrow [\widehat{M \times R^{n+1}}, S^{n+2}]_0.$$

En particulier, lorsque $M = \mathbb{R}^{n+1}$, on a $\widehat{M \times \mathbb{R}^{n+1}} = S^{2n+2}$. L'application

$$J \circ \tau^{-1} : \pi_n(\mathbf{SO}(n+1)) \rightarrow \pi_{2n+2}(S^{n+2})$$

est alors égale à $(-1)^n J_n \circ s$, où

$$J_n : \pi_n(\mathbf{SO}(n+2)) \rightarrow \pi_{2n+2}(S^{n+2})$$

est l'homomorphisme stable de Hopf-Whitehead. On démontre cela par comparaison entre la construction du n° 1.1 et la construction de M. Kervaire ([12], p. 349).

2. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1.

2.1. Immersions bordantes.

PROPOSITION 1. — *Si $f: S^n \rightarrow M$ est une immersion bordante, alors $J(\tilde{f}) = 0$.*

Soient W une variété compacte de bord $dW = S^n$, et $g: W \rightarrow M$ une immersion telle que $f = g|_{dW}$. Soit C un voisinage tubulaire de dW dans W et $\varphi: S^n \times [0, 1] \rightarrow C$ un isomorphisme tel que $\varphi|_{S^n \times \{1\}}$ soit l'identification de S^n et de dW . On identifie M au bord $M \times \{0\} \times \mathbb{R}^{n+1}$ de la variété $M \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{n+1}$.

Considérons l'immersion $g_0: W \rightarrow M \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{n+1}$ définie par

$$(1) \quad \begin{cases} g_0(x) = (g(x), 1, 0) & \text{si } x \in W - C, \\ g_0(x) = \left(g \circ \varphi \left(y, 1 - \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) \right), \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right), 0 \right) & \text{si } x = \varphi(y, t) \in C. \end{cases}$$

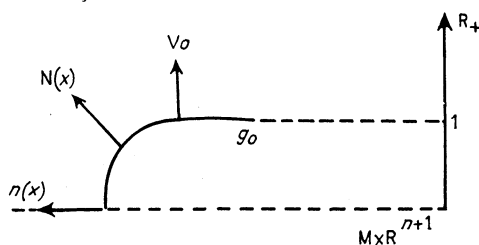


Fig. 13.

Cette immersion possède un $(n+2)$ -champ normal $(N(x), \nu_1(x), \dots, \nu_{n+1}(x))$ avec, $N(x) = \nu_0$, vecteur de base de \mathbb{R}_+ , si $x \in W - C$, et

$$N(x) = \nu_0 \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) + \nu(y, t) \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right) \quad \text{si } x = \varphi(y, t),$$

où $n(y, t)$ désigne le vecteur normal en $y \in S^n$ de l'immersion $S^n \rightarrow M$ définie par $y \mapsto g \circ \varphi\left(y, 1 - \cos\left(\pi \frac{t}{2}\right)\right)$. En outre, les restrictions de g_0 et de son $(n+2)$ -champ normal au bord S^n de W sont l'immersion $f: S^n \rightarrow M \times \{0\} \times \mathbb{R}^{n+1}$ et son $(n+2)$ -champ normal $(n(x), \varphi_1, \dots, \varphi_{n+1})$; il y a de plus transversalité de g_0 au bord.

La dimension $2n+3$ de $M \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{n+1}$ est suffisante pour que g_0 soit voisine d'un plongement $g': W \rightarrow M \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{n+1}$ qui envoie l'intérieur de W dans $M \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^{n+1}$ et dW dans $M \times \{0\} \times \mathbb{R}^{n+1}$. A l'aide d'un voisinage tubulaire compact de g' dont la projection sur \mathbb{R}_+ est contenue dans un segment $[0, a]$, on construit alors une homotopie $(M \times \mathbb{R}^{n+1}) \times [0, a] \rightarrow S^{n+2}$ entre l'application F associée à f et l'application constante.

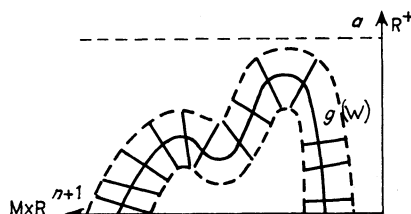


Fig. 14.

On pourrait démontrer d'une façon analogue le résultat un peu plus fort suivant :

PROPOSITION 1'. — Si $f, f': S^n \rightarrow M$ sont deux immersions cobordantes, alors $J(\tilde{f}) = J(\tilde{f}')$.

2.2. Réciproque de la proposition 1 (pour $n \geq 2$).

PROPOSITION 2. — Soit $f: S^n \rightarrow M$ une immersion telle que $J(\tilde{f}) = 0$, alors, si $n \geq 2$, f est régulièrement homotope à une immersion bordante,

Soit $H: (\widehat{M \times \mathbb{R}^{n+1}}) \times I \rightarrow S^{n+2}$ une homotopie à point-base entre l'application F associée à f et l'application constante d'image le pôle nord. En « décompactifiant » $(\widehat{M \times \mathbb{R}^{n+1}}) \times I$, on obtient une application $H': M \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow S^{n+2}$ qui envoie le complémentaire d'un compact au pôle nord, et qui, sur $M \times \{0\} \times \mathbb{R}^{n+1}$, coïncide avec l'application F' du n° 1.1.

On peut supposer l'homotopie H telle que sa restriction à $\widehat{M \times \mathbb{R}^{n+1}} \times \{t\}$ soit égale à F pour $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$. Sans la modifier au voisinage de l'infini,

ni au voisinage de $M \times \{0\} \times \mathbb{R}^{n+1}$, on peut alors remplacer H' par une application différentiable. Choisissons un point $Q \in S^{n+2}$ sur lequel la nouvelle application H' soit transversale; l'image réciproque $H'^{-1}(Q)$ est une sous-variété W' de dimension $n + 1$ de $M \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{n+1}$, compacte, avec un bord (éventuel) dW' qui est l'intersection transversale de W' et de $M \times \{0\} \times \mathbb{R}^{n+1}$.

Si on a choisi le point Q assez voisin du pôle sud S , alors dW' est une variété assez voisine de $F'^{-1}(S) = f'(S^n)$, c'est-à-dire que dW' est l'image d'un plongement f'' de S^n qui est assez voisin de f' (et en particulier isotope par une petite isotopie). L'image réciproque par la dérivée de H' d'un $(n + 2)$ -repère tangent à S^{n+2} en Q est un $(n + 2)$ -champ transversal à W' dans $M \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{n+1}$; sa restriction à dW' est un champ transversal dans $M \times \{0\} \times \mathbb{R}^{n+1}$. On peut supposer cette restriction assez voisine du champ $(n(x), \nu_1, \dots, \nu_{n+1})$ pour lui être homotope : pour cela, il suffit de choisir un repère en Q assez voisin du repère en S image de $(n(x), \nu_1, \dots, \nu_{n+1})$.

Si l'on note W la composante connexe de W' qui contient le bord, on a donc les données suivantes : une variété W connexe compacte de bord $dW = S^n$, un plongement $g'' : W \rightarrow M \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{n+1}$ avec un $(n + 2)$ -champ transversal tels que la restriction de g'' au bord S^n soit un plongement f'' dans $M \times \{0\} \times \mathbb{R}^{n+1}$ et que la restriction du champ soit $(n(x), \nu_1, \dots, \nu_{n+1})$.

LEMME 1. — *Il existe une immersion $g : W \rightarrow M$ telle que $i \circ g$ soit régulièrement homotope à g'' (où $i : M \rightarrow M \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{n+1}$ désigne le plongement canonique $\text{id} \times 0 \times 0$).*

Une telle immersion g est homotope à la composée $p : W \rightarrow M$ de g'' et de la projection sur M . D'après le théorème de classification des immersions (voir chap. II, n° 1.2), il existe une immersion g homotope à p si et seulement si l'application p est couverte par une injection fibrée de $T(W)$ dans $T(M)$; de plus, $i \circ g$ est régulièrement homotope à g'' si et seulement si l'injection fibrée $T(i) \circ T(g) : T(W) \rightarrow T(M \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{n+1})$ est homotope à $T(g'')$.

Traduisons le problème en prenant les images réciproques par p des fibrés de base M . Le plongement g'' et son $(n + 2)$ -champ normal donnent lieu à un W -isomorphisme

$$\psi : T(W) \oplus \theta^{n+2} \rightarrow p^*(T(M)) \oplus \theta^{n+2}$$

et il s'agit de montrer que ψ est homotope à un isomorphisme de la forme $\varphi \oplus \text{id}(\theta^{n+2})$ [où $\varphi : T(W) \rightarrow p^*(T(M))$ correspondra à l'application tangente de l'immersion g cherchée]. Les obstructions à une telle homotopie sont dans les groupes $H^i(W; \pi_i(\mathbf{SO}(2n + 3)/\mathbf{SO}(n + 1)))$. Ces

groupes sont tous nuls car, pour $i \leq n$, on a $\pi_i(\mathbf{SO}(2n+3)/\mathbf{SO}(n+1)) = 0$ et, pour $i \geq n+1$, la cohomologie $H^i(W)$ est nulle puisque W est une variété de dimension $n+1$, connexe et à bord.

La restriction $f_0 = g|_{dW}$ de l'immersion $g: W \rightarrow M$ n'est pas nécessairement régulièrement homotope à f . Cependant, en tant qu'applications continues, f et f_0 sont homotopes car homotopes à $q = p|_{S^n}$. D'après l'exactitude de la suite (Σ) (chap. II, prop. 14), leurs classes régulières \tilde{f} et \tilde{f}_0 dans $[S^n, \tilde{T}(M)]$ diffèrent par l'opération d'un élément $\rho \in \pi_n(\mathbf{SO}(n+1))$.

