ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

MOHAMED AMARA

Ensembles fermés de nombres algébriques

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 83, nº 3 (1966), p. 215-270

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1966_3_83_3_215_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
3e série, t. 83, 1966, p. 215 à 270.

ENSEMBLES FERMÉS DE NOMBRES ALGÉBRIQUES

PAR M. MOHAMED AMARA (*).

TABLE DES MATIÈRES.

(*) *Thèse Sc. math.*, Paris, 1967.

CHAPITRE I.

Familles compactes de fractions rationnelles.

L'étude de certains ensembles de nombres algébriques a conduit Salem, puis Pisot à considérer certaines familles de fractions rationnelles ayant la propriété de former un ensemble compact. Pisot a étudié dans [14] l'ensemble $\mathcal{F}(q; k, \delta')$ de fractions rationnelles $f(z) = \frac{A(z)}{Q(z)}$, où $A(z)$ et $Q(z)$ désignent des polynomes à coefficients entiers rationnels avec $A(0) \neq 0$, $Q(0) = q \neq 0$ fixé; les fonctions $f(z)$ satisfont de plus aux conditions :

(1) $Q(z)$ admet au plus k zéros ($k \geqq 0$) dans $|z| \leqq 1$, et tous situés dans la couronne fixe $0 < \delta' \leqq |z| < 1$;

(2) $|f(z) \leqq 1$ sur $|z| = 1$.

L'ensemble $\mathcal{F}(q; k, \delta')$ satisfait alors au théorème :

Théorème 1.1. — *L'ensemble $\mathcal{F}(q; k, \delta')$ est compact pour la convergence uniforme dans tout disque $|z| \leqq r$, $r < \delta'$ et dans tout disque $|z|_p \leqq r_p$, $r_p < |q|_p$.*

Les fonctions $f(z)$, holomorphes dans $|z| < \delta'$, admettent un développement en série de Taylor convergent pour $|z| < \delta'$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n z^n.$$

A ce développement nous associons les déterminants de Kronecker :

$$D_n = \begin{vmatrix} u_0 & u_1 & \dots & u_n \\ u_1 & u_2 & \dots & u_{n1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_n & \dots & \dots & u_{2n} \end{vmatrix}.$$

La démonstration du théorème 1.1 est basée sur les conditions suffisantes :

a. Les fonctions $f(z)$ constituent une famille normale au sens de Montel.

b. Si $f^\star(z)$ est la limite d'une suite extraite de $\mathcal{F}(q; k, \delta')$ le déterminant $D^\star_n$ associé au développement de $f^\star(z)$ vérifie

$$|D^\star_n| \leqq C(\varepsilon)\varepsilon^n$$

pour tout $\varepsilon < 0$; $C(\varepsilon)$ désigne une constante indépendante de n. Or il existe une classe N de fonctions méromorphes dans le cercle unité possédant les propriétés (a) et (b) et qui comprend l'ensemble $\mathcal{F}(q; k, \delta')$.

C'est la classe des fonctions méromorphes et à caractéristique bornée dans le cercle unité.

Définition de la caractéristique. — Soit $f(z)$ une fonction holomorphe à l'origine et méromorphe dans le cercle unité. A cette fonction R. Nevanlinna associe les fonctions

$$m(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overset{+}{\log} | f(re^{i\xi}) | \, d\xi,$$

$$\mathrm{N}(r, f) = \int_0^r \frac{n(t)}{t} \, dt,$$

où $n(t)$ désigne le nombre des pôles de $f(z)$ situés dans $|z| \leq t$. La fonction

$$\mathrm{T}(r, f) = m(r, f) + \mathrm{N}(r, f)$$

est appelée caractéristique de $f(z)$. C'est une fonction croissante de r et, par suite, $\lim\limits_{r \to 1} \mathrm{T}(r, f)$ existe. Si cette limite est finie, $f(z)$ est dite à caractéristique bornée dans le cercle unité. Signalons les relations :

$$\mathrm{T}(r, f_1 . f_2) \leq \mathrm{T}(r, f_1) + \mathrm{T}(r, f_2),$$

$$\mathrm{T}(r, f) = \mathrm{T}\left(r, \frac{1}{f}\right) + \log | u_k |, \qquad (f(z) = u_k z^k + \ldots + u_k \neq 0).$$

Cette dernière n'est autre que la formule de Jensen.

Les fonctions de la classe N sont caractérisées par :

Théorème 1.2 (R. Nevanlinna). — *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction méromorphe dans le cercle unité appartienne à la classe* N *est qu'elle soit quotient de deux fonctions holomorphes et bornées dans le cercle unité.*

La démonstration de la condition suffisante est constructive. Elle montre l'existence de deux fonctions $\varphi\left(z, \frac{1}{f}\right)$ et $\varphi(z, f)$ holomorphes et bornées par 1 dans le cercle unité, telles que, pour $f(z)$ appartenant à N,

$$f(z) = \frac{\varphi\left(z, \frac{1}{f}\right)}{\varphi(z, f)} \qquad \text{et} \qquad \log | \varphi(0, f) | = -\lim_{r \to 1} \mathrm{T}(r, f).$$

Se basant sur le théorème 1.2 et sur la majoration d'Hadamard pour les déterminants, D. G. Cantor a établi le résultat :

Lemme 1.1. — *Une condition nécessaire pour qu'une fonction, holomorphe à l'origine et méromorphe dans le cercle unité, appartienne à la classe* N, *est que, pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe une constante* $\mathrm{C}(\varepsilon)$ *indépendante de* n *de manière que :*

$$| \mathrm{D}_n | \leq \mathrm{C}(\varepsilon) . \varepsilon^n.$$

A. Familles $\mathcal{F}_1(q, \delta)$ de fractions rationnelles. — Nous désignons par $\mathcal{F}_1(q, \delta)$ l'ensemble des fractions rationnelles $f(z) = \frac{A(z)}{Q(z)}$ telles que $A(z)$ et $Q(z)$ soient des polynomes à coefficients entiers rationnels avec $A(0) \neq 0$, $Q(0) = q \neq 0$ fixé, et vérifiant la condition :

$$\sup_{f \in \mathcal{F}_1(q,\delta)} \left[\lim_{r \to 1} T(r, f)\right] \leqq -\operatorname{Log} \delta < +\infty.$$

La fonction $T(r, f)$ étant, par définition, positive ou nulle, la constante δ vérifie $0 < \delta \leqq 1$.

Théorème 1.3. — *L'ensemble $\mathcal{F}_1(q, \delta)$ est compact pour la convergence uniforme dans tout disque $|z| \leqq r$, $r < \delta$ et dans tout disque $|z|_p \leqq r_p$, $r_p < |q|_p$.*

Démonstration. — Soient $\frac{1}{\theta_j}$ (s'il en existe) les zéros de $Q(z)$ situés dans $|z| < 1$.

D'après nos hypothèses,

$$T(r, f) \leqq -\log \delta$$

quels que soient $r < 1$ et $f \in \mathcal{F}_1(q, \delta)$.

Les fonctions $m(r, f)$ et $N(r, f)$ étant toutes deux positives ou nulles, nous déduisons

$$m(r, f) \leqq -\operatorname{Log} \delta \qquad \text{et} \qquad N(r, f) \leqq -\log \delta,$$

et ceci a lieu quels que soient $r < 1$ et $f \in \mathcal{F}_1(q, \delta)$.

La fonction $N(r, f)$ s'écrit

$$N(r, f) = \int_0^r \frac{n(t)}{t}\, dt = \sum_{1 \leqq r|\theta_j|} \log r\,|\theta_j|,$$

ou 0 si $f(z)$ est holomorphe. Nous en tirons

$$1 < \prod_j |\theta_j| \leqq \frac{1}{\delta}$$

et, par suite, les zéros de $Q(z)$, dans $|z| < 1$, sont tous situés dans la couronne fixe $0 < \delta \leqq |z| < 1$.

Posons

$$\psi(z) = \prod_j \frac{1 - \theta_j z}{\bar{\theta}_j - z} \qquad \text{et} \qquad \psi(z) = 1$$

si $f(z)$ est holomorphe dans $|z| < 1$.

Les fonctions $\psi(z)$ sont holomorphes dans le cercle unité. Elles ne s'annulent pas pour $|z| < \delta$ et vérifient

$$|\psi(z)| \leqq 1 \quad \text{pour } |z| < 1,$$
$$|\psi(0)| \geqq \delta > 0.$$

Considérons maintenant la famille des fonctions :

$$F(z) = f(z)\,\psi(z).$$

Elles sont holomorphes dans le cercle unité et à caractéristique bornée, car

$$T(r, F) = m(r, F) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overset{+}{\log}|f.\psi|\,d\zeta \leqq m(r, f) + m(r, \psi),$$

or $m(r, \psi) = 0$ puisque $|\psi(z)| \leqq 1$ pour $|z| < 1$, d'où

$$m(r, F) \leqq m(r, f) \leqq -\log\delta.$$

Du théorème 1.2, nous tirons, pour $F(z)$, la représentation

$$F(z) = \frac{\varphi\left(z, \dfrac{1}{F}\right)}{\varphi(z, F)}, \qquad \varphi(0, F) = e^{-\lim\limits_{r\to 1} m(r, F)} \geqq \delta$$

et

$$\left|\varphi\left(z, \frac{1}{F}\right)\right| \leqq 1, \qquad |\varphi(z, F)| \leqq 1 \quad \text{dans } |z| < 1.$$

Les fonctions $F(z)$ et $\psi(z)$ constituent, dans $|z| < 1$, des familles normales au sens de Montel, c'est-à-dire que tout ensemble infini de telles fonctions, nous pouvons extraire des suites partielles $F_\nu(z)$ et $\psi_\nu(z)$ uniformément convergentes dans tout compact situé dans $|z| < 1$. Nous pouvons choisir ces suites de manière qu'elles convergent simultanément.

D'une part, les fonctions $\psi_\nu(z)$ tendront vers une limite $\psi^\star(z)$, holomorphe dans $|z| < 1$ et y vérifiant $|\psi^\star(z)| < 1$. Puisque $|\psi_\nu(0)| \geqq \delta > 0$, la fonction limite $\psi^\star(z)$ vérifie aussi $|\psi^\star(0)| \geqq \delta$, d'où en particulier $\psi^\star(z) \not\equiv 0$. Nous savons que les fonctions $\psi_\nu(z)$ ne s'annulent pas dans la couronne fixe $0 \leqq |z| < \delta$, il en sera donc de même pour $\psi^\star(z)$.

D'autre part, les fonctions $\varphi_\nu\left(z, \frac{1}{F_\nu}\right)$ et $\varphi_\nu(z, F_\nu)$ tendront vers des limites respectives $\varphi_1^\star(z)$ et $\varphi_2^\star(z)$, holomorphes et bornées par 1 dans le cercle unité. De plus, comme $\varphi_\nu(z, F_\nu)$ n'admet aucun zéro dans $|z| < 1$ et que $|\varphi_\nu(0, F)| \geqq \delta > 0$, $\varphi_2^\star(z)$ n'admettra aucun zéro dans $|z| < 1$ et vérifiera $|\varphi_2^\star(0)| \geqq \delta$.

Par suite, les fonctions $F_\nu(z)$ tendront vers une limite $F^\star(z)$, holomorphe dans $|z| < 1$, quotient de deux fonctions $\varphi_1^\star(z)$ et $\varphi_2^\star(z)$. Nous déduisons que $F^\star(z)$ est à caractéristique bornée dans le cercle unité.

Par conséquent, la fonction

$$f^\star(z) = \frac{\varphi_1^\star(z)}{\varphi_2^\star(z)\,\psi^\star(z)}$$

holomorphe dans $|z| < \delta$, est limite uniforme des fonctions $f_\nu(z)$ dans tout compact situé dans $|z| < \delta$. De plus, c'est une fonction à caractéristique bornée.

$f^\star(z)$ admet un développement de Taylor :

$$f^\star(z) = \sum u_n^\star z^n$$

convergent dans $|z| < \delta$.

Les coefficients $u_n^\star$ sont limites des $u_{n,\nu}$ de même indice n. Or $q^{n+1} u_{n,\nu}$ est un entier rationnel, il en sera donc de même pour les $q^{n+1} u_n^\star$, et par conséquent à partir d'un certain rang dans la suite, les $u_{n,\nu}$ finissant par être égaux à leur limite $u_n^\star$.

Considérons le déterminant de Kronecker associé au développement de $f^\star(z)$.

$$D_n^\star = \begin{vmatrix} u_0^\star & u_1^\star & \dots & u_n^\star \\ u_1^\star & u_2^\star & \dots & u_{n+1}^\star \\ u_1^\star & \dots & \dots & u_{2n}^\star \end{vmatrix}.$$

La fonction $f^\star(z)$ étant à caractéristique, en vertu du lemme 1.1, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $C(\varepsilon)$ indépendante de n telle que

$$|D_n^\star| \leq C(\varepsilon)\,\varepsilon^n.$$

Puisque pour $\nu > \nu_0$, $u_{n,\nu} = u_n^\star$, nous aurons aussi

$$|D_{n,\nu}| = |D_n^\star| \quad \text{pour } \nu > \nu_0.$$

$D_{n,\nu}$ étant le déterminant de Kronecker associé au développement de $f_\nu(z)$. F. Dress [7], en se suivant d'identités sur les déterminants, a montré que $q^{2n+1} D_{n,\nu}$ est un entier rationnel. Par conséquent $q^{2n+1} D_n^\star$ est un entier rationnel et

$$|q^{2n+1} D_n^\star| \leq q\,C(\varepsilon)\,(\varepsilon q^2)^n.$$

En prenant $\varepsilon < \frac{1}{q^2}$, il existe un indice n_0 tel que pour $n > n_0$

$$|q^{2n+1} D_n^\star| < 1,$$

soit $q^{2n+1} D_n^\star = 0$ et $D_n^\star = 0$ pour $n > n_0$.

Le critère de Kronecker nous affirme que $f^\star(z)$ est une fraction rationnelle que nous écrirons :

$$f^\star(z) = \frac{A^\star(z)}{Q^\star(z)},$$

avec

$$A^\star(z) = a_0^\star + a_1^\star z + \dots + a_h^\star z^h \qquad \text{et} \qquad Q^\star(z) = q^\star + q_1^\star z + \dots + q_s^\star z^s.$$

Nous pouvons prendre $A^\star(z)$ et $Q^\star(z)$ premiers entre eux. En appliquant le lemme de Fatou à

$$q\frac{A^\star(qz)}{Q^\star(qz)} = \sum_{n=0}^{+\infty} q^{n+1} u_n^\star z^n,$$

nous déduisons l'existence de deux polynomes, $A_1(z)$ et $Q_1(z)$ à coefficients entiers rationnels, premiers entre eux, tels que $Q_1(0) = 1$ et

$$q\frac{A^\star}{Q^\star}\frac{(qz)}{(qz)} = \frac{A_1(z)}{Q_1(z)}.$$

Il en résulte que les coefficients $a_j^\star$ et $q_j^\star$ des polynomes $A^\star(z)$ et $Q^\star(z)$ sont tels que $q^j a_j^\star$ pour $j \geqq 0$ et $q^{j-1} q_j^\star$ pour $j \geqq 1$ soient des entiers rationnels.

