

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

PAUL RÉMOND

Étude asymptotique de certaines partitions dans certains semi-groupes

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 83, n° 4 (1966), p. 343-410

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1966_3_83_4_343_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1966, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ÉTUDE ASYMPTOTIQUE DE CERTAINES PARTITIONS DANS CERTAINS SEMI-GROUPES

PAR M. PAUL RÉMOND (*).

TABLE DES MATIÈRES.

	Pages
INTRODUCTION.....	344
NOTE.....	345

PREMIÈRE PARTIE.

ÉVALUATIONS ASYMPTOTIQUES DANS CERTAINS SEMI-GROUPES.

CHAPITRE 1. — S_1 -semi-groupes : Utilisation des fonctions analytiques, théorèmes d'approximation asymptotique.....	346
CHAPITRE 2. — Δ_r -semi-groupes : Évaluation du nombre d'éléments, théorèmes sur la fonction Ω	358
CHAPITRE 3. — Δ_r -semi-groupes particuliers : Δ'_n -semi-groupes, D_n -semi-groupes, D-semi-groupes.....	372

DEUXIÈME PARTIE.

ÉTUDE ASYMPTOTIQUE DE CERTAINES PARTITIONS DANS LES Δ_r -SEMI-GROUPES.

CHAPITRE 1. — Équirépartition asymptotique dans certaines partitions d'un Δ_r -semi-groupe : Partition \mathcal{X} , théorème d'équirépartition (théorème I).....	386
CHAPITRE 2. — Éléments de la classe principale, indécomposables en produits d'éléments de cette classe, dans certaines partitions \mathcal{X} d'un Δ_r -semi-groupe : Éléments indécomposables, évaluation de leur nombre (théorème II), propriétés du nombre t	390

(*) Thèse Sc. math., Paris, 1967.

	Pages.
CHAPITRE 3. — <i>Factorisation dans la classe principale de certaines partitions \mathcal{Q} d'un Δ_r-semi-groupe</i> : Sous-semi-groupes, valeur moyenne du nombre de factorisations (théorème III).....	400
CHAPITRE 4. — <i>Application aux idéaux dans les corps de nombres algébriques</i> : Relations d'équivalence de Landau, applications des théorèmes I, II, III.....	407
BIBLIOGRAPHIE SPÉCIALISÉE.....	410

INTRODUCTION.

H. Delange, puis E. Wirsing, ont étudié des propriétés asymptotiques des ensembles $\mathcal{E}(E)$; $\mathcal{E}(E)$ est l'ensemble des entiers dont tous les diviseurs premiers appartiennent à un ensemble E de nombres premiers; dans le cas le plus général on suppose que le nombre des éléments de E au plus égaux à x est équivalent, pour x infini, à $\mu \frac{x}{\text{Log } x}$. On peut facilement généraliser les résultats obtenus par les auteurs cités en remplaçant $\mathcal{E}(E)$ par un semi-groupe commutatif (E) à factorisation unique dont E est l'ensemble des éléments premiers. Pour cela on définit sur ce semi-groupe une norme, c'est-à-dire une fonction complètement multiplicative à valeur réelle supérieure à 1 et l'on suppose que le nombre des éléments de E , de norme au plus égale à x , est équivalent, pour x infini, à $\mu \frac{x}{\text{Log } x}$.

Nous avons été amené à considérer des semi-groupes normés (E) dans lesquels le nombre des éléments premiers de norme au plus égale à x admet, pour x infini, un équivalent de la forme

$$\mu \frac{x}{\text{Log } x} (\text{Log Log } x)^r \quad (\mu > 0, r \geq 0),$$

de tels semi-groupes sont appelés Δ_r -semi-groupes; si (E) est un Δ_r -semi-groupe, on dit que E est un ensemble d'éléments premiers de degré r . Bien qu'inspirée des méthodes d'arithmétique analytique de H. Delange et E. Wirsing, l'étude des Δ_r -semi-groupes présente des difficultés nouvelles.

Notre but est l'étude asymptotique de certaines partitions dans les Δ_r -semi-groupes; cette étude conduit à effectuer des évaluations asymptotiques qui ont leur intérêt propre; c'est pourquoi ce travail a été divisé en deux parties, l'objet de la première partie étant ces évaluations asymptotiques.

La première partie comprend trois chapitres : dans le premier, on établit des résultats préliminaires; dans le second, on étudie certaines propriétés

asymptotiques des Δ_r -semi-groupes; dans le troisième, on précise, pour des Δ_r -semi-groupes particuliers, l'étude faite dans le deuxième chapitre. Dans le troisième chapitre, on définit notamment les D_n -semi-groupes; si (E) est un D_n -semi-groupe, on dit que E est un H-ensemble d'éléments premiers.

Dans la seconde partie on envisage d'abord, dans un semi-groupe (E) , une partition telle que les classes forment un groupe abélien fini, la multiplication des classes étant compatible avec celle des éléments du semi-groupe; ensuite on suppose que (E) est un Δ_r -semi-groupe et l'on impose aux ensembles d'éléments premiers contenus dans les classes de posséder un degré. Les classes réduites (mod k) de l'arithmétique, les classes des idéaux dans un corps de nombres algébriques, plus généralement les classes d'idéaux (mod un idéal F) introduites par Landau, nous fournissent des exemples de telles partitions dans des cas particuliers.

Cette seconde partie comprend quatre chapitres. Dans le premier chapitre, on montre qu'il y a égale répartition asymptotique des éléments de (E) entre les différentes classes.

La classe principale de la partition (classe unité du groupe) forme elle-même un semi-groupe. Dans le deuxième chapitre nous donnons un équivalent, pour x infini, du nombre des éléments de ce semi-groupe, de norme au plus égale à x , indécomposables dans ce semi-groupe.

Le semi-groupe précédent (classe principale) est à factorisation non unique. L'objet du troisième chapitre est une évaluation asymptotique de la valeur moyenne, prise sur les éléments de norme au plus égale à x , du nombre de factorisations d'un élément en éléments indécomposables: en se plaçant dans les hypothèses indiquées plus haut on obtient seulement un équivalent du logarithme de cette valeur moyenne; mais si l'on suppose que (E) est un D_n -semi-groupe et que les ensembles d'éléments premiers contenus dans les classes sont des H-ensembles, on obtient alors un équivalent de cette valeur moyenne.

Le quatrième chapitre traite de l'application aux idéaux de l'anneau des entiers d'un corps de nombres algébriques (idéaux du corps par abus de langage).

NOTE.

— Si un théorème concernant un ensemble (E) est une simple transposition d'un théorème déjà établi dans un ensemble $\mathcal{E}(E)$, afin d'éviter des longueurs, nous ne donnerons pas la démonstration de ce théorème et nous renverrons le lecteur à celle faite pour l'ensemble $\mathcal{E}(E)$.

— Les *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, t. 78, 1961, *Sur la distribution des entiers ayant certaines propriétés*, par H. DELANGE, seront désignées sous le nom d'*Annales*.

PREMIÈRE PARTIE.

ÉVALUATIONS ASYMPTOTIQUES DANS CERTAINS SEMI-GROUPES.

CHAPITRE 1.

S_1 -SEMI-GROUPES.

Ce chapitre a pour but d'établir des résultats préliminaires. La seule hypothèse faite sur E est celle de la définition 1.1.4.

Signalons que le théorème 1.1.10 est à la base de la démonstration du théorème 1.2.5 duquel découle le théorème d'équirépartition asymptotique. Le lemme 1.1.13 est essentiel pour l'établissement des évaluations asymptotiques du chapitre 2 de la première partie.

1.1.1. DÉFINITION. — (E) désigne un semi-groupe commutatif qui possède les propriétés suivantes :

1° Il existe dans le semi-groupe une infinité dénombrable ou un nombre fini d'éléments premiers P dont l'ensemble est noté E.

2° Tout élément A appartenant à (E), à l'exception de l'élément neutre e, s'exprime d'une manière et d'une seule sous la forme

$$A = P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} \dots P_n^{\alpha_n},$$

P_1, P_2, \dots, P_n étant des éléments de E et $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ des entiers strictement positifs.

1.1.2. NORME. — Une norme est une application de (E) dans l'ensemble des réels positifs, qui à A appartenant à (E) fait correspondre le réel noté NA, et qui possède les propriétés suivantes :

1° $Ne = 1$;

si $A \neq e$, $NA > 1$.

2° C'est une fonction complètement multiplicative :

$$N(AB) = NA \cdot NB.$$

1.1.3. NOTATIONS. — s désignant la variable complexe, nous poserons

$$\sum_{P \in E} \frac{1}{(NP)^s} = \sum \frac{1}{(NP)^s}; \quad \sum_{A \in (E)} \frac{1}{(NA)^s} = \sum \frac{1}{(NA)^s}.$$

Comme en arithmétique, la fonction Ω est définie par :

$$\text{si } A = P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} \dots P_n^{\alpha_n}, \quad \Omega(A) = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n; \quad \Omega(e) = 0.$$

Utilisation des fonctions analytiques.

1.1.4. DÉFINITION. — Un S_1 -semi-groupe est un semi-groupe normé (E) tel que la série $\sum \frac{1}{(NP)^s}$ converge pour $\Re s > 1$.

1.1.5. LEMME.

1° Dans un S_1 -semi-groupe la série $\sum \frac{1}{(NA)^s}$ converge pour $\Re s > 1$.

2° Si h est une fonction complètement multiplicative, non identiquement nulle, réelle ou complexe, définie sur un S_1 -semi-groupe (E), qui vérifie $|h(A)| \leq 1$, on a, pour $\Re s > 1$:

$$\prod_P \frac{1}{1 - \frac{h(P)}{(NP)^s}} = \sum_A \frac{h(A)}{(NA)^s}.$$

(Transposition du lemme 2 des Annales.)

1.1.6. LEMME. — (E) désignant un S_1 -semi-groupe, si f est une fonction réelle ou complexe définie sur E, qui vérifie $|f(P)| \leq 1$, il existe une fonction $G_f(s, z)$ holomorphe pour $\Re s > \frac{1}{2}$ et z complexe quelconque, telle qu'on ait pour $\Re s > 1$ et z quelconque :

$$\prod_P \left[1 + \frac{z f(P)}{(NP)^s} \right] = G_f(s, z) \exp \left[z \sum_P \frac{f(P)}{(NP)^s} \right],$$

$G_f(s, z)$ est définie pour $\Re s > \frac{1}{2}$ par

$$G_f(s, z) = \prod_P \left[1 + \frac{z f(P)}{(NP)^s} \right] \exp \left[-z \frac{f(P)}{(NP)^s} \right],$$

on a

$$G_f(s, 0) = 1, \quad G_f(s, z) \neq 0 \text{ pour } \Re s > \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad |z| \leq \sqrt{\rho},$$

ρ étant le minimum de la norme des éléments premiers ($\rho > 1$).

(Transposition du lemme 4 des Annales.)

1.1.7. COROLLAIRE. — Si h est une fonction complètement multiplicative, non identiquement nulle, à valeur réelle ou complexe, définie sur un S_1 -semi-groupe, telle que $|h(A)| \leq 1$, on a :

1° pour $\Re s > 1$:

$$\sum_A \frac{h(A)}{(NA)^s} = g_h(s) \exp \sum_P \frac{h(P)}{(NP)^s},$$

$g_h(s)$ holomorphe et $g_h(s) \neq 0$ pour $\Re s > \frac{1}{2}$;

2° pour x infini :

$$\prod_{NP \leq x} \frac{1}{1 - \frac{h(P)}{NP}} \sim g \exp \sum_{NP \leq x} \frac{h(P)}{NP}; \quad g = g_h(1).$$

Démonstration.

1° En prenant $z = -1$ dans le lemme 1.1.6, on a

$$\prod_P \left[1 - \frac{h(P)}{(NP)^s} \right] = G_h(s, -1) \exp \left[- \sum_P \frac{h(P)}{(NP)^s} \right],$$

d'où, d'après le lemme 1.1.5 :

$$\sum_A \frac{h(A)}{(NA)^s} = \prod_P \frac{1}{1 - \frac{h(P)}{(NP)^s}} = \frac{1}{G_h(s, -1)} \exp \sum_P \frac{h(P)}{(NP)^s},$$

on pose $\frac{1}{G_h(s, -1)} = g_h(s)$ holomorphe pour $\Re s > \frac{1}{2}$.

2° On a

$$g_h(s) = \prod_P \frac{e^{-\frac{h(P)}{(NP)^s}}}{1 - \frac{h(P)}{(NP)^s}},$$

d'où

$$g = g_h(1) = \prod_P \frac{e^{-\frac{h(P)}{NP}}}{1 - \frac{h(P)}{NP}};$$

soit

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \prod_{NP \leq x} \frac{e^{-\frac{h(P)}{NP}}}{1 - \frac{h(P)}{NP}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-\sum_{NP \leq x} \frac{h(P)}{NP}} \prod_{NP \leq x} \frac{1}{1 - \frac{h(P)}{NP}} = g.$$

1.1.8. COROLLAIRE. — (E) étant un S_1 -semi-groupe, on a, pour $\Re s > 1$ et $|z| \leq 1$:

$$\sum_A \frac{z^{\Omega(A)}}{(NA)^s} = \frac{1}{G(s, -z)} \exp \left[z \sum_P \frac{1}{(NP)^s} \right] \quad (\text{on pose } 0^{\Omega(e)} = 1),$$

$G(s, 0) = 1$, $G(s, -z) \neq 0$ et holomorphe pour $\Re s > \frac{1}{2}$, $|z| < \sqrt{c}$.

Démonstration. — La fonction $z^{\Omega(A)}$ vérifie les conditions exigées dans le lemme 1.1.5 pour $h(A)$ si $|z| \leq 1$, en effet :

$$|z^{\Omega(A)}| \leq 1, \quad z^{\Omega(A)} z^{\Omega(B)} = z^{\Omega(A)+\Omega(B)} = z^{\Omega(AB)}.$$

On a donc si $|z| \leq 1$ et $\Re s > 1$:

$$\prod_{A} \frac{1}{1 - \frac{z}{(NP)^s}} = \sum_A \frac{z^{\Omega(A)}}{(NA)^s},$$

en prenant $f(P) = 1$ dans le lemme 1.1.6 et en remplaçant z par $-z$, on a

$$\prod_P \left[1 - \frac{z}{(NP)^s} \right] = G(s, -z) \exp \left[-z \sum_P \frac{1}{(NP)^s} \right],$$

d'où le résultat énoncé.

1.1.9. LEMME. — Soit un S_1 -semi-groupe (E) et E_1, E_2, \dots, E_h des sous-ensembles de E qui déterminent une partition de E .

Posons

$$\sum_{P_i \in E_i} \frac{1}{(NP_i)^s} = \psi_i(s) \quad \text{pour } \Re s > 1$$

et désignons par $\Omega_i(A)$ le nombre des diviseurs premiers de l'élément A de (E) qui appartiennent à E_i ; dans ces conditions on a, pour $\Re s > 1$:

$$\sum_{\substack{A \in E \\ \Omega_1(A) = q_1 \\ \dots \\ \Omega_h(A) = q_h}} \frac{1}{(NA)^s} = \sum_{\substack{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_h \\ 0 \leq \alpha_i \leq q_i \\ i=1, 2, \dots, h}} \nu_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_h}(s) [\psi_1(s)]^{\alpha_1} \dots [\psi_h(s)]^{\alpha_h},$$

les fonctions $\nu_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_h}(s)$ étant holomorphes pour $\Re s \geq 1$ et

$$\nu_{q_1, q_2, \dots, q_h}(s) = \frac{1}{q_1! \dots q_h!}.$$

Démonstration.

1° Nous utilisons une méthode de H. Delange; partons de la formule

$$(1) \quad \sum_{A \in (E)} \frac{z^{\Omega(A)}}{(NA)^s} = \frac{1}{G(s, -z)} e^{z\psi(s)}, \quad \Re s > 1, \quad |z| \leq 1, \quad \psi(s) = \sum_{P \in E} \frac{1}{(NP)^s},$$

$\frac{1}{G(s, -z)}$, fonction holomorphe par rapport aux deux variables s et z pour $\Re s > \frac{1}{2}$ et $|z| < \sqrt{\rho}$, $G(s, 0) = 1$.

La méthode consiste à développer les deux membres de (1) en série entière par rapport à la variable z pour $\Re s > 1$, $|z| \leq 1$ et à égaliser les coefficients de z^q dans les deux membres.

Dans le premier membre ce coefficient est

$$\sum_{\substack{\Lambda \in \mathbb{E} \\ \Omega(\Lambda) = q}} \frac{1}{(\mathbf{N}\Lambda)^s}.$$

Soit $\frac{1}{G(s, -z)} = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(s) z^n$, u_n holomorphe pour $\Re s \geq 1$, $u_0(s) = 1$. On a

$$\frac{1}{G(s, -z)} e^{z\psi(s)} = \left[\sum_{n=0}^{\infty} u_n(s) z^n \right] \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!} [\psi(s)]^j \right\} = \sum_{q=0}^{\infty} z^q \sum_{j=0}^q \frac{1}{j!} u_{q-j}(s) [\psi(s)]^j;$$

donc

$$\sum_{\substack{\Lambda \in \mathbb{E} \\ \Omega(\Lambda) = q}} \frac{1}{(\mathbf{N}\Lambda)^s} = \sum_{j=0}^q \frac{1}{j!} u_{q-j}(s) [\psi(s)]^j.$$

2°

$$\sum_{\substack{\Lambda \in \mathbb{E} \\ \Omega_i(\Lambda) = q_i \\ i=1,2,\dots,h}} \frac{1}{(\mathbf{N}\Lambda)^s} = \sum_{\substack{\Lambda_i \in \mathbb{E}_i \\ \Omega_i(\Lambda_i) = q_i \\ i=1,2,\dots,h}} \prod_{i=1}^h \frac{1}{(\mathbf{N}\Lambda_i)^s} = \prod_{i=1}^h \sum_{\substack{\Lambda_i \in \mathbb{E}_i \\ \Omega_i(\Lambda_i) = q_i}} \frac{1}{(\mathbf{N}\Lambda_i)^s} = \prod_{i=1}^h \sum_{j=0}^{q_i} \frac{1}{j!} u_{q_i-j}^{(i)}(s) [\psi_i(s)]^j,$$

$u_{q_i-j}^{(i)}(s)$, dans laquelle i est un indice, est holomorphe pour $\Re s \geq 1$, et $u_0^{(i)}(s) = 1$.

On obtient ainsi

$$\sum_{\substack{\Lambda \in \mathbb{E} \\ \Omega_i(\Lambda) = q_i \\ i=1,2,\dots,h}} \frac{1}{(\mathbf{N}\Lambda)^s} = \sum_{\substack{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_h \\ 0 \leq \alpha_i \leq q_i \\ i=1,2,\dots,h}} \varphi_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_h}(s) [\psi_1(s)]^{\alpha_1} \dots [\psi_h(s)]^{\alpha_h},$$

où $\varphi_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_h}(s)$ est holomorphe pour $\Re s \geq 1$ et $\varphi_{q_1, q_2, \dots, q_h}(s) = \frac{1}{q_1! \dots q_h!}$.

Théorèmes d'approximations asymptotiques.

1.1.10. THÉORÈME. — Soit h une fonction complètement multiplicative, à valeur réelle ou complexe, définie sur un S_1 -semi-groupe, qui vérifie $|h(\Lambda)| \leq 1$; si pour x infini, on a :

1°

$$\exp \sum_{\mathbf{N}\mathbf{P} \leq x} \frac{\mathcal{R}[h(\mathbf{P})] - 1}{\mathbf{N}\mathbf{P}} = o(1);$$

2° quel que soit $\lambda > 1$,

$$\sum_{\substack{\mathbf{N}\Lambda \leq x \\ \Lambda \neq 1}} \frac{1}{\mathbf{N}\Lambda} \sim \sum_{\mathbf{N}\Lambda \leq x} \frac{1}{\mathbf{N}\Lambda},$$

alors on a, pour x infini :

$$\left| \sum_{NA \leq x} \frac{h(\Lambda)}{NA} \right| = o \left[\sum_{NA \leq x} \frac{1}{NA} \right].$$

Démonstration. — Ce théorème est une adaptation d'un théorème de Wirsing ⁽¹⁾. Posons

$$\prod (x) = \prod_{NP \leq x} \frac{1}{1 - \frac{1}{NP}} = \prod_{NP \leq x} \left(1 + \frac{1}{NP} + \frac{1}{NP^2} + \dots \right).$$

$$\prod_h (x) = \prod_{NP \leq x} \frac{1}{1 - \frac{h(P)}{NP}} = \prod_{NP \leq x} \left[1 + \frac{h(P)}{NP} + \frac{[h(P)]^2}{(NP)^2} + \dots \right].$$

Remarquons que

$$\left| \frac{\exp \left[\sum_{NP \leq x} \frac{h(P)}{NP} \right]}{\exp \left[\sum_{NP \leq x} \frac{1}{NP} \right]} \right| = \left| \exp \left[\sum_{NP \leq x} \frac{h(P) - 1}{NP} \right] \right| = \exp \left[\sum_{NP \leq x} \frac{\mathcal{R}[h(P)] - 1}{NP} \right].$$

D'après le corollaire 1.1.7, 2^o :

$$\exp \left[\sum_{NP \leq x} \frac{h(P)}{NP} \right] \sim \frac{1}{g_1} \prod_h (x) \quad \text{et} \quad \exp \left(\sum_{NP \leq x} \frac{1}{NP} \right) \sim \frac{1}{g} \prod (x),$$

la condition 1^o est donc équivalente à

$$\left| \prod_h (x) \right| = o \left[\prod (x) \right],$$

donc : quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe X tel que

$$\left| \prod_h (X) \right| < \varepsilon \prod (X) \quad (1),$$

X étant fixé pour ε donné, soit E_1 l'ensemble des P de E de norme $\leq X$ et E_2 l'ensemble des P de E de norme $> X$: E est la réunion des ensembles disjoints E_1 et E_2 .

On a

$$\prod_h (X) = \sum_{A_1 \in (E_1)} \frac{h(A_1)}{NA_1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{\substack{A_1 \in (E_1) \\ NA_1 \leq x}} \frac{h(A_1)}{NA_1}$$

et

$$\prod (X) = \sum_{A_1 \in (E_1)} \frac{1}{NA_1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{\substack{A_1 \in (E_1) \\ NA_1 \leq x}} \frac{1}{NA_1}.$$

(1) WIRSING, *Math. Annalen*, t. 143, 1961, p. 100.