LEMME 2. — On a $\tilde{f} = \rho \cdot \tilde{f}_0$ où $\rho \in \pi_n(\mathbf{SO}(n+1))$ est tel que $s(\rho) = 0$.

Explicitons d'abord ρ . En complétant l'application tangente à f_0 par un champ normal, on obtient un isomorphisme $\varphi_0: \theta \oplus T(S^n) \rightarrow q^*(T(M))$ qui est précisément la restriction de φ à $T(W)|_{S^n} = \theta \oplus T(S^n)$. De même f donne un isomorphisme $\gamma: \theta \oplus T(S^n) \rightarrow q^*(T(M))$, le champ normal étant $n(x)$. L'élément ρ s'obtient en transportant par une trivialisation du fibré $q^*(T(M))$ l'automorphisme $\varphi_0^{-1} \circ \gamma$ [ce qui ne dépend pas de la trivialisation choisie puisque $\pi_n(\mathbf{SO}(n+1))$ est commutatif].

Lorsqu'on stabilise γ en ajoutant un fibré trivial θ^{n+2} de fibre $(\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_{n+1})$, on obtient un isomorphisme

$$\gamma \oplus \text{id}: \theta \oplus T(S^n) \oplus \theta^{n+2} \rightarrow q^*(T(M)) \oplus \theta^{n+2}$$

qui est homotope à la restriction de ψ à S^n : il suffit en effet de déformer par rotation le 2-champ $(n(x), \nu_0)$ en $(-\nu_0, n(x))$ pour obtenir $\psi|_{S^n}$. D'autre part, comme $\varphi_0 = \varphi|_{S^n}$, le stabilisé de φ_0 est aussi $\psi|_{S^n}$. Il en résulte que ρ est stablement homotope à l'identité, donc que

$$s(\rho) = 0 \in \pi_n(\mathbf{SO}(n+2)).$$

2.3. *Fin de la démonstration de la proposition 2.* — Pour démontrer la proposition 2, compte tenu du lemme 2 et du fait que f_0 borde l'immersion g (lemme 1), il suffit de démontrer la proposition suivante :

PROPOSITION 3. — Pour $n \geq 2$, si $f: S^n \rightarrow M$ est une immersion bordante, et si l'élément $\rho \in \pi_n(\mathbf{SO}(n+1))$ est dans le noyau de l'homomorphisme s de stabilisation, la classe $\rho \cdot \tilde{f}$ est la classe d'une immersion bordante.

Pour démontrer la proposition 3, on construit explicitement une immersion f' bordante de classe $\tilde{f}' = \rho \cdot \tilde{f}$ de la façon suivante. Soit $h: S^n \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ une immersion dont la classe $\tilde{h} \in \pi_n(\mathbf{SO}(n+1))$ soit égale à ρ . D'après le théorème 2 du chapitre III, comme $s(\rho) = 0$, on peut, si $n \geq 2$, choisir pour h une immersion bordante. Si on identifie \mathbf{R}^{n+1} à un disque ouvert

dans M , l'immersion h donne une immersion $h' : S^n \rightarrow M$ qui est bordante. Soit f' une somme connexe de f et de h' , l'immersion f' est bordante. Comme l'application h' est homotope à 0 dans M , l'opération de somme connexe avec h' consiste, pour la classe \tilde{f} , à modifier l'injection fibrée $T(f) : T(S^n) \rightarrow T(M)$ au voisinage d'un point de S^n par l'opération de ρ concentrée sur un disque (voir chap. II, prop. 24); par conséquent $\tilde{f}' = \rho \cdot \tilde{f}$.

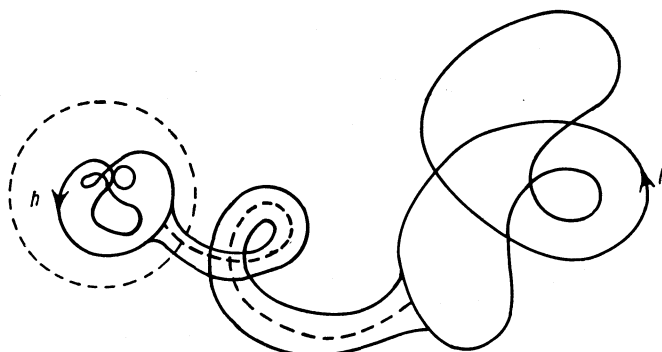


Fig. 15.

Le théorème 1 est la réunion des propositions 1 et 2. L'hypothèse $n \geq 2$ intervient par l'intermédiaire de la proposition 3. Lorsque $M = \mathbb{R}^{n+1}$, l'interprétation de J (n° 1.3) montre que le théorème 1 est équivalent au théorème 2 du chapitre III. De plus, le théorème 2' du chapitre III montre que l'hypothèse $n \geq 2$ est nécessaire.

3. ADDITIVITÉ DE J ET APPLICATIONS.

3.1. *Additivité de J .* — On a $\widehat{M \times \mathbb{R}^{n+1}} = E^{n+1}(\widehat{M})$ et en particulier, on a $\widehat{M \times \mathbb{R}^{n+1}} = E(\widehat{M \times \mathbb{R}^n})$. Il en résulte une loi de composition, notée $+$, sur $[\widehat{M \times \mathbb{R}^{n+1}}, S^{n+2}]_0$.

PROPOSITION 4. — Soient $f, f_1 : S^n \rightarrow M$ deux immersions et $f + f_1$ une somme connexe; on a $J(\widehat{f + f_1}) = J(\tilde{f}) + J(\tilde{f}_1)$.

Construisons d'abord une application $F'_0 : M \times \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow S^{n+2}$ qui représente la classe $J(\tilde{f}) + J(\tilde{f}_1)$. Soient F' et F'_1 les applications de $M \times \mathbb{R}^{n+1}$ dans S^{n+2} qui correspondent (n° 1.1) à f et f_1 . Si $(x, y, z) \in M \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, on définit F'_0 par les formules suivantes :

$$\begin{aligned}
 (2) \quad F'_0(x, y, z) &= F'(x, y, \text{Log}(z)) && \text{si } z > 0, \\
 &= F'_1(x, y, -\text{Log}(-z)) && \text{si } z < 0, \\
 &= N(\text{pôle nord}) && \text{si } z = 0,
 \end{aligned}$$

Il est clair, après contraction en un point des points à l'infini, que F_0 est obtenu à partir de F et F_1 par la comultiplication

$$\widehat{M \times \mathbb{R}^{n+1}} \rightarrow (\widehat{M \times \mathbb{R}^{n+1}}) \vee (\widehat{M \times \mathbb{R}^{n+1}}).$$

L'application F_0 représentant $J(\tilde{f}) + J(\tilde{f}_1)$ s'obtient donc par la construction du n° 1.1 appliquée simultanément aux deux immersions f et f_1 . Or on sait (chap. II, prop. 16) que la somme connexe $f + f_1$ est cobordante à l'union $f \cup f_1$. En raisonnant comme pour la proposition 1', on voit donc que F_0 est dans la classe d'homotopie $J(\widetilde{f + f_1})$.

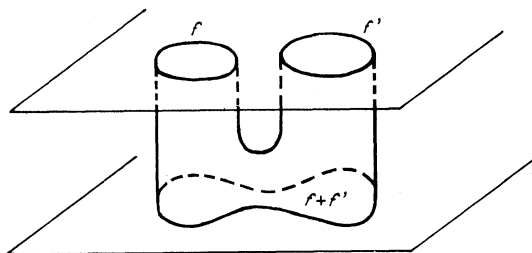


Fig. 16.

Lorsque M est simplement connexe, la somme connexe fait de $\pi_0(\text{Imm}(S^n, M))$ un groupe (chap. II, prop. 22). Du théorème 1 et de la proposition 4, il résulte alors :

THÉORÈME 2. — *Pour tout $n \geq 2$, si M est simplement connexe, l'ensemble des classes des immersions bordantes de S^n dans M constitue un sous-groupe de $\pi_0(\text{Imm}(S^n, M))$.*

3.2. *Les immersions homotopiquement triviales.* — Considérons la suite exacte

$$(\Sigma) \quad \pi_n(\mathbf{SO}(n+1)) \xrightarrow{i} [S^n, \tilde{T}(M)] \longrightarrow [S^n, M].$$

Si ρ est un élément de $\pi_n(\mathbf{SO}(n+1))$, on obtient un représentant $h(\rho) : S^n \rightarrow M$ de la classe $i(\rho)$ en prenant une immersion $h : S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ de classe ρ et en identifiant \mathbb{R}^{n+1} à un disque ouvert dans M (chap. II, prop. 23).

PROPOSITION 5. — *Si $n \geq 2$, et si $J_n \circ s(\rho) = 0$, alors $J \circ i(\rho) = 0$.*

On peut en effet choisir $h(\rho)$ bordante (cf. démonstration de la proposition 4).

Inversement toute immersion $f : S^n \rightarrow M$ homotopiquement triviale (homotope à 0 en tant qu'application continue) est dans une certaine classe $i(\rho)$.