Se basant sur le résultat $u_{n,\nu} = u_n^\star$ pour $\nu > \nu_0$, donc que les $u_{n,\nu}$ tendent vers les $u_n^\star$ au sens p-adique, Pisot [14] a montré qu'une suite partielle extraite de la famille $\mathcal{F}_1(q, \delta)$ converge uniformément dans tout disque $|z|_p \leqq r_p$, $r_p < |q|_p$. D'autre part, en utilisant les inégalités de Cauchy dans $\hat{\Omega}_p$, complété de Ω_p clôture algébrique du corps Q_p, il a montré que les rationnels $a_j^\star$ et $q_j^\star$, à dénominateur puissance de q, sont des entiers rationnels. Par suite, les polynomes $Q^\star(z)$ et $A^\star(z)$ sont à coefficients entiers rationnels, avec $Q^\star(0) = q$.

D'autre part, $u_0^\star = \dfrac{a_0^\star}{q}$ est égal, pour $\nu > \nu_0$, à

$$\frac{a_{0,\nu}}{q} \neq 0, \qquad \text{d'où} \qquad A^\star(0) = a_0^\star \neq 0.$$

D'autre part, la caractéristique de la limite $f^\star(z)$ vérifie, pour $r < 1$,

$$T(r, f^\star) \leqq T(r, \varphi_1^\star) + T\left(r, \frac{1}{\varphi_2^\star}\right) + T\left(r, \frac{1}{\psi^\star}\right).$$

La formule de Jensen, appliquée aux fonctions $\varphi_2^\star(z)$ et $\psi^\star(z)$ donne

$$T(r, \varphi_2^\star) = T\left(r, \frac{1}{\varphi_2^\star}\right) + \log|\varphi_2^\star(0)|,$$
$$T(r, \psi^\star) = T\left(r, \frac{1}{\psi^\star}\right) + \log|\psi^\star(0)).$$

Les fonctions $\varphi_2^\star(z)$ et $\psi^\star(z)$ sont holomorphes et bornées par 1 dans le cercle unité, d'où

$$T(r, \psi^\star) = T(r, \varphi_2^\star) = 0, \quad \forall\, r < 1.$$

Il en résulte

$$T(r, f^\star) \leqq -\log|\varphi_2^\star(0)| - \log|\psi^\star(0)|.$$

Mais nous savons que :

$$\log|\varphi_2^\star(0)| = \lim_{\nu\to+\infty} \log|\varphi_\nu(0, F_\nu)| - \lim_{\nu\to+\infty}\left[\lim_{r\to 1} m(r, f_\nu)\right],$$
$$\log|\psi^\star(0)| = \lim_{\nu\to+\infty} \log|\psi_\nu(0)| = -\lim_{\nu\to+\infty}\left[\lim_{r\to 1} N(r, f_\nu)\right].$$

Nous déduisons pour $T(r, f^*)$ l'inégalité

$$T(r, f^*) \leqq \lim_{\nu \to +\infty} \lim_{r \to 1} [m(r, f_\nu) + N(r, f_\nu)] = \lim_{\nu \to +\infty} T(r, f_\nu),$$

soit

$$T(r, f^*) \leqq -\log \delta \quad \text{quel que soit } r < 1.$$

Par conséquent, la fonction $f^*(z) = \dfrac{A^*(z)}{Q^*(z)}$ appartient à $\mathcal{F}_1(q;\delta)$ et le théorème 1.3 est ainsi établi.

Remarques. — 1° Nous savons que pour $\nu > \nu_0$, $a_0^* = a_{0,\nu} \neq 0$. D'après la formule de Jensen,

$$T(r, f_\nu) = T\left(r, \frac{1}{f_\nu}\right) + \log|a_0^*|.$$

Les fonctions $\dfrac{1}{f_\nu(z)}$ sont à caractéristique bornée et appartiennent pour $\nu > \nu_0$ à la famille $\mathcal{F}_1(a_0^*, \delta_1)$, avec $\delta_1 = \delta u_0^*$.

2° Il peut arriver que la fonction limite $\dfrac{A^*(z)}{Q^*(z)}$ appartienne à l'ensemble $\mathcal{F}_1(q', \delta)$, où q' désigne un diviseur de q, si les polynomes $Q(z)$ ne sont pas primitifs, c'est-à-dire tous divisibles par un entier q'', la fonction limite $\dfrac{A^*(z)}{Q^*(z)}$ sera telle que $Q^*(z)$ soit divisible par q''.

Quel que soit q'', diviseur de q, l'ensemble $\mathcal{F}_1(q', \delta)$, $q = q'.q''$, est un sous-ensemble de $\mathcal{F}_1(q, \delta)$. En particulier, $\mathcal{F}_1(1, \delta)$ est un sous-ensemble compact de tout ensemble $\mathcal{F}_1(q, \delta)$.

B. Familles $\mathcal{F}_2(q, \delta)$ de fractions rationnelles. — Nous désignons par $\mathcal{F}_2(q, \delta)$ l'ensemble des fractions rationnelles $f(z) = \dfrac{A(z)}{Q(z)}$ telles que $A(z)$ et $Q(z)$ soient des polynomes à coefficients entiers rationnels avec $A(0) \neq 0$, $Q(0) = q \neq 0$ fixé, et vérifiant :

(1) $|f(z)| \leqq 1$ sur $|z| = 1$;

(2) $\displaystyle\sup_{f \in \mathcal{F}_2(q, \delta)} \prod_j |\theta_j| \leqq \frac{1}{\delta} < +\infty$, δ étant une constante; les $\dfrac{1}{\theta_j}$ désignent les zéros de $Q(z)$ situés dans $|z| < 1$.

Si le polynome $Q(z)$ admet au plus k zéros situés dans $|z| < 1$ et appartenant à la couronne fixe $0 < \delta' \leqq |z| < 1$, l'ensemble $\mathcal{F}(q, k, \delta')$ sera identique à l'ensemble $\mathcal{F}_2(q, \delta'^k)$.

La famille $\mathcal{F}_2(q, \delta)$ est un sous-ensemble de $\mathcal{F}_1(q, \delta)$. En effet, pour $f \in \mathcal{F}_2(q, \delta)$, la condition (1) entraîne $\lim_{r \to 1} m(r, f) = 0$. D'autre part,

$$\lim_{r \to 1} N(r, f) = \lim_{r \to 1} \sum_{1 \leqq r|\theta_j|} \log r|\theta_j| \leqq -\log \delta,$$

d'où

$$\sup_{f \in \mathcal{F}_2(q, \delta)} \left[\lim_{r \to 1} T(r, f)\right] \leqq -\log \delta.$$

Du théorème 1.3, nous tirons le corollaire :

COROLLAIRE. — *L'ensemble $\mathcal{F}_2(q, \delta)$ est relativement compact dans $\mathcal{F}_1(q, \delta)$ pour la convergence uniforme dans tout disque $|z| \leq r$, $r < \delta$ et dans tout disque $|z|_p \leq r_p$, $r_p < |q|_p$.*

Remarquons que la condition (1) n'est pas nécessairement vérifiée par la fonction limite $\frac{A^*(z)}{Q^*(z)}$. Par contre, si $Q(z)$ admet au plus k zéros dans $|z| < 1$, donc dans le cas de $\mathcal{F}(q, k, \delta')$, nous aurons $\left|\frac{A^*(z)}{Q^*(z)}\right| \leq 1$ sur $|z| = 1$ et $\mathcal{F}(q, k, \delta')$ sera compact.

CHAPITRE II.

ENSEMBLES FERMÉS DE NOMBRES ALGÉBRIQUES.

Le théorème des familles compactes de fractions rationnelles permet l'étude de certains ensembles de nombres algébriques, ensembles qui ont la propriété remarquable d'être fermés. Le premier exemple d'un tel ensemble a été découvert par Salem [15] et il est défini comme suit : un nombre réel appartient à S_1 s'il est entier algébrique et si ses conjugués (autres que lui-même) sont tous situés dans $|z| < 1$. Le théorème de Salem dit que S_1 est un sous-ensemble fermé de la droite réelle. Pisot [14] a montré qu'il existe d'autres ensembles de nombres algébriques qui sont fermés et qui comprennent S_1.

DÉFINITION DES ENSEMBLES S_q. — Soit q, un entier rationnel non nul. Nous désignons par S_q, un ensemble de nombres algébriques réels ayant les propriétés :

(1) θ appartient à S_q si $\theta > 1$ et $\frac{1}{\theta}$ est l'unique zéro situé dans $|z| \leq 1$ d'un polynome $Q(z)$ à coefficients entiers rationnels tel que : $Q(0) = q$.

(2) Il existe un polynome à coefficients entiers rationnels tel que :

$$A\left(\frac{1}{\theta}\right) \neq 0, \qquad |A(0)| \geq |q| \qquad \text{et} \qquad |A(z)| \leq |Q(z)| \quad \text{sur } |z| = 1.$$

Remarquer :

1° On ne change pas θ en changeant $Q(z)$ en $-Q(z)$ ou $A(z)$ en $-A(z)$. Nous pouvons donc toujours supposer $q \geq 1$ et $A(0) \geq q$.

2° La définition de S_q n'implique pas que $Q(z)$ soit nécessairement irréductible. Nous pouvons multipler les polynomes $A(z)$ et $Q(z)$ par un même entier, ce qui montre que $S_{q'} \subset S_q$, si q' est un diviseur de q. En particulier, S_1 est contenu dans tout ensemble S_q.

Ces ensembles S_q, généralisation de l'ensemble S_1, possèdent la propriété :

THÉORÈME 2.1. — *L'ensemble S_q est un sous-ensemble fermé de la droite réelle.*

Tout d'abord, pour tout élément θ de S_q, nous avons, d'après [14], l'inégalité

$$\theta > 1 + \frac{1}{4q},$$

ce qui nous permet de déduire que 1 ne peut pas être point limite de S_q.

Soit une suite $\theta_\nu \in S_q$ tendant vers un nombre fini θ. A la suite des θ_ν est associée la famille des fractions rationnelles $\frac{A_\nu(z)}{Q_\nu(z)}$ servant à les définir. Cette famille de fractions est compacte. Nous pouvons extraire une suite partielle tendant vers la fraction limite $\frac{A(z)}{Q(z)}$, ayant $\frac{1}{\theta}$ comme unique pôle dans $|z| \leqq 1$ et vérifiant toutes les conditions pour que θ appartienne à S_q. Si nous considérons les développements de Taylor à l'origine, des fractions rationnelles $\frac{A_\nu(z)}{Q_\nu(z)}$ et $\frac{A(z)}{Q(z)}$,

$$\frac{A_\nu(z)}{Q_\nu(z)} = u_{0,\nu} + \ldots + u_{n,\nu} z^n + \ldots,$$

$$\frac{A(z)}{Q(z)} = u_0 + \ldots + u_n z^n + \ldots,$$

nous savons que les coefficients $u_{n,\nu}$, pour n fixé, sont égaux à partir d'un certain rang à leur limite u_n, ce qui nous permet d'écrire

$$\frac{A_\nu(z)}{Q_\nu(z)} - \frac{A(z)}{Q(z)} = z^{M(\nu)}[(u_{M(\nu),\nu} - u_{M(\nu)}) + \ldots$$

ou encore :

$$(1) \qquad A_\nu(z)\, Q(z) - Q_\nu(z)\, A(z) \equiv z^{M(\nu)} \gamma_\nu(z).$$

$M(\nu)$ désigne un entier tendant vers l'infini avec ν. $\gamma_\nu(z)$ est un polynome à coefficients entiers rationnels tel que $\gamma_\nu(0) \neq 0$, soit en particulier $|\gamma_\nu(0)| \geqq 1$.

Nous désignons par $S_q^{(n)}$ les ensembles dérivés de S_q. De la même manière que pour $S_1^{(n)}$ [15], ils ne sont pas vides. De la relation (1), nous allons établir une caractérisation de l'ensemble S'_q et quelques propriétés des ensembles $S_q^{(n)}$. En particulier, nous montrerons qu'il n'existe pas d'ensemble dérivé d'ordre transfini.

Caractérisation de l'ensemble dérivé S'_q.

Théorème 2.2. — *Soit θ un nombre fini appartenant à S_q (et pouvant appartenir à $S_{q'}$ si q' est un diviseur de q).*

Une condition nécessaire et suffisante pour que θ appartienne à S'_q est qu'il existe un polynome $A(z)$ à coefficients entiers rationnels, avec $A(0) \geqq q$, $A\left(\frac{1}{\theta}\right) \neq 0$ tel que :

$$|A(z)| \leqq |Q(z)| \quad \text{sur } |z| = 1,$$

l'égalité n'ayant lieu qu'en un nombre fini de points.

Démonstration. — *Condition nécessaire :* θ est supposé par hypothèse limite d'une suite infinie de nombres distincts θ_ν de S_q. A la suite des θ_ν est associée la famille des fractions rationnelle $\frac{A_\nu(z)}{Q_\nu(z)}$ et, d'après (1), nous avons

$$A_\nu(z)\,Q(z) - Q_\nu(z)\,A(z) \equiv z^{M(\nu)}\gamma_\nu(z), \tag{1}$$

où $\frac{A(z)}{Q(z)}$ désigne la fraction limite des $\frac{A_\nu(z)}{Q_\nu(z)}$ et définissant θ, fraction que nous pouvons considérer comme irréductible.

Posons

$$P(z) \equiv \varepsilon z^s Q\left(\frac{1}{z}\right) \qquad \text{et} \qquad B(z) \equiv \varepsilon' z^h A\left(\frac{1}{z}\right),$$

où s et h désignent respectivement les degrés de $Q(z)$ et $A(z)$, et ε, ε' sont choisis de manière que $P(0)$ et $B(0)$ soient positifs. Supposons que $P(z) \equiv A(z)$, nous avons alors sur $|z| = 1$,

$$|A_\nu(z)\,Q(z)| \leqq |P(z)\,Q_\nu(z)|.$$

Le polynome $P(z)\,Q_\nu(z)$ admet s zéros dans $|z| < 1$. Puisque $M(\nu)$ tend vers l'infini avec ν, alors à partir d'un certain rang, $M(\nu) > s$ et le théorème de Rouché appliqué à (1) entraîne $\gamma_\nu(z) \equiv 0$, soit

$$\frac{A_\nu(z)}{Q_\nu(z)} \equiv \frac{P(z)}{Q(z)}$$

à partir d'un certain rang et nous n'avons pas une infinité de nombres θ_ν distincts. $A(z)$ est nécessairement distinct de $P(z)$. Supposons maintenant que l'équation $|A(z)| = |Q(z)|$ soit vérifiée pour une infinité de points sur $|z| = 1$. Nous avons pour ces points :

$$Q(z)\,Q\left(\frac{1}{z}\right) - A(z)\,A\left(\frac{1}{z}\right) = 0,$$

si nous multiplions cette dernière équation par $z^{\max(h,s)}$, nous obtenons une identité qui s'écrit :

$$P(z).Q(z) \equiv A(z).B(z) \qquad (h = s).$$

Comme les polynomes $A(z)$ et $Q(z)$ sont pris premiers entre eux, $A(z)$ divise nécessairement $P(z)$, soit $P(z) \equiv \lambda A(z)$ et il est immédiat de voir que $\lambda = 1$, mais alors l'identité $A(z) \equiv P(z)$ est impossible.

Condition suffisante : Soit θ un élément de S_q défini par la fraction rationnelle $\frac{A(z)}{Q(z)}$, telle que $A(z)$ soit différent de $P(z)$.

Nous allons construire une suite de nombres θ_ν de S_q admettant θ comme point limite.