Quel que soit $\varepsilon_1 > 0$, il existe $Y = Y(X, \varepsilon_1)$ tel que $x \geq Y$ entraîne

$$\left| \sum_{\substack{A_1 \in (E_1) \\ NA_1 \leq x}} \frac{h(A_1)}{NA_1} \right| < (1 + \varepsilon_1) \left| \prod_h(X) \right| \quad \text{et} \quad \prod(X) < (1 + \varepsilon_1) \sum_{\substack{A_1 \in (E_1) \\ NA_1 \leq x}} \frac{1}{NA_1};$$

d'après (1) :

$$\left| \sum_{\substack{A_1 \in (E_1) \\ NA_1 \leq x}} \frac{h(A_1)}{NA_1} \right| < \varepsilon(1 + \varepsilon_1) \prod(X) < \varepsilon(1 + \varepsilon_1)^2 \sum_{\substack{A_1 \in (E_1) \\ NA_1 \leq x}} \frac{1}{NA_1}.$$

Y étant fixé, on a

$$\begin{aligned} \left| \sum_{NA \leq x} \frac{h(A)}{NA} \right| &= \left| \sum_{\substack{A_1, A_2 \\ A_1 \in (E_1) \\ A_2 \in (E_2) \\ NA_1 NA_2 \leq x}} \frac{h(A_1) h(A_2)}{NA_1 NA_2} \right| = \left| \sum_{\substack{A_2 \in (E_2) \\ NA_2 \leq x}} \frac{h(A_2)}{NA_2} \sum_{\substack{A_1 \in (E_1) \\ NA_1 \leq \frac{x}{NA_2}}} \frac{h(A_1)}{NA_1} \right| \\ &= \left| \sum_{\substack{A_2 \in (E_2) \\ NA_2 \leq \frac{x}{Y}}} \frac{h(A_2)}{NA_2} \sum_{\substack{A_1 \in (E_1) \\ NA_1 \leq \frac{x}{NA_2}}} \frac{h(A_1)}{NA_1} + \sum_{\substack{A_2 \in (E_2) \\ \frac{x}{Y} < NA_2 \leq x}} \frac{h(A_2)}{NA_2} \sum_{\substack{A_1 \in (E_1) \\ NA_1 \leq \frac{x}{NA_2}}} \frac{h(A_1)}{NA_1} \right| \end{aligned}$$

et, par suite :

$$\begin{aligned} \left| \sum_{NA \leq x} \frac{h(A)}{NA} \right| &\leq \sum_{\substack{A_2 \in (E_2) \\ NA_2 \leq \frac{x}{Y}}} \frac{1}{NA_2} \left| \sum_{\substack{A_1 \in (E_1) \\ NA_1 \leq \frac{x}{NA_2}}} \frac{h(A_1)}{NA_1} \right| + \sum_{\substack{A_2 \in (E_2) \\ \frac{x}{Y} < NA_2 \leq x}} \frac{1}{NA_2} \sum_{\substack{A_1 \in (E_1) \\ NA_1 \leq \frac{x}{NA_2}}} \frac{1}{NA_1} \\ &\leq \sum_{\substack{A_2 \in (E_2) \\ NA_2 \leq x}} \frac{1}{NA_2} \varepsilon(1 + \varepsilon_1)^2 \sum_{\substack{A_1 \in (E_1) \\ NA_1 \leq \frac{x}{NA_2}}} \frac{1}{NA_1} + \left(\sum_{\frac{x}{Y} < NA \leq x} \frac{1}{NA} \right) \left(\sum_{NA \leq Y} \frac{1}{NA} \right) \\ &\quad \left(\text{dans la 1}^{\text{ère}} \text{ partie, } \frac{x}{NA_2} \geq Y \right) \\ &\leq \varepsilon(1 + \varepsilon_1)^2 \sum_{NA \leq x} \frac{1}{NA} + o(1) \left(\sum_{NA \leq x} \frac{1}{NA} \right) \left(\sum_{NA \leq Y} \frac{1}{NA} \right) \\ &= \left[\varepsilon(1 + \varepsilon_1)^2 + o(1) \sum_{NA \leq Y} \frac{1}{NA} \right] \left(\sum_{NA \leq x} \frac{1}{NA} \right). \end{aligned}$$

Il résulte de là que

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{\left| \sum_{NA \leq x} \frac{h(A)}{NA} \right|}{\sum_{NA \leq x} \frac{1}{NA}} \leq \varepsilon(1 + \varepsilon_1)^2$$

quels que soient ε et $\varepsilon_1 > 0$, d'où

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{\left| \sum_{NA \leq x} \frac{h(A)}{NA} \right|}{\sum_{NA \leq x} \frac{1}{NA}} = 0.$$

1.1.11. LEMME. — Soit F un sous-ensemble d'un S_1 -semi-groupe et h une fonction réelle positive définie sur F ; si, pour x infini, on a

$$\sum_{\substack{A \in F \\ NA \leq x}} h(A) \text{Log } NA = x\varphi(x) [1 + o(1)],$$

$\varphi(x)$ étant définie, croissante et positive sur $[a, +\infty[$, $a \geq 1$.

Alors, on a, pour x infini :

$$\sum_{\substack{A \in F \\ NA \leq x}} h(A) \sim \frac{x\varphi(x)}{\text{Log } x}.$$

Démonstration.

1° Soit

$$H(x) = \sum_{\substack{A \in F \\ NA \leq x}} h(A);$$

on a

$$\sum_{\substack{A \in F \\ NA \leq x}} h(A) \text{Log } NA = \int_{1-}^x \text{Log } t \, dH(t) = H(x) \text{Log } x - \int_1^x \frac{H(t)}{t} dt,$$

d'où

$$(1) \quad H(x) \text{Log } x = \sum_{\substack{A \in F \\ NA \leq x}} h(A) \text{Log } NA + \int_1^x \frac{H(t)}{t} dt.$$

2° ρ étant le minimum de la norme des éléments premiers :

$$\text{Log } \rho \sum_{\substack{A \in F \\ NA \leq x}} h(A) \leq \sum_{\substack{A \in F \\ NA \leq x}} h(A) \text{Log } NA,$$

et, par suite :

$$H(x) = O \left[\sum_{\substack{A \in F \\ NA \leq x}} h(A) \text{Log } NA \right] = x \cdot O[\varphi(x)],$$

$$\frac{H(t)}{t} = O[\varphi(t)],$$

ce qui entraîne

$$\int_1^x \frac{H(t)}{t} dt = \int_1^x O[\varphi(t)] dt = O \left[\int_1^x \varphi(t) dt \right] = x \cdot O[\varphi(x)].$$

(1) donne

$$H(x) \text{Log } x = x \cdot O[\varphi(x)] + x \cdot O[\varphi(x)] = x \cdot O[\varphi(x)],$$

$$\frac{H(x)}{x} = O \left[\frac{\varphi(x)}{\text{Log } x} \right],$$

d'où

$$\int_1^x \frac{H(t)}{t} dt = \int_1^x O\left[\frac{\varphi(t)}{\text{Log} t}\right] dt = O\left[\int_b^x \frac{\varphi(t)}{\text{Log} t} dt\right] \quad \text{avec } b > a \geq 1,$$

d'où

$$\int_1^x \frac{H(t)}{t} dt = \varphi(x) \cdot O\left[\int_b^x \frac{dt}{\text{Log} t}\right] = \varphi(x) \cdot o(x) = x\varphi(x) \cdot o(1).$$

En portant à nouveau dans (1) : $H(x) \text{Log} x \sim x\varphi(x)$.

1.1.12. LEMME. — Soit g une fonction réelle ou complexe définie pour $x \geq 1$, bornée sur tout intervalle fini et telle que, pour x infini : $g(x) = \alpha x + o(x)$.

Soit, d'autre part, h une fonction réelle ou complexe, définie sur un sous-ensemble F d'un S_1 -semi-groupe, et non identiquement nulle. Posons

$$H(x) = \sum_{\substack{A \in F \\ NA \in x}} \frac{|h(A)|}{NA},$$

et supposons que, quel que soit λ réel supérieur à 1, on ait

$$H(\lambda x) \sim H(x) \quad \text{pour } x \text{ infini.}$$

Alors, on a, pour x infini :

$$\sum_{\substack{A \in F \\ NA \leq x}} h(A) g\left(\frac{x}{NA}\right) = \alpha x \sum_{\substack{A \in F \\ NA \leq x}} \frac{h(A)}{NA} + o[xH(x)].$$

(Transposition d'un lemme de H. DELANGE, voir *Bull. Soc. roy. Sc. Liège*, nos 9-10, 1961, p. 407.)

1.1.13. LEMME. — Soit :

I. Une fonction réelle $g(x)$ positive, définie et croissante pour $x \geq 1$, telle que, pour x infini :

$$g(x) \sim Kx\varphi(x),$$

K étant une constante strictement positive, $\varphi(x)$ une fonction positive et croissante pour x assez grand.

II. Une fonction $h(x)$ positive pour x assez grand, qui vérifie, lorsque x tend vers l'infini :

$$1^\circ h(x) \rightarrow \infty,$$

$$2^\circ \frac{x}{h(x)} \rightarrow \infty.$$

$$3^\circ \varphi[h(x)] \sim \varphi(x).$$

III. Un sous-ensemble F d'un S₁-semi-groupe tel que

$$\sum_{\substack{A \in F \\ NA \leq \frac{x}{h(x)}}} \frac{1}{NA} \sim \sum_{\substack{A \in F \\ NA \leq x}} \frac{1}{NA} \quad \text{lorsque } x \rightarrow \infty.$$

Dans ces conditions on a, lorsque $x \rightarrow \infty$,

$$\sum_{\substack{A \in F \\ NA \leq x}} g\left(\frac{x}{NA}\right) \sim Kx\varphi(x) \sum_{\substack{A \in F \\ NA \leq x}} \frac{1}{NA}.$$

Démonstration.

1° Remarquons que la condition III entraîne pour x_0 constante > 1 :

$$\sum_{\substack{A \in F \\ NA \leq \frac{x}{x_0}}} \frac{1}{NA} \sim \sum_{\substack{A \in F \\ NA \leq x}} \frac{1}{NA} \quad \text{lorsque } x \rightarrow \infty,$$

en effet, quel que soit x_0 , pour x assez grand, on a

$$\frac{x}{h(x)} < \frac{x}{x_0} \quad \text{puisque } h(x) \rightarrow \infty,$$

d'où

$$\sum_{\substack{A \in F \\ NA \leq \frac{x}{h(x)}}} \frac{1}{NA} \leq \sum_{\substack{A \in F \\ NA \leq \frac{x}{x_0}}} \frac{1}{NA} \leq \sum_{\substack{A \in F \\ NA \leq x}} \frac{1}{NA}.$$

2° Soit $\varepsilon > 0$, il existe $x_0 > 1$ tel que $x > x_0 \Rightarrow g(x) < (1 + \varepsilon)Kx\varphi(x)$, et que $\varphi(x)$ soit croissante et positive sur $[x_0, +\infty[$; d'où

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{A \in F \\ NA \leq x}} g\left(\frac{x}{NA}\right) &= \sum_{\substack{A \in F \\ NA \leq \frac{x}{x_0}}} g\left(\frac{x}{NA}\right) + \sum_{\substack{A \in F \\ \frac{x}{x_0} < NA \leq x}} g\left(\frac{x}{NA}\right), \\ \sum_{\substack{A \in F \\ NA \leq x}} g\left(\frac{x}{NA}\right) &< \sum_{\substack{A \in F \\ NA \leq \frac{x}{x_0}}} K \frac{x}{NA} \varphi\left(\frac{x}{NA}\right) (1 + \varepsilon) + g(x_0) \sum_{\substack{A \in F \\ \frac{x}{x_0} < NA \leq x}} 1 \\ &< \sum_{\substack{A \in F \\ NA \leq \frac{x}{x_0}}} K \frac{x}{NA} \varphi(x) (1 + \varepsilon) + g(x_0) \sum_{\substack{A \in F \\ \frac{x}{x_0} < NA \leq x}} \frac{x}{NA}. \end{aligned}$$

On a donc, pour $x > x_0$,

$$\frac{\sum_{\substack{A \in F \\ NA \leq x}} g\left(\frac{x}{NA}\right)}{Kx\varphi(x) \sum_{\substack{A \in F \\ NA \leq x}} \left(\frac{1}{NA}\right)} < \frac{(1 + \varepsilon) \sum_{\substack{A \in F \\ NA \leq \frac{x}{x_0}}} \frac{1}{NA}}{\sum_{\substack{A \in F \\ NA \leq x}} \frac{1}{NA}} + \frac{g(x_0)}{K\varphi(x)} \left(1 - \frac{\sum_{\substack{A \in F \\ NA \leq \frac{x}{x_0}}} \frac{1}{NA}}{\sum_{\substack{A \in F \\ NA \leq x}} \frac{1}{NA}} \right);$$

ε étant arbitraire, il résulte de là que

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{\sum_{\substack{A \in F \\ NA \leq x}} g\left(\frac{x}{NA}\right)}{Kx \varphi(x) \sum_{\substack{A \in F \\ NA \leq x}} \frac{1}{NA}} \leq 1.$$

3° Pour $x > x_1 > 1$, on a

$$\sum_{\substack{A \in F \\ NA \leq x}} g\left(\frac{x}{NA}\right) \geq \sum_{\substack{A \in F \\ NA \leq \frac{x}{h(x)}}} g\left(\frac{x}{NA}\right).$$

Étant donné $\varepsilon > 0$, si $x > x_2 > 1$, on a $g(x) > Kx \varphi(x) (1 - \varepsilon)$ et $\varphi(x)$ croissante et positive sur $[x_2, +\infty[$.

Il existe $x_3 > 1$ tel que $x > x_3 \Rightarrow h(x) > x_2$.

Pour $x > \max(x_1, x_2, x_3) = x_4$ et $NA \leq \frac{x}{h(x)}$, on a

$$g\left(\frac{x}{NA}\right) > K \frac{x}{NA} \varphi\left(\frac{x}{NA}\right) (1 - \varepsilon).$$

D'où pour $x > x_4$:

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{A \in F \\ NA \leq x}} g\left(\frac{x}{NA}\right) &\geq \sum_{\substack{A \in F \\ NA \leq \frac{x}{h(x)}}} g\left(\frac{x}{NA}\right) > Kx(1 - \varepsilon) \sum_{\substack{A \in F \\ NA \leq \frac{x}{h(x)}}} \frac{1}{NA} \varphi\left(\frac{x}{NA}\right) \\ &\geq (1 - \varepsilon) Kx \varphi[h(x)] \sum_{\substack{A \in F \\ NA \leq \frac{x}{h(x)}}} \frac{1}{NA}. \end{aligned}$$

Par suite,

$$\frac{\sum_{\substack{A \in F \\ NA \leq x}} g\left(\frac{x}{NA}\right)}{Kx \varphi(x) \sum_{\substack{A \in F \\ NA \leq x}} \frac{1}{NA}} > (1 - \varepsilon) \frac{\varphi[h(x)]}{\varphi(x)} \frac{\sum_{\substack{A \in F \\ NA \leq \frac{x}{h(x)}}} \frac{1}{NA}}{\sum_{\substack{A \in F \\ NA \leq x}} \frac{1}{NA}};$$

ε étant arbitraire, il résulte de là que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sum_{\substack{A \in F \\ NA \leq x}} g\left(\frac{x}{NA}\right)}{Kx \varphi(x) \sum_{\substack{A \in F \\ NA \leq x}} \frac{1}{NA}} \geq 1.$$

1.1.14. LEMME. — Soit F une partie d'un S_1 -semi-groupe (E) et h une fonction positive complètement multiplicative définie sur (E) , telle que $h(A) \leq 1$; si G désigne l'ensemble des B appartenant à (E) tels qu'il existe P appartenant à E et $k \geq 2$ tels que $P^k B$ appartienne à F , on a, pour x infini :

$$\sum_{\substack{A \in F \\ NA \leq x}} h(A) \text{Log } NA = \sum_{\substack{P, B \\ P, B \in F \\ NP, NB \leq F}} h(P) h(B) \text{Log } NP + x \cdot O \left[\sum_{\substack{B \in G \\ NB \leq x}} \frac{h(B)}{NB} \right].$$

Démonstration.

$$1^\circ \text{Log } NA = \sum_{\substack{P, k, B \\ P^k B = A}} \text{Log } NP; \text{ en effet, si } A = P_1^{\alpha_1} \dots P_n^{\alpha_n},$$

$$\sum_{\substack{P, k, B \\ P^k B = A}} \text{Log } NP = \alpha_1 \text{Log } NP_1 + \dots + \alpha_n \text{Log } NP_n = \text{Log } NA;$$

d'où

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{A \in F \\ NA \leq x}} h(A) \text{Log } NA &= \sum_{\substack{P, k, B \\ P^k B \in F \\ (NP)^k NB \leq x}} [h(P)]^k h(B) \text{Log } NP \\ &= \sum_{\substack{P, B \\ P, B \in F \\ NP, NB \leq x}} h(P) h(B) \text{Log } NP + \sum_{\substack{P, k, B \\ k \geq 2 \\ P^k B \in F \\ (NP)^k NB \leq x}} [h(P)]^k h(B) \text{Log } NP. \end{aligned}$$

2° Le second terme étant désigné par R , on a

$$\begin{aligned} R &= \sum_{\substack{P, k \\ k \geq 2 \\ \exists B \text{ tel que } P^k B \in F \\ (NP)^k NB \leq x}} [h(P)]^k \text{Log } NP \sum_{\substack{B \\ k \geq 2 \\ P^k B \in F \\ NB \leq \frac{x}{(NP)^k}}} h(B), \\ R &\leq \sum_{\substack{P, k \\ k \geq 2}} \text{Log } NP \sum_{\substack{B \in G \\ NB \leq \frac{x}{(NP)^k}}} h(B) = \sum_{\substack{P, k \\ k \geq 2}} H \left(\frac{x}{(NP)^k} \right) \text{Log } NP, \end{aligned}$$

en posant

$$H(x) = \sum_{\substack{B \in G \\ NB \leq x}} h(B) \leq x \sum_{\substack{B \in G \\ NB \leq x}} \frac{h(B)}{NB}.$$

Ceci donne

$$\begin{aligned} R &\leq \sum_{\substack{P, k \\ k \geq 2}} \frac{x \text{Log } NP}{(NP)^k} \sum_{\substack{B \in G \\ NB \leq \frac{x}{(NP)^k}}} \frac{h(B)}{NB} \\ &\leq x \left[\sum_{\substack{P, k \\ k \geq 2}} \frac{\text{Log } NP}{(NP)^k} \right] \left[\sum_{\substack{B \in G \\ NB \leq x}} \frac{h(B)}{NB} \right] = x \cdot O \left[\sum_{\substack{B \in G \\ NB \leq x}} \frac{h(B)}{NB} \right], \end{aligned}$$

car la série

$$\sum_{\substack{p, k \\ k \geq 2}} \frac{\text{Log NP}}{(\text{NP})^k} = \sum_p \frac{\text{Log NP}}{(\text{NP})^2} \frac{1}{1 - \frac{1}{\text{NP}}} \text{ converge}$$

$$\left[\frac{\text{Log NP}}{(\text{NP})^2} \frac{1}{1 - \frac{1}{\text{NP}}} \sim \frac{\text{Log NP}}{(\text{NP})^2} < \frac{1}{(\text{NP})^{\frac{3}{2}}} \text{ si } \text{NP} \rightarrow \infty \right].$$

CHAPITRE 2.

Δ_r -SEMI-GROUPES.

Ici l'hypothèse faite sur E est formulée dans la définition qui suit, elle implique que (E) est un S_1 -semi-groupe. Cette hypothèse ne suffit pas pour obtenir un équivalent, lorsque x est infiniment grand, du nombre $\nu(x)$ des éléments de (E) de norme au plus égale à x ; la deuxième partie du théorème 1.2.3 donne seulement un équivalent de $\text{Log} \frac{\nu(x)}{x}$. La première partie de ce théorème permet de démontrer le théorème 1.2.5 sans connaître explicitement un équivalent de $\nu(x)$; rappelons que le théorème d'équi-répartition asymptotique (deuxième partie, chapitre 1) découle du théorème 1.2.5. Le théorème 1.2.6 sera utilisé dans l'évaluation asymptotique qui fait l'objet du chapitre 2 de la deuxième partie.

1.2.1. DÉFINITION. — On appelle Δ_r -semi-groupe un semi-groupe normé (E) dans lequel le nombre des éléments premiers $\nu_E(x)$, de norme au plus égale à x , est équivalent pour x infini à

$$\mu \frac{x (\text{Log Log } x)^r}{\text{Log } x},$$

r est un réel positif ou nul, μ est un réel strictement positif. Nous dirons alors que E est un ensemble d'éléments premiers de degré r .

Dans le cas où $r = 0$, on dit que E est un ensemble d'éléments premiers de densité strictement positive; μ est la densité de cet ensemble.

1.2.2. PROPRIÉTÉS PRÉLIMINAIRES.

1.2.2.1. Un Δ_r -semi-groupe est un S_1 -semi-groupe.

Démonstration. — Il faut montrer que $\sum \frac{1}{(\text{NP})^s}$ converge pour $\mathcal{R}s > 1$,

$$\sum_{\text{NP} \leq x} \frac{1}{(\text{NP})^s} = \int_{1-}^x \frac{d\nu_E(t)}{t^s} = \frac{\nu_E(x)}{x^s} + s \int_1^x \frac{\nu_E(t) dt}{t^{s+1}},$$

$$\left| \frac{\nu_E(x)}{x^s} \right| = \frac{\nu_E(x)}{x^{\mathcal{R}s}} \sim \frac{\mu (\text{Log Log } x)^r}{x^{\mathcal{R}s-1} \text{Log } x} \rightarrow 0,$$

$$\left| \frac{\nu_E(t)}{t^{s+1}} \right| \sim \frac{\mu (\text{Log Log } t)^r}{t^{\mathcal{R}s} \text{Log } t},$$

l'intégrale converge pour $\mathcal{R}s > 1$.

1.2.2.2.

$$\theta_E(x) = \sum_{\substack{P \in E \\ NP \leq x}} \text{Log NP} \sim \mu x (\text{Log Log } x)^r \text{ pour } x \text{ infini.}$$

Démonstration.

$$\theta_E(x) = \int_{1-}^x \text{Log } t \, d\nu_E(t) = \nu_E(x) \text{Log } x - \int_1^x \nu_E(t) \frac{dt}{t},$$

$$\nu_E(x) \text{Log } x \sim \mu x (\text{Log Log } x)^r,$$

$$\int_1^x \nu_E(t) \frac{dt}{t} \sim \int_2^x \mu (\text{Log Log } t)^r \frac{dt}{\text{Log } t} = o \left[\int_2^x \mu (\text{Log Log } t)^r dt \right] = o [x \text{Log Log } x]^r.$$

1.2.2.3. — Pour x infini :

$$\lambda_E(x) = \sum_{\substack{P \in E \\ NP \leq x}} \frac{1}{NP} \sim \frac{\mu}{r+1} (\text{Log Log } x)^{r+1}.$$

Démonstration.

$$\lambda_E(x) = \int_{1-}^x \frac{d\nu_E(t)}{t} = \frac{\nu_E(x)}{x} + \int_1^x \nu_E(t) \frac{dt}{t^2},$$

$$\frac{\nu_E(x)}{x} \sim \mu \frac{(\text{Log Log } x)^r}{\text{Log } x} = o(1),$$

$$\int_1^x \nu_E(t) \frac{dt}{t^2} \sim \int_2^x \mu (\text{Log Log } t)^r \frac{dt}{t \text{Log } t}$$

$$= \mu \int_2^x (\text{Log Log } t)^r d \text{Log Log } t \sim \frac{\mu}{r+1} (\text{Log Log } x)^{r+1}.$$

1.2.2.4. — Soit F une partie d'un Δ -semi-groupe (E) et h une fonction positive, complètement multiplicative, définie sur (E) , telle que $h(A) \leq 1$; si G désigne l'ensemble des B appartenant à (E) tels qu'il existe P appartenant à E et $k \geq 2$ tels que $P^k B$ appartienne à F ; si, de plus, G est contenu dans un ensemble G_1 d'éléments de (E) qui vérifie, quel que soit $\lambda > 1$:

$$\sum_{\substack{B_1 \in G_1 \\ NB_1 \leq \frac{x}{\lambda}}} \frac{h(B_1)}{NB_1} \sim \sum_{\substack{B_1 \in G_1 \\ NB_1 \leq x}} \frac{h(B_1)}{NB_1} \text{ pour } x \text{ infini.}$$

Alors, on a, pour x infini :

$$\sum_{\substack{A \in F \\ NA \leq x}} h(A) \text{Log } NA = \sum_{\substack{P, B \\ P, B \in F \\ NP, NB \leq x}} h(P) h(B) \text{Log } NP + x \cdot o \left[\sum_{\substack{B_1 \in G_1 \\ NB_1 \leq x}} \frac{h(B_1)}{NB_1} \right].$$

Démonstration. — Il suffit de reprendre la démonstration du lemme 1.1.14 à partir de « le second membre étant désigné par R » :

$$R = \sum_{\substack{P, k, B \\ k \geq 2 \\ P^k B \in F \\ (NP)^k NB \leq x}} [h(P)]^k h(B) \text{Log NP} \leq \sum_{\substack{P, k, B_1 \\ k \geq 2 \\ B_1 \in G_1 \\ (NP)^k NB_1 \leq x \\ P \in E}} h(B_1) \text{Log NP},$$

$$R \leq \sum_{\substack{B_1 \in G_1 \\ NB_1 \leq x}} h(B_1) \sum_{\substack{P, k \\ k \geq 2 \\ NP \leq \left(\frac{x}{NB_1}\right)^{\frac{1}{k}}}} \text{Log NP},$$

mais

$$\sum_{\substack{P, k \\ k \geq 2 \\ NP \leq \left(\frac{x}{NB_1}\right)^{\frac{1}{k}}}} \text{Log NP}$$

$$= \sum_{NP \leq \left(\frac{x}{NB_1}\right)^{\frac{1}{2}}} \text{Log NP} \sum_{\substack{k \geq 2 \\ k \text{Log NP} \leq \text{Log} \frac{x}{NB_1}}} 1 \leq \sum_{NP \leq \left(\frac{x}{NB_1}\right)^{\frac{1}{2}}} \text{Log} \frac{x}{NB_1} \leq \nu_E \left[\left(\frac{x}{NB_1}\right)^{\frac{1}{2}} \right] \text{Log} \frac{x}{NB_1}.$$

Soit

$$g(x) = \nu_E(\sqrt{x}) \text{Log } x \sim 2\mu \sqrt{x} (\text{Log Log } x)^r = o(x);$$

on a

$$R \leq \sum_{\substack{B_1 \in G_1 \\ NB_1 \leq x}} h(B_1) g\left(\frac{x}{NB_1}\right) = x \cdot o \left[\sum_{\substack{B_1 \in G_1 \\ NB_1 \leq x}} \frac{h(B_1)}{NB_1} \right]$$

d'après le lemme 1.1.12.