PROPOSITION 6. — *Supposons M stablement parallélisable; soit f une immersion homotopiquement triviale, de classe $\tilde{f} = i(\rho)$, si f est bordante, alors $J_n \circ s(\rho) = 0$.*

Soient $g : W \rightarrow M$ un prolongement de f et T' une trivialisation de $T(M) \oplus \theta$; la composée $T' \circ (T(g) \oplus \text{id}) : T(W) \oplus \theta \rightarrow \mathbb{R}^{n+2}$ est une trivialisation stable T de $T(W)$. Sa restriction à S^n est une trivialisation stable, $T_0 = T' \circ (T(f) \oplus \text{id})$ de $\theta \oplus T(S^n)$ qui s'écrit $T_0 = \mu \circ (c \oplus \text{id})$ [où c est la trivialisation canonique de $\theta \oplus T(S^n)$]; comme $\pi_n(\mathbf{SO})$ est commutatif, μ est indépendant du choix de $T' | f(S^n)$. En particulier, si on choisit la trivialisation associée à l'homotopie de f à 0, on voit que $\mu = s(\rho)$.

Avec les notations du chapitre III, § 2, on a $\mu = a(W, T)$, donc (chap. III, n° 2.5), $J_n(\mu) = 0$.

Remarque. — D'après (III, prop. 7 et 13), la donnée de W et de T détermine de façon unique ⁽⁵⁾ un élément $\rho' = b(W, T) \in \pi_n(\mathbf{SO}(n+1))$ qui est la classe de la restriction $f'_0 = g'_0 | S^n$ de l'unique immersion de W dans \mathbb{R}^{n+1} qui induise la trivialisation stable T . On a $s(\rho) = s(\rho')$. On note f' et g' les immersions dans M obtenues à partir de f'_0 et g'_0 en identifiant \mathbb{R}^{n+1} à un disque ouvert dans M .

PROPOSITION 7. — *Si M est parallélisable, et si f, de classe $\tilde{f} = i(\rho)$, borde g : W → M, alors f est régulièrement homotope au bord f' d'une immersion g' : W → M qui se factorise par un disque ouvert dans M.*

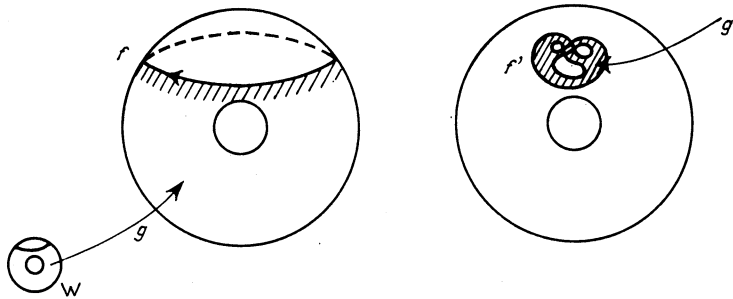


Fig. 17.

Dans la démonstration de la proposition 6, on remplace T , T' et T_0 par de vraies trivialisations t , t' et t_0 . Il en résulte que $\rho = b(W, t)$, d'où (cf. remarque), $\rho = \rho'$.

Exemple (fig. 17) : $M = S^1 \times S^1$, $W = M - D^2$, $g = \text{id}(M) | W$.

⁽⁵⁾ On verra (chap. V, n° 2.3) que la donnée de T est superflue.

3.3. *Conséquences de l'additivité de J.* — Soit M une variété stablement parallélisable. On suppose que $n \geq 2$. Soit $\alpha \in [S^n, M]$ une classe d'homotopie et $I(\alpha)$ l'ensemble des classes d'immersions de classe d'homotopie α . S'il existe une immersion bordante f dont la classe soit dans $I(\alpha)$, toute immersion de $I(\alpha)$ a une classe égale à $\tilde{f} + i(\rho)$ ($\rho \in \pi_n(\mathbf{SO}(n+1))$) et on a $J(\tilde{f} + i(\rho)) = J \circ i(\rho)$, en raison de l'additivité de J . Des propositions 5 et 6, il résulte que la classe $\tilde{f} + i(\rho)$ est bordante si et seulement si $J_n \circ s(\rho) = 0$.

En particulier, si M est parallélisable, on a

$$[S^n, \tilde{T}(M)] = [S^n, M] \times \pi_n(\mathbf{SO}(n+1))$$

et, dans une famille $I(\alpha)$, la donnée d'une immersion bordante f (s'il en existe) établit une bijection entre $I(\alpha)$ et $\pi_n(\mathbf{SO}(n+1)) = \pi_0(\text{Imm}(S^n, \mathbf{R}^{n+1}))$ par laquelle les classes des bordantes se correspondent entre elles.

CHAPITRE V.

LES VARIÉTÉS STABLEMENT PARALLÉLISABLES.

On se propose principalement d'étendre aux immersions de codimension 1 d'une variété stablement parallélisable quelconque les résultats obtenus aux chapitres III et IV sur les immersions de la sphère S^n dans l'espace euclidien \mathbf{R}^{n+1} , dans la sphère S^{n+1} ou dans une variété quelconque M^{n+1} . Pour cela, on utilisera de façon essentielle les résultats du chapitre III.

Tout d'abord, on démontre (§ 1) le théorème suivant :

THÉORÈME 1. — *Soit $f : V^n \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ une immersion. Si $n \geq 2$ et si $i \circ f$ est une immersion bordante (dans S^{n+1}), alors f est régulièrement homotope (dans \mathbf{R}^{n+1}) à une immersion bordante.*

Dans le paragraphe 2, en utilisant les résultats du chapitre III sur les immersions bordantes de S^{n-1} dans S^n , on donne des critères pour qu'une variété stablement parallélisable V^n soit parallélisable.

Enfin, dans le paragraphe 3, on généralise la construction du chapitre IV et on obtient une application

$$J_V : \pi_0(\text{Imm}(V^n, M^{n+1})) \rightarrow [\widehat{M} \times \mathbf{R}^{n+1}, S^{n+2}]_0$$

dont l'ensemble des zéros est l'ensemble des classes bordantes. On a vu que, lorsqu'on identifie convenablement $\pi_0(\text{Imm}(S^n, S^{n+1}))$ et $\pi_n(\mathbf{SO})$, l'application J_{S^n} est au signe près égale à l'homomorphisme de Hopf-

Whitehead, $J_n : \pi_n(\mathbf{SO}) \rightarrow \pi_n(\mathbf{G})$. Il s'agit là d'une circonstance tout à fait particulière.

On montre en effet que, lorsque V n'est pas la sphère S^n , l'application naturelle $j_V : [V, \mathbf{SO}] \rightarrow [V, \mathbf{G}]$ n'est pas nécessairement égale à l'application qu'on obtient à partir de J_V par des identifications convenables. De plus, les noyaux sont différents et l'application j_V ne peut servir à caractériser les immersions bordantes.

1. IMMERSIONS DANS \mathbf{R}^{n+1} ET \mathbf{S}^{n+1} . — Dans ce paragraphe, V désigne une variété compacte connexe sans bord, de dimension n , et $c : \theta \oplus T(V) \rightarrow V \times \mathbf{R}^{n+1}$ une trivialisatation du stabilisé du fibré tangent $T(V)$. A l'aide de c , on a construit (chap. II, § 1) des bijections

$$\omega : \pi_0(\text{Imm}(V, \mathbf{R}^{n+1})) \rightarrow [V, \mathbf{SO}(n+1)]$$

et

$$\mu : \pi_0(\text{Imm}(V, \mathbf{S}^{n+1})) \rightarrow [V, \mathbf{SO}(n+2)]$$

de telle sorte que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \pi_0(\text{Imm}(V, \mathbf{R}^{n+1})) & \xrightarrow{\omega} & [V, \mathbf{SO}(n+1)] \\ \downarrow i_* & & \downarrow s_V \\ \pi_0(\text{Imm}(V, \mathbf{S}^{n+1})) & \xrightarrow{\mu} & [V, \mathbf{SO}(n+2)] \end{array}$$

soit commutatif (chap. II, prop. 10).

1.1. Soient $f : V \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ et $h : S^n \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ deux immersions; on a vu (chap. II, prop. 21) que toutes les sommes connexes $f + h$ sont dans la même classe d'homotopie régulière, notée $\tilde{f} + \tilde{h}$. On définit ainsi une opération du groupe $\pi_n(\mathbf{SO}(n+1))$ dans $\pi_0(\text{Imm}(V, \mathbf{R}^{n+1}))$. De même, pour les immersions dans \mathbf{S}^{n+1} , on définit une opération du groupe $\pi_n(\mathbf{SO}(n+2))$ dans $\pi_0(\text{Imm}(V, \mathbf{S}^{n+1}))$. Les applications i_* sont compatibles avec ces opérations.

L'application $s_V : [V, \mathbf{SO}(n+1)] \rightarrow [V, \mathbf{SO}(n+2)]$ est un homomorphisme surjectif (toute immersion de V dans \mathbf{S}^{n+1} est régulièrement homotope à une immersion dont l'image évite le pôle sud). On va montrer que l'application $\tilde{h} \rightarrow \tilde{f} + \tilde{h}$ induit une bijection de $\ker(s) \subset \pi_n(\mathbf{SO}(n+1))$ sur la fibre de s_V au point $\widetilde{i \circ f}$.