En effet, pour cela nous considérons la famille des fractions rationnelles :

$$f_\nu(z) \equiv \frac{A(z) + \varepsilon_1 \varepsilon z^{\nu+h-s} P(z)}{Q(z) + \varepsilon_1 \varepsilon' z^\nu B(z)}, \qquad \nu \geqq \max(1, s-h+1) \qquad \text{et} \qquad \varepsilon_1 = \pm 1.$$

Posons, au voisinage de l'origine,

$$\frac{A(z)}{Q(z)} = u_0 + u_1 z + \ldots + u_n z^n + \ldots,$$
$$f_\nu(z) = u_{0,\nu} + u_{1,\nu} z + \ldots + u_{n,\nu} z^n + \ldots$$

Soit N un entier tel que

$$u_n = u_{\nu,n} \quad \text{pour } n < N,$$
$$u_N \neq u_{N,\nu}.$$

Nous avons alors

$$1. \quad s < h : \quad N = \nu;$$
$$2. \quad h < s : \quad N = \nu + h - s;$$
$$3. \quad h = s : \quad N = \nu + r,$$

r désignant le degré le plus faible du polynome,

$$\varepsilon PQ - \varepsilon' AB.$$

Il est facile de voir que $u_1 \neq 0$. De sa formation, la fonction $f_\nu(z)$ est bornée par 1 sur le cercle unité. Pour $N \geqq 2$, $u_0 = u_{0,\nu} > 1$ et $u_{1,\nu} = u_1 \neq 0$ et, d'après un résultat classique, nous déduisons que $f_\nu(z)$ admet au moins un pôle dans $|z| < 1$. Or le dénominateur de $f_\nu(z)$ admet au plus un zéro dans $|z| < 1$. $f_\nu(z)$ admet alors exactement un pôle dans $|z| < 1$, soit θ_ν l'inverse de ce pôle.

Si $Q(z) + \varepsilon_1 \varepsilon z^\nu B(z)$ admet un zéro sur $|z| = 1$, cet élément est aussi zéro de $A(s) + \varepsilon_1 \varepsilon z^{\nu+h-s} P(z)$. Soit alors $D_\nu(z)$ le P. G. C. D. de ces deux polynomes,

$$Q(z) + \varepsilon_1 \varepsilon' z^\nu B(z) \equiv D_\nu(z)\, Q_\nu(z),$$
$$A(z) + \varepsilon_1 \varepsilon z^{\nu+h-s} P(z) \equiv D_\nu(z)\, A_\nu(z),$$

d'où, par combinaison linéaire :

$$\varepsilon z^h Q(z) P(z) - \varepsilon' z^s A(z) B(z) \equiv D_\nu(z) (\varepsilon z^h Q_\nu(z) P(z) - \varepsilon' z^s A_\nu(z) B(z)).$$

$D_\nu(z)$ est un diviseur d'un polynome fixe indépendant de ν, son degré est alors borné et celui de $Q_\nu(z)$ augmentera indéfiniment avec ν et il y a une infinité de nombres θ_ν distincts. Cette suite est définie par la famille des

$$f_\nu(z) \equiv \frac{d A_\nu(z)}{d Q_\nu(z)}, \qquad \text{avec} \quad d = D_\nu(0),$$

et les θ_ν appartiennent à S_q.

L'égalité $Q_\nu\left(\frac{1}{\theta_\nu}\right) = 0$ entraîne

$$Q\left(\frac{1}{\theta_\nu}\right) = -\varepsilon'\varepsilon_1 B\left[\frac{1}{\theta_\nu}\right].$$

Puisque $\theta_\nu > 1 + \frac{1}{4q}$, θ_ν^ν tend vers l'infini avec ν et comme $B\left[\frac{1}{\theta_\nu}\right]$ est borné $Q\left[\frac{1}{\theta_\nu}\right]$ tend vers zéro et θ est limite des θ_ν. De plus, à partir d'un certain rang, $B\left[\frac{1}{\theta_\nu}\right]$ est de signe constant. En prenant $\varepsilon_1 = -\varepsilon' \operatorname{Sgn} B\left[\frac{1}{\theta_\nu}\right]$ ou $\varepsilon_1 = \varepsilon' \operatorname{Sgn} B\left[\frac{1}{\theta_\nu}\right]$, nous remarquons que $Q\left[\frac{1}{\theta_\nu}\right]$ est, soit positif, soit négatif. Le nombre θ est limite de nombres de S_q simultanément à droite ou à gauche.

Nous dirons dorénavant que $f(z) \equiv \frac{A(z)}{Q(z)}$ est de rang fini s si $A(z) \equiv P(z)$, de rang infini dans le cas contraire; par suite, si θ est un élément de S'_q, il est défini par au moins une fraction rationnelle de rang infini.

Nous pouvons aussi caractériser les éléments de S_q par la valeur moyenne de $\left|\frac{A(z)}{Q(z)}\right|^2$ sur $|z| = 1$.

Lemme 2.1. — *Soit une suite de nombres θ_ν de S_q tendant vers le nombre fini θ. Une suite partielle extraite de la famille des $\frac{A_\nu(z)}{Q_\nu(z)}$ tendra vers $\frac{A(z)}{Q(z)}$ et si μ et μ_ν désignent respectivement les valeurs moyennes de $\left|\frac{A(z)}{Q(z)}\right|^2$ et $\left|\frac{A_\nu(z)}{Q_\nu(z)}\right|^2$ sur $|z| = 1$, nous avons*

$$\mu \leq \lim_{\nu \to +\infty} \mu_\nu - \frac{1}{(q\theta)^4}.$$

Démonstration. — Si nous introduisons

$$\left(\frac{1-\theta z}{\theta - z}\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n \qquad \text{et} \qquad \frac{1-\theta z}{\theta - z}\,\frac{1-\theta_\nu z}{\theta_\nu - z} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} d_{n,\nu} z^n$$

les valeurs moyennes μ et μ_ν admettent les expressions

$$\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{p=0}^{n} d_{n-p} u_p \right)^2; \tag{2}$$

$$\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{p=0}^{\infty} d_{n-p,\nu} u_p \right)^2; \tag{3}$$

$$\mu_\nu = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{p=0}^{n} d_{n-p,\nu} u_{p,\nu} \right)^2. \tag{4}$$

En raison de (2), pour tout $\varepsilon > 0$, nous pouvons déterminer un entier N tel que

$$\sum_{n=0}^{M} \left(\sum_{p=0}^{n} d_{n-p} u_p \right)^2 > \mu - \varepsilon.$$

Quand ν augmente indéfiniment, les $d_{n,\nu}$ tendent vers d_n, quel que soit l'entier n. Nous pouvons déterminer un entier n tel que pour $\nu > m$, nous ayons

$$\sum_{n=0}^{N} \left(\sum_{p=0}^{n} d_{n-p,\nu} u_p \right)^2 > \mu - 2\varepsilon. \tag{5}$$

Soit alors, en tenant compte de (3),

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \left(\sum_{p=0}^{n} d_{n-p,\nu} u_p \right)^2 < 2\varepsilon. \tag{6}$$

Choisissons pour ν une valeur assez grande (supérieure à m) de manière que la relation (1) soit valable avec $\gamma_\nu(0) \neq 0$. De $|\gamma_\nu(0)| \geqq 1$, nous tirons

$$| u_{M(\nu),\nu} - u_{M(\nu)} | \geqq \frac{1}{q^2}, \qquad M(\nu) > N. \tag{7}$$

Compte tenu de (1), la relation (5) entraîne

$$\sum_{n=0}^{N} \left(\sum_{p=0}^{n} d_{n-p,\nu} u_{p,\nu} \right)^2 > \mu - 2\varepsilon \tag{8}$$

tandis que la relation

$$\left| \sum_{p=0}^{M(\nu)} d_{M-P,\nu} u_p \right| < \sqrt{2\varepsilon},$$

conséquence de (6), entraîne en tenant compte de (7),

$$\left| \sum_{p=0}^{M(\nu)} d_{M(\nu)-p,\nu} u_{p,\nu} \right| \geqq \frac{d_{0,\nu}}{q^2} - \sqrt{2\varepsilon}. \tag{9}$$

Les relations (4), (8), (9) conduisent immédiatement à

$$\mu_\nu > \mu - 2\varepsilon + \left(\frac{d_{0,\nu}}{q^2} - \sqrt{2\varepsilon}\right)^2.$$

En faisant tendre ν vers l'infini et en remarquant que $d_{0,\nu}$ tend vers $d_0 = \frac{1}{\theta^2}$, nous déduisons

$$\mu \leqq \lim_{\nu \to +\infty} \mu_\nu - \frac{1}{(q\theta)^4}.$$

A partir de ce résultat, nous établissons le théorème suivant :

Théorème 2.3. — *Si un nombre θ appartient à l'ensemble dérivé $S_q^{(n)}$, il existe un polynome $A(z)$ à coefficients entiers rationnels tel $A(0) \geqq q$ et que sur $|z| = 1$ nous avons $|A(z) \leqq |Q(z)|$, la valeur moyenne de $\left|\frac{A(z)}{Q(z)}\right|^2$ étant au plus égale à $1 - \frac{n}{(q\theta)^4}$.*

La démonstration se fait par récurrence. Le résultat est évidemment vrai pour $n = 0$. Supposons-le vrai pour $n = p$. Si θ appartient à $S_q^{(p+1)}$ il est limite d'une suite θ_ν de $S_q^{(p)}$. Les fractions rationnelles associées aux θ_ν donnent des valeurs moyennes $\mu_\nu \leqq 1 - \frac{p}{(q\theta_\nu)^4}$, d'où

$$\lim_{\nu \to +\infty} \mu \leqq 1 - \frac{p}{(q\theta)^4}$$

et, d'après le lemme 2.1, la valeur moyenne de $\frac{A(z)}{Q(z)}$ associée au nombre θ vérifie

$$\mu \leqq \lim_{\nu \to +\infty} \mu_\nu - \frac{1}{(q\theta)^4} \leqq 1 - \frac{p+1}{(q\theta)^4}.$$

et le théorème 2.3 est ainsi établi.

Dans les hypothèses du théorème 2.3, nous avons en particulier $1 - \frac{n}{(q\theta)^4} > 0$, ce que nous pouvons énoncer sous la forme :

Corollaire. — *Le plus petit élément de l'ensemble $S_q^{(n)}$ est supérieur à $\frac{n^{\frac{1}{4}}}{q}$ et par conséquent augmente indéfiniment avec n.*

Par suite, il n'existe aucun élément qui soit commun à tous les éléments dérivés d'ordre fini.

CHAPITRE III.

Sur les éléments d'accumulation de S_q.

D'après le théorème 2.1, tout ensemble $S_q^{(n)}$ admet un plus petit élément. L'objet de ce chapitre est la détermination des plus petits éléments de S'_q. Nous savons qu'un nombre θ de S'_q est défini par au moins une fraction rationnelle $\frac{A(z)}{Q(z)}$ de rang infini. La distribution sur $|z|=1$ des zéros du polynome $A(z)-Q(z)$ a permis à Dufresnoy et Pisot [8] de déterminer le plus petit élément de S'_1, à savoir $\alpha_1=1{,}618\,039\ldots$ zéro du polynome $1+z-z^2$. De plus, par une autre méthode ne faisant appel qu'au « problème des coefficients » pour une fonction méromorphe dans $|z|\leqq 1$ et vérifiant $|f(z)|\leqq|f(0)|$ sur $|z|=1$, ils ont montré dans [11] que l'ensemble des éléments de S'_1 inférieurs à 1,8 contient outre α_1 le nombre $\alpha_2=1{,}754\,877\,6\ldots$, zéro du polynome : $1-z+2z^2-z^3$. La « méthode des coefficients » a permis à Marthe Grandet [12] de montrer que le nombre 2 est le plus petit élément de S'_1 ; elle n'a pas obtenu tous les éléments de S'_1 inférieurs à 2, mais toutefois elle a signalé parmi ceux-ci, les nombres β_n, zéros des polynomes

$$\frac{1-z^{n+1}(2-z)}{1-z} \qquad (n\geqq 1).$$

L'utilisation simultanée des deux méthodes indiquées, va nous permettre de déterminer tous les éléments de S'_q, inférieurs à $\theta^\star$, zéro du polynome :

$$q-1+(q-1)z-(q-z)z^2-qz^3.$$

En plus de la suite des β_n signalés par Marthe Grandet, nous verrons que l'ensemble des éléments de S'_1 inférieurs à $\theta^\star=2$, contient la suite des α_n, zéros des polynomes

$$1-z+z^n(2-z) \qquad (n\geqq 1)$$

et un nombre particulier $\hat{\theta}'_2$, zéro du polynome

$$1-2z^2-z^3+z^4.$$

Le nombre 2 est le seul élément d'accumulation des nombres α_n et β_n, lesquels vérifient

$$\alpha_1=\beta_1<\alpha_2<\beta_2<\alpha_3<\hat{\theta}'_2<\beta_3<\ldots<\alpha_n<\beta_n<\beta_{n+1}<\ldots<2.$$

Nous retrouvons le résultat que 2 est le plus petit élément de S''_1.

Nous verrons aussi que les éléments de $S'_q (q \geqq 2)$ inférieurs à $\theta^\star$ font partie de la suite des $\alpha_{n,q}$ (pour $q = 1$, α_n), zéros des polynomes :

$$q - 1 + z - qz^2 + z^n(q - 1 + 2z - qz^2) \qquad (n \geqq 1).$$

Les nombres $\alpha_{n,q}$ inférieurs à $\theta^\star$ correspondent à $n \leqq 3$, soit

$$\alpha_{1,q} < \alpha_{2,q} < \alpha_{3,q} < \theta^\star.$$

Dufresnoy et Pisot dans [10] et [11] ont montré que la recherche des plus petits éléments de S_q et S'_q est intimement liée au « problème des coefficients » pour une fonction méromorphe dans le domaine $|z| \leqq 1$, ayant un seul pôle à l'intérieur du cercle unité et satisfaisant, sur $|z| = 1$, à $|f(z)| \leqq |f(0)|$.

Soit θ un élément de S_q défini par la fraction rationnelle $f(z) \equiv \dfrac{A(z)}{Q(z)}$.

Considérons

$$f(z) \equiv u_0 + u_1 z + \ldots + u_n z^n + \ldots$$

le développement de Taylor de $f(z)$ autour de l'origine. Nous le désignerons par

$$f \equiv (u_0, u_1, \ldots, u_n, \ldots).$$

Nous savons, d'après [10], qu'il existe un polynome $E_n(z)$ de degré n avec $E_n(0) = 1$, tel que si nous posons :

$$D_n(z) \equiv -z^n E_n\left(\frac{1}{z}\right),$$

le développement de $\dfrac{D_n(z)}{E_n(z)}$ coïncide jusqu'à l'ordre $n - 1$ avec celui de $f(z)$, à savoir

$$\frac{D_n}{E_n} \equiv (u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}, w_n, \ldots),$$

w_n étant déterminé d'une manière unique. De même, nous pouvons trouver un polynome $E^\star_n(z)$ de degré n, avec $E^\star_n(0) = 1$, tel que si nous posons

$$D^\star_n(z) \equiv z^n E^\star_n\left(\frac{1}{z}\right)$$

le développement de $\dfrac{D^\star_n(z)}{E^\star_n(z)}$ coïncide jusqu'à l'ordre $n - 1$, avec celui de $f(z)$, à savoir

$$\frac{D^\star_n}{E^\star_n} \equiv (u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}, w^\star_n, \ldots),$$

$w^\star_n$ étant déterminé d'une manière unique et nous avons les inégalités

$$w_n \leqq u_n \leqq w^\star_n, \tag{1}$$

l'une des égalités entraînant celle de $f(z)$, avec $\dfrac{D_n(z)}{E_n(z)}$ ou $\dfrac{D^\star_n(z)}{E^\star_n(z)}$.