1.2.2.5.

$$\sum_{\substack{NA \leq x \\ \Omega(A)=q}} \frac{1}{NA} \sim \left(\frac{\mu}{r+1}\right)^q \frac{1}{q!} (\text{Log Log } x)^{(r+1)q} \quad \text{pour } x \text{ infini.}$$

Démonstration. — Posons

$$\sigma_q(x) = \sum_{\substack{NA \leq x \\ \Omega(A)=q}} \frac{1}{NA}, \quad \sigma'_q(x) = \sum_{\substack{NA \leq x \\ \Omega(A)=q \\ A \text{ « quadratfrei »}}} \frac{1}{NA};$$

$$\sigma_1(x) = \sum_{NP \leq x} \frac{1}{NP} \sim \frac{\mu}{r+1} (\text{Log Log } x)^{r+1}.$$

On a

$$(i) \quad q\sigma_q(x) - O[\sigma_{q-2}(x)] \leq \sigma_{q-1}(x) \sigma_1(x) \leq q\sigma_q(x^2);$$

en effet :

1° Chaque terme de $\sigma_{q-1}(x) \sigma_1(x)$ est identique à un terme de $\sigma_q(x^2)$; il existe, dans $\sigma_{q-1}(x) \sigma_1(x)$, au plus q termes identiques à un terme déter-

miné si l'élément A correspondant de $\sigma_q(x^2)$ est quadratfrei et moins de q termes si A n'est pas quadratfrei; l'inégalité de droite en découle.

2° $\sigma_{q-1}(x) \sigma_1(x)$ contient tous les termes de $\sigma'_q(x)$ répétés q fois, donc

$$q\sigma'_q(x) \leq \sigma_{q-1}(x) \sigma_1(x),$$

mais

$$\sigma'_q(x) = \sigma_q(x) - \sum_{\substack{\text{NA} \leq x \\ \Omega(\text{A})=q \\ \text{A non quadratfrei}}} \frac{1}{\text{NA}}$$

et

$$\sum_{\substack{\text{NA} \leq x \\ \Omega(\text{A})=q \\ \text{A non quadratfrei}}} \frac{1}{\text{NA}} \leq \left(\sum_{\text{NP} \leq x} \frac{1}{\text{NP}^2} \right) \left(\sum_{\substack{\text{NB} \leq x \\ \Omega(\text{B})=q-2}} \frac{1}{\text{NB}} \right) = O[\sigma_{q-2}(x)]$$

puisque $\sum_p \frac{1}{\text{NP}^2}$ converge.

Raisonnons par récurrence, la formule à démontrer est vraie pour $q=1$, en la supposant vraie pour les entiers $\leq q-1$, (1) donne

$$q\sigma_q(x) \leq \left(\frac{\mu}{r+1} \right)^{q-1} \frac{1}{(q-1)!} (\text{Log Log } x)^{(r+1)(q-1)} \frac{\mu}{r+1} (\text{Log Log } x)^{r+1} [1 + o(1)] \\ + O((\text{Log Log } x)^{(r+1)(q-2)}) = \left(\frac{\mu}{r+1} \right)^q \frac{1}{(q-1)!} (\text{Log Log } x)^{(r+1)q} [1 + o(1)]$$

et $\sigma_{q-1}(\sqrt{x}) \sigma_1(\sqrt{x}) \leq q\sigma_q(x)$, soit

$$\left(\frac{\mu}{r+1} \right)^q \frac{1}{(q-1)!} (\text{Log Log } x)^{(r+1)q} [1 + o(1)] \leq q\sigma_q(x);$$

d'où

$$\left(\frac{\mu}{r+1} \right)^q \frac{1}{q!} (\text{Log Log } x)^{(r+1)q} [1 + o(1)] \leq \sigma_q(x) \leq \left(\frac{\mu}{r+1} \right)^q \frac{1}{q!} (\text{Log Log } x)^{(r+1)q} [1 + o(1)].$$

1.2.3. THÉORÈME. — Si $\nu(x)$ désigne le nombre des éléments, de norme au plus égale à x , d'un Δ_r -semi-groupe (E), lorsque x tend vers l'infini, on a

$$1^\circ \quad \nu(x) \sim \mu \frac{x}{\text{Log } x} (\text{Log Log } x)^r \sum_{\substack{\text{A} \in (\text{E}) \\ \text{NA} \leq x}} \frac{1}{\text{NA}};$$

2° si $r > 0$,

$$\nu(x) = x \exp \left\{ \frac{\mu}{r+1} (\text{Log Log } x)^{r+1} [1 + o(1)] \right\};$$

si $r = 0$,

$$\nu(x) = x \exp \{ [\mu - 1 + o(1)] \text{Log Log } x \}.$$

Démonstration de la première partie. — D'après le lemme 1.1.14 on a [on prend $h(A) = 1$] :

$$L(x) = \sum_{\substack{A \in (E) \\ NA \leq x}} \text{Log } NA = \sum_{\substack{P, B \\ NP, NB \leq x \\ P \in E \\ B \in (E)}} \text{Log } NP + x \cdot O\left(\sum_{\substack{B \in (E) \\ NB \leq x}} \frac{1}{NB}\right).$$

Soit la fonction $k(x) = \frac{\text{Log } x}{\text{Log } \text{Log } x} \rightarrow \infty$ si $x \rightarrow \infty$; $\frac{x}{k(x)} \rightarrow \infty$.

Posons

$$\theta(x) = \sum_{NP \leq x} \text{Log } NP \sim \mu x (\text{Log } \text{Log } x)^r.$$

On peut écrire

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{P, B \\ NP, NB \leq x}} \text{Log } NP &= \sum_{NB \leq \frac{x}{k(x)}} \theta\left(\frac{x}{NB}\right) + \sum_{\frac{x}{k(x)} < NB \leq x} \theta\left(\frac{x}{NB}\right); \\ \sum_{\frac{x}{k(x)} < NB \leq x} \theta\left(\frac{x}{NB}\right) &\leq \theta[k(x)] \sum_{\frac{x}{k(x)} < NB \leq x} \frac{1}{\text{Log } NB} \text{Log } NB \leq \theta[k(x)] \frac{1}{\text{Log } \frac{x}{k(x)}} L(x) \\ &\sim \mu \frac{\text{Log } x}{\text{Log } \text{Log } x} (\text{Log } \text{Log } \text{Log } x)^r \frac{1}{\text{Log } x} L(x) = L(x) \cdot o(1); \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} L(x) - L(x) \cdot o(1) &= \sum_{NB \leq \frac{x}{k(x)}} \theta\left(\frac{x}{NB}\right) + x \cdot O\left(\sum_{NB \leq x} \frac{1}{NB}\right) \\ &= [1 + o(1)] \sum_{NB \leq \frac{x}{k(x)}} \mu \frac{x}{NB} \left(\text{Log } \text{Log } \frac{x}{NB}\right)^r + x \cdot O\left(\sum_{NB \leq x} \frac{1}{NB}\right) \\ &\leq [1 + o(1)] \sum_{NB \leq x} \mu \frac{x}{NB} (\text{Log } \text{Log } x)^r + x \cdot O\left(\sum_{NB \leq x} \frac{1}{NB}\right) \\ &= O(1) x (\text{Log } \text{Log } x)^r \sum_{NB \leq x} \frac{1}{NB}; \end{aligned}$$

donc il existe $M > 0$ et $x_0 > 0$ tels que $x > x_0$ entraîne

$$L(x) \leq Mx (\text{Log } \text{Log } x)^r \sum_{NB \leq x} \frac{1}{NB};$$

en posant $\lambda(x) = \frac{L(x)}{x}$, on a

$$(1) \quad \lambda(x) \leq M (\text{Log } \text{Log } x)^r \sum_{NA \leq x} \frac{1}{NA}.$$

Nous allons maintenant démontrer que la fonction

$$h(x) = \exp\left[(\text{Log } x)^{1 - \frac{1}{(\text{Log } \text{Log } x)^{\frac{1}{2}}}}\right]$$

répond aux hypothèses du lemme 1.1.13 en prenant

$$g(x) = \theta(x) \sim \mu x (\text{Log Log } x)^r, \quad K = \mu, \quad \varphi(x) = (\text{Log Log } x)^r;$$

de là résultera que

$$\sum_{\substack{P, B \\ NP, NB \leq x}} \text{Log NP} = \sum_{NB \leq x} \theta\left(\frac{x}{NB}\right) \sim \mu x (\text{Log Log } x)^r \sum_{NA \leq x} \frac{1}{NA};$$

de plus, nous savons que l'existence de la fonction $h(x)$ entraîne

$$\sum_{NA \leq \frac{x}{\lambda}} \frac{1}{NA} \sim \sum_{NA \leq x} \frac{1}{NA} \quad \text{pour tout } \lambda > 1;$$

la propriété 1.2.2.4 donne alors

$$L(x) \sim \mu x (\text{Log Log } x)^r \sum_{NA \leq x} \frac{1}{NA},$$

et l'on obtiendra le résultat énoncé en appliquant le lemme 1.1.11.

Démontrons donc que $h(x)$ satisfait aux hypothèses du lemme 1.1.13.

1° $h(x) \rightarrow \infty$ évident.

2° $\frac{x}{h(x)} \rightarrow \infty$, en effet :

$$\text{Log } \frac{x}{h(x)} = \text{Log } x - (\text{Log } x)^{1 - \frac{1}{(\text{Log Log } x)^{\frac{1}{2}}}} = (\text{Log } x) \left[1 - (\text{Log } x)^{-\frac{1}{(\text{Log Log } x)^{\frac{1}{2}}}} \right]$$

et

$$\text{Log} \left[(\text{Log } x)^{-\frac{1}{(\text{Log Log } x)^{\frac{1}{2}}}} \right] = - (\text{Log Log } x)^{\frac{1}{2}} \rightarrow -\infty.$$

3° $[\text{Log Log } h(x)]^r \sim (\text{Log Log } x)^r$:

$$\text{Log Log } h(x) = \left[1 - \frac{1}{(\text{Log Log } x)^{\frac{1}{2}}} \right] \text{Log Log } x \sim \text{Log Log } x.$$

4° Reste à démontrer que

$$\sum_{NA \leq \frac{h(x)}{x}} \frac{1}{NA} \sim \sum_{NA \leq x} \frac{1}{NA},$$

c'est-à-dire que

$$o < v(x) = \frac{\sum_{\substack{x \\ h(x) < NA \leq x}} \frac{1}{NA}}{\sum_{NA \leq x} \frac{1}{NA}} = o(1).$$

Montrons d'abord qu'on a

$$\begin{aligned} (\text{Log Log } x)^\alpha - \left[\text{Log Log } \frac{x}{h(x)} \right]^\alpha &= o(1) \quad \text{si } \alpha > 0; \\ \text{Log Log } \frac{x}{h(x)} &= \text{Log Log } x + \text{Log} \left[1 - (\text{Log } x)^{-\frac{1}{(\text{Log Log } x)^{\frac{1}{2}}}} \right] \\ &= \text{Log Log } x - (\text{Log } x)^{-\frac{1}{(\text{Log Log } x)^{\frac{1}{2}}}} [1 + o(1)] \\ &= (\text{Log Log } x) \left[1 - \frac{1 + o(1)}{(\text{Log Log } x) (\text{Log } x)^{\frac{1}{(\text{Log Log } x)^{\frac{1}{2}}}}} \right]. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \left[\text{Log Log } \frac{x}{h(x)} \right]^\alpha &= (\text{Log Log } x)^\alpha \left[1 - \frac{\alpha [1 + o(1)]}{(\text{Log Log } x) (\text{Log } x)^{\frac{1}{(\text{Log Log } x)^{\frac{1}{2}}}}} \right] \\ &= (\text{Log Log } x)^\alpha - \frac{\alpha (\text{Log Log } x)^{\alpha-1}}{(\text{Log } x)^{\frac{1}{(\text{Log Log } x)^{\frac{1}{2}}}}} [1 + o(1)]; \end{aligned}$$

$\frac{(\text{Log Log } x)^{\alpha-1}}{(\text{Log } x)^{\frac{1}{(\text{Log Log } x)^{\frac{1}{2}}}}} = o(1)$ car le logarithme de cette expression est égal à

$$(\alpha - 1) \text{Log Log Log } x - (\text{Log Log } x)^{\frac{1}{2}} \rightarrow -\infty.$$

Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned} \sum_{\frac{x}{h(x)} < \text{NA} \leq x} \frac{1}{\text{NA}} &= \sum_{\frac{x}{h(x)} < \text{NA} \leq x} \frac{1}{\text{NA} \log \text{NA}} \text{Log NA} = \int_{\frac{x}{h(x)}}^x \frac{1}{t \text{Log } t} dL(t) \\ &= \frac{L(x)}{x \text{Log } x} - \frac{L\left[\frac{x}{h(x)}\right]}{\frac{x}{h(x)} \text{Log } \frac{x}{h(x)}} + \int_{\frac{x}{h(x)}}^x L(t) \left[\frac{1}{t^2 \text{Log } t} + \frac{1}{t^2 (\text{Log } t)^2} \right] dt \\ &\leq \frac{\lambda(x)}{\text{Log } x} + [1 + o(1)] \int_{\frac{x}{h(x)}}^x \lambda(t) \frac{dt}{t \text{Log } t}. \end{aligned}$$

En tenant compte de (1) :

$$\begin{aligned} \sum_{\frac{x}{h(x)} < \text{NA} \leq x} \frac{1}{\text{NA}} &\leq M \frac{(\text{Log Log } x)^r}{\text{Log } x} \sum_{\text{NA} \leq x} \frac{1}{\text{NA}} + [1 + o(1)] M \int_{\frac{x}{h(x)}}^x (\text{Log Log } t)^r \left(\sum_{\text{NA} \leq t} \frac{1}{\text{NA}} \right) \frac{dt}{t \text{Log } t} \\ &\leq o(1) \sum_{\text{NA} \leq x} \frac{1}{\text{NA}} + [1 + o(1)] M \left(\sum_{\text{NA} \leq x} \frac{1}{\text{NA}} \right) \int_{\frac{x}{h(x)}}^x (\text{Log Log } t)^r \frac{dt}{t \text{Log } t}; \end{aligned}$$

donc

$$v(x) \leq o(1) + [1 + o(1)] \frac{M}{r+1} \left\{ (\text{Log Log } x)^{r+1} - \left[\text{Log Log } \frac{x}{h(x)} \right]^{r+1} \right\} = o(1) + o(1) = o(1).$$

Démonstration de la deuxième partie. — On a

$$\lambda(x) = \frac{L(x)}{x} = [1 + o(1)] \mu (\text{Log Log } x)^r \sum_{N\lambda \leq x} \frac{1}{N\lambda} \rightarrow +\infty.$$

En utilisant un procédé de Wirsing, on peut écrire

$$\begin{aligned} \lambda(x) &= [1 + o(1)] \mu (\text{Log Log } x)^r \int_2^x \frac{1}{t \text{Log } t} dL(t) \\ &= [1 + o(1)] \mu (\text{Log Log } x)^r \left\{ \frac{\lambda(x)}{\text{Log } x} - O(1) + [1 + o(1)] \int_2^x \lambda(t) \frac{dt}{t \text{Log } t} \right\} \\ &\quad \left\{ \text{l'intégrale } \int_2^x \lambda(t) \left[\frac{1}{t \text{Log } t} + \frac{1}{t (\text{Log } t)^2} \right] dt \text{ diverge} \right\}, \\ \lambda(x) - \lambda(x) \cdot o(1) &= [1 + o(1)] \mu (\text{Log Log } x)^r \int_2^x \lambda(t) \frac{dt}{t \text{Log } t}; \end{aligned}$$

posons $X = \text{Log Log } x$, $u = \text{Log Log } t$, $\lambda(x) = \lambda_1(X)$, on a

$$\lambda_1(X) = [1 + o(1)] \mu X^r \int_{\text{Log Log } 2}^X \lambda_1(u) du = [1 + o(1)] \mu X^r \int_0^X \lambda_1(u) du,$$

en itérant :

$$\lambda_1(X) = [1 + o(1)] \mu X^r \int_0^X \mu u^r \left[\int_0^u \lambda_1(v) dv \right] du.$$

Soit

$$y(X) = \int_0^X \mu u^r \left[\int_0^u \lambda_1(v) dv \right] du,$$

la fonction y est dérivable comme intégrale d'une fonction continue.

$$y'(X) = \mu X^r \int_0^X \lambda_1(v) dv = [1 + o(1)] \lambda_1(X) = [1 + o(1)] \mu X^r y(X),$$

$$\frac{y'(X)}{y(X)} = [1 + o(1)] \mu X^r, \quad \text{Log } y(X) = [1 + o(1)] \mu \frac{X^{r+1}}{r+1},$$

$$\text{Log } \lambda_1(X) = o(1) + \text{Log } \mu + r \text{Log } X + [1 + o(1)] \mu \frac{X^{r+1}}{r+1},$$

$$\text{Log } \lambda_1(X) = [1 + o(1)] \mu \frac{X^{r+1}}{r+1},$$

$$\lambda_1(X) = \exp \left\{ [1 + o(1)] \mu \frac{X^{r+1}}{r+1} \right\}; \quad \frac{L(X)}{x} = \lambda(x) = \exp \left\{ [1 + o(1)] \frac{\mu}{r+1} (\text{Log Log } x)^{r+1} \right\};$$

d'après la première partie, $\nu(x) \sim \frac{L(x)}{\text{Log } x}$, donc

$$\nu(x) = \frac{x}{\text{Log } x} \exp \left\{ [1 + o(1)] \frac{\mu}{r+1} (\text{Log Log } x)^{r+1} \right\},$$

d'où le résultat énoncé.

1.2.4. REMARQUE. — Pour $r = 0$, on peut généraliser une formule de Wirsing :

$$\nu(x) \sim g \frac{e^{-c\mu}}{\Gamma(\mu)} \frac{x}{\text{Log } x} \exp\left(\sum_{\substack{p \in E \\ NP \leq x}} \frac{1}{NP}\right),$$

c , constante d'Euler, $\text{Log } g = \sum_{\substack{p, k \\ k > 1}} \frac{1}{k NP^k}$.

Théorèmes sur la fonction Ω .

1.2.5. THÉORÈME. — Soit un Δ_r -semi-groupe (E) et E_1, E_2, \dots, E_h des ensembles d'éléments premiers, respectivement de degré r_1, r_2, \dots, r_h , qui déterminent une partition de E . En désignant par $\nu(x)$ le nombre des éléments de (E) , de norme au plus égale à x , et par $\Omega_j(A)$ le nombre des facteurs (distincts ou non) qui appartiennent à E_j dans la décomposition en facteurs premiers de l'élément A de (E) ; le nombre des A de (E) , de norme au plus égale à x , qui vérifient :

$$(I) \quad \Omega_1(A) \equiv a_1 \pmod{q_1}, \quad \Omega_2(A) \equiv a_2 \pmod{q_2}, \quad \dots, \quad \Omega_h(A) \equiv a_h \pmod{q_h}$$

(a_j , entier quelconque; q_j , entier strictement positif) est équivalent, pour x infini, à

$$\frac{\nu(x)}{q_1 q_2 \dots q_h};$$

autrement dit, l'ensemble des A de (E) qui vérifient (I) a pour densité $\frac{1}{q_1 q_2 \dots q_h}$ par rapport à l'ensemble (E) .

Démonstration.

1° Soit $\nu_{E_j}(x) = \mu_j \frac{x}{\text{Log } x} (\text{Log } \text{Log } x)^{\mu_j} [1 + o(1)]$ le nombre des éléments de E_j de norme au plus égale à x et r le maximum des nombres r_1, r_2, \dots, r_h ; supposons que $r_1 = r_2 = \dots = r_l = r$ et $r_j < r$ si $j > l$; le nombre des éléments de E , de norme au plus égale à x , est équivalent, pour x infini, à

$$(\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_l) \frac{x}{\text{Log } x} (\text{Log } \text{Log } x)^r;$$

rappelons que

$$(I) \quad \sum_{\substack{A \in (E) \\ NA \leq \frac{x}{\lambda}}} \frac{1}{NA} \sim \sum_{\substack{A \in (E) \\ NA \leq x}} \frac{1}{NA} \quad \text{pour tout } \lambda > 1 \quad (\text{p. 363}).$$

2° Démontrons que

$$\sum_{\substack{A \in (E) \\ \Omega_j(A) \equiv a_j \pmod{q_j} \\ j=1, \dots, h \\ NA \leq x}} \frac{1}{NA} \sim \frac{1}{q_1 q_2 \dots q_h} \sum_{\substack{A \in (E) \\ NA \leq x}} \frac{1}{NA}.$$

En utilisant une méthode de H. Delange, posons

$$\gamma_j = e^{\frac{2\pi i}{q_j}} \quad (j = 1, \dots, h);$$

et considérons la fonction complètement multiplicative

$$f(A) = \gamma_1^{k_1} \Omega_1(A) \gamma_2^{k_2} \Omega_2(A) \dots \gamma_h^{k_h} \Omega_h(A),$$

$$k_j = 0, 1, \dots, q_j - 1 \quad (k_1, k_2, \dots, k_h \text{ étant fixés}).$$

$$f(P) = \gamma_j^{k_j} \quad \text{si } P \in E_j$$

et

$$\sum_{\substack{P \in E \\ NP \leq x}} \frac{\mathcal{R}[f(P)] - 1}{NP} = \sum_{1 \leq j \leq h} \sum_{\substack{P \in E_j \\ NP \leq x}} \frac{\mathcal{R} \gamma_j^{k_j} - 1}{NP} = \sum_{1 \leq j \leq h} \sum_{\substack{P \in E_j \\ NP \leq x}} \left(\cos \frac{2k_j \pi}{q_j} - 1 \right) \frac{1}{NP}$$

$$= \sum_{1 \leq j \leq h} \left(\cos \frac{2k_j \pi}{q_j} - 1 \right) \sum_{\substack{P \in E_j \\ NP \leq x}} \frac{1}{NP};$$

mais

$$\cos \frac{2k_j \pi}{q_j} - 1 \begin{cases} = 0 & \text{si } k_j = 0, \\ < 0 & \text{si } k_j \neq 0; \end{cases}$$

donc :

si $x \rightarrow \infty$,

$$\sum_{\substack{P \in E_j \\ NP \leq x}} \frac{1}{NP} \rightarrow +\infty \quad \text{et} \quad \sum_{\substack{P \in E \\ NP \leq x}} \frac{\mathcal{R}[f(P)] - 1}{NP} \rightarrow -\infty \quad \text{si l'un des } k_j \neq 0;$$

si tous les k_j sont nuls,

$$\sum_{\substack{P \in E \\ NP \leq x}} \frac{\mathcal{R}[f(P)] - 1}{NP} = 0;$$

si l'un des $k_j \neq 0$,

$$\exp \sum_{\substack{P \in E \\ NP \leq x}} \frac{\mathcal{R}[f(P)] - 1}{NP} = o(1);$$

en tenant compte de (1) on peut appliquer le théorème 1.1.10 :

$$\sum_{\substack{A \in (E) \\ NA \leq x}} \frac{f(A)}{NA} = o\left(\sum_{\substack{A \in (E) \\ NA \leq x}} \frac{1}{NA} \right) \quad \text{si l'un des } k_j \neq 0,$$

d'où

$$\sum_{\substack{A \in (E) \\ NA \leq x}} \frac{\gamma_1^{k_1 [\Omega_1(A) - a_1]} \dots \gamma_h^{k_h [\Omega_h(A) - a_h]}}{NA} = o\left(\sum_{\substack{A \in (E) \\ NA \leq x}} \frac{1}{NA} \right) \quad \text{si l'un des } k_j \neq 0.$$