PROPOSITION 1. — *Soient f et f' des immersions de V dans \mathbf{R}^{n+1} . Si $i \circ f$ est régulièrement homotope à $i \circ f'$, il existe un entier relatif q tel que $\tilde{f} = \tilde{f}' + q$. Si n est impair, un tel q est unique. Si n est pair $\neq 2, 6$, la parité de q est déterminée.*

On a démontré ce résultat lorsque $V = S^n$ (chap. III, n° 3.2, prop. 11). Dans le cas général, la démonstration de l'existence de q est analogue à celle du cas particulier $V = S^n$ (chap. III, n° 3.2, lemme). Inversement, si $\tilde{f} = \tilde{f}' + qu$, les trivialisations de $\theta \oplus T(V)$ correspondant à f et f' sont stablement équivalentes. Leur déviation est un élément

$$\rho \in \ker(s) \subset \pi_n(\mathbf{SO}(n+1))$$

localisé en un point; et il est clair (cf. chap. II, prop. 22) que $\rho = qu \in \ker(s)$. Ceci démontre la proposition.

Lorsque n est impair, on peut démontrer géométriquement l'unicité de q . Il résulte, en effet, de (II, prop. 17) et de (III, prop. 10) que la relation $\tilde{f} = \tilde{f}' + qu$ implique $q = \alpha(f') - \alpha(f)$.

1.2. THÉORÈME 1. — *Soit $f : V \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ une immersion. Si $n \geq 2$ et si $i \circ f$ est une immersion bordante (dans S^{n+1}), alors f est régulièrement homotope (dans \mathbb{R}^{n+1}) à une immersion f' qui est bordante (dans \mathbb{R}^{n+1}).*

On démontre d'abord, comme dans (chap. III, prop. 11), que $i \circ f$ est régulièrement homotope à une immersion $i \circ f''$, où f'' est une immersion bordante. De la proposition 1, il résulte que $\tilde{f} = \tilde{f}'' + qu$. Mais, d'après (III, th. 2), si $n \geq 2$, la classe qu est la classe d'une immersion bordante. Il résulte alors de (II, prop. 19) que \tilde{f} est la classe d'une immersion bordante (dans \mathbb{R}^{n+1}), d'où le théorème.

1.3. Degré d'une immersion $f : V \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$. — Rappelons que, si n est pair, on a $\alpha(f) = \left(\frac{1}{2}\right) \chi(V)$ (chap. I, th. 3). D'autre part, M. Kervaire a démontré ([11] et [13]) que, si n est impair $\neq 1, 3$ ou 7 , on a $\alpha(f) \equiv \chi^*(V) \pmod{2}$ (cf. chap. I, n° 3.4).

2. CONSTRUCTION D'IMMERSIONS DANS \mathbb{R}^{n+1} . — Dans ce paragraphe, W' désigne une variété compacte connexe, sans bord, de dimension $n+1$ qui est stablement parallélisable. On note W la variété de bord S^n obtenue en ôtant à W' un petit disque D de centre $p \in W'$.

2.1. Pour toute parallélisation stable T' de W' , la parallélisation stable T induite sur W est homotope à une parallélisation stable provenant d'une vraie parallélisation t de W . Soit $g : W \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ une immersion correspondant à t (chap. II, n° 1.4), et soit $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ la restriction de g à $dW = S^n$. On a alors $\tilde{f} = b(W, t) \in \ker(s)$ (cf. chap. III, n° 2.2).

Supposons que $\tilde{f} = 0 \in \pi_n(\mathbf{SO}(n+1))$. C'est dire que f est régulièrement homotope au plongement ordinaire de S^n dans \mathbb{R}^{n+1} . Cette homotopie régulière se relève en un chemin dans l'espace des pseudo-immersions

(d'après [21]) de W dans \mathbb{R}^{n+1} . A l'extrémité de ce chemin, se trouve une pseudo-immersion $g_0 : W \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ dont la restriction f_0 au bord est le plongement ordinaire de S^n dans \mathbb{R}^{n+1} .

On rappelle qu'une *pseudo-immersion* d'une variété à bord W dans une variété M^{n+1} est une application différentiable $g : W \rightarrow M$ dont la restriction au complémentaire d'un voisinage tubulaire C de dW est une immersion (respectant les orientations). On suppose en outre que, dans C , identifié à $dW \times [0, 1]$, l'ensemble $\Sigma(g)$ des points singuliers est une sous-variété $dW \times \{a_1, \dots, a_p\}$ et qu'en ces points, g est un pliage. Les sous-variétés $dW \times \{a_i\}$ s'appellent les plis de g et p le nombre des plis de g .

Si W' est une variété sans bord, et p un point de W' , on appellera pseudo-immersion de W' dans M une application différentiable $g' : W' \rightarrow M$ dont la restriction à un petit disque fermé D de centre p est une immersion (respectant les orientations) et dont la restriction au complémentaire W de l'intérieur de D est une pseudo-immersion avec un nombre pair de plis.

Avec ces définitions, on voit que, dans la situation précédente, la pseudo-immersion $i \circ g_0 : W \rightarrow S^{n+1}$ se prolonge en une pseudo-immersion $G : W' \rightarrow S^{n+1}$. Le nombre des plis est pair car, au voisinage de p , et hors d'un voisinage de dW dans W , l'application G est une immersion préservant les orientations. Cette pseudo-immersion G a un degré topologique égal à 1. En effet, le point $p \in W'$ est le seul point de l'image réciproque du pôle sud, et l'orientation y est préservée.

Supposons maintenant que $\tilde{f} = u \in \pi_n(\mathbf{SO}(n+1))$. L'immersion f est régulièrement homotope au plongement retourné de S^n dans \mathbb{R}^{n+1} (chap. III, prop. 10). Il en résulte que g est régulièrement homotope à une pseudo-immersion $g_0 : W \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ dont la restriction f_0 au bord est le plongement retourné. On en déduit, par recollement d'un disque, une pseudo-immersion $g' : W' \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, ou, ce qui revient au même, une pseudo-immersion $G : W' \rightarrow S^{n+1}$ dont l'image évite le pôle sud. L'application G a donc un degré topologique nul.

2.2. Soit $G : W' \rightarrow S^{n+1}$ une pseudo-immersion; on va construire à partir de G une immersion $G' : W' \rightarrow \mathbb{R}^{n+2}$. Pour cela, on plonge S^{n+1} dans \mathbb{R}^{n+2} de la manière ordinaire, avec le champ normal $N(x) = x$. Soit $\varphi : D^{n+1} \rightarrow W'$ un plongement du disque tel que $\varphi(o) = p$ et tel que $\varphi(D)$ contienne tous les plis de G . On suppose de plus que les $2q$ plis de G sont les images par φ des sphères de centre o et de rayon $\frac{i}{2q+2}$ ($2 \leq i \leq 2q+1$). Si $y \in \varphi(D)$, on note $r(y)$ la distance à l'origine de $\varphi^{-1}(y)$.

On pose alors

$$(1) \begin{cases} G'(y) = G(y) & \text{si } y \in W' - \varphi(D), \\ G'(y) = (1 + \varepsilon) G(y) & \text{si } y \in \varphi(D) \text{ et } r(y) \leq \frac{1}{2q+2}, \\ G'(y) = \left[1 + \varepsilon \cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{(2q+2)r(y)-1}{2q+1}\right) \right] G(y) & \text{si } y \in \varphi(D) \text{ et } r(y) \geq \frac{1}{2q+2}. \end{cases}$$

Il est facile de vérifier que G' est une immersion. On dira que G' est l'immersion associée à la pseudo-immersion G .

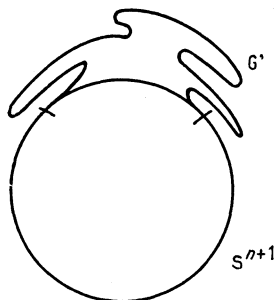


Fig. 18.

PROPOSITION 2. — Soit $G' : W' \rightarrow \mathbb{R}^{n+2}$ l'immersion associée à une pseudo-immersion $G : W' \rightarrow S^{n+1}$. Le degré $\alpha(G')$ est égal au degré topologique de l'application G .

Soit $\Psi : W' \rightarrow S^{n+1}$ l'application gaussienne de G' (vecteur normal). Le degré topologique de Ψ est égal à $\alpha(G')$. Les applications G et Ψ coïncident dans $W' - \varphi(D)$. Dans $\varphi(D)$, les points $G(y)$ et $\Psi(y)$ ne sont jamais diamétralement opposés. Il en résulte que G et Ψ sont homotopes, d'où le résultat. C'est ici qu'intervient la parité du nombre de plis de G : avec un nombre impair de plis, $G(p)$ et $\Psi(p)$ seraient diamétralement opposés.

PROPOSITION 3. — Pour que W' soit parallélisable, il faut et il suffit qu'il existe une pseudo-immersion $G : W' \rightarrow S^{n+1}$ de degré 0.

Si W' est parallélisable et si t est une parallélisation de W qui s'étend à W' , on a $b(W, t) = u$ (chap. III, prop. 9). L'existence d'une pseudo-immersion de degré 0 résulte du n° 2.1. Inversement, si G est une pseudo-immersion de degré 0, l'immersion G' associée (n° 2.2) a un degré normal nul (prop. 2). Or l'application gaussienne Ψ est couverte par une application fibrée de $T(W')$ dans $T(S^{n+1})$ injective dans chaque fibre (voir [18]), d'où la trivialité de $T(W')$.