S'il n'y a pas égalité, $D_n(z)$ et $D_n^\star(z)$ ont chacun un zéro et un seul τ_n et $\tau_n^\star$ dans $|z| \geqq 1$ et vérifiant

$$1 \leqq \tau_n < \theta < \tau_n^\star. \tag{2}$$

Signalons enfin la relation de récurrence vérifiée par les polynomes $D_n(z)$

$$D_{n+2}(z) \equiv (1+z)\, D_{n+1}(z) - z\frac{u_{n+1} - w_{n+1}}{u_n - w_n} D_n(z) \qquad (n \geqq 1). \tag{3}$$

Puisque nous nous intéressons aux éléments de S_q inférieurs à $\theta^\star$, de (3) nous tirons

$$u_{n+1} - w_{n+1} < \frac{1+\theta^\star}{\theta^\star} \frac{D_{n+1}(\theta^\star)}{D_n(\theta^\star)} (u_n - w_n) \qquad (n \geqq 1). \tag{4}$$

Les propriétés des polynomes $D_n(z)$ vont nous permettre de donner l'allure du développement de $f(z)$ autour de l'origine :

Lemme 3.1. — *Les fractions rationnelles $f(z)$ définissant des éléments θ de S_q inférieurs à $\theta^\star$ admettent autour de l'origine les développements*

$$\left(1, \frac{1}{q}, u_2, \ldots\right) \qquad (1 \leqq q^2 u_2 \leqq 3); \tag{5}$$

$$(1, 2, u_2, \ldots) \qquad (2 \leqq u_2 \leqq 4, \text{ uniquement pour } q = 1). \tag{6}$$

Démonstration. — Le cas $q = 1$ a été établi dans [12]. Nous supposerons donc $q \geqq 2$. Nous remarquons que les coefficients u_n sont tels que $q^{n+1} u_n$ est un entier rationnel et il en sera de même pour $q^n u_n$ si $u_0 = 1$. Nous formons le polynome $D_1(z) = u_0 - z$. Nous en déduisons $\tau_1 = u_0 = \theta$. Comme $\theta < \theta^\star < 1 + \frac{1}{q}$, il s'ensuit $qu_0 < q\theta < q + 1$. Or, par définition même de S_q, $qu_0 \geqq q$, soit

$$u_0 = 1.$$

Nous déterminons ensuite le polynome

$$D_2(z) \equiv 1 + \frac{u_1}{2} z - z^2,$$

et nous obtenons $w_2 = \frac{u_1^2}{2} D_2(z)$ admettant un zéro τ_2 vérifiant pour $q \geqq 2$, $\tau_2 < \theta < \theta^\star < \theta'_q$ (θ'_q zéro du polynome $q + z - qz^2$), il en résulte

$$q D_2(\theta'_2) \equiv \left(q\frac{u_1}{2} - 1\right)\theta' < 0,$$

soit $qu_1 < 2$. D'autre part, la condition $D_2(1) > 0$ donne $qu_1 \geqq 1$. En définitive, nous avons

$$qu_1 = 1.$$

Les relations (1) et (4) entraînent

$$0 \leqq q^2(u_2 - w_2) < 3, \qquad \text{soit} \quad 1 \leqq q^2 u^2 \leqq 3, \quad \text{car } q^2 w_2 = \frac{1}{2}$$

si $q^2 u^2 = 3$, le polynome $D_3(z)$ admet l'expression :

$$q D_3(z) \equiv q + (q-1) z - (q-2) z^2 - q z^3,$$

de (1) et (4) nous tirons :

$$0 \leqq q^2(u_3 - w_3) < 3$$

si $f(z)$ est de rang infini, l'égalité $u_3 = w_3$ est à exclure. En considérant $\frac{A(z)}{Q(z)} - \frac{q D_3(z)}{q E_3(z)}$, nous remarquons que $q^2(u_3 - w_3)$ est un entier rationnel, il vient

$$q^3 u_3 = q^2 - 2q + 4 \quad \text{ou} \quad q^2 - q + 4; \tag{7}$$

si $q^2 u_2 = 2$, le polynome $D_3(z)$ s'écrit

$$q D_3(z) \equiv q + (q-2) z - (q-3) z^2 - q z^3. \tag{8}$$

De (1) et (4), nous tirons

$$0 \leqq q^2(u_3 - w_3) < 2,$$

c'est ici qu'intervient le choix de $\theta^\star$. Il est déterminé de manière que $q^2(u_3 - w_3) < 2$. Ce dernier nombre étant entier rationnel, il s'ensuit, si $f(z)$ est de rang infini, que

$$q^2(u_3 - w_3) = 1. \tag{9}$$

L'étude des développements (5) avec $q^2 u_2 = 1$ est immédiate :

LEMME 3.2. — *Les éléments de* S_q *définis par* $f \equiv \left(1, \frac{1}{q}, \frac{1}{q^2}, \ldots, u_n, \ldots\right)$ *sont les nombres*

$$\theta'_q, \quad \theta'_{n,q}, \quad \hat{\theta}'_{n,q} \quad (\theta', \theta'_n \textit{ et } \hat{\theta}'_n \textit{ pour } q = 1)$$

respectivement zéros des polynomes :

$$\begin{aligned} &q(1 - z^2) + z, \\ &q(1 - z^2) + z^n(q + z - qz^2) \qquad (n \geqq 1), \\ &q(1 - z^2) - z^n(q - z + qz^2) \qquad (n \geqq 1). \end{aligned}$$

Démonstration. — Nous effectuons sur $f(z)$ la transformation

$$g(z) \equiv \frac{(q - z - qz^2) f(z) - q(1 - z^2)}{q(1 - z^2) f(z) - (q + z - qz^2)} \equiv \frac{q(u_1^2 - u_2) z^2 + \ldots}{q u_2 z^2 + \ldots}.$$

Il est immédiat de voir que $g(z)$ vérifie $|g(z)| \leqq 1$ sur $|z| = 1$. Le théorème de Rouché montre que $g(z)$ admet au plus deux pôles dans $|z| \leqq 1$;

or elle en admet deux à l'origine. Par suite, après simplification par $\frac{z^2}{Q(z)}$, $g(z)$ devient holomorphe dans $|z| \leqq 1$ et quotient de deux polynomes à coefficients entiers. Si $q^2 u_2 = 1$, le développement de $g(z)$ est à coefficients entiers rationnels et, d'après le principe du maximum,

$$g(z) \equiv 0 \qquad \text{ou} \qquad g(z) \equiv \varepsilon_2 z^n \qquad (\varepsilon_2 = \pm 1,\ n \geqq 1).$$

Le premier cas donne

$$f(z) \equiv \frac{q(1-z^2)}{q - z - qz^2},$$

fonction de rang infini, définissant $\theta = \theta'_q$ élément de S'_q.

Les autres cas donnent

$$f(z) \equiv \frac{q(1-z^2) + \varepsilon_2 z^n (q + z - qz^2)}{q - z - qz^2 + \varepsilon_2 z^n q(1-z^2)} \qquad (n \geqq 1),$$

fractions de rang fini donnant les nombres $\theta'_{n,q}$ et $\hat{\theta}'_{n,q}$. Il est possible que certains des nombres $\theta'_{n,q}$, $\hat{\theta}'_{n,q}$ appartiennent à S'_q.

Examinons le cas $q = 1$. Siegel [18] a montré que θ'_1, θ'_2 sont les seuls éléments de S_1 inférieurs à $\sqrt{2}$. D'après [8], toute puissance d'un nombre de S_1 appartient à S'_1. Par suite, θ'^2_1 et θ'^2_2 appartiennent à l'ensemble des nombres de S'_1 inférieurs à 2. Un calcul simple montre que $\theta'^2_1 = \alpha_2$ et $\theta'^2_2 = \hat{\theta}'_2$, le nombre particulier signalé dans l'introduction.

Les développements (5) et (6) jouissent de certaines propriétés particulières :

1° *Remarques sur les développements* (5) : Ces développements montrent que les polynomes $A(z)$ et $Q(z)$ vérifient

$$A(z) - Q(z) \equiv z\,U_1(z), \qquad U_1(0) \equiv 1. \tag{10}$$

De plus, si $q^2 u_2 = 3$ et $f(z)$ est de rang infini, nous avons (9) et de là nous déduisons l'existence d'un polynome $U_3(z)$, avec $U_3(0) = 1$ et tel que

$$\left\{\begin{array}{l} qA(z)\,E_3(z) - qQ(z)\,D_3(z) \equiv z^3\,U_3(z), \\ qD_3(z) \equiv q + (q-2)\,z - (q-3)\,z^2 - qz^3. \end{array}\right. \tag{11}$$

2° *Remarques sur les développements* (6) : Nous reprenons l'étude des polynomes $D_n(z)$; nous avons dans ce cas :

$$\begin{array}{ll} D_1(z) \equiv 1 - z, & w_1 = 0, \\ D_2(z) \equiv 1 + z - z^2, & w_2 = 2. \end{array}$$

Les relations (1) et (4) entraînent

$$0 \leqq u_2 - w_2 \leqq 2.$$

Supposons que $u_m - w_m = 2$ poue $1 \leqq m \leqq n-1$, nous déduisons

$$0 \leqq u_n - w_n \leqq 2,$$
$$(1-z)\,\mathrm{D}_m(z) \equiv 1 - 2z^m + z^{m+1}, \qquad w_m = 2^m - 2, \qquad 1 \leqq m \leqq n.$$

Si pour tout m, $u_m - w_m = 2$, $f(z)$ sera identique à $\frac{1}{1-2z}$ et $\theta = 2$. Par conséquent, pour les éléments θ de S_1 inférieurs à 2, il existe un plus petit indice n tel que

$$u_m - w_m = 2, \qquad 1 \leqq m \leqq n-1,$$
$$0 \leqq u_n - w_n \leqq 1,$$

si $f(z)$ est de rang infini, l'égalité $u_n = w_n$ est à exclure.

Il s'ensuit $u_n - w_n = 1$, d'où la relation

$$(12) \qquad \mathrm{A}(z)\,\mathrm{E}_n(z) - \mathrm{Q}(z)\,\mathrm{D}_n(z) \equiv z^n \mathrm{U}_n(z),$$

avec $\mathrm{U}_n(z)$ polynomes à coefficients entiers rationnels et $\mathrm{U}_n(0) = 1$.

Par contre, si $f(z)$ est de rang fini et que les coefficients u_i sont des entiers rationnels pairs pour $i \geqq 1$, il existe un plus petit indice n tel que $u_n - w_n = 0$, d'où

$$f(z) \equiv \frac{\mathrm{D}_n(z)}{\mathrm{E}_n(z)}.$$

En particulier, si $u_2 = 2$, $f(z)$ admet l'expression

$$f(z) \equiv \frac{1 + z - z^2}{1 - z - z^2}.$$

La recherche des points d'accumulation de l'ensemble S_q, inférieurs à $\theta^\star$, se ramène à la détermination des fractions rationnelles de rang infini qui leur sont associées. Nous venons de voir que ces fonctions $\frac{\mathrm{A}(z)}{\mathrm{Q}(z)}$ vérifient au moins l'une des relations (10), (11) ou (12). Nous sommes amenés à étudier des équations de la forme :

$$\mathrm{A}_n(z) - \mathrm{Q}_n(z) \equiv z^n \mathrm{U}_n(z),$$

où $\mathrm{A}_n(z)$, $\mathrm{Q}_n(z)$ et $\mathrm{U}_n(z)$ désignent des polynomes à coefficients entiers rationnels, avec $\mathrm{U}_n(0) = 1$ tels que :

$$|\mathrm{A}_n(z)| \leqq |\mathrm{Q}_n(z)| \quad \text{sur } |z| = 1,$$

avec égalité ayant lieu en un nombre fini de points. De plus, $\mathrm{Q}_n(z)$ admet n zéros dans $|z| < 1$, les autres étant situés dans $|z| > 1$.

LEMME 3.3. — *Le polynome* $\mathrm{U}_n(z)$ *admet tous ses zéros sur* $|z| = 1$ *et, de plus, distincts.*

Démonstration. — En effet, $U_n(z)$ n'admet que des zéros situés dans $|z| \geqq 1$. Puisque $U_n(0) = 1$, le produit de ces zéros est l'inverse d'un entier. Il en résulte que tous sont de module égal à 1.

De plus, ces zéros sont tous distincts. En effet, pour $0 < \lambda < 1$,

$$|\arg(Q_n(z) - \lambda A_n(z) - \arg Q_n(z)| < \frac{\pi}{2} \quad \text{sur } |z| = 1.$$

Si $U_n(z) = 0$ admet une racine γ d'ordre 2 au moins, deux racines de $Q_n(z) - \lambda A_n(z) = 0$ tendraient vers γ quand λ tend vers 1. Ces racines sont toutes deux situées dans la région $|z| \geqq 1$, puisque les racines de $Q_n(z) - \lambda A_n(z) = 0$ intérieurs au cercle unité tendent vers zéro. Au voisinage de γ, l'argument de $Q_n(z) - \lambda A_n(z)$ pour λ voisin de 1, varier a au moins d'une quantité voisine de 2π, au contraire $\arg Q_n(z)$ variera très peu. Il y a donc une contradiction.

LEMME 3.4. — *L'équation* $Q_n \pm z^m P_n = 0$, *m étant un entier rationnel et* $P_n(z)$ *désignant le polynome réciproque de* $Q_n(z)$ *de degré* s_n, *admet au moins* $|m + s_n - 2n|$ *racines distinctes sur* $|z| = 1$.

En effet, nous avons $\left| z^m \frac{P_n(z)}{Q_n(z)} \right| = 1$ sur $|z| = 1$. Si $\arg z$ augmente de 2π, $\arg\left[z^m \frac{P_n(z)}{Q_n(z)} \right]$ augmente de $[m + s_n - 2n] 2\pi$ et prend donc au moins $|m + s_n - 2n|$ fois une valeur déterminée, en particulier la valeur 0 ou π.

1. ÉTUDE DES DÉVELOPPEMENTS $(1, 2, \ldots, u_n, \ldots)$. — La fonction $\frac{A(z)}{Q(z)}$, de rang infini, est supposée telle que

$$\frac{A}{Q} \equiv (1, 2, \ldots, u_n, \ldots).$$

Nous supposons dans cette partie, que $\frac{B(z)}{Q(z)}$ admet le développement (6). Le cas où $\frac{B(z)}{Q(z)}$ admet le développement (5) sera étudié ultérieurement. Nous savons alors qu'il existe des polynomes $U_{n_1}(z)$ et $V_{n_2}(z)$, avec $U_{n_1}(0) = V_{n_2}(0) = 1$ tels que

$$A(z) E_{n_1}(z) - Q(z) D_{n_1}(z) \equiv z^{n_1} U_{n_1}(z), \qquad n_1 \geqq 2; \tag{13}$$

$$B(z) E_{n_2}(z) - Q(z) D_{n_2}(z) \equiv z^{n_2} V_{n_2}(z), \qquad n_2 \geqq 2. \tag{14}$$

Nous pouvons supposer que $n_2 \geqq n_1$, quitte à permuter les rôles des polynomes $A(z)$ et $B(z)$.