Soit

$$X = \sum_{\substack{k_1, k_2, \dots, k_h \\ 0 \leq k_j \leq q_j - 1}} \sum_{\substack{A \in (E) \\ NA \leq x}} \frac{\gamma_1^{k_1 [\Omega_1(A) - a_1]} \dots \gamma_h^{k_h [\Omega_h(A) - a_h]}}{NA} = \left(\sum_{\substack{A \in (E) \\ NA \leq x}} \frac{1}{NA} \right) [1 + o(1)].$$

Par ailleurs :

$$\begin{aligned}
 X &= \sum_{\substack{A \in (E) \\ NA \leq x}} \frac{1}{NA} \sum_{\substack{k_1, k_2, \dots, k_h \\ 0 \leq k_j \leq q_j - 1}} \gamma_1^{k_1[\Omega_1(A) - a_1]} \dots \gamma_h^{k_h[\Omega_h(A) - a_h]}; \\
 \sum_{\substack{k_1, k_2, \dots, k_h \\ 0 \leq k_j \leq q_j - 1}} \gamma_1^{k_1[\Omega_1(A) - a_1]} \dots \gamma_h^{k_h[\Omega_h(A) - a_h]} &= \prod_{j=1}^h \sum_{0 \leq k_j \leq q_j - 1} \gamma_j^{k_j[\Omega_j(A) - a_j]} \\
 &= \begin{cases} q_1 q_2 \dots q_h & \text{si } \Omega_1(A) \equiv a_1 \pmod{q_1}, \dots, \Omega_h(A) \equiv a_h \pmod{q_h} \\ = 0 & \text{dans l'hypothèse contraire,} \end{cases}
 \end{aligned}$$

car

$$\sum_{0 \leq k_j \leq q_j - 1} \gamma_j^{k_j[\Omega_j(A) - a_j]} = \begin{cases} q_j & \text{si } \gamma_j^{[\Omega_j(A) - a_j]} = 1, \\ 0 & \text{si } \gamma_j^{[\Omega_j(A) - a_j]} \neq 1, \end{cases}$$

d'où

$$X = q_1 q_2 \dots q_h \sum_{\substack{A \in (E) \\ \Omega_j(A) \equiv a_j \pmod{q_j} \\ j=1, \dots, h \\ NA \leq x}} \frac{1}{NA} \sim \sum_{\substack{A \in (E) \\ NA \leq x}} \frac{1}{NA}.$$

3° Soit F l'ensemble des A de (E), de norme au plus égale à x, qui vérifient les h relations

$$\Omega_j(A) \equiv a_j \pmod{q_j} \quad (j = 1, 2, \dots, h).$$

La propriété 1.2.2.4 des Δ_r-semi-groupes donne

$$\sum_{\substack{A \in F \\ NA \leq x}} \text{Log NA} = \sum_{\substack{P, B \\ P, B \in F \\ NP, NB \leq x}} \text{Log NP} + x \cdot o \left(\sum_{\substack{A \in (E) \\ NA \leq x}} \frac{1}{NA} \right).$$

En désignant par Y le premier terme du second membre :

$$\begin{aligned}
 Y &= \sum_{i=1}^h \sum_{\substack{P_i, B \\ P_i \in E_i}} \text{Log NP}_i, \\
 \text{Condition C} &\begin{cases} B \in (E) \\ \Omega_j(B) \equiv a_j \pmod{q_j} \text{ si } j \neq i, 1 \leq j \leq h \\ \Omega_i(B) \equiv a_i - 1 \pmod{q_i} \\ NP_i, NB \leq x \end{cases}
 \end{aligned}$$

d'après le 2° :

$$(2) \quad \sum_{\substack{B \\ \text{Condition C} \\ NB \leq x}} \frac{1}{NB} \sim \frac{1}{q_1 q_2 \dots q_h} \sum_{\substack{A \in (E) \\ NA \leq x}} \frac{1}{NA}.$$

Soit

$$\theta_i(x) = \sum_{\substack{P_i \in E_i \\ NP_i \leq x}} \text{Log NP}_i; \quad Y = \sum_{i=1}^h \sum_{\substack{B \\ \text{Condition C} \\ NB \leq x}} \theta_i \left(\frac{x}{NB} \right),$$

avec $\theta_i(x) \sim \mu_i x (\text{Log Log } x)^{r_i}$.

La fonction $h(x) = \exp \left[(\text{Log } x)^{1 - \frac{1}{(\text{Log } \text{Log } x)^{\frac{1}{2}}}} \right]$, utilisée dans la démonstration du théorème 1.2.3, vérifie :

1° $h(x) \rightarrow \infty$;

2° $\frac{x}{h(x)} \rightarrow \infty$;

3° $\text{Log } \text{Log } h(x) \sim \text{Log } \text{Log } x \Rightarrow [\text{Log } \text{Log } h(x)]^{r_i} \sim (\text{Log } \text{Log } x)^{r_i}$, quel que soit $r_i \geq 0$;

4° $\sum_{\substack{A \in (E) \\ NA \leq \frac{x}{h(x)}}} \frac{1}{NA} \sim \sum_{\substack{A \in (E) \\ NA \leq x}} \frac{1}{NA}$; donc, d'après (2) :

$$\sum_{\substack{B \\ \text{Condition C} \\ NB \leq \frac{x}{h(x)}}} \frac{1}{NB} \sim \sum_{\substack{B \\ \text{Condition C} \\ NB \leq x}} \frac{1}{NB} .$$

Le lemme 1.1.13 donne

$$\sum_{\substack{B \\ \text{Condition C} \\ NB \leq x}} \theta_i \left(\frac{x}{NB} \right) \sim \mu_i x (\text{Log } \text{Log } x)^{r_i} \sum_{\substack{B \\ \text{Condition C} \\ NB \leq x}} \frac{1}{NB} \sim \frac{\mu_i}{q_1 q_2 \dots q_h} x (\text{Log } \text{Log } x)^{r_i} \sum_{\substack{A \in (E) \\ NA \leq x}} \frac{1}{NA} .$$

$$Y \sim \frac{\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_l}{q_1 q_2 \dots q_h} x (\text{Log } \text{Log } x)^r \sum_{\substack{A \in (E) \\ NA \leq x}} \frac{1}{NA} \sim \sum_{\substack{A \in F \\ NA \leq x}} \text{Log } NA ;$$

d'après le lemme 1.1.11, le nombre des éléments de F, de norme au plus égale à x, est équivalent à

$$\frac{\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_l}{q_1 q_2 \dots q_h} \frac{x (\text{Log } \text{Log } x)^r}{\text{Log } x} \sum_{\substack{A \in (E) \\ NA \leq x}} \frac{1}{NA} \sim \frac{\nu(x)}{q_1 q_2 \dots q_h} .$$

1.2.6. THÉORÈME. — Soit un Δ_r -semi-groupe (E) et E_1, E_2, \dots, E_h des ensembles d'éléments premiers, respectivement de degré r_1, r_2, \dots, r_h , qui déterminent une partition de E.

Soit, pour x infini, $[1 + o(1)] \mu_i \frac{x}{\text{Log } x} (\text{Log } \text{Log } x)^{r_i}$ le nombre des éléments de E_i , de norme au plus égale à x, ($i = 1, 2, \dots, h$); et $\Omega_i(A)$ le nombre des facteurs (distincts ou non) qui appartiennent à E_i dans la décomposition en facteurs premiers de l'élément A de (E).

Dans ces conditions, le nombre des A de (E), de norme au plus égale à x, qui vérifient

$$\Omega_1(A) = q_1, \quad \Omega_2(A) = q_2, \quad \dots, \quad \Omega_h(A) = q_h$$

(les q_i sont des entiers positifs ou nuls, non tous nuls) est équivalent, pour x infini, à

$$\left(\frac{\mu_1}{r_1+1}\right)^{q_1} \dots \left(\frac{\mu_h}{r_h+1}\right)^{q_h} \frac{(r_1+1)q_1 + \dots + (r_h+1)q_h}{q_1! \dots q_h!} \frac{x}{\text{Log } x} (\text{Log Log } x)^{(r_1+1)q_1 + \dots + (r_h+1)q_h - 1}.$$

Démonstration.

1° Les notations sont les mêmes que dans le théorème 1.2.5. Soit F l'ensemble des A de (E) qui vérifient

$$\Omega_1(A) = q_1, \quad \dots, \quad \Omega_h(A) = q_h;$$

démontrons que

$$\sum_{\substack{A \in F \\ NA \leq x}} \frac{1}{NA} \sim \left(\frac{\mu_1}{r_1+1}\right)^{q_1} \dots \left(\frac{\mu_h}{r_h+1}\right)^{q_h} \frac{1}{q_1! q_2! \dots q_h!} (\text{Log Log } x)^{(r_1+1)q_1 + \dots + (r_h+1)q_h}.$$

En effet, on a

$$\prod_{i=1}^h \sum_{\substack{A_i \in (E_i) \\ \Omega(A_i) = q_i \\ NA_i \leq x^{\frac{1}{h}}}} \frac{1}{NA_i} \leq \sum_{\substack{A \in F \\ NA \leq x}} \frac{1}{NA} \leq \prod_{i=1}^h \sum_{\substack{A_i \in (E_i) \\ \Omega(A_i) = q_i \\ NA_i \leq x}} \frac{1}{NA_i}.$$

D'après la propriété 1.2.2.5 des Δ_r -semi-groupes :

$$\begin{aligned} & [1 + o(1)] \prod_{i=1}^h \left(\frac{\mu_i}{r_i+1}\right)^{q_i} \frac{1}{q_i!} (\text{Log Log } x^{\frac{1}{h}})^{(r_i+1)q_i} \\ & \leq \sum_{\substack{A \in F \\ NA \leq x}} \frac{1}{NA} \leq [1 + o(1)] \prod_{i=1}^h \left(\frac{\mu_i}{r_i+1}\right)^{q_i} \frac{1}{q_i!} (\text{Log Log } x)^{(r_i+1)q_i}. \end{aligned}$$

2° Le lemme 1.1.14 donne

$$\sum_{\substack{A \in F \\ NA \leq x}} \text{Log } NA = \sum_{\substack{P, B \\ P, B \in F \\ NP, NB \leq x}} \text{Log } NP + x \cdot O\left(\sum_{\substack{B \in G \\ NB \leq x}} \frac{1}{NB}\right).$$

G est la réunion des ensembles disjoints $G_{q'_1, q'_2, \dots, q'_h}$ définis par

$$B \in G_{q'_1, \dots, q'_h} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} B \in (E) \\ \Omega_1(B) = q'_1 \leq q_1 \\ \dots \\ \Omega_h(B) = q'_h \leq q_h \end{array} \right\} \text{ et } q'_1 + q'_2 + \dots + q'_h \leq q_1 + q_2 + \dots + q_h - 2,$$

d'où, d'après le 1° :

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{B \in G_{q'_1, \dots, q'_h} \\ NB \leq x}} \frac{1}{NB} & \sim K_{q'_1, \dots, q'_h} (\text{Log Log } x)^{(r_1+1)q'_1 + \dots + (r_h+1)q'_h} \\ & \leq K_{q'_1, \dots, q'_h} (\text{Log Log } x)^{r_1 q_1 + \dots + r_h q_h + q_1 + q_2 + \dots + q_h - 2}, \end{aligned}$$

donc

$$\sum_{\substack{B \in G \\ NB \leq x}} \frac{1}{NB} = o \left[(\text{Log Log } x)^{(r_1+1)q_1 + (r_2+1)q_2 + \dots + (r_h+1)q_h - 1} \right].$$

3° Posons

$$\theta_i(x) = \sum_{\substack{P_i \in E_i \\ NP_i \leq x}} \text{Log } NP_i \sim \mu_i x (\text{Log Log } x)^{r_i}.$$

On a

$$\sum_{\substack{P, B \\ P, B \in F \\ NP, NB \leq x}} \text{Log } NP = \sum_{i=1}^h \sum_{\substack{P_i, B \\ P_i \in E_i \\ \text{Condition } C' \\ \left\{ \begin{array}{l} B \in (E) \\ \Omega_i(B) = q_i - 1 \\ \Omega_j(B) = q_j \text{ si } j \neq i, 1 \leq j \leq h \\ NP_i NB \leq x \end{array} \right.}} \text{Log } NP_i,$$

d'où

$$\sum_{\substack{P, B \in F \\ NP, NB \leq x}} \text{Log } NP = \sum_{i=1}^h \sum_{\substack{B \\ \text{Condition } C' \\ NB \leq x}} \theta_i\left(\frac{x}{NB}\right).$$

Nous utilisons le lemme 1.1.13 en prenant $\varphi(x) = (\text{Log Log } x)^{r_i}$, la fonction $h(x) = \sqrt{x}$ répond aux hypothèses :

1° $\sqrt{x} \rightarrow \infty$;

2° $\frac{x}{\sqrt{x}} \rightarrow \infty$;

3° $(\text{Log Log } \sqrt{x})^{r_i} \sim (\text{Log Log } x)^{r_i}$;

4° $\sum_{\substack{B \\ \text{Condition } C' \\ NB \leq \frac{x}{\sqrt{x}}}} \frac{1}{NB} \sim \sum_{\substack{B \\ \text{Condition } C' \\ NB \leq x}} \frac{1}{NB}$.

Le lemme 1.1.13 donne

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{P, B \in F \\ NP, NB \leq x}} \text{Log } NP &= \sum_{i=1}^h [1 + o(1)] \mu_i x (\text{Log Log } x)^{r_i} \sum_{\substack{B \\ \text{Condition } C' \\ NB \leq x}} \frac{1}{NB}, \\ \sum_{\substack{P, B \in F \\ NP, NB \leq x}} \text{Log } NP &= [1 + o(1)] \\ &\times \sum_{i=1}^h \left[\mu_i x (\text{Log Log } x)^{r_i} \left(\frac{\mu_1}{r_1+1}\right)^{q_1} \dots \left(\frac{\mu_i}{r_i+1}\right)^{q_i-1} \dots \left(\frac{\mu_h}{r_h+1}\right)^{q_h} \right. \\ &\times \left. \frac{1}{q_1! \dots (q_i-1)! \dots q_h!} (\text{Log Log } x)^{(r_1+1)q_1 + \dots + (r_i+1)(q_i-1) + \dots + (r_h+1)q_h} \right] \\ &= [1 + o(1)] \left(\frac{\mu_1}{r_1+1}\right)^{q_1} \dots \left(\frac{\mu_h}{r_h+1}\right)^{q_h} \frac{(r_1+1)q_1 + \dots + (r_h+1)q_h}{q_1! \dots q_h!} \\ &\times x (\text{Log Log } x)^{(r_1+1)q_1 + \dots + (r_h+1)q_h - 1}, \end{aligned}$$

et tenant compte du 2^o :

$$\sum_{\substack{A \in F \\ NA \leq x}} \text{Log } NA \sim \sum_{\substack{P, B \in F \\ NP, NB \leq x}} \text{Log } NP;$$

le lemme 1.1.11 donne le résultat énoncé.

CHAPITRE 3.

Δ_r -SEMI-GROUPES PARTICULIERS.

Dans la définition 1.3.1 des Δ'_n -semi-groupes on considère un Δ_r -semi-groupe pour lequel $r = n$ est entier et l'on impose à la fonction de variable complexe $\psi(s) = \sum_{\substack{P \in E \\ NP \leq x}} \frac{1}{(NP)^{s+1}}$ d'avoir un développement asymptotique d'une certaine forme. Ces conditions permettent, en utilisant un théorème taubérien d'Ingham dans le cas où $n \geq 1$, et un théorème taubérien d'Hardy et Littlewood dans le cas particulier où $n = 0$, d'obtenir explicitement un équivalent du nombre $\nu(x)$ des éléments de (E) de norme au plus égale à x , lorsque x est infiniment grand.

Les hypothèses faites dans la définition 1.3.3 des D_n -semi-groupes portent uniquement sur $\psi(s)$, elles font intervenir des conditions d'holomorphicité. Il découle d'un théorème de H. Delange qu'un D_n -semi-groupe est un Δ'_n -semi-groupe; d'ailleurs les D_n -semi-groupes généralisent les semi-groupes engendrés par des ensembles réguliers de nombres premiers qui ont été introduits et étudiés par H. Delange.

Les D_n -semi-groupes se sont introduits naturellement au cours de l'étude de la valeur moyenne d'une fonction arithmétique qui fait l'objet du chapitre 3 de la deuxième partie.

Δ'_n -Semi-groupes.

1.3.1. DÉFINITION. — n étant un entier positif ou nul, nous appelons Δ'_n -semi-groupe un Δ_n -semi-groupe tel que

$$\psi(s) = \sum_{\substack{P \in E \\ NP \leq x}} \frac{1}{(NP)^{s+1}} = \frac{\mu}{n+1} \left(\log \frac{1}{s} \right)^{n+1} + a_1 \left(\log \frac{1}{s} \right)^n + \dots + a_n \log \frac{1}{s} + a_{n+1} + o(1)$$

lorsque s tend vers zéro dans tout angle $|\theta| \leq \theta_0 < \frac{\pi}{2}$, a_i réel quelconque ($\log \frac{1}{s}$ est pris avec sa détermination principale).

(L'existence des Δ'_n -semi-groupes découle de celle des D_n -semi-groupes définis plus loin.)

Remarque. — On peut démontrer que pour tout Δ_n -semi-groupe, on a, lorsque s tend vers zéro dans tout angle $|\theta| \leq \theta_0 < \frac{\pi}{2}$:

$$\psi(s) \sim \frac{\mu}{n+1} \left(\log \frac{1}{s} \right)^{n+1}.$$

1.3.2. THÉORÈME. — Si $\nu(x)$ désigne le nombre des éléments d'un Δ'_n -semi-groupe, de norme au plus égale à x , lorsque x tend vers l'infini, on a :

1° si $n \geq 1$,

$$\nu(x) \sim x \exp \{ V(\text{Log Log } x, \text{Log Log Log } x) \}$$

V désignant un polynôme à deux variables de degré $n+1$, le terme prépondérant de $V(\text{Log Log } x, \text{Log Log Log } x)$ pour x infini est

$$\frac{\mu}{n+1} (\text{Log Log } x)^{n+1};$$

2° si $n = 0$,

$$\nu(x) \sim \frac{g e^{g_1}}{\Gamma(\mu)} x (\text{Log } x)^{\mu-1} = x e^{(\mu-1)\text{Log Log } x + \text{cte.}}$$

DÉMONSTRATION DE LA PREMIÈRE PARTIE.

1.3.2.1. Théorème taubérien d'Ingham ⁽²⁾ :

I. Soit

$$(2) \quad f(s) = \int_0^{+\infty} e^{-us} dA(u), \quad s = \sigma + it, \quad A(0) = 0, \quad \sigma > 0.$$

II. Soit deux fonctions $\varphi(s)$ et $\chi(s)$ et un domaine D du plan complexe tels que :

a. D contient l'intervalle $]0, h]$ de l'axe réel; $\varphi(s)$ et $\chi(s)$ sont holomorphes dans D ; elles sont réelles et positives sur $]0, h]$;

b. $-\sigma\varphi'(\sigma) \rightarrow +\infty$ en croissant quand $\sigma \rightarrow 0$ en décroissant;

c. $\frac{\delta(\sigma)}{\sigma} \rightarrow +\infty$ quand $\sigma \rightarrow 0$, où $\delta(\sigma)$ est la distance du point σ au

$$\frac{[\varphi''(\sigma)]^{\frac{1}{2}}}{-\varphi'(\sigma)}$$

complémentaire de D $[0 < \sigma \leq h, \delta(\sigma) \leq \sigma]$;

d. $\varphi''(\sigma + z) = O[\varphi''(\sigma)]$; $\chi(\sigma + z) = O[\chi(\sigma)]$ uniformément pour $|z| < \delta(\sigma)$ quand $\sigma \rightarrow 0$.

III. Posons

$$f_0(s) = \chi(s) e^{\varphi(s)}; \quad A_0(\omega) = \frac{\chi(\sigma) e^{\varphi(\sigma) + \omega\sigma}}{\{2\pi\sigma^2\varphi''(\sigma)\}^{\frac{1}{2}}},$$

⁽²⁾ INGHAM, *Ann. Math.*, t. 42, 1941.

où $\sigma = \sigma_\omega$ est la solution (qui existe et qui est unique lorsque ω est assez grand) de

$$-\varphi'(\sigma) = \omega.$$

THÉORÈME. — *Supposons que l'intégrale (2) converge pour $\sigma > 0$ et que :*

- (i) $f(s) \sim f_0(s)$ quand $s \rightarrow 0$ dans D;
- (ii) $f(s) = O[f_0(|s|)]$ quand $s \rightarrow 0$ dans un angle fixé de la forme $|t| \leq \Delta \cdot \sigma$, $0 < \Delta < \infty$;

(iii) $A(u)$ est croissante pour $u \geq 0$.

Si ii est vérifiée pour chaque Δ fixé, alors $A(u) \sim A_0(u)$ quand $u \rightarrow \infty$.

1.3.2.2. *Vérification des conditions d'application.* — D'après le corollaire 1.1.7 et la définition 1.3.1, on a, lorsque $s \rightarrow 0$ dans tout angle $|\theta| \leq \theta_0 < \frac{\pi}{2}$:

$$\begin{aligned} \sum_A \frac{1}{(\overline{NA})^{s+1}} &\sim g \exp \left[\frac{\mu}{n+1} \left(\log \frac{1}{s} \right)^{n+1} + a_1 \left(\log \frac{1}{s} \right)^n + \dots + a_n \log \frac{1}{s} + a_{n+1} \right] \\ &= \exp \sum_{k=0}^{n+1} a'_k \left(\log \frac{1}{s} \right)^{n+1-k} = f_0(s) \quad (a'_k \text{ constante réelle}) \quad \text{et} \quad a'_0 = \frac{\mu}{n+1}. \end{aligned}$$

En utilisant le théorème d'Ingham, nous nous proposons d'abord d'évaluer

$$\sum_{NA \leq x} \frac{1}{NA} = \lambda(x).$$

On a

$$\sum_A \frac{1}{(\overline{NA})^{s+1}} = \sum_A \frac{1}{(\overline{NA})^s} \frac{1}{NA} = \int_{1-}^{+\infty} \frac{1}{t^s} d\lambda(t),$$

posons $t = e^u$, $\lambda(e^u) = \beta(u)$ si $u > 0$, $\beta(0) = 0$;

$$\sum_A \frac{1}{(\overline{NA})^{s+1}} = \int_0^{+\infty} e^{-su} d\beta(u) \sim f_0(s).$$

Nous prendrons pour D l'intérieur de l'angle $|\theta| \leq \frac{\pi}{4}$ limité par les bissectrices des axes, d'où $\delta(\sigma) = \frac{\sigma}{\sqrt{2}}$; nous poserons

$$\chi(s) = 1, \quad \varphi(s) = \sum_{k=0}^{n+1} a'_k \left(\log \frac{1}{s} \right)^{n+1-k},$$

d'où

$$\varphi'(s) = -\frac{1}{s} \sum_{k=0}^{n+1} (n+1-k) a'_k \left(\log \frac{1}{s}\right)^{n-k} \sim -\frac{\mu}{s} \left(\log \frac{1}{s}\right)^n,$$

$$\varphi''(s) = \frac{1}{s^2} \sum_{k=0}^{n+1} (n+1-k) a'_k \left(\log \frac{1}{s}\right)^{n-k} + \frac{1}{s^2} \sum_{k=0}^{n+1} (n-k)(n+1-k) a'_k \left(\log \frac{1}{s}\right)^{n-k-1},$$

$\varphi''(s) \sim \frac{\mu}{s^2} \left(\log \frac{1}{s}\right)^n$; lorsque $s \rightarrow 0$ avec $\Re s > 0$.