2.3. Si n est impair, on a $\chi(W) = \chi(W') - 1 = \alpha(f)$.

On a vu (chap. III, n° 4.2) que la classe $\tilde{f} = b(W, t)$ ne dépend ni de t ni de T , mais seulement de $\chi(W)$. En particulier, si $\chi(W') = 0$, on a

$\tilde{f} = u$, et, si $\chi(W') = 2$, on a $\tilde{f} = 0$. Dans ces deux cas, il existe donc des pseudo-immersions de W' dans S^{n+1} de degrés respectifs 0 et 1. Inversement, l'existence de telles pseudo-immersions donne

$$\chi(W') = 2\alpha(G') = 2\deg(G)$$

(n° 1.3 et prop. 2). D'où :

PROPOSITION 4. — *Si n est impair, il existe une pseudo-immersion $G : W' \rightarrow S^{n+1}$ de degré 0 (resp. 1) si et seulement si $\chi(W') = 0$ [resp. $\chi(W') = 2$].*

Si n est pair, la classe $\tilde{f} = b(W, t)$ est soit 0, soit $u \in \pi_n(\mathbf{SO}(n+1))$. Pour $n = 2$ ou 6, on a $u = 0$ et il existe des pseudo-immersions de W' dans S^{n+1} de degré 0 et 1. Si $n \neq 2$ ou 6, il existe une pseudo-immersion $G : W' \rightarrow S^{n+1}$ de degré 0 ou 1. Mais, d'après le résultat de M. Kervaire cité au n° 1.3, si G est de degré d , alors G' aussi et l'on a donc $d \equiv \chi^(W') \pmod{2}$.*

PROPOSITION 5. — *Si n est pair $\neq 2$ ou 6, il existe une pseudo-immersion $G : W' \rightarrow S^{n+1}$ de degré 0 (resp. 1) si et seulement si $\chi^*(W') \equiv 0 \pmod{2}$ [resp. $\chi^*(W') \equiv 1 \pmod{2}$].*

Des propositions 3, 4 et 5, il résulte :

PROPOSITION 6. — *Soit W' une variété stablement parallélisable de dimension $n+1$. Pour que W' soit parallélisable, il faut et il suffit que :*

- *si n est impair, on ait $\chi(W') = 0$;*
- *si n est pair et différent de 0, 2 ou 6, on ait $\chi^*(W') \equiv 0 \pmod{2}$.*

Si $n = 0, 2$ ou 6, W' est parallélisable.

On a aussi le résultat suivant :

PROPOSITION 7. — *Soit W une variété stablement parallélisable de bord $dW = S^n$. La classe $b(W, t) \in \pi_n(\mathbf{SO}(n+1))$ ne dépend pas du choix de la parallélisation t .*

C'est ce que l'on vient de voir pour les parallélisations t qui s'étendent en une parallélisation stable T' de W' . Cette condition équivaut à $s(b(W, t)) = 0$. Elle est toujours réalisée si $n \neq 4k - 1$ car J_n est alors injectif. Pour $n = 4k - 1$, on a déjà démontré le résultat (chap. III, prop. 13).

3. IMMERSIONS BORDANTES. — Soit M une variété connexe orientée sans bord, compacte ou non, de dimension $n+1$ et soit V une variété compacte connexe orientée sans bord, de dimension n . On suppose V stablement parallélisable et on note $c : \theta \oplus T(V) \rightarrow V \times \mathbb{R}^{n+1}$ une trivialisation. On a construit (chap. II, prop. 1) une bijection

$$\tau(c) : \pi_0(\text{Imm}(V, M)) \rightarrow [V, \tilde{T}(M)].$$

3.1. *L'application J_V .* — Au chapitre IV, on a construit une application

$$J : \pi_0(\text{Imm}(S^n, M)) \rightarrow [\widehat{M \times \mathbb{R}^{n+1}}, S^{n+2}]_0$$

qui permet de caractériser les classes des immersions bordantes. La même construction (chap. IV, § 1) s'applique de façon analogue aux immersions de la variété V dans M ; il ne serait même pas nécessaire de supposer V stablement parallélisable. On obtient ainsi une application

$$J_V : \pi_0(\text{Imm}(V, M)) \rightarrow [\widehat{M \times \mathbb{R}^{n+1}}, S^{n+2}]_0$$

et l'on a $J = J_{S^n}$

De la même manière qu'en (chap. IV, n° 2.1), on démontre la nullité de $J_V(\tilde{f})$ si f est une immersion bordante. On a même :

PROPOSITION 8. — *Soient $f : V \rightarrow M$ et $f' : V' \rightarrow M$ des immersions; si f est cobordante à f' , alors $J_V(\tilde{f}) = J_V(\tilde{f}')$.*

Utilisant la loi de composition de $[\widehat{M \times \mathbb{R}^{n+1}}, S^{n+2}]_0$ qui provient du fait que $\widehat{M \times \mathbb{R}^{n+1}}$ est une suspension, on a la propriété d'additivité suivante :

PROPOSITION 9. — *Soient $f : V \rightarrow M$ et $f' : V' \rightarrow M$ des immersions et $f + f' : V \# V' \rightarrow$ une somme connexe, alors*

$$J_{V \# V'}(\widetilde{f + f'}) = J_V(\tilde{f}) + J_{V'}(\tilde{f}')$$

On voit en effet, comme dans (IV, 3.1), que $J_V(\tilde{f}) + J_{V'}(\tilde{f}')$ est égal à $J_{V \cup V'}(f \cup f')$. Il résulte alors de la proposition 8 et du fait (chap. II, prop. 16) que $f + f'$ est cobordante à $f \cup f'$, l'égalité de la proposition 9.

On va maintenant démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME 2. — *Pour tout $n \geq 2$, l'ensemble des classes des immersions bordantes de V dans M est le sous-ensemble $J_V^{-1}(0)$ de $\pi_0(\text{Imm}(V, M))$.*

Soit $f : V \rightarrow M$ une immersion telle que $J_V(\tilde{f}) = 0$. Il suffit de montrer que f est régulièrement homotope à une immersion bordante. C'est ici qu'intervient le fait que V est stablement parallélisable. Comme pour la proposition 2 du chapitre IV, on construit une immersion $g : W \rightarrow M$ dont la restriction f_0 à $dW = V$ satisfait à $\tilde{f} = \rho \cdot \tilde{f}_0$, où $\rho \in [V, \mathbf{SO}(n+1)]$ est tel que $s_V(\rho) = 0$. Pour achever de démontrer le théorème 2, il suffit donc de démontrer la proposition suivante :

PROPOSITION 10. — *Pour $n \geq 2$, si $f : V \rightarrow M$ est une immersion bordante, et si l'élément $\rho \in [V, \mathbf{SO}(n+1)]$ est dans le noyau de l'homomorphisme s_V de stabilisation, la classe $\rho \cdot \tilde{f}$ est la classe d'une immersion bordante.*

On a vu (prop. 1) que, lorsque $M = \mathbb{R}^{n+1}$, la classe $\rho.\tilde{f}$ est la classe de la somme connexe $f + h$, où $h : S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ est une immersion dont la classe \tilde{h} est dans $\ker(s)$. Ainsi, si $n \geq 2$, on peut choisir pour h une immersion bordante (chap. III, th. 2). Notons encore h la composée de h et d'un plongement de \mathbb{R}^{n+1} dans M . Il est clair qu'une somme connexe $f + h$ a pour classe $\rho.\tilde{f}$. Comme f et h sont bordantes, la classe $\rho.\tilde{f}$ est une classe bordante.

3.2. *Le cas de $M = S^{n+1}$.* — Soit \mathbf{G} la limite par suspension de la suite des espaces \mathbf{G}_q des applications de degré 1 de S^{q-1} sur elle-même. On a une application $j : \mathbf{SO} \rightarrow \mathbf{G}$ qui est la limite des applications évidentes de $\mathbf{SO}(q)$ dans \mathbf{G}_q . L'espace \mathbf{G} est un H-espace connexe et, pour tout espace V , l'ensemble $[V, \mathbf{G}]$ est naturellement un groupe. On a de plus un homomorphisme de groupes $j_v : [V, \mathbf{SO}] \rightarrow [V, \mathbf{G}]$. En particulier (pour $V = S^n$), le groupe $\pi_n(\mathbf{G})$ est canoniquement isomorphe au groupe stable $\Pi_n = \pi_{2n+2}(S^{2n+2})$ (voir [3]). Avec cette identification, l'homomorphisme j_{S^n} donne lieu à l'homomorphisme de Hopf-Whitehead $J_n : \pi_n(\mathbf{SO}) \rightarrow \Pi_n$.

Si V est une variété de dimension n , l'homomorphisme naturel $[V, \mathbf{SO}(n+2)] \rightarrow [V, \mathbf{SO}]$ est un isomorphisme. On identifiera ces deux espaces par cet isomorphisme.

PROPOSITION 11. — *Soit $\rho \in [V, \mathbf{SO}]$ un élément tel que $j_v(\rho) = 0$. Si $f : V \rightarrow S^{n+1}$ est une immersion bordante, la classe $\rho.\tilde{f}$ est la classe d'une immersion bordante.*

On va en réalité montrer que, si f est bordante, $\rho^{-1}.\tilde{f}$ est une classe bordante. Soit $r : V \times S^N \rightarrow S^N$ (où $N \geq n+2$) une application qui représente ρ . Comme $\rho \in \ker(j_v)$, il existe une homotopie $h : I \times V \times S^N \rightarrow S^N$ entre $h_0 = \text{pr}_2 : V \times S^N \rightarrow S^N$ et $h_1 = r$. On peut supposer que l'homotopie h est une application différentiable et que c'est une homotopie constante au voisinage des extrémités du segment I . On peut enfin supposer que le pôle sud $S \in S^N$ est une valeur régulière de h . On note (ν_1, \dots, ν_N) un N -champ tangent à S^N en S .