Nous distinguerons dans notre étude deux cas, suivant que $h \neq s$ ou $h = s$.

1° *Cas* $h \neq s$. — D'après le lemme 3.3, les polynomes $U_{n_1}(z)$ et $V_{n_2}(z)$ admettent leurs zéros sur $|z| = 1$ et de plus distincts. Nous pouvons écrire

$$U_{n_1}(z) \equiv \varepsilon''_{n_1} z^{a_{n_1}} U_{n_1}\left(\frac{1}{z}\right); \qquad V_{n_2}(z) \equiv \varepsilon''_{n_1} z^{a_{n_1}} V_{n_2}\left(\frac{1}{z}\right),$$

avec $a_{n_1} = \max(h, s)$, $\varepsilon''_{n_1} = \varepsilon$ si $a_{n_1} = s$ et $\varepsilon''_{n_1} = \varepsilon'$ si $a_{n_1} = h$.

Le changement de z en $\frac{1}{z}$ dans (13) donne, après multiplication par $\varepsilon''_{n_1} z^{a_{n_1}+n_1}$,

$$\varepsilon\varepsilon''_{n_1} z^{a_{n_1}-s} P(z)\, E_{n_1}(z) - \varepsilon'\varepsilon''_{n_1} B(z)\, D_{n_1}(z) \equiv U_{n_1}(z). \tag{15}$$

Compte tenu de (15), nous déduisons

$$AE_{n_1} + \varepsilon'\varepsilon''_{n_1} z^{a_{n_1}+n_1-h} BD_{n_1} \equiv QD_{n_1} + \varepsilon\varepsilon''_{n_1} z^{a_{n_1}+n_1-s} EP_{n_1}.$$

Considérons l'équation

$$QD_{n_1} - \varepsilon\varepsilon''_{n_1} z^{a_{n_1}+n_1-s} PE_{n_1} = 0; \tag{16}$$

elle admet, d'après le lemme 3.4, au moins

$$|Q_{n_1} + n_1 - s + s + n_1 - 2n_1| = a_{n_1}$$

racines distinctes sur $|z| = 1$.

Pour une telle racine γ, nous obtenons

$$A(\gamma)\, E_{n_1}(\gamma) + \varepsilon'\varepsilon''_{n_2} \gamma^{a_{n_1}+n_1-h} B(\gamma)\, D_{n_1}(\gamma) = 2Q(\gamma)\, D_{n_1}(\gamma).$$

Les conditions

$$|A(\gamma)| = |B(\gamma)| \leq |Q(\gamma)| \qquad \text{et} \qquad |D_{n_1}(\gamma)| = |E_{n_1}(\gamma)|$$

entraînent

$$A(\gamma)\, E_{n_1}(\gamma) - Q(\gamma)\, D_{n_1}(\gamma) = 0, \qquad \text{soit} \quad U_{n_1}(\gamma) = 0.$$

Par conséquent, l'équation (16) admet exactement a_{n_1} racines distinctes sur $|z| = 1$ et toutes zéros de $U_{n_1}(z)$. Il existe par suite un polynome $K_{n_1}(z)$ à coefficients entiers rationnels tel que

$$\begin{gathered} QD_{n_1} - \varepsilon\varepsilon''_{n_1} z^{a_{n_1}+n_1-s} PE_{n_1} \equiv K_{n_1} U_{n_1}, \\ QD_{n_1} - \varepsilon'\varepsilon''_{n_1} z^{a_{n_1}+n_1-h} BD_{n_1} \equiv (K_{n_1} + z^{n_1})\, U_{n_1}. \end{gathered}$$

La première de ces deux relations montre que $K_{n_1}(z)$ est un polynome réciproque, plus précisément $K_{n_1}(z) \equiv z^{2n_1} K_{n_1}\left(\frac{1}{z}\right)$. Le polynome $D_{n_1}(z)$, n'ayant aucun zéro sur $|z| = 1$, divise nécessairement $K_{n_1} + Z^{n_1}$, il résulte $K_{n_1} + Z^{n_1} \equiv E_{n_1} D_{n_1}$ et, par conséquent :

$$Q(z) - \varepsilon'\varepsilon''_{n_1} z^{a_{n_1}+n_1-h} B(z) \equiv E_{n_1}(z)\, U_{n_1}(z). \tag{17}$$

Considérons le polynome

$$C(z) \equiv \varepsilon z^{a_{n_1}-s} PQ - \varepsilon' z^{a_{n_1}-h} AB.$$

Des relations (13), (15) et (17) nous déduisons

$$(18) \qquad C(z) \equiv \varepsilon''_{n_1} U^2_{n_1}(z)$$

et, par conséquent, la même étude appliquée à (14) donne, en premier lieu :

$$U_{n_1}(z) \equiv V_{n_2}(z).$$

Par combinaison linéaire entre (13) et (14), nous tirons

$$BE_{n_2} - QD_{n_1} = Z^{n_2-n_1}(AE_{n_1} - QD_{n_1}),$$

soit, en tenant compte des expressions de $D_{n_1}(z)$ et $D_{n_2}(z)$,

$$BE_{n_2} - Q \equiv z^{n_2-n_1}(AE_{n_1} - Q),$$

relation qui n'est compatible avec les développements de $\frac{A(z)}{Q(z)}$ et $\frac{B(z)}{Q(z)}$ que si $n_2 = n_1$ et, par conséquent, puisque $V_{n_2}(z) \equiv U_{n_1}(z)$,

$$A(z) \equiv B(z).$$

a. $h > s$: Nous avons dans ce cas, $a_{n_1} = h$ et $\varepsilon' = -\varepsilon''_1$.

La relation (17) s'écrit

$$Q(z) + z^n A(z) \equiv E_n(z)\, U_n(z), \qquad n_2 = n_1 = n,$$

soit, en utilisant (13),

$$A[E_n - z^n][E_n + z^n] \equiv Q[E_n D_n + z^n]$$

et, en remplaçant $E_n(z)$ et $D_n(z)$ par leur expression :

$$(1-2z)(1-2z+z^n)A \equiv (1-2z+2z^{n+1}-z^{n+2})Q,$$

le polynome $1-2z$ divise le polynome irréductible $Q(z)$, d'où $Q(z) = 1-2z$ et nous déduisons la fraction rationnelle :

$$\frac{A(z)}{Q(z)} \equiv \frac{1-z^2}{1-2z} \qquad \text{et} \qquad \theta = 2.$$

b. $h < s$: La relation (17), compte tenu de $a_{n_1} = s$ et $\varepsilon = \varepsilon''_{n_1}$, s'écrit

$$(17') \qquad Q - \varepsilon\varepsilon' z^{n+s-h} A \equiv E_n U_n.$$

Nous sommes amenés dans ce cas à préciser les valeurs de l'entier $s - h$. Pour cela, nous considérons (15) qui, associée à (17'), entraîne

$$(19) \qquad \frac{P}{Q} - \frac{1}{E_n^2} \equiv \varepsilon\varepsilon' z^{s-h} \frac{A}{Q}\left(\frac{D_n}{E_n} - \frac{z^n}{E_n^2}\right).$$

Remarquons que la fonction $\frac{1}{E_n^2}$ admet le développement

$$\frac{1}{E_n^2} \equiv (1, 2, 5, \ldots)$$

pour $n \geqq 2$, ce qui est le cas.

Supposons $s - h \geqq 3$; de (19), nous tirons

$$\frac{P}{Q} \equiv (1, 2, 5, \ldots),$$

ce qui est impossible d'après le lemme 3.1.

Pour $s - h = 1$, la relation (19) donne

$$\frac{P}{Q} \equiv (1, 2 + \varepsilon\varepsilon', 5 + 4\varepsilon\varepsilon', \ldots).$$

Le lemme 3.1 nous affirme que $\varepsilon\varepsilon' = -1$ et, par suite, θ, d'après le lemme 3.2, est un nombre θ'_p ou $\hat{\theta}'_p$, $p \geqq 1$ et $\frac{P}{Q}$ s'écrit

$$\frac{P}{Q} \equiv 1 + z + z^2 + z^3 \left[\frac{2 - z - \varepsilon_2 z^{p-1}(1 - z + z^2)}{Q} \right].$$

Supposons $n \geqq 3$. Les $\frac{1}{E_n^2}$, $\frac{A}{Q}$ et $\frac{D_n}{E_n}$ admettent les développements :

$$\frac{1}{E_n^2} \equiv (1, 2, 5, 12, \ldots),$$

$$\frac{A}{Q} \equiv (1, 2, 4, \ldots),$$

$$\frac{D_n}{E_n} \equiv (1, 2, 4), \ldots);$$

il s'ensuit depuis (19) ($\varepsilon\varepsilon' = -1$ et $s - h = 1$)

$$\frac{P}{Q} \equiv (1, 1, 1, 4, \ldots),$$

ce qui, par comparaison avec la forme explicite de $\frac{P}{Q}$, donne une contradiction. Par suite, $n = 2$ et de (13) et (17′), nous tirons

$$\frac{A(z)}{Q(z)} \equiv \frac{1 + z - z^2 - z^3}{1 - z - 2z^2 + z^4} \qquad \text{et} \qquad \theta = \hat{\theta}'_2.$$

Il nous reste la possibilité où $s - h = 2$, avec $\varepsilon\varepsilon' = -1$. De (15) et (17′), nous tirons

$$A(E_n^2 - z^{2n}) \equiv Q(E_n D_n + z^n),$$

d'où, en tenant compte des expressions de $E_n(z)$ et $D_n(z)$,

$$\frac{A(z)}{Q(z)} \equiv \frac{1 - z^n}{1 - 2z + z^{n+2}} \qquad (n \geqq 2)$$

et nous retrouvons la suite des nombres $\beta_n (n \geqq 2)$, signalée dans l'introduction.

2° *Cas* $h = s$. — Si $a_{n_1} = s$, les coefficients des termes en z^s dans la relation (13) vérifient

$$-\varepsilon' + \varepsilon = \varepsilon''_{n_1},$$

ce qui est impossible, d'où en particulier $\varepsilon = \varepsilon'$.

Nous utilisons, pour $\nu = 1$, la transformation définie dans la réciproque du théorème 2.2 :

$$f_1(z) \equiv \frac{A + zP}{Q + zB} \equiv \frac{A}{Q} - z\frac{AB - PQ}{Q(Q + zB)}. \tag{20}$$

Nous savons que $f_1(z)$ définit un élément de S_1.

Si $\frac{P}{Q} \equiv (1, v_1, v_2, \ldots)$ et $\frac{A}{Q} \equiv (1, 2, u_2, \ldots)$, le développement $f_1(z)$ s'écrit :

$$f_1 \equiv (1, 2, u_2 + v_1 - 4, \ldots).$$

La relation (14) écrite pour $z = \frac{1}{2}$, montre que $B\left(\frac{1}{2}\right) > 0$, soit en particulier

$$Q\left(\frac{1}{2}\right) + B\left(\frac{1}{2}\right) > 0.$$

Ainsi la fonction f_1 définit un élément de S_1 inférieur à 2 et, par conséquent, $f_1(z)$ admet le développement (6), d'où

$$2 \leqq u_2 + v_1 - 4 \leqq 4.$$

Les coefficients u_2 et v_1 vérifient les inégalités $u_2 \leqq 4$ et $v_1 \leqq 2$, il résulte

$$u_2 = 4 \quad \text{et} \quad v_1 = 2.$$

Le développement de $f_1(z)$ admet alors l'expression

$$f_1 \equiv (1, 2, 2, \ldots, u_n, \ldots), \qquad \text{d'où} \qquad f_1(z) \equiv \frac{1 + z - z^2}{1 - z - z^2}.$$

En permutant les rôles de $A(z)$ et $B(z)$, nous obtenons

$$\frac{B}{Q} \equiv (1, 2, 4, \ldots, u_n, \ldots)$$

et le développement du second membre de (20) s'écrit

$$(1, 2, 2, u_3 + v_2 - 10, \ldots).$$

Par comparaison avec celui de $f_1(z)$, nous déduisons

$$u_3 + v_2 = 14;$$

or, d'après les remarques que nous avons faites sur les développements (6), $u_3 \leqq 8$ et $v_2 \leqq 4$, d'où une contradiction.

Le cas $h = s$ ne peut pas se présenter dans notre étude.

2. Étude des développements $\left(1, \frac{1}{q}, \frac{3}{q^2}, \cdots\right)$. — Les polynomes $A(z)$ et $Q(z)$ vérifient simultanément les relations

$$(10) \qquad A(z) - Q(z) \equiv z\, U_1(z);$$

$$(11) \qquad q\, E_3 A - q\, D_3 Q \equiv z^3\, U_3(z),$$

où $q\, D_3(z)$ désigne le polynome

$$q + (q-2)z - (q-3)z^2 - qz^3.$$

En vertu du lemme 3.3, les polynomes $U_1(z)$ et $U_3(z)$ admettent tous leurs zéros sur $|z| = 1$ et distincts, par conséquent ils s'écrivent

$$U_1(z) \equiv \varepsilon''_1 z^{d_1} U_1(z) \qquad \text{et} \qquad U_3(z) \equiv \varepsilon''_3 z^{d_3} U_3\left(\frac{1}{z}\right).$$

Pour $h \neq s$, les degrés d_1 et d_3 des polynomes $U_1(z)$ et $U_3(z)$ vérifient

$$d_1 = \max(h, s) - 1 \qquad \text{et} \qquad d_3 = \max(h, s).$$

1° *Cas* $h \neq s$. — Si nous explicitons les expressions de $A(z)$ et $Q(z)$,

$$A(z) \equiv q + a_1 z + \ldots + a_h z^h,$$
$$Q(z) \equiv q + q_1 z + \ldots + q_s z^s,$$

les coefficients des termes du plus haut degré dans la relation (11) vérifient

$$-qa_h = \varepsilon''_3 \qquad \text{ou} \qquad qq_s = \varepsilon''_2$$

suivant que $h > s$ ou $h < s$. Ces égalités ne sont valables que si $q = 1$ et nous nous trouvons dans l'ensemble S_1. Par application des lemmes 3.3 et 3.4, nous allons étudier les conséquences qu'entraîne la relation (10).