Vérifions maintenant les conditions d'application du théorème d'Ingham :

a. Évident.

b. $-\sigma\varphi'(\sigma) \sim \mu \left(\text{Log} \frac{1}{\sigma}\right)^n \rightarrow \infty$ quand $\sigma \rightarrow 0$ car $n \geq 1$; $-\sigma\varphi'(\sigma)$ est un polynôme en $\log \frac{1}{\sigma}$ dont le terme de plus fort degré est $\mu \left(\text{Log} \frac{1}{\sigma}\right)^n$, donc $-\sigma\varphi'(\sigma)$ croît lorsque σ décroît et tend vers zéro.

$$c. \frac{\frac{\partial(\sigma)}{\sigma}}{\frac{(\varphi''(\sigma))^{\frac{1}{2}}}{-\varphi'(\sigma)}} \sim \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{\mu} \left(\text{Log} \frac{1}{\sigma}\right)^{\frac{n}{2}}}} \rightarrow \infty.$$

d. $|\sigma - |z|| \leq |\sigma + z| \leq \sigma + |z|$; si $|z| < \frac{\sigma}{\sqrt{2}}$, on a

$$\sigma \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \leq |\sigma + z| \leq \sigma \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right); \quad \text{si } \sigma \rightarrow 0, \quad \sigma + z \rightarrow 0.$$

Puisque $\varphi''(s) \sim \frac{\mu}{s^2} \left(\log \frac{1}{s}\right)^n$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$|s| < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{2} \left| \frac{\mu}{s^2} \left(\log \frac{1}{s}\right)^n \right| < |\varphi''(s)| < 2 \left| \frac{\mu}{s^2} \left(\log \frac{1}{s}\right)^n \right|.$$

Prenons $\sigma < \frac{\varepsilon}{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}}$, nous avons

$$|\varphi''(\sigma + z)| < 2 \frac{\mu}{|\sigma + z|^2} \left| \log \frac{1}{\sigma + z} \right|^n.$$

$$|\varphi''(\sigma)| > \frac{1}{2} \frac{\mu}{\sigma^2} \left| \text{Log} \frac{1}{\sigma} \right|^n,$$

d'où

$$\left| \frac{\varphi''(\sigma + z)}{\varphi''(\sigma)} \right| < 4 \frac{\sigma^2}{|\sigma + z|^2} \left| \frac{\log \frac{1}{\sigma + z}}{\text{Log} \frac{1}{\sigma}} \right|^n,$$

mais

$$\begin{aligned} \left| \log \frac{1}{\sigma + z} \right|^2 &= \left\{ \operatorname{Log} \left| \frac{1}{\sigma + z} \right| \right\}^2 + \left| \operatorname{Arg} \frac{1}{\sigma + z} \right|^2 \\ &\leq \left[\operatorname{Log} \frac{1}{\sigma \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)} \right]^2 + \frac{\pi^2}{4} \sim \left(\operatorname{Log} \frac{1}{\sigma} \right)^2 < 4 \left(\operatorname{Log} \frac{1}{\sigma} \right)^2 \quad \text{si } \sigma < \varepsilon_1, \end{aligned}$$

de sorte que

$$\left| \log \frac{1}{\sigma + z} \right| < 2 \left(\operatorname{Log} \frac{1}{\sigma} \right) \quad \text{si } \sigma < \varepsilon_1.$$

Donc si $\sigma < \min \left(\frac{\varepsilon}{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}}, \varepsilon_1 \right)$, on a

$$\left| \frac{\varphi''(\sigma + z)}{\varphi''(\sigma)} \right| < \frac{2^{n+2}}{\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2}.$$

Les conditions (i) et (iii) sont vérifiées, reste à examiner (ii); comme $f(s) \sim f_0(s)$ lorsque $s \rightarrow 0$ dans tout angle $|\theta| \leq \theta_0 < \frac{\pi}{2}$, il suffit de montrer que :

$$\left| \frac{f_0(s)}{f_0(|s|)} \right| \text{ est bornée lorsque } s \rightarrow 0 \text{ dans dans tout angle } |\theta| \leq \theta_0 < \frac{\pi}{2}.$$

On a

$$\begin{aligned} \left| \frac{f_0(s)}{f_0(|s|)} \right| &= \left| \exp \sum_{k=0}^{n+1} a'_k \left[\left(\log \frac{1}{s} \right)^{n+1-k} - \left(\operatorname{Log} \frac{1}{|s|} \right)^{n+1-k} \right] \right| \\ &= \exp \sum_{k=0}^{n+1} a'_k \left[\mathcal{R} \left(\log \frac{1}{s} \right)^{n+1-k} - \left(\operatorname{Log} \frac{1}{|s|} \right)^{n+1-k} \right], \end{aligned}$$

mais

$$\log \frac{1}{s} = \operatorname{Log} \frac{1}{|s|} + i \operatorname{Arg} \frac{1}{s},$$

d'où

$$\begin{aligned} \mathcal{R} \left(\log \frac{1}{s} \right)^j &= \left(\operatorname{Log} \frac{1}{|s|} \right)^j - C_j^2 \left(\operatorname{Arg} \frac{1}{s} \right)^2 \left(\operatorname{Log} \frac{1}{|s|} \right)^{j-2} [1 + o(1)] \\ &\quad (\text{on prendra } C_0^2 = C_1^2 = 0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{f_0(s)}{f_0(|s|)} \right| &= \exp \left\{ \sum_{k=0}^{n+1} -a'_k C_{n+1-k}^2 \left(\operatorname{Arg} \frac{1}{s} \right)^2 \left(\operatorname{Log} \frac{1}{|s|} \right)^{n-1-k} [1 + o(1)] \right\} \\ &= \exp \left\{ - \left(\operatorname{Arg} \frac{1}{s} \right)^2 \sum_{k=0}^{n+1} a'_k C_{n+1-k}^2 \left(\operatorname{Log} \frac{1}{|s|} \right)^{n-1-k} [1 + o(1)] \right\}. \end{aligned}$$

On a donc

$$\left| \frac{f_0(s)}{f_0(|s|)} \right| = \exp \left\{ - \left(\operatorname{Arg} \frac{1}{s} \right)^2 \frac{\mu}{n+1} C_{n+1}^2 \left(\operatorname{Log} \frac{1}{|s|} \right)^{n-1} [1 + o(1)] \right\} \leq 1 \quad \text{si } |s| < |s_0|.$$

1.3.2.3. *Évaluation asymptotique de la racine unique de l'équation d'Ingham (qui tend vers zéro) lorsque ω tend vers l'infini.* — Cette équation s'écrit

$$-\varphi'(\sigma) = \frac{1}{\sigma} \sum_{k=0}^{n+1} (n+1-k) a'_k \left(\operatorname{Log} \frac{1}{\sigma} \right)^{n-k} = \omega.$$

Posons $\operatorname{Log} \frac{1}{\sigma} = x$; en prenant les logarithmes des deux membres et en changeant les notations :

$$x + \operatorname{Log}(b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_n) = \operatorname{Log} \omega = \nu, \quad b_0 = (n+1) a'_0 = \mu.$$

Soit N un entier ≥ 2 :

$$x + \operatorname{Log} b_0 x^n \left(1 + \frac{b_1}{b_0 x} + \dots + \frac{b_n}{b_0 x^n} \right) = \nu;$$

on a, pour x infini :

$$(1) \quad x + n \operatorname{Log} x + \operatorname{Log} \mu + \left(\sum_{j=1}^N \frac{C_j}{x^j} \right) + \frac{o(1)}{x^N} = \nu,$$

d'où $x \sim \nu$, posons

$$x = \nu + \nu_1, \quad \nu_1 = o(\nu);$$

en portant dans (1) :

$$(2) \quad n \operatorname{Log}(\nu + \nu_1) + \operatorname{Log} \mu + \left[\sum_{j=1}^N \frac{C_j}{(\nu + \nu_1)^j} \right] + \frac{o(1)}{\nu^N} = -\nu_1,$$

d'où $\nu_1 \sim -n \operatorname{Log} \nu$, donc $\frac{\nu_1^m}{\nu} \rightarrow 0$ quel que soit $m \geq 0$,

$$\operatorname{Log}(\nu + \nu_1) = \operatorname{Log} \nu + \operatorname{Log} \left(1 + \frac{\nu_1}{\nu} \right) = \operatorname{Log} \nu + \left(\sum_{j=1}^{N+1} C_j \frac{\nu_1^j}{\nu^j} \right) + \frac{o(1)}{\nu^N} \frac{\nu_1^{N+1}}{\nu},$$

$$\operatorname{Log}(\nu + \nu_1) = \operatorname{Log} \nu + \left(\sum_{j=1}^N C_j \frac{\nu_1^j}{\nu^j} \right) + \frac{o(1)}{\nu^N};$$

par ailleurs :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \frac{C_j}{(\nu + \nu_1)^j} &= \sum_{j=1}^N \frac{C_j}{\nu^j} \left(1 + \frac{\nu_1}{\nu} \right)^{-j} = \sum_{j=1}^N \frac{C_j}{\nu^j} \left[\left(\sum_{k=0}^{N-1} C_{j,k}'' \frac{\nu_1^k}{\nu^k} \right) + \frac{o(1)}{\nu^{N-1}} \right] \\ &= \left(\sum_{\substack{j=1, \dots, N \\ k=0, \dots, N-1}} \frac{C_j C_{j,k}'' \nu_1^k}{\nu^{j+k}} \right) + \frac{o(1)}{\nu^N} = \left(\sum_{l=1}^N \frac{\sum_{j=1}^l C_j C_{j, l-j}'' \nu_1^{l-j}}{\nu^l} \right) + \frac{o(1)}{\nu^N}; \end{aligned}$$

en portant dans (2) :

$$n \operatorname{Log} v + \operatorname{Log} \mu + \left(\sum_{l=1}^N \frac{n C_l v_1^l + \sum_{j=1}^l C_j C_{j, l-j} v_1^{l-j}}{v^l} \right) + \frac{o(1)}{v^N} = -c_1,$$

soit

$$(3) \quad n \operatorname{Log} v + \operatorname{Log} \mu + \left[\sum_{l=1}^N \frac{Q_1^{(l)}(v_1)}{v^l} \right] + \frac{o(1)}{v^N} = -c_1,$$

$Q_1^{(l)}$ étant un polynôme de degré $\leq l$ ou identiquement nul.

De (3) on déduit

$$c_1 = -n \operatorname{Log} v - \operatorname{Log} \mu - c_2 \quad \text{avec} \quad c_2 = o(1);$$

en portant dans (3) :

$$\left[\sum_{l=1}^N \frac{Q_1^{(l)}(-n \operatorname{Log} v - \operatorname{Log} \mu + c_2)}{v^l} \right] + \frac{o(1)}{v^N} = -c_2.$$

En développant suivant les puissances de v_2 :

$$(4) \quad \left[\sum_{l=1}^N \frac{\sum_{j=0}^l Q_{2,l}^{(l-j)}(\operatorname{Log} v) v_2^j}{v^l} \right] + \frac{o(1)}{v^N} = -c_2,$$

$Q_{2,l}^{(l-j)}$ étant un polynôme de degré $\leq l-j$ ou identiquement nul.

De (4) on déduit

$$c_2 = \frac{-Q_{2,1}^{(1)}(\operatorname{Log} v) + c_3}{v} = \frac{-Q_{2,1}^{(1)}(\operatorname{Log} v)}{v} + \frac{c_3}{v}, \quad \text{avec} \quad c_3 = o(1).$$

En portant dans (4) :

$$\left\{ \sum_{l=1}^N \sum_{j=0}^l \frac{Q_{2,l}^{(l-j)}(\operatorname{Log} v) [-Q_{2,1}^{(1)}(\operatorname{Log} v) + c_3]^j}{v^{l+j}} \right\} + \frac{o(1)}{v^N} = \frac{Q_{2,1}^{(1)}(\operatorname{Log} v)}{v} - \frac{c_3}{v}.$$

En ordonnant suivant les puissances de $\frac{1}{v}$;

$$\begin{aligned} l+j &= k, & j &= k-l & \text{pour } k \text{ et } l \text{ fixés;} \\ 0 \leq j \leq l, & 0 \leq k-l \leq l, & \frac{k}{2} \leq l \leq k & \text{pour } k \text{ fixé;} \\ l \leq k \leq 2l, & 1 \leq k \leq 2N; \end{aligned}$$

donc

$$\left\{ \frac{\sum_{k=1}^N \sum_{\frac{k}{2} \leq l \leq k} Q_{2,l}^{(2l-k)}(\text{Log } \nu) [-Q_{2,1}^{(1)}(\text{Log } \nu) + \nu_3]^{k-l}}{\nu^k} \right\} + \frac{o(1)}{\nu^N} = \frac{Q_{2,1}^{(1)}(\text{Log } \nu)}{\nu} - \frac{\nu_3}{\nu},$$

d'où

$$\left\{ \frac{\sum_{k=2}^N \sum_{\frac{k}{2} \leq l \leq k} Q_{2,l}^{(2l-k)}(\text{Log } \nu) [-Q_{2,1}^{(1)}(\text{Log } \nu) + \nu_3]^{k-l}}{\nu^k} \right\} + \frac{o(1)}{\nu^N} = -\frac{\nu_3}{\nu}.$$

En développant suivant les puissances de ν_3 , le coefficient de ν_3^j pour k et l fixés est un polynôme de degré d avec $d \leq 2l - k + k - l - j = l - j$, lorsque l varie, j étant fixé, on a $0 \leq j \leq k - l$, $l \leq k - j$, donc $d \leq k - 2j$; d'où

$$(5) \quad \left\{ \frac{\sum_{k=2}^N \sum_{0 \leq j \leq \frac{k}{2}} Q_{3,k}^{(k-2j)}(\text{Log } \nu) \nu_3^j}{\nu^k} \right\} + \frac{o(1)}{\nu^N} = -\frac{\nu_3}{\nu},$$

$Q_{3,k}^{(k-2j)}$ désignant un polynôme de degré $\leq k - 2j$ ou identiquement nul.

Démontrons par récurrence sur $m (m \geq 3)$ qu'il existe une suite ν_m et un ensemble de polynômes $Q_{m,l}^{(i)} [l \geq m - 1, i = l - (m - 1)j, 0 \leq j \leq \frac{l}{m-1}]$ avec degré de $Q_{m,l}^{(i)} \leq i$ ou $Q_{m,l}^{(i)}$ identiquement nul, tels que, quel que soit $N \geq m - 1$, on ait

$$(6) \quad \nu_{m-1} = \frac{-Q_{m-1,m-2}^{(m-2)}(\text{Log } \nu) + \nu_m}{\nu},$$

$$(7) \quad \nu_m = o(1),$$

$$(8) \quad \left\{ \frac{\sum_{l=m-1}^N \sum_{0 \leq j \leq \frac{l}{m-1}} Q_{m,l}^{(l-(m-1)j)}(\text{Log } \nu) \nu_m^j}{\nu^l} \right\} + \frac{o(1)}{\nu^N} = -\frac{\nu_m}{\nu^{m-2}}.$$

Nous supposons donc le résultat établi pour tous les entiers $\leq m$ avec $m \leq N$.

(8) entraîne

$$\begin{aligned} \frac{\nu_m}{\nu^{m-2}} &= \frac{-Q_{m,m-1}^{(m-1)}(\text{Log } \nu) - Q_{m,m-1}^{(0)}(\text{Log } \nu) \nu_m}{\nu^{m-1}} + \frac{o(1)}{\nu^{m-1}} \\ &= \frac{-Q_{m,m-1}^{(m-1)}(\text{Log } \nu) + \nu_{m+1}}{\nu^{m-1}} \quad \text{avec } \nu_{m+1} = o(1), \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} \nu_m &= \frac{-Q_{m,m-1}^{(m-1)}(\text{Log } \nu) + \nu_{m+1}}{\nu}, \\ \nu_{m+1} &= o(1) \end{aligned}$$

c'est-à-dire (6) et (7) dans lesquelles m est remplacé par $m + 1$.

Portons dans (8) :

$$\begin{aligned} & \left\{ \sum_{l=m-1}^N \sum_{0 \leq j \leq \frac{l}{m-1}} \frac{Q_{m,l}^{[l-(m-1)j]}(\text{Log } \nu) [-Q_{m,m-1}^{(m-1)}(\text{Log } \nu) + \nu_{m+1}]^j}{\nu^{l+j}} \right\} + \frac{o(1)}{\nu^N} \\ &= \frac{Q_{m,m-1}^{(m-1)}(\text{Log } \nu) - \nu_{m+1}}{\nu^{m-1}}; \end{aligned}$$

ordonnons suivant les puissances de $\frac{1}{\nu}$; posons

$$\begin{aligned} l+j &= k, & j &= k-l, & 0 \leq j &\leq \frac{l}{m-1} & \quad 0 \leq k-l &\leq \frac{l}{m-1}, \\ \frac{m-1}{m} k &\leq l \leq k, & m-1 &\leq k &\leq \frac{m}{m-1} N \quad (> N); \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} & \left\{ \sum_{k=m-1}^N \frac{\sum_{\frac{m-1}{m} k \leq l \leq k} Q_{m,l}^{[l-(m-1)(k-l)]}(\text{Log } \nu) [-Q_{m,m-1}^{(m-1)}(\text{Log } \nu) + \nu_{m+1}]^{k-l}}{\nu^k} \right\} + \frac{o(1)}{\nu^N} \\ &= \frac{Q_{m,m-1}^{(m-1)}(\text{Log } \nu)}{\nu^{m-1}} - \frac{\nu_{m+1}}{\nu^{m-1}}, \end{aligned}$$

qui entraîne

$$\left\{ \sum_{k=m}^N \frac{\sum_{\frac{m-1}{m} k \leq l \leq k} Q_{m,l}^{[l-(m-1)(k-l)]}(\text{Log } \nu) [-Q_{m,m-1}^{(m-1)}(\text{Log } \nu) + \nu_{m+1}]^{k-l}}{\nu^k} \right\} + \frac{o(1)}{\nu^N} = -\frac{\nu_{m+1}}{\nu^{m-1}}.$$

Nous développons le \sum_l suivant les puissances de ν_{m+1} , le coefficient de ν_{m+1}^j pour k et l fixés est un polynôme de degré d , avec

$$\begin{aligned} d &\leq l - (m-1)(k-l) + (m-1)(k-l-j) = l - (m-l)j = l + j - mj; \\ 0 &\leq j \leq k-l; \quad l+j \leq k; \quad d \leq k - mj; \end{aligned}$$

d'où

$$\left\{ \sum_{k=m}^N \frac{\sum_{0 \leq j \leq \frac{k}{m}} Q_{m+1,k}^{(k-mj)}(\text{Log } \nu) \nu_{m+1}^j}{\nu^k} \right\} + \frac{o(1)}{\nu^N} = -\frac{\nu_{m+1}}{\nu^{m-1}},$$

qui est la relation (8) dans laquelle m est remplacé par $m + 1$.

Quel que soit l'entier m , on a donc

$$x = v - n \operatorname{Log} v - \operatorname{Log} \mu - \frac{Q_{2,1}^{(1)}(\operatorname{Log} v)}{v} - \frac{Q_{3,2}^{(2)}(\operatorname{Log} v)}{v^2} - \dots - \frac{Q_{m+1,m}^{(m)}(\operatorname{Log} v) + o(1)}{v^m}.$$

En simplifiant les notations, on a :

Quel que soit l'entier m , il existe un développement asymptotique de x de la forme

$$x = v - n \operatorname{Log} v - \operatorname{Log} \mu + \frac{R_1(\operatorname{Log} v)}{v} + \frac{R_2(\operatorname{Log} v)}{v^2} + \dots + \frac{R_m(\operatorname{Log} v) + o(1)}{v^m},$$

R_i étant un polynôme de degré au plus égal à i ou identiquement nul.

1.3.2.4. *Démonstration du 1^o.* — Le théorème d'Ingham donne

$$\beta(u) \sim \frac{\exp \left\{ \left[\sum_{k=0}^{n+1} a'_k \left(\operatorname{Log} \frac{1}{\sigma} \right)^{n+1-k} \right] + u\sigma \right\}}{[2\pi\sigma^2\varphi''(\sigma)]^{\frac{1}{2}}},$$

avec

$$\log \frac{1}{\sigma} = x, \quad u = \omega, \quad v = \operatorname{Log} u, \quad \sigma u = \sigma\omega = \sum_{k=0}^{n+1} (n+1-k) a'_k \left(\operatorname{Log} \frac{1}{\sigma} \right)^{n-k},$$

donc

$\left[\sum_{k=0}^{n+1} a'_k \left(\operatorname{Log} \frac{1}{\sigma} \right)^{n+1-k} \right] + u\sigma$ est un polynôme en x de degré $n+1$ dont le terme de plus fort degré est $\frac{\mu}{n+1} x^{n+1}$.

Quel que soit m , on a

$$x = \left[v + (-n \operatorname{Log} v - \operatorname{Log} \mu) + \sum_{j=1}^{m-1} \frac{R_j(\operatorname{Log} v)}{v^j} \right] + \frac{o(1)}{v^{m-1}},$$

d'où

$$x^m = \left[v + (-n \operatorname{Log} v - \operatorname{Log} \mu) + \sum_{j=1}^{m-1} \frac{R_j(\operatorname{Log} v)}{v^j} \right]^m + o(1);$$

en élevant le crochet à la puissance m , chaque terme est de la forme

$$a_{\alpha_1, \alpha_2; \beta_1, \dots, \beta_{m-1}} \frac{v^{\alpha_1} (-n \operatorname{Log} v - \operatorname{Log} \mu)^{\alpha_2} [R_1(\operatorname{Log} v)]^{\beta_1} \dots [R_{m-1}(\operatorname{Log} v)]^{\beta_{m-1}}}{v^{\beta_1 + 2\beta_2 + \dots + (m-1)\beta_{m-1}}},$$

avec $\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \dots + \beta_{m-1} = m$; si $\alpha_1 < \beta_1 + 2\beta_2 + \dots + (m-1)\beta_{m-1}$, ce terme est égal à $o(1)$; si $\alpha_1 \geq \beta_1 + 2\beta_2 + \dots + (m-1)\beta_{m-1}$, ce terme est un polynôme par rapport aux deux variables v et $\operatorname{Log} v$ de degré $\leq \alpha_1 + \alpha_2 \leq m$; en définitive $x^m = S_m(v, \operatorname{Log} v) + o(1)$; S_m étant un poly-

nome à deux variables de degré m , le terme prépondérant de $S_m(\nu, \text{Log } \nu)$, lorsque ν est infini est ν^m .

Donc

$$\left[\sum_{k=0}^{n+1} a_k \left(\text{Log } \frac{1}{\sigma} \right)^{n+1-k} \right] + u\sigma = S(\nu, \text{Log } \nu) + o(1),$$

S polynome à deux variables de degré $n+1$, le terme prépondérant de $S(\nu, \text{Log } \nu)$ est $\frac{\mu}{n+1} \nu^{n+1}$; donc

$$\beta(u) \sim \frac{\exp[S(\nu, \text{Log } \nu)]}{[2\pi\sigma^2\varphi''(\sigma)]^{\frac{1}{2}}},$$

mais

$$\sigma^2\varphi''(\sigma) \sim \mu \left(\text{Log } \frac{1}{\sigma} \right)^n \sim \mu\nu^n,$$

$$[2\pi\sigma^2\varphi''(\sigma)]^{\frac{1}{2}} \sim \sqrt{2\pi\mu} \nu^{\frac{n}{2}} = \exp \left[\frac{n}{2} \text{Log } \nu + \text{Log } \sqrt{2\pi\mu} \right],$$

donc

$$\beta(u) \sim \exp[W(\nu, \text{Log } \nu)] = \exp[W(\text{Log } u, \text{Log } \text{Log } u)]$$

et

$$\lambda(x) = \sum_{NA \leq x} \frac{1}{NA} \sim \exp[W(\text{Log } \text{Log } x, \text{Log } \text{Log } \text{Log } x)],$$

avec W polynome à deux variables de degré $n+1$, terme prépondérant de $W_1(\text{Log } \text{Log } x, \text{Log } \text{Log } \text{Log } x)$ pour x infini : $\frac{\mu}{n+1} (\text{Log } \text{Log } x)^{n+1}$.