L'image réciproque $U = h^{-1}(S)$ est une sous-variété de dimension $n+1$ sans bord relatif de $I \times V \times S^N$. Elle possède un N -champ normal $(\omega_i) = T(h)^{-1}(\nu_i)$. Son bord dU est constitué de deux parties dU_0 et dU_1 . La première dU_0 , contenue dans $\{0\} \times V \times S^N$ est l'image difféomorphe de V par l'application φ_0 définie par $\varphi_0(x) = (0, x, S)$. La restriction à dU_0 du champ normal (ω_i) induit le N -champ constant $(0, (\nu_i))$ normal à dU_0 dans $\{0\} \times V \times S^N$. La seconde partie dU_1 , contenue dans $\{1\} \times V \times S^N$, est l'image difféomorphe de V par l'application φ_1 définie

par $\varphi_1(x) = (1, x, \rho(x)^{-1}(S))$. Le N-champ normal à dU_1 dans $\{1\} \times V \times S^N$ induit par (φ_i) est l'image $(o, \rho(x)^{-1}(\nu_i))$ par ρ^{-1} du champ constant.

Comme V et S^N sont stablement parallélisables, il en est de même de $I \times V \times S^N$. Soit $t : \theta \oplus T(V) \rightarrow R^{n+1}$ une trivialisatation et $c : \theta \oplus T(S^N) \rightarrow R^{N+1}$ la trivialisatation qu'on obtient par le plongement ordinaire de S^N dans R^{N+1} . On en déduit pour $I \times V \times S^N$ la parallélisatation stable

$$(t, c) : T(I \times V) \times (\theta \oplus T(S^N)) \rightarrow R^{n+1} \times R^{N+1}.$$

D'autre part, grâce au N-champ normal à U , on a l'égalité

$$T(U) \oplus \theta^N = T(I \times V \times S^N)|_U.$$

Notons $T' : T(U) \oplus \theta^{N+1} \rightarrow R^{n+1} \times R^{N+1}$ la restriction à U de (t, c) . Lorsqu'on identifie dU_0 à V par φ_0 , la restriction de T' à dU_0 est égale à

$$t \oplus \text{id} : \theta \oplus T(V) \oplus \theta^{N+1} \rightarrow R^{n+1} \oplus R^{N+1}.$$

Lorsqu'on identifie dU_1 à V par φ_1 , la restriction de T' à dU_0 est égale à

$$t \oplus \rho^{-1} : \theta \oplus T(V) \oplus \theta^{N+1} \rightarrow R^{n+1} \oplus R^{N+1}.$$

Cette dernière trivialisatation est homotope à $\rho^{-1} \cdot (t \oplus \text{id})$.

On vient de construire une variété U , dont le bord est isomorphe à $-V \cup V$ par $\varphi_0 \cup \varphi_1$, et, sur cette variété une parallélisatation stable T' qui induit sur la première composante du bord $t \oplus \text{id}$ et sur la seconde $\rho^{-1} \cdot (t \oplus \text{id})$.

Supposons maintenant que $f : V \rightarrow S^{n+1}$ soit une immersion bordante : il existe donc une variété W de bord $dW = V$ et une immersion $g : W \rightarrow S^{n+1}$ telle que $f = g|_{dW}$. Par image réciproque, on a une trivialisatation stable T de $T(W)$; on peut supposer que c'est la stabilisée d'une vraie trivialisatation dont on note $t : \theta \oplus T(V) \rightarrow R^{n+1}$ la restriction au bord. Soit W_0 la variété obtenue en recollant W et U en identifiant dW et dU_0 par l'intermédiaire de φ_0 . Les parallélisatations stables T et T' (construites à partir de t) se recollent en une parallélisatation stable T_0 de W_0 . Mais on a vu que T_0 induit au bord $V = dW_0$ la trivialisatation $\rho^{-1} \cdot (t \oplus \text{id})$. Il existe donc une immersion $g_0 : W_0 \rightarrow S^{n+1}$ dont la restriction f_0 au bord a pour classe $\tilde{f}_0 = \rho^{-1} \cdot \tilde{f}$.

3.3. *Comparaison de J_V et j_V .* — Lorsque $M = R^{n+1}$, on a

$$\widehat{M \times R^{n+1}} = S^{2n+2} \quad \text{et} \quad \left[\widehat{M \times R^{n+1}}, S^{n+2} \right]_0 = \pi_{2n+2}(S^{n+2}).$$

Soient $f : V \rightarrow R^{n+1}$ et $h : S^n \rightarrow R^{n+1}$. Il résulte de la proposition 9 (additivité de J_V) que $J_V(\widehat{f+h}) = J_V(\tilde{f}) + J(\tilde{h})$. D'après la proposition 4, l'application

$$J_V : \pi_0(\text{Imm}(V, R^{n+1})) \rightarrow \pi_{2n+2}(S^{n+2})$$

est constante sur les fibres de l'application

$$i_* : \pi_0(\text{Imm}(V, \mathbb{R}^{n+1})) \rightarrow \pi_0(\text{Imm}(V, S^{n+1}))$$

puisque $J(u) = 0$. L'application J_V se factorise donc par une application

$$J'_V : \pi_0(\text{Imm}(V, S^{n+1})) \rightarrow \pi_{2n+2}(S^{n+2})$$

qui est additive et telle que l'ensemble des classes bordantes soit égal à $J'^{-1}(0)$.

Pour tout choix d'une trivialisations c de $\theta \oplus T(V)$, on obtient (chap. II, prop. 8) une bijection

$$\mu : \pi_0(\text{Imm}(V, S^{n+1})) \rightarrow [V, \mathbf{SO}(n+2)].$$

On note $J''_V : [V, \mathbf{SO}] \rightarrow \Pi_n$ l'application $J'_V \circ \mu^{-1}$. On va la comparer à $j_V : [V, \mathbf{SO}] \rightarrow \Pi_n$.

Lorsque $V = S^n$, si c est la trivialisations canonique, on a vu (chap. IV, n° 1.3) que $J''_V = (-1)^n J_n = (-1)^n j_V$. Dans le cas général, le résultat n'est pas aussi simple.

D'abord, pour que $J''_V(0) = 0$, il faut et il suffit que c soit la trace sur $V = dW$ d'une parallélisation d'une variété W . On suppose dorénavant que V possède une telle parallélisation stable, autrement dit qu'il existe une immersion bordante de V dans S^{n+1} , et on la choisit pour c . Avec un tel choix pour c , la proposition 11 montre que J''_V s'annule sur le noyau de l'homomorphisme j_V . On va cependant montrer sur un exemple qu'en général les noyaux de j_V et J''_V ne coïncident pas.

Soit $\varphi : V \rightarrow S^n$ l'unique (à homotopie près) application de degré 1. Elle induit des homomorphismes

$$\begin{aligned} \varphi_1 : \pi_n(\mathbf{SO}) &\rightarrow [V, \mathbf{SO}], \\ \varphi_2 : \pi_n(\mathbf{G}) &\rightarrow [V, \mathbf{G}]. \end{aligned}$$

Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \Pi_n(\mathbf{so}) & \xrightarrow{J''_V} & \Pi_n \\ \downarrow \varphi_1 & \nearrow J''_V & \downarrow \varphi_2 \\ [V, \mathbf{so}] & \xrightarrow{j_V} & [V, \mathbf{G}] \end{array}$$

Si ce diagramme était commutatif (au signe près), les noyaux de j_V et J''_V seraient identiques.

PROPOSITION 12. — Soit $\rho \in \pi_n(\mathbf{SO})$ tel que $J_n(\rho) = 0$, alors $\varphi_1(\rho)$ est une classe bordante.

En effet, $j_V(\varphi_1(\rho)) = \varphi_2(j_{S^n}(\rho)) = 0$. Donc $J_V''(\varphi_1(\rho)) = 0$ d'après la proposition 11.

PROPOSITION 13. — On a $J_{S^n}'' = J_V'' \circ \varphi_1$; autrement dit, le triangle du haut est commutatif.

Soit $\rho \in \pi_n(\mathbf{SO})$; on veut montrer qu'il existe un cobordisme stablement parallélisé entre S^n munie de la parallélisation stable $\rho.c$ et V munie de la parallélisation stable $\varphi_1(\rho).c$.

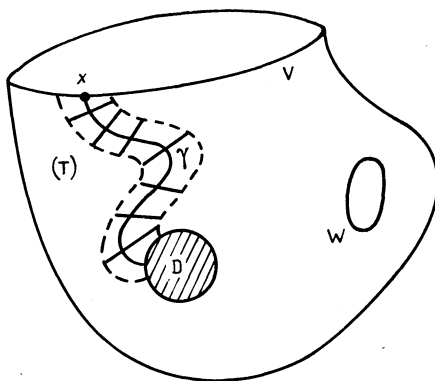


Fig. 19.

Soit W une variété de bord $dW = V$ munie d'une parallélisation C qui induise c sur V . Identifions S^n à une petite sphère plongée dans W comme bord d'une petite boule D^{n+1} . On note W' le cobordisme $\overline{W - D}$. Soit γ un chemin différentiablement plongé dans W' dont l'image joint le point $S \in S^n$ au point $x = \varphi^{-1}(S) \in V$ qu'on peut supposer unique puisque φ est de degré 1. Soit T un voisinage tubulaire de γ dans W' . On peut supposer que $\rho \in \pi_n(\mathbf{SO})$ est localisé à l'intérieur de $T \cap S^n$ (c'est-à-dire constant au dehors). On considère alors l'automorphisme σ du fibré trivial de base W' qui est l'identité hors de T et qui, dans T , est égal à ρ étendu le long de γ par image réciproque de la projection $T \rightarrow T \cap S^n$. Alors W' muni de la parallélisation $\sigma.C$ est un cobordisme stablement parallélisé entre S^n munie de $\rho.c$ et V munie de $\varphi_1(\rho).c$.