Le changement de z en $\frac{1}{z}$ dans (10), donne après multiplication par $\varepsilon_1 z d_1 + 1$,

$$(21) \qquad \varepsilon' \varepsilon''_1 z^{d_1+1-h} B - \varepsilon\varepsilon''_1 z^{d_1+1-s} P \equiv U_1(z).$$

d'où, compte tenu de (10),

$$A - \varepsilon' \varepsilon''_1 z^{d_1+2-h} B \equiv Q - \varepsilon\varepsilon''_1 z^{d_1+2-s} P.$$

Considérons l'équation

$$(22) \qquad Q(z) + \varepsilon\varepsilon''_1 z^{d_1+2-s} P(z) = 0.$$

Le lemme 3.4 nous affirme que cette équation admet au moins

$$|d_1 + 2 - s + s - 2| = d_1$$

racines distinctes sur $|z| = 1$. Pour une telle racine γ, nous obtenons

$$A(\gamma) - \varepsilon' \varepsilon_1'' \gamma^{d_1+1-h} B(\gamma) = 2Q(\gamma).$$

Des conditions $|A(\gamma)| = |B(\gamma)| \leqq Q(\gamma)$ résulte l'égalité

$$A(\gamma) - Q(\gamma) = 0, \qquad \text{soit} \quad U_1(\gamma) = 0,$$

or le polynome $U_1(z)$ admet exactement d_1 racines distinctes sur $|z| = 1$, il s'ensuit que l'équation (22) admet exactement d_1 racines distinctes sur $|z| = 1$ et toutes zéros de $U_1(z)$. Par conséquent, il existe un polynome $K_1(z)$ à coefficients entiers rationnels tel que

$$Q(z) + \varepsilon\varepsilon_1'' z^{d_1+2-1} P(z) \equiv K_1(z)\, U_1(z). \tag{22'}$$

En vertu de (10), (21) et (22′) nous tirons pour

$$C(z) \equiv \varepsilon z^{d_1+1-s} PQ - \varepsilon' z^{d_1+1-h} AB,$$

l'expression

$$C(z) \equiv -\varepsilon_1'' (K_1(z) + z)\, U_1^2(z). \tag{23}$$

L'étude de l'équation (11) est analogue à celle que nous avons faite pour la relation (12) dans la première partie, en particulier de (18), nous tirons

$$C(z) \equiv \varepsilon_3'' U_3^2(z).$$

Cette dernière identité, comparée à (23), montre que le polynome $K_1(z)$ doit admettre l'expression :

$$K_1 + z \equiv (1 \pm z)^2.$$

D'autre part, par identification dans (22′), nous déduisons les expressions suivantes pour $K_1(z)$:

$$K_1(z) \equiv 1 - 3z + z^2 \quad \text{pour } h > s,$$
$$K_1(z) \equiv 1 - 4z + z^2 \quad \text{pour } h < s,$$

d'où nécessairement $h > s$ et $K_1 + z \equiv (1 - z)^2$ et, par suite,

$$U_3(z) \equiv (1 - z)\, U_1(z).$$

Compte tenu de cette dernière identité, les relations (10) et (11) donnent

$$AE_3 - z^2(1 - z) \equiv QD_3 - z^2(1 - z),$$

d'où

$$\frac{A(z)}{Q(z)} \equiv \frac{1 - z + z^2}{1 - 2z} \qquad \text{et} \qquad \theta = 2.$$

2° *Cas* $h = s$. — Si $d_3 = s$ les coefficients des termes en z^s dans la relation (11) vérifient

$$q(a_s - q_s) = \varepsilon''_3,$$

égalité entraînant $q = 1$. Mais en vertu du lemme 3.1, nous avons

$$B(0) = \varepsilon' a_s = 1 \quad \text{et} \quad p(0) = \varepsilon q_s = 1,$$

d'où

$$\varepsilon' - \varepsilon = \varepsilon''_3,$$

ce qui est impossible.

Supposons maintenant que $d_3 \leqq s - 2$. Le coefficient du terme en z^{s-1} dans (11) étant nul, il résulte

$$(24) \qquad q(q_{s-1} - a_{s-1}) - q_s = 0.$$

En vertu du lemme 3.1, l'entier q_s vérifie $|q_s| \leqq q$. Pour que (24) puisse être vérifiée, il est nécessaire que

$$q = 1, \qquad q_s = \varepsilon \qquad \text{et} \qquad q_{s-1} - a_{s-1} = \varepsilon = \varepsilon' = -\varepsilon''_1,$$

en particulier $d_1 = s - 2$.

Le changement de z en $\frac{1}{z}$ dans (10) donne, après multiplication par z^s,

$$A + B \equiv P + Q$$

si $\frac{B}{Q} = (1, v_1, v_2, \ldots)$, la fraction rationnelle $\frac{P(z)}{Q(z)}$ admet le développement

$$(1, 1 + v_1, 3 + v_2, \ldots),$$

développement qui n'est pas compatible avec les résultats du lemme 3.1 si $v_1 = 1$ et $v_2 = 2$. Le lemme 3.2 nous affirme, puisque $\frac{B(z)}{Q(z)}$ est de rang infini, que

$$\frac{B(z)}{Q(z)} \equiv \frac{1 - z^2}{1 - z - z^2}$$

et la fonction $\frac{A(z)}{Q(z)}$ n'admet pas le développement considéré dans cette partie de notre étude.

Il nous reste la seule éventualité $d_3 = s - 1$ avec $d_1 = s - 2$. Nous reprenons l'étude de la relation (10) : Le changement de z en $\frac{1}{z}$ dans (10) donne, après multiplication par z^s ($\varepsilon = \varepsilon'$ car $d_1 = s - 2$),

$$(25) \qquad B - P \equiv \varepsilon\varepsilon''_1 z^{s-d_1-1} U_1(z),$$

soit, en vertu de (10),

$$B - \varepsilon\varepsilon''_1 z^{s-d_1-2} A \equiv P - \varepsilon\varepsilon''_1 z^{s-d_1-2} Q.$$

L'équation $P + \varepsilon\varepsilon''_1 z^{s-d_1-2} Q = 0$ admet exactement d_1 racines distinctes sur $|z| = 1$ et toutes zéros du polynome $U_1(z)$; il existe un polynome $K_1(z)$ à coefficients entiers rationnels tel que

$$(26) \qquad P + \varepsilon\varepsilon''_1 z^{s-d_1-2} Q \equiv K_1(z)\, U_1(z);$$

$$(27) \qquad B + \varepsilon\varepsilon''_1 z^{s-d_1-2} Q \equiv (K_1 + \varepsilon\varepsilon''_1 z^{s-d_1-1})\, U_1(z).$$

Les relations (26) et (27) donnent

$$(28) \qquad AB - PQ \equiv z\,(K_1 + \varepsilon\varepsilon''_1 z^{s-d_1-1})\, U_1^2(z).$$

La même méthode appliquée à la relation (11) entraîne, compte tenu des résultats de la première partie,

$$(29) \qquad Q - \varepsilon\varepsilon''_3 z^2 B \equiv -\varepsilon\varepsilon''_3 z U_3^2;$$

$$(30) \qquad AB - PQ \equiv -\varepsilon\varepsilon''_3 z U_3^2.$$

En vertu de (28) et (30) il existe un polynome $U(z)$ à coefficients entiers rationnels, avec $U(0) = 1$ et tel que

$$U_3(z) \equiv U(z)\, U_1(z).$$

D'autre part, après élimination de $A(z)$ entre (10) et (11),

$$(31) \qquad (1 + z)\, Q(z) \equiv U_1(z)\,[qE_3 - z^2 U].$$

Des relations (27) et (29) nous tirons, compte tenu de (28) et (30),

$$(1 + \varepsilon''_1 \varepsilon''_3 z^{s-d_1})\, Q \equiv U_1 U\,[qE_3 - z^2 U],$$

soit, en vertu de (31),

$$(1 + \varepsilon''_1 \varepsilon''_3 z^{s-d_1}) \equiv U(1 + z).$$

La substitution $z = \frac{1}{\theta^\star}$ dans (31) donne

$$\left(1 + \frac{1}{\theta^\star}\right) Q\left[\frac{1}{\theta^\star}\right] = \left(\frac{\theta^\star - 1}{\theta^{\star 3}} - \frac{\theta^{\star s-d_1} + \varepsilon''_1 \varepsilon''_3}{\theta^{\star s-d_1+1}(\theta^\star + 1)}\right) U_1\left(\frac{1}{\theta^\star}\right)$$
$$= -\frac{\theta^{\star s-d_1-2} + \varepsilon''_1 \varepsilon''_3}{\theta^{\star s-d_1+1}(\theta^\star + 1)}\, U_1\left(\frac{1}{\theta^\star}\right).$$

Puisque nous nous intéressons aux nombres de S'_q inférieurs à $\theta^\star$, nous devons avoir $Q\left[\frac{1}{\theta^\star}\right] \geqq 0$, ce qui n'est possible que si

$$\theta = \theta^\star, \qquad s - d_1 = 2 \qquad \text{et} \qquad \varepsilon''_1 \varepsilon''_3 = -1.$$

Par suite, $d_1 = 1$ (car $s = 3$) et comme, d'après (31), $U_1(z)$ est un diviseur de $(1 + z)$, nous déduisons

$$U_1(z) \equiv 1 + z \qquad \text{et} \qquad U_3(z) \equiv 1 - z^2.$$

Nous obtenons en définitive le nombre $\theta^\star$ défini par la fraction rationnelle

$$\frac{A(z)}{Q(z)} \equiv \frac{q + (q-2)z - (q-2)z^2 - (q-1)z^3}{q + (q-3)z - (q-1)z - (q-1)z^2}.$$

3. Étude des développements $\left(1, \frac{1}{q}, \frac{2}{q^2}, \dots\right)$. — Dans l'étude de la deuxième partie, nous avons constaté pour $h \neq s$, grâce à la relation (11), que les fractions rationnelles $f(z)$ définissant des éléments θ de S'_q inférieurs à $\theta^\star$ n'admettent les développements (5) avec $q^2 u_2 = 3$, que si $q = 1$. Nous allons montrer qu'il en est effectivement de même si $q^2 u_2 = 2$. Plus précisément, nous démontrons le lemme suivant :

Lemme 3.5. — *Si h est différent de s, nous sommes dans le cas de l'ensemble S_1. Pour $h = s$ le degré d_1 de $U_1(z)$ est au plus égal à $s-2$. Si $d_1 = s-2$, nous avons*

$$B(0) = q - 1 \qquad ou \qquad B(0) = q = 1,$$

le cas $d_1 \leqq s-3$ entraînant $B(0) = 1$.

Démonstration. — Nous reprenons l'étude de la transformée $g(z)$ de la fonction $f(z) \equiv \frac{A(z)}{Q(z)}$ du lemme 3.2. Nous savons que la fraction rationnelle $g(z)$, holomorphe dans $|z| \leqq 1$ et de rang infini comme $f(z)$, s'écrit

$$g(z) \equiv \frac{\tilde{A}(z)}{\tilde{Q}(z)},$$

avec

$$\tilde{Q}(0) = q^2 u_2 \qquad \text{et} \qquad z\tilde{A}(z) \equiv q(1-z^2)\,U_1(z) - A(z).$$

D'après (10), $d_1 \leqq \max(h, s) - 1$.

Pour $d_1 = \max(h, s) - 1$, le polynome $A(z)$ est de degré $d_1 + 1$. Si nous posons

$$\tilde{B}(z) = -\varepsilon'\varepsilon''_1 z^{d_1+1}\tilde{A}(z),$$

nous déduisons

$$\tilde{B}(z) \equiv q(1-z^2)\,U_1(z) + \varepsilon'\varepsilon''_1 z^{d_1+2-h} B(z).$$

La fonction

$$g_1(z) \equiv \frac{\tilde{B}(z)}{\tilde{Q}(z)}$$

est holomorphe dans $|z| \leqq 1$, de rang infini comme $g(z)$. Le lemme de Schwarz donne

$$\tilde{B}(0) = q < \tilde{Q}(0) = 2, \qquad \text{soit} \quad q = 1.$$

Pour $h = s$, le résultat est en contradiction avec (10), qui donnerait

$$\varepsilon' - \varepsilon = \varepsilon''_1,$$

égalité impossible. Il résulte que $d_1 \leqq s - 2$.

Pour $d_1 \leqq s-2$, le polynome $\tilde{A}(z)$ est de degré $s-1$, à moins que

$$B(0) = -\varepsilon' \varepsilon''_1 q.$$

Nous pouvons considérer le polynome $\tilde{B}(z) \equiv \varepsilon' \varepsilon''_1 z^{s-1} A\left(\frac{1}{z}\right)$, ce qui entraîne

$$\tilde{B}(z) \equiv B(z) + \varepsilon' \varepsilon''_1 z^{s-d_1-2} q(1-z^2) U_1(z).$$

Le lemme de Schwarz, appliqué à la fonction $\frac{\tilde{B}(z)}{\tilde{Q}(z)}$, affirme pour :

a. $d_1 = s-2$:

$$|B(0) + \varepsilon\varepsilon''_1 q| \leqq 1, \quad \text{soit} \quad q-1 \leqq B(0) \leqq q \quad \text{et} \quad \varepsilon\varepsilon''_1 = -1.$$

Le cas $B(0) = q \geqq 2$ ne peut avoir lieu. En effet, la relation (21) entraîne, compte tenu de $\theta = \theta'$ et $d_1 = s-2$,

$$B - P \equiv z\, U(z),$$

identité en contradiction avec les résultats du lemme 3.1 qui nous assurent que les développements de $\frac{B(z)}{Q(z)}$ et $\frac{P(z)}{Q(z)}$ coïncident jusqu'à l'ordre 1. Donc si $d_1 = s-2$, l'égalité $B(0) = q$ est seulement valable pour $q = 1$, puisque $\frac{P(z)}{Q(z)}$ peut admettre le développement (6), ce qui est le cas.

b. $d_1 \leqq s-3$:

$$B(0) = 1.$$

Nous distinguerons toujours dans notre étude, les cas $h \neq s$ et $h = s$.

1° *Cas* $h \neq s$. — La fraction rationnelle $\frac{B(z)}{Q(z)}$ admet l'un des développements (1, 1, 2, ...) et (1, 2, 4, ...) puisque, en vertu du lemme 3.5, $q = 1$ si $h \neq s$.

a. $\frac{B}{Q} \equiv (1, 1, 2, \ldots)$: Nous utiliserons les résultats déduits de la relation (10) dans la deuxième partie. Nous remarquons dans (22′) que le polynome $K_1(z)$ est déterminé par la donnée des trois premiers coefficients du développement de $\frac{A(z)}{Q(z)}$. Les développements de $\frac{A(z)}{Q(z)}$ et $\frac{B(z)}{Q(z)}$ coïncident jusqu'à l'ordre 2, par conséquent si nous posons :

$$B - Q \equiv z\, V_1(z), \qquad V_1(0) = 1$$

à partir de (22′), en permutant les rôles de $A(z)$ et $B(z)$, nous déduisons

$$Q(z) + \varepsilon\varepsilon' z^{d_1+2-s} P(z) \equiv K_1(z)\, V_1(z),$$

ce qui entraîne, par comparaison avec (22′),

$$U_1(z) \equiv V_1(z), \qquad \text{soit} \quad A(z) \equiv B(z).$$

En vertu de (21) et (22'), l'identité $A(z) \equiv B(z)$ entraîne

$$(32) \qquad (K_1(z) + z - \varepsilon'\varepsilon''_1 z^{d_1+3-h})\,A(z) \equiv (K_1(z) + 2z)\,Q(z),$$

$K_1(z)$ étant déterminé par identification dans (22'), c'est-à-dire

$$(33) \qquad \begin{cases} K_1(z) \equiv 1 - 2z + z^2 & \text{pour } h > s, \\ K_1(z) \equiv 1 - 3z + z^2 & \text{pour } h < s. \end{cases}$$

Pour $h > s$, avec $\varepsilon' = \varepsilon'_1$ et $d_1 = h - 1$, (30) donne

$$(1 - z)\,A(z) \equiv (1 + z^2)\,Q(z),$$

cas à éliminer.

Pour $h < s$, avec $\varepsilon''_1 = -\varepsilon'$ et $d_1 = s - 1$, (30) devient

$$(32') \qquad (1 - 2z + z^2 - \varepsilon\varepsilon' z^{s-h+2})\,A(z) \equiv (1 - z + z^2)\,Q(z).$$

Les polynomes $A(z)$ et $Q(z)$ étant premiers entre eux, (32') montre que $A(z)$ est identique, soit à 1, soit à $1 - z + z^2$.