Le théorème 1.2.3 donne

$$\begin{aligned} \nu(x) &\sim \mu \frac{x}{\text{Log } x} (\text{Log } \text{Log } x)^n \exp[W(\text{Log } \text{Log } x, \text{Log } \text{Log } \text{Log } x)] \\ &= x \exp[V(\text{Log } \text{Log } x, \text{Log } \text{Log } \text{Log } x)]. \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION DE LA DEUXIÈME PARTIE.

1.3.2.5. *Théorème taubérien d'Hardy et Littlewood* ⁽³⁾. — Soit $L(x)$ une fonction positive continue pour $x > 0$ qui vérifie pour chaque $\lambda > 1$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{L(\lambda x)}{L(x)} = 1,$$

si

$$f(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} F(t) dt \text{ converge pour } s \text{ réel } > 0 \text{ avec } F(t) > 0$$

⁽³⁾ *Notes on the theory of series XI. On Tauberien theorems* [Proc. London math. Soc., (2), 30, 1929, p. 23].

et si

$$f(s) \sim \frac{1}{s^\tau} L\left(\frac{1}{s}\right) \text{ lorsque } s \rightarrow 0 \text{ par valeurs positives avec } \tau > 0,$$

on a, lorsque $x \rightarrow \infty$:

$$\int_0^x F(t) dt \sim \frac{x^\tau}{\Gamma(1+\tau)} L(x).$$

1.3.2.6. *Démonstration du 2^o.* — Par hypothèse

$$\sum_{p \in E} \frac{1}{(\text{NP})^{s+1}} = \mu \log \frac{1}{s} + a_1 + o(1),$$

donc

$$\sum_A \frac{1}{(\text{NA})^{s+1}} \sim g \exp \sum_P \frac{1}{(\text{NP})^{s+1}} \sim g e^{a_1} \left(\frac{1}{s}\right)^\mu \quad \text{si } s \rightarrow 0$$

par valeurs positives.

Posons $\nu(e^u) = \alpha(u)$, on a

$$\begin{aligned} \sum_A \frac{1}{(\text{NA})^{s+1}} &= \int_{0-}^{+\infty} e^{-(s+1)u} d\alpha(u) = (s+1) \int_0^{+\infty} e^{-su} \frac{\alpha(u)}{e^u} du \\ &\sim \int_0^{+\infty} e^{-su} \frac{\alpha(u)}{e^u} du \sim g e^{a_1} \left(\frac{1}{s}\right)^\mu; \end{aligned}$$

nous prenons $\tau = \mu$, $L(x) = \text{fonction Cte} = g e^{a_1}$, $F(u) = \frac{\alpha(u)}{e^u}$, le théorème donne

$$\int_0^x \frac{\alpha(u)}{e^u} du \sim \frac{x^\mu}{\Gamma(1+\mu)} g e^{a_1},$$

mais

$$\begin{aligned} \sum_{\text{NA} \leq x} \frac{1}{\text{NA}} &= \int_{1-}^x \frac{1}{t} d\nu(t) = \int_{0-}^{\text{Log } x} \frac{d\alpha(u)}{e^u} \\ &= \frac{\alpha(\text{Log } x)}{x} + \int_0^{\text{Log } x} \frac{\alpha(u)}{e^u} du = \frac{\nu(x)}{x} + \int_0^{\text{Log } x} \frac{\alpha(u)}{e^u} du \end{aligned}$$

et

$$\nu(x) \sim \mu \frac{x}{\text{Log } x} \sum_{\text{NA} \leq x} \frac{1}{\text{NA}}, \quad \frac{\nu(x)}{x} = o\left(\sum_{\text{NA} \leq x} \frac{1}{\text{NA}}\right),$$

donc

$$\begin{aligned} \{1 - o(1)\} \sum_{\text{NA} \leq x} \frac{1}{\text{NA}} &= \int_0^{\text{Log } x} \frac{\alpha(u)}{e^u} du = \{1 + o(1)\} \frac{g e^{a_1}}{\Gamma(1+\mu)} (\text{Log } x)^\mu, \\ \sum_{\text{NA} \leq x} \frac{1}{\text{NA}} &\sim \frac{g e^{a_1}}{\Gamma(1+\mu)} (\text{Log } x)^\mu; \end{aligned}$$

de là on déduit

$$\nu(x) \sim \mu \frac{g e^{a_1}}{\Gamma(1+\mu)} \frac{x}{(\text{Log } x)} (\text{Log } x)^\mu = \frac{g e^{a_1}}{\Gamma(\mu)} x (\text{Log } x)^{\mu-1}.$$

D_n -semi-groupes.

1.3.3. DÉFINITION. — n étant un entier supérieur ou égal à zéro, nous appelons D_n -semi-groupe un semi-groupe normé (E) tel que, pour $\mathcal{R}s > 0$:

$$(H) \quad \psi(s) = \sum_{p \in E} \frac{1}{(NP)^{s+1}} = a_0(s) \left(\log \frac{1}{s} \right)^{n+1} + a_1(s) \left(\log \frac{1}{s} \right)^n + \dots + a_n(s) \log \frac{1}{s} + a_{n+1}(s),$$

avec les fonctions $a_i(s)$ holomorphes pour $\mathcal{R}s \geq 0$, réelles pour s réel, et $a_0(0) > 0$.

(L'existence est démontrée dans le chapitre 3 de la 2^e partie.)

1.3.4. THÉORÈME TAUBÉRIEN. — Soit F un sous-ensemble d'un semi-groupe normé et $\nu(x)$ le nombre des éléments de F de norme au plus égale à x . Si l'on a pour $\mathcal{R}s > 1$:

$$\sum_{A \in F} \frac{1}{(NA)^s} = \sum_{j=0}^q a_j(s) \left(\log \frac{1}{s-1} \right)^{q-j} \quad (q \geq 1).$$

avec les fonctions $a_j(s)$ holomorphes pour $\mathcal{R}s \geq 1$ et $a_0(1) \neq 0$, alors on a, pour x infini :

$$\nu(x) \sim q a_0(1) \frac{x (\text{Log Log } x)^{q-1}}{\text{Log } x},$$

(Transposition, dans un cas particulier, du théorème b des Annales.)

1.3.5. COROLLAIRE. — Un D_n -semi-groupe est un Δ'_n -semi-groupe pour lequel $\mu = (n+1) a_0(0)$.

Démonstration. — 1^o D'après le théorème précédent, le nombre des éléments de E, de norme au plus égale à x , est équivalent, pour x infini, à

$$(n+1) a_0(0) \frac{x (\text{Log Log } x)^n}{\text{Log } x},$$

donc (E) est un Δ_n -semi-groupe.

2^o Lorsque $s \rightarrow 0$,

$$a_i(s) = a_i(0) + s[a'_i(0) + o(1)].$$

Lorsque $s \rightarrow 0$ avec $\mathcal{R}s > 0$:

$$a_i(s) \left(\log \frac{1}{s} \right)^k = a_i(0) \left(\log \frac{1}{s} \right)^k + o(1),$$

donc

$$\psi(s) = a_0(0) \left(\log \frac{1}{s} \right)^{n+1} + a_1(0) \left(\log \frac{1}{s} \right)^n + \dots + a_n(0) \log \frac{1}{s} + a_{n+1}(0) + o(1).$$

1.3.6. DÉFINITION. — Un ensemble d'éléments premiers E qui vérifie l'hypothèse H est, d'après le corollaire précédent, de degré n ; nous dirons que E est un H -ensemble d'éléments premiers de degré n .

D-semi-groupes.

1.3.7. DÉFINITION. — 1° Nous dirons que le semi-groupe normé (E) est un D -semi-groupe si l'on a, pour $\Re s > 1$:

$$\sum_{A \in (E)} \frac{1}{(NA)^s} = \frac{u(s)}{(s-1)^\mu},$$

avec $\mu > 0$, $u(s)$ holomorphe et $u(s) \neq 0$ pour $\Re s \geq 1$.

2° Nous dirons que l'ensemble d'éléments premiers E est régulier si l'on a pour $\Re s > 1$:

$$\sum_{P \in E} \frac{1}{(NP)^s} = \mu \log \frac{1}{s-1} + a(s),$$

avec $\mu \geq 0$, $a(s)$ holomorphe pour $\Re s \geq 1$ (définition de H. Delange). Si $\mu > 0$, E est un H -ensemble de degré zéro et de densité μ .

1.3.8. THÉORÈME. — *Pour que le semi-groupe normé (E) soit un D -semi-groupe, il faut et il suffit que l'ensemble E soit régulier et de densité strictement positive. Puisqu'un ensemble régulier de densité strictement positive est un H -ensemble de degré zéro, un D -semi-groupe est un D_0 -semi-groupe.*

Démonstration. — La condition nécessaire est une transposition de la démonstration de la page 27 (2-2) des *Annales* et la condition suffisante est immédiate d'après le corollaire 1.1.7 :

$$\begin{aligned} \sum_A \frac{1}{(NA)^s} &= g(s) \exp \left[\sum_P \frac{1}{(NP)^s} \right] \\ &= g(s) e^{\mu \log \frac{1}{s-1} + a(s)} = \frac{g(s) e^{a(s)}}{(s-1)^\mu} = \frac{u(s)}{(s-1)^\mu} \quad \text{pour } \Re s > 1, \end{aligned}$$

$g(s)$ holomorphe et $g(s) \neq 0$ pour $\Re s > \frac{1}{2}$, donc $u(s)$ holomorphe et $u(s) \neq 0$ pour $\Re s \geq 1$.

DEUXIÈME PARTIE.

ÉTUDE ASYMPTOTIQUE DE CERTAINES PARTITIONS
DANS LES Δ_r -SEMI-GROUPES.

CHAPITRE 1.

ÉQUIRÉPARTITION ASYMPTOTIQUE
DANS CERTAINES PARTITIONS D'UN Δ_r -SEMI-GROUPE.

Après avoir défini les partitions \mathcal{P} , on caractérise les éléments d'une classe d'une telle partition; la technique utilisée est la représentation d'un groupe abélien fini par l'une de ses bases.

On considère ensuite une partition \mathcal{P} d'un Δ_r -semi-groupe et l'on suppose que, pour chaque classe, l'ensemble des éléments premiers qui appartiennent à cette classe possède un degré. On montre alors que, dans ces conditions, les nombres des éléments du semi-groupe, de norme au plus égale à x , respectivement contenus dans deux classes différentes, sont équivalents lorsque x tend vers l'infini; on dit qu'il y a équirépartition asymptotique des éléments du semi-groupe entre les classes.

2.1.1. DÉFINITION. — Une partition \mathcal{P} d'un semi-groupe (E) est une partition qui possède les propriétés suivantes :

1° Le nombre des classes est fini et strictement supérieur à 1.

Il est défini dans l'ensemble des classes une loi de composition qui donne à cet ensemble une structure de groupe abélien fini. Cette loi sera notée multiplicativement.

2° La multiplication des classes est compatible avec celle des éléments de (E).

3° Quelle que soit la classe considérée, l'ensemble des éléments premiers qui appartiennent à cette classe n'est pas vide.

2.1.2. BASE DU GROUPE. — D'après la théorie des groupes abéliens finis, on sait qu'il existe des classes B_1, B_2, \dots, B_n telles que chaque classe s'exprime d'une manière et d'une seule sous la forme

$$B_1^{\alpha_1} \cdot B_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot B_n^{\alpha_n}$$

avec

$$0 \leq \alpha_1 < h_1, \quad 0 \leq \alpha_2 < h_2, \quad \dots, \quad 0 \leq \alpha_n < h_n,$$

$h_i (> 1)$ étant l'ordre du groupe cyclique engendré par B_i .

définies mod m peuvent s'obtenir en ajoutant une solution particulière de (I) définie mod m à toutes les solutions de (I') définies mod m . Le nombre des solutions de (I) définies mod m est égal au nombre des solutions de (I') définies mod m et ce nombre ne dépend pas des a_i ; nous allons d'ailleurs l'évaluer.

Soit $h = h_1 h_2 \dots h_n$ le nombre des classes.

Il y a n inconnues principales, donc $h - n$ non principales.

On peut donner à chaque inconnue non principale m valeurs distinctes (mod m), ce qui fait m^{h-n} possibilités.

Les inconnues non principales étant fixées, la $i^{\text{ième}}$ équation détermine l'inconnue principale correspondante (mod h_i), cette inconnue prend donc une seule valeur définie mod h_i , c'est-à-dire $\frac{m}{h_i}$ valeurs (mod m).

Le nombre des solutions de (I) définies mod m est donc

$$\frac{m}{h_1} \times \frac{m}{h_2} \times \dots \times \frac{m}{h_n} \times m^{h-n} = \frac{m^h}{h}.$$

2.1.5. CONSTRUCTION DES PARTITIONS \mathfrak{X} DE (E). — Soit h_1, \dots, h_n des entiers > 1 . Construisons une partition de E en $h = h_1 h_2 \dots h_n$ ensembles non vides, soit $E(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ ($0 \leq \alpha_i < h_i$) l'un d'eux.

$\Omega_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}(A)$ est le nombre des facteurs (distincts ou non) qui appartiennent à $E(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ dans la décomposition, en facteurs premiers, de l'élément A de (E).

L'ensemble des A de (E) dont les $\Omega(A)$ correspondants sont des solutions de (I) constitue la classe $B(a_1, a_2, \dots, a_n)$; on vérifie que $E(a_1, a_2, \dots, a_n)$ est contenu dans $B(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Chaque A de (E) appartient à une classe et une seule; en effet si A est connu, les $\Omega(A)$ sont connus, les premiers membres de (I) sont connus, donc les a et la classe sont connus; il y a bien partition de (E).

En désignant par $r_{h_i}(a)$ le nombre tel que

$$r_{h_i}(a) \equiv a \pmod{h_i}, \quad 0 \leq r_{h_i}(a) < h_i,$$

la loi de composition du groupe est définie par

$$B(a_1, a_2, \dots, a_n) B(a'_1, a'_2, \dots, a'_n) = B[r_{h_1}(a_1 + a'_1), \dots, r_{h_n}(a_n + a'_n)].$$

Il en résulte qu'en posant $B_i = B(a_1, \dots, a_j, \dots, a_n)$ avec $a_j = \delta_{ij}$, on a

$$B(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = B_1^{\alpha_1} \dots B_n^{\alpha_n}.$$

Montrons que la loi de composition du groupe est compatible avec la multiplication des éléments de (E) :

$$A \in B(a_1, \dots, a_n) \Rightarrow (1) \sum \alpha_i \Omega_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}(A) \equiv a_i \pmod{h_i},$$

$$A' \in B(a'_1, \dots, a'_n) \Rightarrow \sum \alpha_i \Omega_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}(A') \equiv a'_i \pmod{h_i}$$

CHAPITRE 2.

ÉLÉMENTS DE LA CLASSE PRINCIPALE,
 INDÉCOMPOSABLES EN PRODUITS D'ÉLÉMENTS DE CETTE CLASSE,
 DANS CERTAINES PARTITIONS \mathcal{P} D'UN Δ -SEMI-GROUPE.

La classe principale d'une partition \mathcal{P} d'un Δ -semi-groupe forme elle-même un semi-groupe. Il existe dans ce semi-groupe, en plus des éléments premiers, des éléments non premiers qui sont indécomposables dans ce semi-groupe; c'est-à-dire qui ne sont pas le produit de deux éléments de ce semi-groupe (tous deux différents de l'élément unité). Le théorème II (2.2.5), qui est le théorème principal de ce chapitre, donne un équivalent, pour x infini, du nombre des éléments précédents, de norme au plus égale à x ; les hypothèses sont les mêmes que celles faites dans le théorème I d'équirépartition asymptotique.

En cours d'étude il s'est introduit un entier t lié à un groupe abélien fini, t est égal à l'ordre du groupe dans le cas où le groupe est cyclique. Dans le cas où le groupe n'est pas cyclique, pour obtenir un minorant de t , nous avons établi une relation d'inégalité dans les groupes abéliens finis (théorème 2.2.14).

Signalons aussi une application à l'arithmétique : le théorème 2.2.9.

2.2.1. RECHERCHE DES ÉLÉMENTS DE C_0 INDÉCOMPOSABLES DANS C_0 . — La classe principale C_0 est stable pour la multiplication; elle forme un semi-groupe. Il existe des éléments de C_0 différents de e et non premiers qui ne sont pas le produit de deux éléments de C_0 différents de e ; soit E'_0 l'ensemble de ces éléments. L'ensemble des éléments de C_0 , indécomposables dans C_0 , se compose de e , de E'_0 et de l'ensemble E_0 des éléments premiers de C_0 .

Reprenons les notations simplifiées du paragraphe 2.1.6, les classes sont désignées par C_0, C_1, \dots, C_{h-1} et les $\Omega(A)$ correspondants par $\Omega_0, \Omega_1, \dots, \Omega_{h-1}$.

Si un élément A de C_0 est divisible par un élément A' de C_0 avec $A' \neq A$ et $A' \neq e$, on a

$$\Omega_0(A') \leq \Omega_0(A), \quad \Omega_1(A') \leq \Omega_1(A), \quad \dots, \quad \Omega_{h-1}(A') \leq \Omega_{h-1}(A),$$

$$A' \neq A, \quad A' \neq e;$$

il existe donc une solution $\Omega' = (\Omega'_0, \dots, \Omega'_{h-1})$ de (I') différente de la solution nulle et de la solution $\Omega(A) = [\Omega_0(A), \dots, \Omega_{h-1}(A)]$ telle que

$$(1) \quad \Omega'_0 \leq \Omega_0(A), \quad \dots, \quad \Omega'_{h-1} \leq \Omega_{h-1}(A);$$

réciproquement, s'il existe une solution de (I') qui satisfait à la condition (1), qui est différente de la solution triviale zéro et différente de $\Omega(A)$, l'élément A' obtenu en faisant le produit de Ω'_0 facteurs premiers pris parmi les $\Omega_0(A)$ facteurs premiers de A qui appartiennent à C_0, \dots , de Ω'_{h-1} facteurs premiers pris parmi les $\Omega_{h-1}(A)$ facteurs premiers de A qui appartiennent à C_{h-1} , est différent de A et de e et divise A .

2.2.2. RELATION D'ORDRE NON TOTALE DANS LES SOLUTIONS DE (I'). — Soit deux solutions de (I') :

$$\begin{aligned} \Omega &= (\Omega_0, \dots, \Omega_{h-1}), & \Omega' &= (\Omega'_0, \dots, \Omega'_{h-1}); \\ \Omega' \leq \Omega \quad (\Omega' \text{ inférieure à } \Omega) &\Leftrightarrow \Omega'_0 \leq \Omega_0, & \dots, & \Omega'_{h-1} \leq \Omega_{h-1}. \end{aligned}$$

Une solution est positive si elle est supérieure à la solution triviale; strictement positive si elle est positive et différente de zéro. Nous dirons qu'une solution est minimale si elle est strictement positive et s'il n'existe pas de solution strictement positive qui lui soit strictement inférieure (c'est-à-dire inférieure et différente).

2.2.3. LEMME. — Pour qu'un élément A de C_0 appartienne à E'_0 il faut et il suffit que $\Omega_0(A) = 0$ et que la solution $\Omega = (0, \Omega_1, \dots, \Omega_{h-1})$ de (I') associé à A soit une solution minimale de (I').

Démonstration. — Si l'on remarque qu'un élément de E'_0 n'a aucun facteur premier appartenant à E_0 , donc que $\Omega_0(A) = 0$, le lemme est la conséquence immédiate de la conclusion du 2.2.1 et de la définition 2.2.2.

2.2.4. PROPOSITION. — Il existe des solutions minimales de (I') avec $\Omega_0 = 0$. Le nombre des solutions minimales de (I') est fini.

Si m_i est l'ordre du groupe cyclique engendré par C_i , la solution $(0, \Omega_1, \dots, \Omega_j, \dots, \Omega_{h-1})$ avec $\Omega_j = m_i \hat{\zeta}_{ij}$ est minimale car le produit de m_i facteurs premiers appartenant à C_i appartient à C_0 et le produit de moins de m_i facteurs n'appartient pas à C_0 .

Pour que la solution de (I') :

$$(\Omega_0, \Omega_1, \dots, \Omega_{h-1}), \quad \Omega_i \equiv \beta_{ij} \pmod{m}, \quad 0 \leq \beta_{ij} < m, \quad 1 \leq i \leq \frac{m^h}{h},$$

soit minimale il est nécessaire et non suffisant que

$$\Omega_i = \beta_{ij} \quad \text{si } \beta_{ij} \neq 0; \quad \Omega_i = 0 \quad \text{ou} \quad \Omega_i = m \quad \text{si } \beta_{ij} = 0;$$

il en résulte que le nombre des solutions minimales est fini.

2.2.5. THÉORÈME II. — Soit C_0 la classe principale d'une partition \mathfrak{A} d'un Δ_r -semi-groupe (E); $\tau_1(x)$ et $\tau_1(x)$ respectivement le nombre des éléments non premiers de C_0 et le nombre des éléments de C_0 (premiers ou non), de norme

au plus égale à x , indécomposables en un produit de deux éléments de C_0 (tous deux différents de l'élément unité).

Si, quelle que soit la classe de la partition, l'ensemble des éléments premiers qui appartiennent à cette classe possède un degré.

1° On a, pour x infini :

$$\eta_1(x) \sim K \frac{x(\text{Log Log } x)^{T-1}}{\text{Log } x}$$

avec K constante strictement positive, T réel supérieur ou égal à 2. (Si les degrés des ensembles d'éléments premiers contenus dans les classes autres que C_0 sont entiers, T est entier.)

2° En désignant, pour x infini, par

$$[1 + o(1)] \mu_0 \frac{x}{\text{Log } x} (\text{Log Log } x)^{r_0},$$

le nombre des éléments premiers de C_0 de norme au plus égale à x , on a, pour x infini :

$$\eta_1(x) \sim K \frac{x(\text{Log Log } x)^{T-1}}{\text{Log } x} \quad \text{si } T-1 > r_0;$$

(Ceci a lieu, en particulier, si tous les ensembles d'éléments premiers contenus dans les classes sont de même degré.)

$$\eta_1(x) \sim (K + \mu_0) \frac{x(\text{Log Log } x)^{T-1}}{\text{Log } x} \quad \text{si } T-1 = r_0;$$

$$\eta_1(x) \sim \mu_0 \frac{x(\text{Log Log } x)^{r_0}}{\text{Log } x} \quad \text{si } T-1 < r_0.$$

Si les ensembles d'éléments premiers contenus dans les classes autres que C_0 sont de même degré q , $t = \frac{T}{q+1}$ est un entier supérieur ou égal à 2 qui ne dépend que du groupe de composition des classes.

Démonstration. — Le nombre des A de norme au plus égale à x qui appartiennent à E'_0 est égal à la somme des nombres des A , de norme au plus égale à x , qui correspondent à chaque solution minimale de (I') pour laquelle $\Omega_0 = 0$.

Soit $\Omega_0 = 0$, $\Omega_1, \dots, \Omega_{h-1}$ une telle solution, d'après le théorème 1.2.6 le nombre des A , de norme au plus égale à x , qui correspondent à cette solution est équivalent à

$$\left(\frac{\mu_1}{r_1+1}\right)^{\Omega_1} \dots \left(\frac{\mu_{h-1}}{r_{h-1}+1}\right)^{\Omega_{h-1}} \frac{(r_1+1)\Omega_1 + \dots + (r_{h-1}+1)\Omega_{h-1}}{\Omega_1! \dots \Omega_{h-1}!}$$

$$\times \frac{x}{\text{Log } x} (\text{Log Log } x)^{(r_1+1)\Omega_1 + \dots + (r_{h-1}+1)\Omega_{h-1}}.$$

Soit T le maximum de $(r_1 + 1)\Omega_1 + \dots + (r_{h-1} + 1)\Omega_{h-1}$ lorsque $\Omega = (0, \Omega_1, \dots, \Omega_{h-1})$ décrit l'ensemble des solutions minimales de (I) avec $\Omega_0 = 0$ et

$$K = T \times \sum_{\substack{\Omega_1, \dots, \Omega_{h-1} \\ (0, \Omega_1, \dots, \Omega_{h-1}) \text{ est solution minimale de (I) \\ } (r_1+1)\Omega_1 + \dots + (r_{h-1}+1)\Omega_{h-1} = T}} \left(\frac{\mu_1}{r_1+1}\right)^{\Omega_1} \dots \left(\frac{\mu_{h-1}}{r_{h-1}+1}\right)^{\Omega_{h-1}} \frac{1}{\Omega_1! \dots \Omega_{h-1}!}.$$

On a

$$\tau_i(x) \sim K \frac{x (\text{Log Log } x)^{T-1}}{\text{Log } x},$$

$$T \geq \max (r_i + 1) m_i \geq 2 \quad (i = 1, 2, \dots, h - 1).$$

Si r_1, r_2, \dots, r_{h-1} sont entiers, T est entier.