3.4. *Un exemple.* — Soit $V = S^1 \times S^1$. On a vu (Appendice) que $[V, \mathbf{SO}] = \mathbf{Z}/(2) \times \mathbf{Z}/(2)$. Rappelons que $\pi_1(\mathbf{G}) = \mathbf{Z}/(2)$, que $\pi_2(\mathbf{G}) = \mathbf{Z}/(2)$ et que l'homomorphisme naturel $\pi_1(\mathbf{SO}) \rightarrow \pi_1(\mathbf{G})$ est un isomorphisme. Si l'on reproduit pour $[V, \mathbf{G}]$ le raisonnement utilisé dans l'Appendice pour calculer $[V, \mathbf{SO}]$, on voit qu'il y a une suite exacte

$$0 \rightarrow [V, \mathbf{SO}] \rightarrow [V, \mathbf{G}] \rightarrow \mathbf{Z}/(2) \rightarrow 0.$$

Dans ce cas, l'application j_V est injective; or on sait qu'il y a quatre classes bordantes dans $\pi_0(\text{Imm}(V, S^3))$. Les noyaux de j_V et de J'_V sont distincts dans ce cas.

APPENDICE.

IMMERSIONS DES SURFACES DANS R^3 .

Les variétés compactes, connexes orientables de dimension 2 (surfaces) sont caractérisées par leur caractéristique d'Euler qui est un entier relatif impair et inférieur à 1. On note T_p la surface de caractéristique d'Euler $\chi(T_p) = 1 - 2p$ et on dit que c'est la surface de genre p ou tore à p trous. La surface T_0 de genre 0 est la sphère S^2 , surface T_1 est le tore $S^1 \times S^1$; la surface T_p est la somme connexe de T_{p-1} et de T_1 .

1. CLASSIFICATION DES IMMERSIONS DE T_p DANS R^3 . — Tout d'abord, les surfaces sont stablement parallélisables. Pour le voir, il suffit de vérifier qu'il existe un plongement de T_p dans R^3 . Il est inutile de traiter le cas de $T_0 = S^2$. Pour $T_1 = S^1 \times S^1$, on a le plongement $f_1 : T_1 \rightarrow R^3$ défini par

$$f_1(\theta_1, \theta_2) = \left(\left(1 + \frac{1}{3} \cos \theta_2 \right) \cos \theta_1, \left(1 + \frac{1}{3} \cos \theta_2 \right) \sin \theta_1, \frac{1}{3} \sin \theta_2 \right).$$

On obtient un plongement $f_p : T_p \rightarrow R^3$ en effectuant une somme connexe du plongement f_{p-1} et d'un plongement obtenu à partir de f_1 à l'aide d'une translation convenable.

On sait (chap. II, prop. 21) que la classe de f_p dans $\pi_0(\text{Imm}(T_p, R^3))$ ne dépend pas des choix qu'on fait pour construire les sommes connexes. La trivialisations stable $t(f_p) : \theta \oplus T(T_p) \rightarrow R^3$ permet de définir (chap. II, prop. 4) une bijection

$$\omega(t(f_p)) : \pi_0(\text{Imm}(T_p, R^3)) \rightarrow [T_p, \mathbf{SO}(3)].$$

Rappelons aussi (chap. II, 2.3) que, dans ce cas, l'injection

$$\text{Imm}_0(V, M) \rightarrow \text{Imm}(V, M)$$

induit une bijection des ensembles de composantes connexes.

Pour calculer $[T_p, \mathbf{SO}(3)]$, on va montrer que l'homomorphisme naturel

$$\pi_1 : [T_p, \mathbf{SO}(3)] \rightarrow \text{Hom}(\pi_1(T_p), \pi_1(\mathbf{SO}(3)))$$

est un isomorphisme de groupes. Cela résulte du fait que $\pi_2(\mathbf{SO}(3)) = 0$ et de la proposition suivante :

PROPOSITION 1. — *Soit H un H-espace connexe par arcs tel que $\pi_2(H) = 0$. L'homomorphisme naturel*

$$\pi_1 : [T_p, H] \rightarrow \text{Hom}(\pi_1(T_p), \pi_1(H))$$

est un isomorphisme de groupes.

Rappelons d'abord que le groupe $\pi_1(T_p)$ peut être présenté par $2p$ générateurs $a_1, b_1, \dots, a_p, b_p$ et un relateur $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_p b_p a_p^{-1} b_p^{-1}$. On peut, en effet, construire topologiquement T_p à partir du bouquet G_{2p} de $2p$ cercles $a_1, b_1, \dots, a_p, b_p$ en attachant à G_{2p} un disque D de dimension 2 par l'application $\gamma : dD \rightarrow G_{2p}$ définissant le lacet $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_p b_p a_p^{-1} b_p^{-1}$.

La flèche π_1 de l'énoncé de la proposition est bien définie puisque, H étant un H-espace, l'on a $[X, H]_0 = [X, H]$. Considérons alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} [T_p, H]_0 & \longrightarrow & \text{Hom}(\pi_1(T_p), \pi_1(H)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ [G_{2p}, H]_0 & \longrightarrow & \text{Hom}(\pi_1(G_{2p}), \pi_1(H)). \end{array}$$

La première flèche horizontale est celle qui nous intéresse. Montrons que les trois autres sont des isomorphismes. La deuxième flèche verticale est un isomorphisme parce que $\pi_1(T_p)$ est le quotient du groupe $\pi_1(G_{2p})$ par le sous-groupe engendré par un produit de commutateurs et que $\pi_1(H)$ est commutatif. La deuxième flèche horizontale est un isomorphisme à cause de la propriété universelle du bouquet de cercles G_{2p} . Enfin, la première flèche verticale est surjective d'après la construction de T_p à partir de G_{2p} et du fait que $\pi_1(H)$ est commutatif. Elle est injective parce que $\pi_2(H) = 0$.

COROLLAIRE. — *On a des isomorphismes*

$$\bar{\omega}(t(f_p)) : \pi_0(\text{Imm}(T_p, \mathbf{R}^3)) \rightarrow (\mathbf{Z}/(2))^{2p}.$$

Ils sont obtenus en composant $\omega(t(f_p))$ et l'isomorphisme

$$\text{Hom}(\pi_1(T_p), \mathbf{Z}/(2)) \rightarrow (\mathbf{Z}/(2))^{2p}$$

défini par les $2p$ générateurs $a_1 b_1 \dots a_p b_p$.

2. SOMMES CONNEXES ET AUTOMORPHISMES. — Considérons l'isomorphisme défini plus haut $T_p = T_{p-1} \# T_1$. Si $a_1, b_1, \dots, a_{p-1}, b_{p-1}$ sont les générateurs de $\pi_1(T_{p-1})$ et a_p, b_p les générateurs de $\pi_1(T_1)$ alors $a_1,$

b_1, \dots, a_p, b_p sont les générateurs de $\pi_1(T_p)$. Avec le choix qu'on a fait des plongements f_p , l'opération de somme connexe définit donc une application

$$\# : \pi_0(\text{Imm}(T_{p-1}, \mathbb{R}^3)) \times \pi_0(\text{Imm}(T_1, \mathbb{R}^3)) \rightarrow \pi_0(\text{Imm}(T_p, \mathbb{R}^3))$$

qui, transmuée par les isomorphismes $\bar{\omega}(t(f_{p-1})) \times \bar{\omega}(t(f_1))$ et $\bar{\omega}(t(f_p))$, donne l'isomorphisme canonique

$$(\mathbf{Z}/(2))^{2p-2} \times (\mathbf{Z}/(2))^2 \rightarrow (\mathbf{Z}/(2))^{2p}.$$

PROPOSITION 2. — *La somme connexe définit une application*

$$\# : \pi_0(\text{Imm}(T_p, \mathbb{R}^3)) \times \pi_0(\text{Imm}(T_q, \mathbb{R}^3)) \rightarrow \pi_0(\text{Imm}(T_{p+q}, \mathbb{R}^3))$$

qui, transmuée par les isomorphismes $\bar{\omega}(t(f_p)) \times \bar{\omega}(t(f_q))$ et $\bar{\omega}(t(f_{p+q}))$, donne l'ISOMORPHISME canonique

$$(\mathbf{Z}/(2))^{2p} \times (\mathbf{Z}/(2))^{2q} \rightarrow (\mathbf{Z}/(2))^{2(p+q)}.$$

On obtient ce résultat par récurrence sur q , à partir de ce qu'on a dit plus haut pour le cas $q = 1$, en tenant compte du fait que la classe d'homotopie régulière d'une immersion somme connexe ne dépend, dans ce cas, que des classes des composantes.

PROPOSITION 3. — *Soit $\varphi : T_p \rightarrow T_p$ un automorphisme tel que l'automorphisme $\pi_1(\varphi)$ induit sur $\pi_1(T_p)$ soit l'identité. Si $f : T_p \rightarrow \mathbb{R}^3$ est une immersion, elle est régulièrement homotope à $f \circ \varphi$.*

C'est une conséquence évidente de la proposition 1.

3. DES REPRÉSENTANTS POUR CHAQUE CLASSE D'IMMERSION DU TORE T_1 DANS \mathbb{R}^3 . — D'après la proposition 2, si on connaît des représentants pour les quatre classes d'immersion de T_1 dans \mathbb{R}^3 , on peut construire, par somme connexe d'immersions, des représentants de toutes les classes d'immersion de T_p dans \mathbb{R}^3 .