Pour $A(z) \equiv 1$, (32') donne l'expression de $Q(z)$

$$Q(z) \equiv \frac{1 - 2z + z^2 - \varepsilon z^{s+2}}{1 - z + z^2}.$$

La condition $Q(1) < 0$ entraîne $\varepsilon = 1$. Le numérateur de l'expression donnant $Q(z)$ doit être divisible pour $1 - z + z^2$, ce qui n'est possible que si $s = 2$, soit

$$Q(z) \equiv 1 - z - z^2,$$

cas qui donne α_1 défini par la fraction rationnelle

$$\frac{A(z)}{Q(z)} \equiv \frac{1}{1 - z - z^2}.$$

Pour $A(z) \equiv 1 - z + z^2$, (31') entraîne

$$Q(z) \equiv 1 - 2z + z^2 - z^3 + z^3 - \varepsilon z^s.$$

La condition $Q(1) < 0$ exige $\varepsilon = 1$. La substitution $z = \frac{1}{\alpha_2}$ dans l'expression de $Q(z)$ donne :

$$Q\left[\frac{1}{\alpha_2}\right] = \frac{1}{\alpha_2^3} - \frac{1}{\alpha_2^s}.$$

Puisque $s > h = 2$, $Q\left(\frac{1}{\alpha_2}\right) \geqq 0$, soit $\theta \leqq \alpha_2$. L'inégalité stricte est impossible puisque α_2 est le deuxième élément de S'_1, d'après les résultats de [11].

Nous retrouvons l'élément α_2 défini par

$$\frac{A(z)}{Q(z)} \equiv \frac{1 - z + z^2}{1 - 2z + z^2 - z^3}.$$

b. $\frac{B}{Q} \equiv (1, 2, \ldots)$: Les polynomes $B(z)$ et $Q(z)$ vérifient une relation analogue à (12), soit

$$BE_n - QD_n \equiv z^n V_n(z), \qquad V_n(0) = 1,$$

avec

$$(1-z)\,D_n = 1 - 2z^n + z^{n+1}, \qquad E_n = -z^n D_n\left(\frac{1}{z}\right)$$

et

$$V_n(z) \equiv \varepsilon_n'' z^{d_n} V_n\left(\frac{1}{z}\right).$$

L'étude faite dans la deuxième partie montre, en utilisant cette dernière relation à la place de (11), que

$$(K_1(z) + z)\,U_1^2(z) \equiv V_n^2(z).$$

Ce qui n'est possible que si $K_1(z) + z \equiv (1 \pm z)^2$ (K_1 est de degré 2), soit d'après (33)

$$K_1(z) = 1 - 3z + z^2, \qquad \text{avec} \quad h < s$$

et, par conséquent,

$$V_n(z) \equiv (1-z)\,U_1(z), \qquad d_n = d_1 + 1 = s \quad \text{et} \quad \varepsilon_n'' = +\varepsilon.$$

Les résultats de la première partie, particulièrement (17) où l'on remplace $B(z)$ par $A(z)$, $U_1(z)$ par $V_n \equiv (1-z)\,U_1(z)$, donnent

$$(34) \qquad Q(z) - \varepsilon\varepsilon' z^{s+n-h} A(z) \equiv (1-z)\,E_n U_1.$$

De plus, (21) et (22′) déduites de $A - Q \equiv z\,u_1(z)$, avec $\varepsilon_1'' = -\varepsilon$ et $d_1 = s - 1$ entraînent

$$(35) \qquad Q(z) - \varepsilon\varepsilon' z^{s-h+1} B(z) \equiv (1-z)^2 u_1.$$

L'élimination de $Q(z)$ entre (34) et (35) entraîne, compte tenu de $(1-z)\,E_n(z) \equiv 1 - 2z + z^{n+1}$,

$$\varepsilon\varepsilon' z^{s-h+1} (B - z^{n-1} A) \equiv z^2 (1 - z^{n-1})\,U_1,$$

ce qui donne $\varepsilon\varepsilon' = -1$, $s - h = 1$ et de (34), il résulte

$$\frac{A(z)}{Q(z)} = \frac{1 - z + z^{n+1}}{1 - 2z + z^{n+1}(1-z)} \qquad (n \geqq 2),$$

d'où la suite des $\alpha_n (n \geqq 3)$.

En conclusion, la deuxième partie ($h \neq s$) met en évidence la suite des α_n définis par les fractions rationnelles

$$\frac{A(z)}{Q(z)} \equiv \frac{1 - z + z^{n+1}}{1 - 2z + z^{n+1}(1-z)} \qquad (n \geqq 1).$$

2° *Cas* $h = s$. — D'après les conclusions du lemme 3.5, nous distinguons deux cas, suivant que $d_1 = s - 2$ ou $d_1 \leqq s - 3$.

L'étude du cas $d_1 = s - 2$ et $B(0) = P(0) = q - 1$ $(\varepsilon\varepsilon''_1 = -1)$ est immédiate. En effet, d'après (26),

$$P - Q \equiv K_1 U_1(z), \qquad K_1(0) = 0.$$

Le degré du polynome $P(z) - Q(z)$ est au plus $s - 1$ et, puisque $d_1 = s - 2$, $K_1(z)$ est au plus de degré 1. La fonction $\frac{P(z)}{Q(z)}$ admettant nécessairement le développement (6), nous tirons

$$P - Q \equiv 2z U_1 \equiv 2(A - Q).$$

Le développement de $\frac{P(z)}{Q(z)}$ est alors tel que ses coefficients sont pairs à partir du rang 1, d'où d'après les remarques que nous avons faites sur les développements (6),

$$\begin{aligned}(1-z)P &\equiv 1 - 2z^n + z^{n+1}\\ (1-z)Q &\equiv 1 - 2z + z^{n+1}\end{aligned} \qquad (n \geqq 2),$$

nous déduisons la suite des $\beta_n (n \geqq 1)$ définis par

$$\frac{A(z)}{Q(z)} \equiv \frac{(1-z)(1-z^{n+1})}{1 - 2z + z^{n+2}};$$

la nature du développement de $\frac{A(z)}{Q(z)}$ va nous permettre d'établir une relation, entre les polynomes $B(z)$ et $Q(z)$, qui sera très utile pour la suite de notre étude :

LEMME 3.6. — *Il existe un polynome $V_n(z)$ à coefficients entiers rationnels, avec $V_n(0) = 1$ ayant tous ses zéros distincts et situés sur $|z| = 1$, tel que*

$$Q(z) + \varepsilon_1 z B(z) \equiv V_n(z) Q_n(z), \qquad \varepsilon_1 = \pm 1.$$

Démonstration. — Nous remarquons à partir de (26) que $K_1(0) \neq 0$, à moins que $d_1 = s - 2$; mais, d'après le lemme 3.5, $P(0) = q - 1$ pour $d_1 = s - 2$ et $K_1(0)$ sera non nul même pour $d_1 = s - 2$, plus précisément $K_1(0) = -1$, car $\varepsilon\varepsilon''_1 = -1$. Pour $d_1 \leqq s - 2$, (26) donne

$$K_1(0) = P(0) = 1.$$

En conclusion :

$$K_1(0) = \varepsilon_1, \qquad \varepsilon_1 = -1 \quad \text{pour } d_1 = s - 2 \quad \text{et} \quad \varepsilon_1 = +1 \quad \text{pour } d_1 \leqq s - 3.$$

Considérons la fraction rationnelle définie ainsi :

$$f_1(z) \equiv \frac{A(z) + \varepsilon_1 z P(z)}{Q(z) + \varepsilon_1 z B(z)} \equiv \frac{A(z)}{Q(z)} - \varepsilon_1 \frac{z[AB - PQ]}{Q(Q + \varepsilon_1 z B)}.$$

Du développement de $\frac{A(z)}{Q(z)}$ et de (28) nous déduisons le développement de f_1 :

$$f_1 \equiv \left(1, \frac{1}{q}, \frac{1}{q^2}, \ldots\right),$$

$f_1(z)$ est une fonction de la suite que nous avons utilisée dans la réciproque du théorème 2.2. Nous savons qu'elle définit un nombre de S_q et qu'elle est de rang fini; le lemme 3.1 nous donne son expression :

$$f_1(z) = \frac{q(1-z^2) + \varepsilon_2 z^n (q + z - qz^2)}{q - z - qz^2 + \varepsilon_2 q z^n (1-z^2)} \equiv \frac{P_n(z)}{Q_n(z)} \qquad (n \geqq 1,\ \varepsilon_2 = \pm 1).$$

Les polynomes $P_n(z)$ et $Q_n(z)$ n'ont aucun zéro sur $z = 1$. De plus, ils sont premiers entre eux. En effet, soit $R(z)$ le P. G. C. D. de P_n et Q_n :

$$P_n \equiv P'_n R(z) \qquad \text{et} \qquad Q_n \equiv Q'_n R(z).$$

Posons $Q'_n(0) = q'$ et $R(0) = r$, d'où $q = rq'$,

$$\frac{P'_n}{Q'_n} \equiv \left(1, \frac{1}{rq'}, \ldots\right).$$

La fonction $\frac{P'_n}{Q'_n}$ est méromorphe dans $|z| < 1$, avec un unique pôle comme $f_1(z)$, donc $R(z)$ n'admet aucun zéro dans $|z| < 1$.

Les polynômes P'_n et Q'_n étant à coefficients entiers rationnels avec $Q_n(0) = q'$, les coefficients du développement de $\frac{P'_n}{Q'_n}$ sont tels que $q'^n u_n$ est entier rationnel, d'où $r = 1$ et

$$R = 1 + \ldots,$$

polynôme à coefficients entiers n'ayant aucun zéro dans $|z| \leqq 1$, donc nécessairement identique à 1.

Les polynomes $P_n(z)$ et $Q_n(z)$ étant premiers entre eux, il existe un polynome $V_n(z)$, avec $V_n(0) = 1$ tel que

$$A + \varepsilon_1 z P \equiv V_n(z)\, P_n(z); \tag{36}$$

$$Q + \varepsilon_1 z B \equiv V_n(z)\, Q_n(z); \tag{37}$$

$Q_n(z)$ admettant un zéro dans $|z| < 1$, d'après le lemme 2.2, $V_n(z)$ admet tous ses zéros sur $|z| = 1$ et de plus distincts.

Tout d'abord, nous appliquons le lemme 3.6 au cas $d_1 = s - 2$ avec $\varepsilon_1 = -1$, $B(0) = P(0) = q - 1 \geqq 1$ et $\varepsilon\varepsilon''_1 = -1$.

En retranchant (37) et (36) et compte tenu de (10) et de (25),

$$(1 - z)\, U_1(z) \equiv (1 + \varepsilon_2 z^n)\, V_n(z). \tag{38}$$

De plus, (27) et (37) entraînent :

$$(1 - z)\, Q(z) \equiv V_n Q_n + z[K_1(z) - z]\, U_1(z). \tag{39}$$

En multipliant (39) par $(1-z)$ et en vertu de (38), nous obtenons

$$(39') \qquad (1-z)^2 Q(z) \equiv V_n(z)\,[(1-z)\,Q_n(z) + z\,(K_1 - z)\,(1+\varepsilon_2 z^n)\,].$$

Puisque $Q(z)$ n'admet aucun zéro sur $|z|=1$, $V_n(z)$ est un diviseur de $(1-z)^2$, or $V_n(z)$ n'admet que des zéros distincts sur $|z|=1$. Il résulte les deux possibilités :

α. $V_n(z)\equiv 1$: D'après (39'), $(1-z)$ est un diviseur de $(K_1(z)-z)(1+\varepsilon_2 z^n)$. Si le polynome $K_1(z)-z$, de degré 2 et réciproque d'après (26), admet 1 comme zéro, il s'écrit $K_1 - z \equiv -(1-z)^2$ et (39') devient

$$(1-z)\,Q \equiv Q_n(z) - z(1-z)\,(1+\varepsilon_2 z^n).$$

La solution $z=1$ entraîne $Q_n(1)=0$, ce qui est impossible. Par suite, $(1-z)$ est nécessairement un diviseur de $1+\varepsilon_2 z^n$. En faisant $z=1$ dans (39'), nous déduisons

$$(K_1(1)-1)\,n = +1, \qquad \text{d'où} \qquad n=1, \quad K_1(1)=2.$$

Par suite, $K_1(z)\equiv -1+4z-z^2$ et de (39'), nous tirons

$$Q(z) \equiv q - 2z - (q-1)\,z^2,$$

ce qui donne un élément supérieur à $\theta^\star$, cas à éliminer.

β. $V_n(z)\equiv 1-z$: Supposons tout d'abord $K(1)-1\neq 0$, d'où $\varepsilon_2=-1$. La condition $Q(1)\leqq -1$ exige $(K_1(1)-1)\,n\geqq 0$, soit $K_1(1)\geqq 2$, d'où si nous posons

$$K_1(z) \equiv -1 + kz - z^2 \qquad (k\geqq 3).$$

La substitution $z=\frac{1}{\theta^\star}$ dans (39') entraîne

$$\theta^{\star 2}(\theta^\star - 1)\,Q\left[\frac{1}{\theta^\star}\right] \equiv [\,2q-(k+1)\,\theta^\star - 2\,(q-1)\,\theta^{\star 2}\,]\left(1-\frac{1}{\theta^{\star n}}\right) - \frac{1}{\theta^{\star n-2}};$$

or

$$2q-(k+1)\,\theta^\star - 2\,(q-1)\,\theta^{\star 2} \leqq 2\,(1-\theta^\star)\,[\,q+(q-2)\,\theta^\star\,] - \theta^{\star 2} < 0,$$

puisque $q\geqq 2$. Il en résulte $Q\left(\frac{1}{\theta^\star}\right)<0$, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse.

Nous avons nécessairement $K_1(1)-1=0$, soit $K_1(z)-z\equiv -(1-z)^2$ et, par suite, de (39'), il vient

$$Q(z) \equiv q - 2z - (q-1)\,z^2 + \varepsilon_2 z^n\,(q - z - (q-1)\,z^2),$$

(38) donne $U_1(z)\equiv 1+\varepsilon_2 z^n$, d'où

$$A(z) \equiv q - z - (q-1)\,z^2 + \varepsilon_2 z^n\,(q-(q-1)\,z^2).$$

Nous obtenons deux suites d'éléments de S'_q, respectivement pour $\varepsilon_2 = +1$ et $\varepsilon_2 = -1$. Les seuls nombres de S'_q inférieurs à $\theta^\star$ correspondent à $\varepsilon_2 = +1$ et $n \leqq 3$:

$$\alpha_{1,q} < \alpha_{2,q} < \alpha_{3,q} < \theta^\star.$$

Il nous reste le cas $d_1 \leqq s-3$, avec $B(0) = P(0) = 1$. Dans la suite de notre étude l'idée directrice sera de montrer que les polynomes $U_1(z)$ et $V_n(z)$ des relations (10) et (33) sont identiques à 1, à l'exception du cas particulier $\theta = \hat{\theta}'_2$. Pour cela nous nous inspirons de la méthode de MM. Dufresnoy et Pisot [8] utilisée dans le cas de S_1. Nous établirons le lemme suivant :

Lemme 3.7. — *Supposons qu'il existe deux polynomes à coefficients entiers rationnels* $V_n(z)$, *avec* $V_{n_p}(0) = 1$ *et*

$$Q_{n_p}(z) \equiv q^{(p)} - z - q^{(p)} z^2 + \varepsilon_2 z^{n_p} q^{(p)} (1 - z^2)$$

tels que

$$Q(z) + (-1)^{p-1} z^p B(z) \equiv V_{n_p}(z)\, Q_{n_p}(z), \qquad p \text{ entier} \geqq 0. \tag{40}$$

Alors, à l'exception du cas particulier $\theta = \hat{\theta}'_2$, *les polynomes* $U_1(z)$ *et* $V_{n_p}(z)$ *sont tels que*

$$U_1(z) \equiv V_{n_p}(z) \equiv 1.$$

Remarquons que pour $p \geqq 1$, $q^{(p)} = q$. *De plus, pour* $p = 0$ *et* $q = 1$, *le lemme* 3.7 *englobe le résultat établi dans* [8] *pour les nombres de* S'_1 *inférieurs à* α_1.