Le nombre des éléments de E'_0 est prépondérant devant celui des éléments de E_0 si et seulement si $T - 1 > r_0$.

Si $r_1 = r_2 = \dots = r_{h-1} = q$,

$$T = \max (q + 1) (\Omega_1 + \dots + \Omega_{h-1}) = (q + 1)t \quad \text{avec } t = \max (\Omega_1 + \Omega_2 + \dots + \Omega_{h-1}),$$

t est un entier ≥ 2 qui ne dépend que du groupe de composition des classes.

Si $r_0 = r_1 = r_2 = \dots = r_{h-1}$, $T - 1 > r_0$ puisque $T \geq 2 (r_0 + 1) > r_0 + 1$.

Propriétés du nombre t .

2.2.6. LEMME. — Si le nombre des diviseurs premiers d'un élément A est supérieur au nombre h des classes, A est divisible par un élément de la classe principale différent de e et de A .

Soit

$$A = P_1 P_2 \dots P_k \quad \text{avec } k > h,$$

P_1, P_2, \dots, P_k étant tous les diviseurs premiers de A distincts ou non. Soit les diviseurs de A , différents de A et différents entre eux :

$$D_1 = P_1, \quad D_2 = P_1 P_2, \quad \dots, \quad D_{k-1} = P_1 P_2 \dots P_{k-1}.$$

Si deux de ces diviseurs appartiennent à la même classe, A est divisible par un élément de la classe principale différent de e et de A .

En effet : $D_i | D_j$ si $i < j$, $\frac{D_j}{D_i}$ est un diviseur de A et

$$\text{Classe de } \frac{D_j}{D_i} = \frac{\text{Classe de } D_j}{\text{Classe de } D_i} = C_0$$

si classe de $D_j =$ classe de D_i .

Si tous ces diviseurs appartiennent à des classes différentes, il y en a au moins un qui appartient à la classe principale puisque leur nombre $k - 1 \geq h$ nombre des classes.

Par ailleurs nous avons vu que les solutions $(o, \Omega_1, \dots, \Omega_j, \dots, \Omega_{h-1})$ avec $\Omega_j = m_i \delta_{ij}$ sont minimales (proposition 2.2.4). On sait que le maximum de m_i est le plus petit commun multiple m de h_1, h_2, \dots, h_n . $t = \max(\Omega_1 + \dots + \Omega_{h-1})$ pris sur les solutions minimales $(o, \Omega_1, \dots, \Omega_{h-1})$ de (I'), donc

$$m \leq t \leq h.$$

2.2.7. THÉORÈME. — *Pour que $t = h$ il faut et il suffit que le groupe des classes soit cyclique.*

Démonstration. — Si le groupe est cyclique, $m = h \Rightarrow t = h$.

Réciproquement supposons que $t = h$, il existe un élément A de E'_0 dont la décomposition contient h facteurs premiers, soit P_1 et P_2 deux de ces facteurs premiers et P_1, P_2, \dots, P_h l'ensemble de tous les diviseurs premiers de A ; C_1, C_2, \dots, C_h les classes correspondantes. Les classes : $C_1, C_1 C_2, C_1 C_2 C_3, \dots, C_1 C_2 C_3 \dots C_{h-1}$ sont $h - 1$ classes différentes deux à deux et différentes de C_0 d'après le raisonnement fait plus haut; elles représentent donc toutes les classes du groupe différentes de C_0 . L'une de ces classes est égale à C_2 , cette classe n'est pas $C_1 C_2 \dots C_i$ car alors on aurait $C_1 C_3 C_4 \dots C_i = C_0$; donc $C_1 = C_2$. Deux diviseurs premiers quelconques de A appartiennent à la même classe : $C_1 = C_2 = \dots = C_h$.

Les classes du groupe sont : $C_0, C_1, C_1^2, \dots, C_1^{h-1}$; le groupe est cyclique.

De plus nous voyons que les solutions minimales : $(\Omega_0, \Omega_1, \dots, \Omega_j, \dots, \Omega_{h-1})$ pour lesquelles $\Omega_1 + \dots + \Omega_{h-1} = t = h = m$, $\Omega_0 = o$, sont de la forme $\Omega_j = h \delta_{ij}$, C_i étant une classe d'ordre h , c'est-à-dire une classe qui engendre le groupe.

2.2.8. Détermination de K lorsque les ensembles d'éléments premiers contenus dans les classes autres que la principale sont de même degré q et que le groupe des classes est cyclique.

Le nombre des classes d'ordre h est $\varphi(h)$, chacune d'elles engendre le groupe (φ , indicatrice d'Euler). On peut supposer que ces classes qui engendrent le groupe sont $C_1, C_2, \dots, C_{\varphi(h)}$; on a

$$K = T \sum_{1 \leq i \leq \varphi(h)} \left(\frac{\mu_i}{q+1} \right)^h \frac{1}{h!} = h(q+1) \frac{1}{h!} \frac{\mu_1^h + \mu_2^h + \dots + \mu_{\varphi(h)}^h}{(q+1)^h},$$

$$K = \frac{\mu_1^h + \mu_2^h + \dots + \mu_{\varphi(h)}^h}{(h-1)! (q+1)^{h-1}}; \quad T = h(q+1).$$

Dans le cas particulier où $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_{\varphi(h)} = \mu$, on a

$$K = \frac{\varphi(h) \mu^h}{(h-1)! (q+1)^{h-1}}.$$

2.2.9. THÉORÈME. — *Si $k = 2, 4, p^2, 2p^2$ (p premier > 2); le nombre des entiers naturels au plus égaux à x , qui sont congrus à $i \pmod{k}$ et qui*

ne sont pas le produit de deux nombres congrus à 1 (mod k) (tous deux différents de 1) est équivalent, pour x infini à

$$\frac{\varphi[\varphi(k)]}{[\varphi(k)]^{\varphi(k)}[\varphi(k)-1]!} \frac{x(\text{Log Log } x)^{\varphi(k)-1}}{\text{Log } x} \quad (\varphi, \text{ fonction d'Euler}).$$

Démonstration. — E est l'ensemble des nombres premiers moins l'ensemble des diviseurs premiers de k ; \mathfrak{R} est la partition déterminée par les classes réduites (mod k). Le nombre des classes est $h = \varphi(k)$;

$$r_1 = \dots = r_{h-1} = q = 0, \quad \mu = \frac{1}{\varphi(k)}$$

Le groupe est cyclique si et seulement si k admet une racine primitive, c'est-à-dire $k = 2, 4, p^z, 2p^z$.

La dernière formule du 2.2.8 donne le résultat énoncé.

2.2.10. SOLUTION MINIMALE ATTACHÉE A UNE BASE. — Soit une base quelconque B_1, B_2, \dots, B_n ; h_1, \dots, h_n les ordres des éléments B_1, B_2, \dots, B_n .

Soit A un élément obtenu en faisant le produit de $h_1 - 1$ facteurs premiers appartenant à B_1 , $h_2 - 1$ facteurs premiers appartenant à $B_2, \dots, h_n - 1$ facteurs premiers appartenant à B_n et d'un facteur premier appartenant à $B_1 B_2 \dots B_n$:

La classe de A est

$$B_1^{h_1-1} \dots B_n^{h_n-1} \cdot B_1 \dots B_n = B_1^{h_1} \dots B_n^{h_n} = C_0.$$

A appartenant à E'_0 , montrons qu'il n'est divisible par aucun élément de C_0 différent de e et de A; en effet la classe d'un diviseur A' de A différent de e et de A est :

soit

$$B_1^{\alpha_1} \dots B_n^{\alpha_n} \quad (0 \leq \alpha_i \leq h_i - 1 \text{ avec l'un des } \alpha_i \neq 0);$$

cette classe est différente de C_0 ;

soit

$$B_1 \dots B_n \neq C_0;$$

soit

$$B_1^{\alpha_1} \dots B_n^{\alpha_n} \cdot B_1 \dots B_n = B_1^{\alpha_1+1} \dots B_n^{\alpha_n+1} \quad (1 \leq \alpha_i + 1 \leq h_i \text{ avec l'un des } \alpha_i + 1 \neq h_i),$$

cette classe est différente de C_0 .

La solution minimale $[\Omega_0 = 0, \Omega_1(A), \dots, \Omega_h(A)]$ est déterminée par la donnée de la base.

On a

$$\Omega_1(A) + \dots + \Omega_h(A) = h_1 + h_2 + \dots + h_n - n + 1;$$

il en résulte que

$$t > h_1 + h_2 + \dots + h_n - n;$$

donc

$$t > \max[h_1 + h_2 + \dots + h_n - n]$$

lorsque $[B_1, B_2, \dots, B_n]$ décrit l'ensemble des bases.

2.2.11. THÉORÈME. — Soit G un groupe abélien fini et t_1, t_2, \dots, t_l ses coefficients de torsion (facteurs invariants).

Quelle que soit la décomposition de G en un produit direct de n groupes cycliques d'ordre h_1, h_2, \dots, h_n (autrement dit, quelle que soit la base B_1, B_2, \dots, B_n de G , l'ordre du groupe cyclique engendré par B_i étant h_i), on a

$$t_1 + t_2 + \dots + t_l - l \geq h_1 + h_2 + \dots + h_n - n.$$

DÉMONSTRATION.

2.2.11.1. DÉFINITION. — Une M -matrice est une (m, l) matrice réelle (a_{ij}) telle que $a_{ij} \geq 0$ quels que soient i et j ; $a_{ij} \geq a_{i, j+1}$ quels que soient i et $j = 1, \dots, l-1$ si $l > 1$.

Une M' -matrice est une M -matrice dans laquelle $a_{ij} \geq 1$ quels que soient i et j .

Si $A = (a_{ij})$, est une (m, l) matrice quelconque; on pose

$$\begin{aligned} \theta(A) &= a_{11}a_{21}\dots a_{m1} + a_{12}a_{22}\dots a_{m2} + a_{1l}a_{2l}\dots a_{ml} \\ &= \text{somme des produits des éléments des colonnes de } A. \end{aligned}$$

2.2.11.2. LEMME. — Si A est une M -matrice et B une matrice déduite de A en effectuant des permutations sur les éléments des lignes, chaque permutation portant sur les éléments d'une même ligne, on a

$$\theta(A) \geq \theta(B).$$

Démonstration.

1° Remarquons que

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_1 \geq \alpha_2 \\ \beta_1 \geq \beta_2 \end{array} \right\} \rightarrow \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 \geq \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1,$$

en effet

$$(\alpha_1 - \alpha_2)(\beta_1 - \beta_2) \geq 0 \Rightarrow \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 \geq \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1.$$

2° Désignons par $T_{i, j-1}$ l'application qui, à la matrice A , fait correspondre la matrice $T_{i, j-1}(A)$ obtenue en transposant dans A l'élément a_{ij} avec l'élément $a_{i, j-1}$ ($j \geq 2$).

Posons $\Phi_{i, j-1} = T_{i, j-1} \circ \dots \circ T_{2, j-1} \circ T_{i, j-1}$ (produit de composition). Soit les matrices

$$A_1 = \Phi_{i, j-1}(A), \quad A_2 = \Phi_{i, j-2}(A_1), \quad \dots, \quad A_p = \Phi_{i, j-p}(A_{p-1}).$$

Montrons que si A est une M matrice, on a

$$\theta(A) \geq \theta(A_p),$$

$\theta(A_1)$ est obtenu en remplaçant dans $\theta(A)$:

$$(a_{1,j-1} a_{2,j-1} \dots a_{i,j-1}) (a_{i+1,j-1} a_{i+2,j-1} \dots a_{m,j-1}) + (a_{1j} a_{2j} \dots a_{ij}) (a_{i+1,j} a_{i+2,j} \dots a_{mj})$$

par

$$(a_{1j} a_{2j} \dots a_{ij}) (a_{i+1,j-1} a_{i+2,j-1} \dots a_{m,j-1}) + (a_{1,j-1} \dots a_{i,j-1}) (a_{i+1,j} a_{i+2,j} \dots a_{mj}).$$

Comme

$$a_{1,j-1} a_{2,j-1} \dots a_{i,j-1} \geq a_{1j} a_{2j} \dots a_{ij}$$

et

$$a_{i+1,j-1} a_{i+2,j-1} \dots a_{m,j-1} \geq a_{i+1,j} a_{i+2,j} \dots a_{mj},$$

le 1^o montre que $\theta(A) \geq \theta(A_1)$.

La matrice obtenue en supprimant de A_1 les colonnes de rang supérieur ou égal à j est une M-matrice, le raisonnement précédent montre que $\theta(A_1) \geq \theta(A_2)$; en définitive :

$$\theta(A) \geq \theta(A_1) \geq \dots \geq \theta(A_p).$$

3^o La proposition est vraie pour une (m, l) M-matrice, supposons-la vraie pour toutes les (m, k) M-matrices avec $k \leq l - 1$ et démontrons qu'elle est vraie pour une (m, l) M-matrice.

Soit $A = (a_{ij})$ une (m, l) M-matrice et $B = (a'_{ij})$ une matrice obtenue à partir de A par des permutations sur les éléments des lignes de A (chaque permutation portant sur les éléments d'une même ligne).

Soit

$$a'_{11} = a_{1k_1}, \quad a'_{21} = a_{2k_2}, \quad \dots, \quad a'_{m1} = a_{mk_m}.$$

On peut toujours, en écrivant les lignes de B dans un ordre convenable, et celles de A dans le même ordre [ce qui ne change pas $\theta(A)$ et $\theta(B)$], supposer que

$$k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_m.$$

Plus précisément soit

$$\begin{aligned} k_1 = k_2 = \dots = k_{i_1} > k_{i_1+1} = k_{i_1+2} = \dots \\ = k_{i_2} > \dots > k_{i_{p-1}} > k_{i_{p-1}+1} = k_{i_{p-1}+2} = \dots = k_{i_p}, \quad i_p = m. \end{aligned}$$

Posons

$$\Psi_{ijk} = \Phi_{ik} \circ \Phi_{i,k+1} \circ \dots \circ \Phi_{i,j-2} \circ \Phi_{i,j-1} \quad (k \leq j-1).$$

Soit les matrices

$$C_1 = \Psi_{i_1 k_1 k_{i_2}}(A), \quad C_2 = \Psi_{i_2 k_{i_2} k_{i_3}}(C_1), \quad \dots, \quad C_{p-1} = \Psi_{i_{p-1} k_{i_{p-1}} k_{i_p}}(C_{p-2}).$$

D'après le 2^o, on a

$$\theta(A) \geq \theta(C_1) \geq \dots \geq \theta(C_{p-1}).$$

La $(k_m)^{\text{ième}}$ colonne de C_{p-1} est identique à la première colonne de B. Soit D la matrice obtenue en supprimant de C_{p-1} la $(k_m)^{\text{ième}}$ colonne et E la matrice obtenue en supprimant de B la première colonne. D est une $(m, l-1)$ M-matrice, E est déduite de D par permutation sur les éléments des lignes (chaque permutation portant sur les éléments d'une même ligne), donc, par hypothèse $\theta(D) \geq \theta(E)$, d'où

$$\begin{aligned} \theta(A) &\geq \theta(C_{p-1}) = \theta[(k_m)^{\text{ième}} \text{ colonne de } C_{p-1}] + \theta(D) \\ &\geq \theta(1^{\text{ère}} \text{ colonne de B}) + \theta(E) = \theta(B). \end{aligned}$$

2.2.11.3. LEMME. — Soit A une (m, l) M'-matrice, R le produit de ses éléments. Quelle que soit la décomposition de $R = h_1 h_2 \dots h_n$ en un produit de n facteurs possédant les propriétés suivantes :

1° Chaque facteur h_i est le produit d'éléments de A.

2° Deux éléments de A contenus dans h_i n'appartiennent pas à la même ligne de A.

3° Les n ensembles formés par les éléments de A respectivement contenus dans h_1, h_2, \dots, h_n réalisent une partition dans l'ensemble des éléments de A.

On a

$$\theta(A) - l \geq h_1 + h_2 + \dots + h_n - n.$$

Démonstration. — Considérons la (m, ml) matrice A_1 obtenue en bordant A à droite par des colonnes dont tous les éléments sont égaux à 1, A_1 est une M'-matrice, donc une M-matrice. Soit B_1 une matrice obtenue à partir de A_1 par des permutations sur les éléments des lignes (chaque permutation portant sur les éléments d'une même ligne), soit n le nombre des colonnes de B_1 contenant des images qui sont des éléments de A et h_1, h_2, \dots, h_n les produits respectifs des éléments de ces colonnes, on a

$$R = h_1 h_2 \dots h_n$$

et les h_i répondent aux conditions de l'énoncé.

Réciproquement soit $R = h_1 h_2 \dots h_n$, les h_i répondant aux conditions de l'énoncé, on a $n \leq ml$.

Soit une (m, ml) matrice B_1 dont n des colonnes j_1, j_2, \dots, j_n sont formées de la manière suivante : la colonne j_k contient les éléments de A appartenant au produit h_k , chacun d'eux occupant la ligne dont le rang est égal à celui de la ligne qu'il a dans A; les éléments de j_k autres que les précédents sont égaux à 1; les éléments des $ml - n$ colonnes autres que j_1, j_2, \dots, j_n sont égaux à 1. Dans ces conditions, B_1 peut être obtenue

à partir de A_1 par des permutations sur les éléments des lignes (chaque permutation portant sur les éléments d'une même ligne).

D'après le lemme précédent :

$$\theta(A_1) \geq \theta(B_1),$$

soit

$$\theta(A) + ml - l \geq h_1 + h_2 + \dots + h_n + ml - n,$$

soit

$$\theta(A) - l \geq h_1 + h_2 + \dots + h_n - n.$$

2.2.11.4. *Démonstration du théorème 2.2.11.* — On peut obtenir les coefficients de torsion de la manière suivante ⁽⁴⁾ :

On décompose les h_i en facteurs premiers, soit

$$h_i = \prod_{p \in E_i} p^{z_p},$$

E_i étant un ensemble fini de nombres premiers.

Soit A la M' -matrice définie, à l'ordre des lignes près, par les conditions suivantes :

1° Tous les nombres p^{z_p} (diviseurs élémentaires) provenant des décompositions en facteurs premiers de h_1, h_2, \dots, h_n sont des éléments de A , chacun d'eux figure dans A le même nombre de fois que dans l'ensemble des décompositions en facteurs premiers de h_1, h_2, \dots, h_n ; les éléments de A , autres que les nombres précédents, sont égaux à 1.

2° Les éléments de chaque ligne de A différents de 1 sont les puissances d'un même nombre premier, les puissances de ce nombre premier figurent dans une ligne et une seule.

3° Il existe au moins une ligne A dont tous les éléments sont différents de 1; il n'existe aucune ligne de A dont tous les éléments sont égaux à 1.

Alors, t_j est le produit des éléments de la $j^{\text{ième}}$ colonne de A . Soit ν le nombre des éléments de A égaux à 1, R le produit de tous les éléments de A (R est l'ordre du groupe G), on peut écrire

$$R = h_1 h_2 \dots h_n h_{n+1} \dots h_{n+\nu}, \quad \text{avec } h_{n+1} = h_{n+2} = \dots = h_{n+\nu} = 1;$$

les h_i répondent aux conditions du lemme 2.2.11.3; d'où

$$\theta(A) - l \geq h_1 + h_2 + \dots + h_{n+\nu} - (n + \nu),$$

soit

$$t_1 + t_2 + \dots + t_l - l \geq h_1 + h_2 + \dots + h_n - n.$$

⁽⁴⁾ Voir, par exemple, BOURBAKI, XIV, Livre II, p. 99.

2.2.12. COROLLAIRE. — Si le groupe des classes n'est pas cyclique, on a

$$t_1 + t_2 + \dots + t_l - l < t < h.$$

Démonstration. — Conséquence immédiate des paragraphes 2.2.7, 2.2.10 et du théorème précédent.

Remarque. — Quel que soit le groupe, on a

$$t_1 + t_2 + \dots + t_l - l < t \leq h.$$

Si le groupe est cyclique, il existe un seul coefficient de torsion $t_1 = h$, d'où

$$h - 1 < t \leq h, \quad \text{on retrouve } t = h.$$

CHAPITRE 3.

FACTORISATION DANS LA CLASSE PRINCIPALE DE CERTAINES PARTITIONS \mathfrak{T} D'UN Δ_r -SEMI-GROUPE.

Les éléments indécomposables dans la classe principale C_0 d'une partition \mathfrak{T} d'un Δ_r -semi-groupe, dont nous avons donné, sous les hypothèses du théorème d'équirépartition asymptotique, une évaluation dans le chapitre précédent, forment un système de générateurs de C_0 . Cette classe est un semi-groupe à factorisation non unique. Le but de ce chapitre est d'obtenir une évaluation asymptotique de la valeur moyenne du nombre de factorisations d'un élément de C_0 , cette valeur moyenne étant prise sur l'ensemble des éléments de C_0 de norme au plus égale à x . Rappelons, en le précisant, ce qui a été dit dans l'introduction : en se plaçant dans les hypothèses du théorème d'équirépartition asymptotique, on obtient seulement un équivalent du logarithme de cette valeur moyenne; mais si l'on suppose que (E) est un D_n -semi-groupe et que, pour chaque classe de la partition, l'ensemble des éléments premiers qui appartiennent à cette classe est un H-ensemble, alors on obtient un équivalent de cette valeur moyenne.

Par ailleurs signalons les paragraphes 2.3.4 et 2.3.5 qui établissent l'existence des D_n -semi-groupes; celle des Δ_r -semi-groupes en découle; l'existence des Δ_r -semi-groupes (r réel ≥ 0) ne pose pas de problème sérieux. Les paragraphes 2.3.4 et 2.3.5 montrent également comment les D_n -semi-groupes se sont introduits naturellement en cours d'étude.

2.3.1. ÉLÉMENTS INDÉCOMPOSABLES D'UN SOUS-SEMI-GROUPE S D'UN S_1 -SEMI-GROUPE (E). — Nous supposons que S est différent du sous-semi-groupe réduit à l'élément e et que e appartient à S (on l'ajoutera si cela est nécessaire).

B appartenant à S est indécomposable dans S si

$$\left. \begin{array}{l} B = B_1 B_2 \\ B_1 \text{ et } B_2 \in S \end{array} \right\} \Rightarrow B_1 \text{ ou } B_2 = e.$$

Soit a le minimum de la norme des éléments de S différents de e ; a existe puisque le nombre des éléments de (E) de norme au plus égale à x est fini, de plus $a > 1$.

Si B' est un élément de norme a , B' est indécomposable; sinon on aurait

$$B' = B'_1 B'_2, \quad \text{d'où} \quad NB'_1 < a.$$

L'ensemble des éléments indécomposables de S comprend donc des éléments différents de e , nous désignerons par F l'ensemble de ces éléments et par Q l'élément générique de cet ensemble. Tout élément B de S, à l'exception de e , peut se mettre sous la forme

$$B = Q_1^{\alpha_1} \dots Q_n^{\alpha_n} \quad (Q_i \in F, \alpha_i \text{ entier } \geq 1);$$

en effet, si B est indécomposable il est bien de la forme indiquée; si $B = B_1 B_2$,

$$NB_1 \leq \frac{NB}{a}, \quad NB_2 \leq \frac{NB}{a}, \quad a > 1;$$

dans le produit $B_1 B_2$ on remplace s'il y a lieu chaque facteur décomposable par sa décomposition, on recommence cette opération pour le produit ainsi obtenu...; après un nombre fini de ces opérations on obtient la forme indiquée car, s'il en était autrement, il existerait dans S des éléments de norme arbitrairement petite.

S n'est pas en général à factorisation unique.