On note simplement a et b les générateurs du groupe abélien libre $\pi_1(T_1)$ qui sont représentés par les coupes $S^1 \times \{0\}$ (parallèle) et $\{0\} \times S^1$ (méridien). Soit c la parallélisation de T_1 définie par le produit $S^1 \times S^1$. On en déduit (chap. II, prop. 4) une autre bijection

$$\omega(c) : \pi_0(\text{Imm}(T_1, \mathbb{R}^3)) \rightarrow [T_1, \mathbf{SO}(3)];$$

et, à l'aide de la proposition 1, en utilisant les générateurs a et b , une bijection

$$\bar{\omega}(c) : \pi_0(\text{Imm}(T_1, \mathbb{R}^3)) \rightarrow \mathbf{Z}/(2) \times \mathbf{Z}/(2).$$

Soit (φ_1, φ_2) le 2-champ défini sur T_1 par la trivialisation c . Si $f : T_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ est une immersion, l'application tangente $T(f)$ appliquée au champ

(ν_1, ν_2) définit une application de T_1 dans l'espace $V_{2,1}$ des couples de vecteurs distincts de \mathbb{R}^3 . Lorsque l'on compose cette application avec l'équivalence d'homotopie canonique de $V_{2,1}$ dans $\mathbf{SO}(3)$, on obtient (d'après chap. II, n° 1.3) une application de classe $\omega(c)(f)$.

En particulier, si f est l'immersion f_1 définie au n° 1, la classe $\overline{\omega}(c)(f_1)$ est égale à $(1, 1) \in \mathbf{Z}/(2) \times \mathbf{Z}/(2)$.

Soit $\varphi : T_1 \rightarrow T_1$ l'automorphisme défini par $\varphi(\theta_1, \theta_2) = (\theta_1, \theta_1 + \theta_2)$. Il induit sur $\pi_1(T_1)$ l'automorphisme $\pi_1(\varphi)(a) = a$, $\pi_1(\varphi)(b) = a + b$. L'immersion $f_1 \circ \varphi$ a pour classe $(1, 0)$.

Soit $\psi : T_1 \rightarrow T_1$ le revêtement défini par $\psi(\theta_1, \theta_2) = (2\theta_1, \theta_2)$. Il induit sur $\pi_1(T_1)$ l'homomorphisme $\pi_1(\psi)(a) = 2a$, $\pi_1(\psi)(b) = b$. L'immersion $f_1 \circ \psi$ a pour classe $(0, 1)$.

Enfin, l'immersion $f_1 \circ \varphi \circ \psi$ a pour classe $(0, 0)$.

Le choix de ces représentants est justifié par le numéro suivant.

4. IMMERSIONS BORDANTES.

PROPOSITION. 4. — *Toutes les classes d'immersion de T_p dans \mathbb{R}^3 contiennent une immersion bordante.*

Compte tenu de la proposition 2 et de (II, prop. 18), il suffit de démontrer ce résultat pour $p = 1$. Pour cela, on va vérifier que les quatre représentants décrits au n° 3 sont des immersions bordantes.

D'abord f_1 est évidemment bordante. Si D^2 est le disque unité, et (r, θ) les coordonnées polaires, on définit un plongement g_1 du tore plein $S^1 \times D^2$ dans \mathbb{R}^3 par

$$g_1(\theta_1, r, \theta) = \left(\left(1 + \frac{r}{3} \cos \theta\right) \cos \theta_1, \left(1 + \frac{r}{3} \cos \theta\right) \sin \theta_1, -\frac{r}{3} \sin \theta \right).$$

Si l'on identifie le bord $d(S^1 \times D^2)$ à $S^1 \times S^1$ par l'isomorphisme σ défini par $\sigma(\theta_1, 1, \theta) = (\theta_1, -\theta_2)$, la restriction de g_1 au bord est égale à f_1 .

De même, $f_1 \circ \varphi$ est le bord de g_1 lorsqu'on identifie $d(S^1 \times D^2)$ à $S^1 \times S^1$ par l'isomorphisme $\varphi^{-1} \circ \sigma$. On a, en effet,

$$g_1|_{d(S^1 \times D^2)} = f_1 \circ \sigma = f_1 \circ \varphi \circ \varphi^{-1} \circ \sigma.$$

Notons ψ' le revêtement de $S^1 \times D^2$ défini par $\psi'(\theta_1, r, \theta) = (2\theta_1, r, \theta)$. En tenant compte du fait que $\psi \circ \sigma = \sigma \circ \psi'|_{d(S^1 \times D^2)}$ et du fait que φ et ψ commutent, on déduit formellement de l'égalité

$$g_1 \circ \psi'|_{d(S^1 \times D^2)} = f_1 \circ \sigma \circ \psi'|_{d(S^1 \times D^2)},$$

les égalités

$$\begin{aligned} g_1 \circ \psi'|_{d(S^1 \times D^2)} &= f_1 \circ \psi \circ \sigma \\ &= f_1 \circ \varphi \circ \psi \circ \varphi^{-1} \circ \sigma, \end{aligned}$$

qui prouvent que $f_1 \circ \psi$ et $f_1 \circ \varphi \circ \psi$ bordent l'immersion $g_1 \circ \psi'$.

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] J. F. ADAMS, *On the non-existence of elements of Hopf invariant one* (*Ann. of Math.*, vol. 72, 1960, p. 20-104).
- [2] J. F. ADAMS, *On the groups $J(X)$* (*Topology*, vol. 4, 1966, p. 21-72).
- [3] M. ATIYAH, *Thom complexes* (*Proc. London Math. Soc.*, vol. 3, 1961, p. 291-310).
- [4] R. BOTT, *The stable homotopy of the classical groups* (*Ann. of Math.*, vol. 70, 1959, p. 313-337).
- [5] J. CERF, *Topologie de certains espaces de plongements* (*Bull. Soc. math. Fr.*, t. 89, 1961, p. 227-380).
- [6] A. HAEFLIGER, *Plongements différentiables de variétés dans variétés* (*Comm. Math. Helv.*, vol. 36, 1961, p. 47-82).
- [7] M. HIRSCH, *Immersion of manifolds* (*Trans. A. M. S.*, vol. 93, 1959, p. 242-276).
- [8] F. HIRZEBRUCH, *Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie*, Springer, Berlin, 1956.
- [9] H. HOPF, *Ueber die Curvatura integra geschlossener Hyperflächen* (*Math. Annalen*, vol. 95, 1925, p. 340-367).
- [10] A. HOWARD, *On the homotopy groups of an affine algebraic hypersurface* (*Ann. of Math.*, vol. 84, 1966, p. 197-216).
- [11] M. KERVAIRE, *Courbure intégrale généralisée et homotopie* (*Math. Annalen*, vol. 131, 1956, p. 219-252).
- [12] M. KERVAIRE, *An interpretation of G. Whitehead's generalization of the Hopf invariant* (*Ann. of Math.*, vol. 69, 1959, p. 345-364).
- [13] M. KERVAIRE, *Relative characteristic classes* (*Amer. J. Math.*, vol. 79, 1957, p. 517-558).
- [14] M. KERVAIRE, *Non-parallelizability of the n -sphere for $n > 7$* (*Proc. Nat. Acad. Sc.*, vol. 44, 1958, p. 280-283).
- [15] M. KERVAIRE, *Some nonstable homotopy groups of Lie groups* (*Illinois J. Math.*, vol. 4, 1960, p. 161-169).
- [16] M. KERVAIRE et J. MILNOR, *Bernoulli numbers, homotopy groups and a theorem of Rohlin* (*Proc. intern. congress of math.*, Edinburgh, 1958).
- [17] M. KERVAIRE et J. MILNOR, *Groups of homotopy-spheres. Part I* (*Ann. of Math.*, vol. 77, 1963, p. 504-537); Part II (à paraître).
- [18] J. MILNOR, *On the immersion of n -manifolds in $(n + 1)$ -space* (*Comm. Math. Helv.*, vol. 30, 1956, p. 275-284).
- [19] J. MILNOR, *On simply connected 4-manifolds* (*Symp. intern. de top. alg.*, Mexico, 1956, p. 122-128).
- [20] V. POENARU, *Sur la théorie des immersions* (*Topology*, vol. 1, 1962, p. 81-100).
- [21] V. POENARU, *On regular homotopy in codimension 1* (*Ann. of Math.*, vol. 83, 1966, p. 257-265).
- [22] V. POENARU, *Extension des immersions de codimension 1* (d'après S. Blanck) (*Sém. Bourbaki*, n° 342, février 1968).
- [23] S. SMALE, *The classification of immersions of spheres in euclidean spaces* (*Ann. of Math.*, vol. 69, 1959, p. 327-344).
- [24] R. THOM, *Quelques propriétés globales des variétés différentiables* (*Comm. Math. Helv.*, vol. 28, 1956, p. 17-86).

- [25] R. THOM, *La classification des immersions* (d'après S. Smale) (*Sém. Bourbaki*, n° 157, décembre 1957).
- [26] C. T. C. WALL, *Survey of differential topology* (*J. London Math. Soc.*, vol. 40, 1965, p. 1-20).
- [27] R. WELLS, *Cobordism groups of immersions* (*Topology*, vol. 5, 1966, p. 281-294).
- [28] H. WHITNEY, *Differentiable manifolds* (*Ann. of Math.*, vol. 37, 1936, p. 645-680).

(Manuscrit reçu le 20 décembre 1969.)

André GRAMAIN,
Département de Mathématiques,
Faculté des Sciences,
8, rue de Rome,
Tunis (Tunisie).