2.3.2. SEMI-GROUPE NORME (F') ASSOCIÉ A S. — Soit un semi-groupe (F') tel que cardinal de F = cardinal de F', établissons une bijection de F sur F' qui, à Q appartenant à F, fait correspondre P appartenant à F', normons (F') en prenant $NP = NQ$. (F') est dit associé à S.

2.3.3. LEMME. — Si $\mathcal{N}(B)$ désigne le nombre de factorisations d'un élément B appartenant à S en éléments indécomposables de S, le nombre des éléments du semi-groupe normé (F') associé à S, de norme au plus égale à x , est égal à

$$\sum_{\substack{B \in S \\ NB \leq x}} \mathcal{N}(B).$$

Démonstration. — Nous prendrons conventionnellement $\mathcal{N}(e) = 1$.

Considérons l'application f de (F') sur S définie par

$$\begin{aligned} e' \in (F') &\rightarrow e \in S \quad [e', \text{élément neutre de } (F')] \\ A = P_1^{z_1} \dots P_n^{z_n} \in (F') &\rightarrow B = Q_1^{z_1} \dots Q_n^{z_n} \in S, \end{aligned}$$

P_i et Q_i désignant deux éléments correspondants dans la bijection du 2.3.2; donc $NQ_i = NP_i$ et $NB = NA$.

S'il existe $A' \neq A$ tel que $f(A') = B$, on a

$$(2) \quad B = Q_1^{\alpha'_1} Q_2^{\alpha'_2} \dots Q_n^{\alpha'_n} \quad \text{en posant} \quad A' = P_1^{\alpha'_1} \dots P_n^{\alpha'_n},$$

et (2) est une deuxième décomposition de B en produits d'éléments de F ; réciproquement, étant donné deux décompositions différentes de B en produit d'éléments de F , il existe deux A différents tels que $f(A) = B$.

L'image réciproque de B par f est un ensemble de $\mathcal{N}(B)$ éléments de (F') qui ont même norme que B ; d'où le théorème.

2.3.4. LEMME. — Soit une partition \mathcal{X} d'un Δ_r -semi-groupe (E) .

1° Si, quelle que soit la classe de la partition, l'ensemble des éléments premiers qui appartiennent à cette classe possède un degré, le semi-groupe normé (F') associé à la classe principale est un Δ_r -semi-groupe.

2° Dans le cas particulier où (E) est un D_n -semi-groupe, si, quelle que soit la classe de la partition, l'ensemble des éléments premiers qui appartiennent à cette classe est un H -ensemble, (F') est un D_m -semi-groupe.

Démonstration.

1° Ici F est la réunion de E_0 et E'_0 .

Puisqu'il existe une bijection conservant la norme de F' sur F , le nombre des éléments de F' de norme au plus égale à x est égal à celui de F . En se reportant au 2.2.5 (théorème II), on voit que ce nombre est $\eta_1(x) - 1$ (-1 provient de l'élément neutre), d'où la proposition énoncée.

2° Soit $E'_{\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_{n-1}}$ l'ensemble des éléments de E'_0 qui correspond à la solution minimale $(o, \Omega_1, \dots, \Omega_{n-1})$, posons

$$\begin{aligned} \sum_{P \in E_i} \frac{1}{(NP)^{s+1}} &= \Psi_i(s) = a_{0i}(s) \left(\log \frac{1}{s} \right)^{n_i+1} \\ &+ a_{1,i}(s) \left(\log \frac{1}{s} \right)^{n_i} + \dots + a_{n_i+1,i}(s) \quad \text{pour } \Re s > 0. \end{aligned}$$

Les notations sont les mêmes que dans le chapitre 2 de la deuxième partie, E_i est l'ensemble des éléments premiers qui appartiennent à C_i ; $a_{ji}(s)$ holomorphe pour $\Re s \geq 0$, réelle pour s réel, $\mu_i = (n_i + 1)a_{0i}(o)$.

On a

$$\begin{aligned} \sum_{Q \in E'_{\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_{h-1}}} \frac{1}{(NQ)^{s+1}} &= \sum_{\substack{A \in E \\ \Omega_0(A) = 0 \\ \Omega_1(A) = \Omega_1 \\ \dots \\ \Omega_{h-1}(A) = \Omega_{h-1}}} \frac{1}{(NA)^{s+1}} \\ &= \sum_{\substack{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{h-1} \\ 0 \leq \alpha_i \leq \Omega_i \\ i = 1, 2, \dots, h-1}} v_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{h-1}}(s) [\psi_1(s)]^{\alpha_1} \dots [\psi_{h-1}(s)]^{\alpha_{h-1}} \quad (\text{pour } \mathcal{R}s > 0), \end{aligned}$$

avec $v_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{h-1}}(s)$ holomorphe pour $\mathcal{R}s \geq 0$ et $v_{\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_{h-1}}(s) = \frac{1}{\Omega_1! \dots \Omega_{h-1}!}$ d'après le lemme 1.1.9.

$\psi_i(s)^{\alpha_i}$ est un polynome en $\log \frac{1}{s}$ dont les coefficients sont des fonctions holomorphes de s pour $\mathcal{R}s \geq 0$, réelles pour s réel; il en est de même de chaque terme du \sum et du \sum ; dans le \sum le coefficient du terme de plus fort degré est la fonction

$$\begin{aligned} v_{\Omega_1, \dots, \Omega_{h-1}}(s) [a_{01}(s)]^{\Omega_1} [a_{02}(s)]^{\Omega_2} \dots [a_{0, h-1}(s)]^{\Omega_{h-1}} \\ = [a_{01}(s)]^{\Omega_1} [a_{02}(s)]^{\Omega_2} \dots [a_{0, h-1}(s)]^{\Omega_{h-1}} \frac{1}{\Omega_1! \dots \Omega_{h-1}!}, \end{aligned}$$

pour $s = 0$, cette fonction prend la valeur

$$\left(\frac{\mu_1}{n_1 + 1}\right)^{\Omega_1} \dots \left(\frac{\mu_{h-1}}{n_{h-1} + 1}\right)^{\Omega_{h-1}} \frac{1}{\Omega_1! \dots \Omega_{h-1}!};$$

donc $E'_{\Omega_1, \dots, \Omega_{h-1}}$ est un H-ensemble.

Puisqu'il existe une bijection conservant la norme de F' sur la réunion des $E'_{\Omega_1, \dots, \Omega_{h-1}}$ et de E_0 , F' est un H-ensemble d'éléments premiers (tous les ensembles qui composent la réunion sont disjoints).

2.3.5. EXISTENCE DES D_n -SEMI-GROUPES. — On sait que les ensembles réguliers de densité strictement positive existent, ces ensembles sont des H-ensembles de degré zéro. Si chaque ensemble E_i est un H-ensemble d'éléments premiers de degré zéro et si le groupe des classes est cyclique, F' est un H-ensemble de degré $h - 1$.

2.3.6. THÉORÈME III. — Soit C_0 la classe principale d'une partition \mathcal{P} d'un Δ -semi-groupe (E) . Tout élément B de C_0 est factorisable en éléments de C_0 indécomposables dans C_0 . Nous désignerons par $\mathcal{N}(B)$ le nombre de factorisations de B et par $\mathfrak{N}(x)$ la valeur moyenne de la fonction $B \rightarrow \mathcal{N}(B)$, prise sur les éléments de C_0 de norme au plus égale à x .

1° Si, quelle que soit la classe de la partition, l'ensemble des éléments premiers qui appartiennent à cette classe possède un degré, on a, lorsque x tend vers l'infini :

$$\mathfrak{N}(x) = \exp \left\{ \left[1 + o(1) \right] \frac{K}{T} (\text{Log Log } x)^T \right\}.$$

2° Dans le cas particulier où (E) est un D_n -semi-groupe, si, quelle que soit la classe de la partition, l'ensemble des éléments premiers qui appartiennent à cette classe est un H -ensemble, on a, lorsque x tend vers l'infini :

$$\mathfrak{N}(x) \sim \exp [V(\text{Log Log } x, \text{Log Log Log } x)],$$

V étant un polynôme à deux variables, le terme prépondérant de $V(\text{Log Log } x, \text{Log Log Log } x)$, pour x infini, est

$$\frac{K}{T} (\text{Log Log } x)^T.$$

Dé plus, n_0 étant le degré de l'ensemble d'éléments premiers contenus dans C_0 :

$$\text{si } T \geq n_0 : \text{ degré de } V = T.$$

(Ceci a lieu, en particulier, si tous les ensembles d'éléments premiers contenus dans les classes sont de même degré.)

$$\text{si } T < n_0 : T \leq \text{degré de } V \leq n_0.$$

Démonstration.

1° Si $T - 1 \geq r_0$, le résultat est une conséquence immédiate du théorème 1.2.3; ce théorème ne permet pas de conclure si $T - 1 < r_0$; la démonstration suivante s'applique dans tous les cas.

Soit $\nu(x)$ le nombre des éléments de (E) de norme au plus égale à x et $\nu_1(x)$ le nombre des éléments de (F') de norme au plus égale à x .

Soit G la réunion des ensembles disjoints E_1, E_2, \dots, E_{h-1} ; E est la réunion des ensembles disjoints E_0 et G .

Utilisons la fonction $h(x) = \exp \left[(\text{Log } x)^{1 - \frac{1}{(\text{Log Log } x)^2}} \right]$ qui vérifie

$$\sum_{NA \leq \frac{x}{h(x)}} \frac{1}{NA} \sim \sum_{NA \leq x} \frac{1}{NA} \Rightarrow \text{Log} \sum_{NA \leq \frac{x}{h(x)}} \frac{1}{NA} = \left(\text{Log} \sum_{NA \leq x} \frac{1}{NA} \right) + o(1)$$

pour tout Δ_r -semi-groupe, de plus $\text{Log Log } h(x) \sim \text{Log Log } x$.

On a

$$\left(\sum_{\substack{A_0 \in (E_0) \\ NA_0 \leq \frac{x}{h(x)}}} \frac{1}{NA_0} \right) \left(\sum_{\substack{B' \in (G) \\ NB' \leq h(x)}} \frac{1}{NB'} \right) \leq \sum_{\substack{A \in (E) \\ NA \leq x}} \frac{1}{NA} \leq \left(\sum_{\substack{A_0 \in (E_0) \\ NA_0 \leq x}} \frac{1}{NA_0} \right) \left(\sum_{\substack{B' \in (G) \\ NB' \leq x}} \frac{1}{NB'} \right),$$

d'où

$$o(1) + \text{Log} \sum_{\substack{A_0 \in (E_0) \\ NA_0 \leq x}} \frac{1}{NA_0} + \text{Log} \sum_{\substack{B' \in (G) \\ NB' \leq h(x)}} \frac{1}{NB'} \leq \text{Log} \sum_{\substack{A \in (E) \\ NA \leq x}} \frac{1}{NA} \leq \text{Log} \sum_{\substack{A_0 \in (E_0) \\ NA_0 \leq x}} \frac{1}{NA_0} + \text{Log} \sum_{\substack{B' \in (G) \\ NB' \leq x}} \frac{1}{NB'}.$$

Si r' est le maximum des degrés r_1, r_2, \dots, r_{h-1} de E_1, E_2, \dots, E_{h-1} :

$$\text{Log} \sum_{\substack{B' \in (G) \\ NB' \leq x}} \frac{1}{NB'} = \frac{\mu'}{r'+1} (\text{Log Log } x)^{r'+1} [1 + o(1)]$$

d'après le théorème 1.2.3, donc

$$\text{Log} \sum_{\substack{B' \in (G) \\ NB' \leq h(x)}} \frac{1}{NB'} = \frac{\mu'}{r'+1} [\text{Log Log } h(x)]^{r'+1} [1 + o(1)] = \frac{\mu'}{r'+1} [\text{Log Log } x]^{r'+1} [1 + o(1)],$$

d'où

$$\text{Log} \sum_{\substack{A \in (E) \\ NA \leq x}} \frac{1}{NA} = \text{Log} \sum_{\substack{A_0 \in (E_0) \\ NA_0 \leq x}} \frac{1}{NA_0} + \frac{\mu'}{r'+1} (\text{Log Log } x)^{r'+1} [1 + o(1)].$$

Puisqu'il existe une bijection conservant la norme de F' sur la réunion de E_0 et de E'_0 , on a donc, d'après le raisonnement précédent :

$$\text{Log} \sum_{\substack{A' \in (F') \\ NA' \leq x}} \frac{1}{NA'} = \text{Log} \sum_{\substack{A_0 \in (E_0) \\ NA_0 \leq x}} \frac{1}{NA_0} + \frac{K}{T} (\text{Log Log } x)^T [1 + o(1)].$$

Le nombre des éléments de la classe principale de norme au plus égale à x est équivalent à $\frac{\nu(x)}{h}$ d'après le théorème I d'équirépartition asymptotique; d'où

$$\mathfrak{N}(x) \sim h \frac{\nu(x)}{\nu(x)} \sim K_1 (\text{Log Log } x)^{T-1-r} \frac{\sum_{\substack{A' \in (F') \\ NA' \leq x}} \frac{1}{NA'}}{\sum_{\substack{A \in (E) \\ NA \leq x}} \frac{1}{NA}},$$

$$\begin{aligned} \text{Log } \mathfrak{N}(x) &= o(1) + (T-1-r) \text{Log Log Log } x + \text{Log} \sum_{\substack{A' \in (F') \\ NA' \leq x}} \frac{1}{NA'} - \text{Log} \sum_{\substack{A \in (E) \\ NA \leq x}} \frac{1}{NA} \\ &= o(1) + (T-1-r) \text{Log Log Log } x + \frac{K}{T} (\text{Log Log } x)^T [1 + o(1)] \\ &\quad - \frac{\mu'}{r'+1} (\text{Log Log } x)^{r'+1} [1 + o(1)], \end{aligned}$$

mais

$$T = \max[(r_1+1)\Omega_1 + \dots + (r_{h-1}+1)\Omega_{h-1}] \geq 2(r'+1) > r'+1$$

(le maximum est pris sur les solutions minimales),

donc

$$\text{Log } \mathfrak{N}(x) = \frac{K}{T} (\text{Log Log } x)^T [1 + o(1)].$$

2° D'après le théorème 1.3.2 :

$$\nu_1(x) = x \exp[V_1(\text{Log Log } x, \text{Log Log Log } x)],$$

$$\nu(x) = x \exp[V_2(\text{Log Log } x, \text{Log Log Log } x)];$$

donc

$$\mathfrak{N}(x) = \frac{h \nu_1(x)}{\nu(x)} = \exp[V(\text{Log Log } x, \text{Log Log Log } x)].$$

n_0, n_1, \dots, n_{h-1} étant les degrés de E_0, E_1, \dots, E_{h-1} , on a

$$\text{degré de } V_1 = \begin{cases} T & \text{si } T-1 > n_0, & \text{terme prépondérant : } \frac{K}{T} (\text{Log Log } x)^T, \\ T & \text{si } T-1 = n_0, & \text{» } \text{ » } \frac{K + \mu_0}{T} (\text{Log Log } x)^T, \\ n_0 + 1 & \text{si } T-1 < n_0, & \text{» } \text{ » } \frac{\mu_0}{n_0 + 1} (\text{Log Log } x)^{n_0 + 1}; \end{cases}$$

$$\text{degré de } V_2 = n + 1, \text{ terme prépondérant} = \begin{cases} \frac{\mu}{n+1} (\text{Log Log } x)^{n+1} & \text{si } n > 0, \\ (\mu - 1) \text{Log Log } x & \text{si } n = 0 \text{ et } \mu \neq 1, \end{cases}$$

si $n = 0$ et $\mu = 1$, $V_2 = \text{Cte}$.

a. Si $T-1 > n_0$,

$$T-1 > n = \max(n_0, \dots, n_{h-1}),$$

degré de $V = T$, terme prépondérant $\frac{K}{T} (\text{Log Log } x)^T$.

b. Si $T-1 = n_0 > n' = \max(n_1, \dots, n_{h-1})$,

$$n = T-1, \quad \mu = \mu_0.$$

degré de $V = T$, terme prépondérant $\frac{K}{T} (\text{Log Log } x)^T$.

c. Si $T-1 < n_0$, $n = n_0$, $\mu = \mu_0$,

$$\text{degré } V \leq n_0 + 1;$$

mais, d'après la première partie, le terme prépondérant est encore $\frac{K}{T} (\text{Log Log } x)^T$; donc

$$T \leq \text{degré } V \leq n_0 + 1.$$

L'ensemble des termes de degré $n_0 + 1$ dans V_1 et V_2 est

$$\frac{\mu_0}{n_0 + 1} (\text{Log Log } x - n_0 \text{Log Log Log } x)^{n_0 + 1} \quad (\text{voir 1.2.3.4}),$$

donc

$$T \leq \text{degré de } V \leq n_0;$$

si $T = n_0$,

$$\text{degré de } V = T;$$

si $T < n_0$,

$$T \leq \text{degré de } V \leq n_0.$$

Le fait que le terme prépondérant de V est encore $\frac{K}{T}(\text{Log Log } x)^T$ peut être montré sans utiliser la première partie en remontant à la détermination des polynômes V_1 et V_2 .

CHAPITRE 4.

APPLICATIONS AUX IDÉAUX DANS LES CORPS DE NOMBRES ALGÈBRIQUES.

Les théorèmes établis dans ce travail s'appliquent à certains ensembles d'idéaux dans les corps de nombres algébriques, on retrouve ainsi des propriétés connues et l'on en obtient de nouvelles; en particulier les théorèmes II et III donnent des résultats nouveaux.

2.4.1. NOTATIONS. — E est l'ensemble des idéaux premiers de l'anneau des entiers du corps $K(\theta)$ (idéaux du corps par abus de langage). (E) est l'ensemble des idéaux privé de l'idéal zéro.

2.4.2. THÉORÈME. — *L'ensemble des idéaux d'un corps de nombres algébriques (privé de l'idéal zéro) est un D-semi-groupe.*

Démonstration. — On sait que la fonction $\sum_{A \in (E)} \frac{1}{(NA)^s}$ définie pour $\Re s > 1$ est prolongeable analytiquement dans tout le plan par la fonction $\zeta_K(s)$ de Dedekind.

1° $\zeta_K(s)$ est méromorphe avec le seul pôle simple $s = 1$ et le résidu λh ;

2° $\zeta_K(s)$ n'admet pas de zéro pour $\Re s \geq 1$; donc pour $\Re s > 1$:

$$\sum_{A \in (E)} \frac{1}{(NA)^s} = \frac{u(s)}{s-1} \quad \text{avec } u(s) \text{ holomorphe et } u(s) \neq 0 \text{ pour } \Re s \geq 1.$$

On a $u(1) = \lambda h$. (E) est un D-semi-groupe avec $\mu = 1$.

2.4.3. COROLLAIRE (*Résultats connus*).

1° *Le nombre des idéaux d'un corps de nombres algébriques, de norme au plus égale à x , est équivalent, pour x infini, à*

$$\lambda h x.$$

2° (⁵) *Le nombre des idéaux premiers d'un corps de nombres algébriques, de norme au plus égale à x , est équivalent, pour x infini, à*

$$\frac{x}{\text{Log } x}.$$

Démonstration. — Conséquence des paragraphes 1.3.8 et 1.3.2 :

$$u(1) = \lambda h = g(1) e^{a(1)} = g e^{a_1}.$$

2.4.4. LES RELATIONS D'ÉQUIVALENCE ENTRE IDÉAUX, MOD UN IDÉAL, DE LANDAU (⁶).

2.4.4.1. *Définition des relations d'équivalence.* — Pour ces définitions, nous renverrons le lecteur à l'article de Landau. Rappelons toutefois les trois points suivants :

1° Toutes ces relations sont définies dans l'ensemble des idéaux premiers avec un idéal donné F , c'est-à-dire dans le semi-groupe (E^*) , E^* étant la différence entre l'ensemble E des idéaux premiers du corps et l'ensemble des idéaux premiers qui divisent F .

2° Landau distingue trois sortes d'équivalence : sens strict, sens large, sens le plus large.

3° L'équivalence au sens ordinaire est identique à l'équivalence mod l'idéal unité au sens le plus large.

2.4.4.2. *Propriétés algébriques des relations d'équivalence de Landau.*

1° Si le nombre des classes est strictement supérieur à 1, ces classes (sens strict, sens large ou sens le plus large) déterminent une partition \mathcal{C} de (E^*) .

2° Chaque classe (mod F) sens large est la réunion d'un même nombre de classes (mod F) sens strict; chaque classe (mod F) sens le plus large est la réunion d'un même nombre de classes (mod F) sens large.

2.4.4.3. *Propriétés analytiques des relations de Landau.* — Soit $\chi_0, \chi_1, \dots, \chi_{h-1}$ les caractères du groupe abélien des classes, χ_0 caractère principal;

si A n'appartient pas à (E^*) on pose $\chi_j(A) = 0$;

si A appartient à (E^*) on pose $\chi_j(A) = \chi_j$ (classe de A).

(⁵) Landau, 1903.

(⁶) LANDAU, *Math. Z.*, 1918, p. 52-154.

A chaque caractère χ_j correspond une fonction $\zeta_j(s)$ telle que pour $\Re s > 1$, on ait

$$\sum_{A \in (E)} \frac{\chi_j(A)}{(NA)^s} = \zeta_j(s),$$

avec :

- a. si $j \neq 0$, $\zeta_j(s)$ fonction entière et $\zeta_j(s) \neq 0$ pour $\Re s \geq 1$;
- b. si $j = 0$,

$$\zeta_0(s) = \frac{u(s)}{s-1},$$

avec $u(s)$ fonction entière et $u(s) \neq 0$ pour $\Re s \geq 1$. Des propriétés précédentes on déduit le théorème :

2.4.5. THÉORÈME. — *Quelle que soit la classe de la partition déterminée par une relation d'équivalence (mod F) de Landau (sens strict, sens large, sens le plus large et en particulier sens ordinaire), l'ensemble des idéaux premiers qui appartiennent à cette classe est un ensemble régulier de densité strictement positive. Le semi-groupe (E^*) des idéaux premiers avec F est un D-semi-groupe. Si le nombre des classes est strictement supérieur à 1, ces classes déterminent une partition \mathcal{A} de ce semi-groupe; de plus, les ensembles réguliers d'idéaux premiers contenus dans les classes ont même densité.*

(Transposition de la démonstration des *Annales*, p. 38, 39 et 40.)

2.4.6. CONSÉQUENCES. — L'équirépartition asymptotique des idéaux entre les classes d'équivalence (mod F) de Landau est donc un cas particulier du théorème I.

Les théorèmes II et III donnent des résultats nouveaux. Afin d'éviter des longueurs, citons seulement ces résultats dans le cas des classes au sens ordinaire, c'est-à-dire au sens le plus large de Landau (mod l'idéal unité).

2.4.7. COROLLAIRE. — *Dans un corps de nombres algébriques dans lequel l'anneau des entiers n'est pas principal (nombre des classes d'idéaux strictement supérieur à 1), le nombre d'idéaux principaux, de norme au plus égale à x , qui sont indécomposables en un produit de deux idéaux principaux (tous deux différents de l'idéal unité) est équivalent, pour x infini, à*

$$K \frac{x (\text{Log Log } x)^{t-1}}{\text{Log } x};$$

K et t dépendent du corps, t est un entier strictement supérieur à 1.

Tout idéal principal B est factorisable de $\mathcal{N}(B)$ manières différentes en un produit d'idéaux principaux indécomposables (en produit d'idéaux prin-

cipaux). La valeur moyenne de la fonction $B \rightarrow \mathcal{N}(B)$, prise sur l'ensemble des idéaux principaux de norme au plus égale à x , est équivalente, pour x infini, à

$$\exp[V(\text{Log Log } x, \text{Log Log Log } x)];$$

V étant un polynome à deux variables de degré t , le terme prépondérant de $V(\text{Log Log } x, \text{Log Log Log } x)$, pour x infini, est

$$\frac{K}{t} (\text{Log Log } x)^t,$$

BIBLIOGRAPHIE SPÉCIALISÉE.

- DELANGÉ, *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, 3^e série, t. 73, 1956.
 DELANGE, *Bull. Soc. Roy. Sciences Liège*, 1961.
 INGHAM, *Ann. Math.*, vol. 42, 1941.
 WIRSING, *Arch. Math.*, vol. VII, 1956.
 WIRSING, *Math. Annalen*, vol. 143, 1961, p. 75-102.