Démonstration. — Posons

$$P_{n_p} \equiv (-1)^{p-1} z^{n_p+2} Q_{n_p}(z).$$

Le changement de z en $\frac{1}{z}$ dans (37) donne, après multiplication par $(-1)^{p-1} z^{p+s}$,

$$A + (-1)^{p-1} z^p P \equiv V_{n_p} Q_{n_p}. \tag{41}$$

Pour $p \geqq 2$, d'après la transformation du lemme 4.6 :

$$\frac{A}{Q} \equiv \left(1, \frac{1}{q}, \frac{1}{q^2}, \dots\right),$$

ce qui n'est pas le cas, donc $0 \leqq p \leqq 1$.

Nous reprenons l'étude de (28), à savoir

$$AB - PQ \equiv z\,(K_1(z) + \varepsilon\varepsilon''_1 z^{s-d_1-2})\, U_1^2(z). \tag{28}$$

Puisque $B(z) \equiv z^s A\left(\frac{1}{z}\right)$ et $P(z) \equiv z^s Q\left(\frac{1}{z}\right)$, nous avons sur $|z| = 1$,

$$AB - PQ \equiv z^s (|A|^2 - |Q|^2); \tag{42}$$

or $|A(z)| = |Q(z)|$ sur $|z| = 1$, le premier membre de (42), quand il n'est pas nul a même argument que $(-\varepsilon z^s)$. Il en résulte que les racines de $AB - PQ = 0$ situées sur $|z| = 1$ ont une multiplicité paire.

Les relations (40) et (41) entraînent

$$(1 - (-1)^{p-1}\varepsilon\varepsilon_1'' z^{s-d_1-2+p})\, U_1(z) \equiv (1 + \varepsilon_2 z^{n_p})\, V_{n_p}(z).$$

Posons

$$X(z) \equiv -(-1)^{p-1}\varepsilon\varepsilon_1'' z^{s-d_1-2+p} \qquad \text{et} \qquad Y(z) \equiv \varepsilon_2 z^{n_p},$$

d'où

$$(1 + X)\, U_1 \equiv (1 + Y)\, V_{n_p}.$$

Il existe par suite deux polynomes $U_1^\star$, $V_{n_p}^\star$ premiers entre eux, avec $U_1^\star(0) = V_{n_p}^\star(0) = 1$ et deux polynomes $W(z)$ et $D(z)$ tels que

$$(43) \qquad U_1 \equiv U_1^\star W; \qquad V_{n_p} \equiv V_{n_p}^\star W; \qquad 1 + X \equiv V_{n_p}^\star D, \quad 1 + Y \equiv U_1^\star D.$$

Les relations (27), (41) et (43) entraînent

$$(44) \qquad QV_{n_p}^\star D \equiv [V_{n_p}^\star Q_{n_p} - (-1)^{p-1} z^p U_1^\star (K_1 + \varepsilon\varepsilon_1'' z^{s-d_1-1})]\, W(z).$$

Il existe alors deux polynomes $D^\star$ et G, avec $D^\star(0) = G(0) = 1$ tels que

$$(45) \qquad D \equiv D^\star W, \qquad K_1 + \varepsilon\varepsilon_1'' z^{s-d_1-1} \equiv G V_{n_p}^{\star 2}$$

[puisque (28) n'admet que des racines de multiplicité paire sur $|z| = 1$], et par suite, (28) et (44) deviennent

$$(46) \qquad AB - PQ z U_1^2 V_{n_p}^\star G;$$

$$(47) \qquad QD^\star \equiv Q_{n_p} - (-1)^{p-1} z^p U_1^\star V_{n_p}^\star G.$$

Les relations (42), (43) et (46) donnent pour $|z| = 1$,

$$\varepsilon z^s D^2 (|A|^2 - |Q|^2) \equiv z[U_1(1 + X)]G.$$

Le polynome $(1 + X)U_1$ est tel que

$$(1 + X)\, U_1 \equiv (-1)^p \varepsilon z^{s-2+p} U_1\left(\frac{1}{z}\right)\left[1 + X\left(\frac{1}{z}\right)\right],$$

d'où

$$z^{1-p} D^2 (|A|^2 - |Q|^2) \equiv (-1)^p |(1 + X)\, U_1|^2 G \quad \text{sur } |z| = 1.$$

Nous en déduisons

$$(48) \qquad \arg G \equiv \arg[(-z)^{1-p} D^2] \quad \text{sur } |z| = 1.$$

A partir de (48), nous montrons que, sauf pour le cas $\theta = \hat{\theta}_2'$, $D(z)$ ne peut pas se réduire à une constante. En effet, si $D(z)$ était une constante, il s'écrirait $D(z) \equiv 1$ et, d'après (42), $G(z)$ est de degré $2(1 - p)$, d'où deux cas à étudier :

a. $p = 1$: Tout d'abord $G(z) \equiv 1$ et, en vertu de (43),

$$U_1(z) \equiv 1 + \varepsilon_1'' z^{d_1}, \qquad V_{d_1} \equiv 1 - \varepsilon\varepsilon_1'' z^{s-d_1-1} \, (n_1 = d_1 \text{ et } \varepsilon_2 = \varepsilon_1'')$$

et (47) entraîne

$$Q \equiv Q_{d_1} - z U_1 V_1 \equiv (q - z - qz^2 + \varepsilon\varepsilon_1'' z^{s-d_1})(1 + \varepsilon_1'' z_{d_1}) - z;$$

compte tenu de $\varepsilon\varepsilon_1'' \frac{1}{\theta^{\star s-d_1}} \leqq \frac{1}{\theta^{\star 3}}$, $1 + \varepsilon_1'' \frac{1}{\theta^{\star d_1}} < 1 + \frac{1}{\theta^\star}$, nous tirons

$$\theta^\star Q\left[\frac{1}{\theta^\star}\right] \leqq (\theta^\star - 1)(\theta^{\star 2} - \theta^\star - 1) < 0 \quad \text{pour } q \geqq 2,$$

d'où une contradiction avec l'hypothèse $\theta < \theta^\star$.

Pour $\theta^\star = 2$ et $d_1 \geqq 2$, $Q\left(\frac{1}{2}\right) \leqq -\frac{1}{32}$, ce qui est impossible.

Le cas $\theta^\star = 2$ et $d_1 = 0$, donne $Q\left(\frac{1}{2}\right) \leqq -\frac{1}{8}$, d'où une contradiction.

Pour $d_1 = 1$, le polynome $Q(z)$ admet l'expression

$$Q(z) \equiv 1 - (2 - \varepsilon_1''(z) - \varepsilon_1'' z^3 + \varepsilon\varepsilon_1'' z^{s-1} + \varepsilon z^s.$$

Nous devons avoir $Q\left(\frac{1}{2}\right) > 0$, ce qui n'est possible que si $\varepsilon = \varepsilon_1'' = 1$ et $s = 4$, ce qui donne le nombre $\theta = \hat{\theta}_2'$ défini par

$$\frac{A(z)}{Q(z)} \equiv \frac{1 - z^2 + z^4}{1 - z - 2z^2 + z^4}.$$

b. $p = 0$: $G(z)$ est un polynome de degré 2. Puisque

$$K_1(z) + \varepsilon\varepsilon_1'' z^{s-d_1-1} \equiv z^{2(s-d_1-1)}\left[K_1\left(\frac{1}{z}\right) + \varepsilon\varepsilon_1'' \frac{1}{z^{s-d_1-2}}\right],$$

de (42), nous déduisons

$$G(z) \equiv 1 - cz + z^2$$

et, d'après (48), $c \geqq 2$.

La relation (47) donne l'expression suivante pour $Q(z)$:

$$\begin{aligned} Q(z) &\equiv [q - c - qz^2 + \varepsilon\varepsilon_1'' z^{s-d_1-2}(1 - cz + z^2)] U_1 - z \\ &\equiv \psi(z) U_1(z) - z. \end{aligned}$$

Nous voulons montrer que $Q\left[\frac{1}{\theta^\star}\right] < 0$; puisque $U_1\left[\frac{1}{\theta^\star}\right] > 0$, il suffit d'affirmer que $\psi\left[\frac{1}{\theta^\star}\right] < 0$.

Il est immédiat de voir que $G\left[\frac{1}{\theta^\star}\right]$ est négatif pour $c \geqq 3$ et positif pour $c = 2$. Nous distinguerons les deux cas :

Pour $c = 2$:

$$\psi\left[\frac{1}{\theta^\star}\right] \leqq q - \frac{2}{\theta^\star} - \frac{q}{\theta^{\star 3}} + \frac{(\theta^\star - 1)^2}{\theta^{\star 3}}.$$

En tenant compte de l'équation vérifiée par $\theta^\star$, il s'ensuit

$$\theta^{\star 3}\psi\left[\frac{1}{\theta^\star}\right] \leqq (q + (q-2)\theta^\star)(1 - \theta^\star) - \theta^\star < 0.$$

Pour $c \geqq 3$:

$$\psi\left[\frac{1}{\theta^\star}\right] \leqq q - \frac{c}{\theta^\star} - \frac{q}{\theta^{\star 2}} - \frac{1}{\theta^{\star 3}}[\theta^{\star 2} - c\theta^\star + 2]$$
$$\leqq (q - 2 + q\theta^\star)(1 - \theta^\star) - \theta^{\star 2} < 0.$$

En conclusion pour les nombres θ de S'_q inférieurs à $\theta^\star$, exception faite de $\hat{\theta}'_2$, le polynome $D(z)$ ne peut pas se réduire à une constante.

Dans la suite de notre étude nous exclurons le cas $\theta = \hat{\theta}'_2$.

Par définition, le polynome $D(z)$ est le P. G. C. D. des deux binomes :

$$1 + X \equiv 1 - (-1)^{p-1} z^{s-d_1-2+p} \qquad \text{et} \qquad 1 + Y \equiv 1 + \varepsilon_2 z^p.$$

L'application de l'algorithme d'Euclide montre que $D(z)$ admet la forme

$$D(z) \equiv 1 + \eta z^d, \qquad d \text{ entier} \geqq 1 \quad \text{et} \quad \eta = \pm 1.$$

Posons

$$(49) \qquad D(z) \equiv 1 - Z(z), \qquad \text{avec} \quad Z(z) \equiv -\eta z^d.$$

Les relations (43) entraînent

$$(50) \qquad 1 + X \equiv V^\star_{n_p} D; \qquad 1 - Z^{m_1}; \qquad 1 + Y \equiv U^\star_1 D \equiv 1 - Z^{m_2},$$

où m_1 et m_2 sont des entiers $\geqq 1$.

Revenons à (47), nous définirons la fonction $F(z)$ par

$$(51) \qquad z F(z) \equiv (-1)^p z^p U^\star_1 V_{n_p} G \equiv QD^\star - Q_{n_p},$$

or le polynome $Q_n(z)$ peut s'écrire

$$Q_{n_p}(z) \equiv q^{(p)}(1 - z^2) U_1 D^\star - z,$$

ce qui donne

$$(52) \qquad z F(z) \equiv z + Q^\star_{n_p} D^\star,$$

$zQ^\star_n$ désignant le polynome

$$(q^{(p)} + z - q^{(p)} z^2) Q(z) - q^{(p)}(1 - z^2) A(z),$$

lequel polynome admet exactement deux zéros à l'intérieur du cercle unité, dont l'un se trouve à l'origine. De plus, $Q^\star_{n_p}$ n'admet aucun zéro sur $|z| = 1$.

De (49), nous tirons

$$D^2 \equiv -Z\left[2 - Z - \frac{1}{Z^2}\right],$$

d'où, à partir de (48),

$$(53) \qquad \arg G = \arg[(-1)^p z^{1-p} Z] \quad \text{sur } |z| = 1.$$

Les relations (51) et (53) montrent alors

$$(54) \qquad \arg F = \arg(U_1 V_{n_p} Z) \quad \text{sur } |z| = 1.$$

D'autre part, des identités (49), (50), il vient

$$U_1^\star \equiv \frac{1 - Z^{m_2}}{1 - Z^{m_1}}; \qquad V_{n_p}^\star \equiv \frac{1 - Z^{m_2}}{1 - Z}.$$

Pour $Z = 1$, c'est-à-dire pour les zéros de $D(z)$ les polynomes $U_1^\star$ et $V_{n_p}^\star$ prennent des valeurs entières m_1 et m_2. De plus, compte tenu de (54), $F(z)$ est réel positif ou nul.

Considérons un zéro ζ de $W(z)$, donc aussi zéro de $D(z)$. Se basant sur les conditions :

1° $F(z) - 1 \dfrac{D^\star Q_{n_p}^\star}{z}$ admet exactement un zéro et un pôle dans $|z| < 1$ et n'est nulle que pour les zéros de $D^\star(z)$;

2° $F(\zeta)$ réel positif ou nul.

MM. Dufresnoy et Pisot ont établi le résultat suivant :

$$0 \leqq F(\zeta) < 1.$$

D'autre part, d'après (48),

$$|G(\zeta)| = \frac{1}{m_1 m_2} F(\zeta) < 1, \qquad m_1 \text{ et } m_2 \text{ entiers } \geqq 1.$$

Soit

$$\left| \prod_j G(\zeta_j) \right| < 1,$$

où les ζ_j désignent les zéros de $W(z)$.

Le nombre $\left| \prod_j G(\xi_j) \right|$ étant un entier est nécessairement nul.

Le polynome $G(z)$ est divisible par $W(z)$; puisque $G(z)$ n'admet que des zéros de multiplicité paire sur $|z| = 1$ et que les zéros de $W(z)$ sont tous simples et situés sur $|z| = 1$, il existe un polynome $H(z)$ à coefficients entiers, avec $H(0) = 1$, tel que

$$G \equiv HW^2,$$

Soit

$$QD^\star \equiv Q_{n_p} - (-1)^{p-1} z^p U_1 V_{n_p} H. \tag{55}$$

De même que pour le polynome $D(z)$, le polynome $D^\star(z)$ ne peut pas se réduire à une constante. En effet, si $D^\star(z)$ était une constante, il s'écrirait $D^\star(Z) \equiv 1$, d'où

$$1 + X \equiv V_{n_p}, \qquad 1 + Y \equiv U_1.$$

Comme pour le polynome $G(z)$, $H(z)$ sera de degré $2(1 - p)$ et la démonstration s'achève comme dans le cas de $D(z)$, en excluant toutefois le nombre $\hat{\theta}_2'$.

Pour terminer la démonstration du lemme 4.7, nous considérons les équations

$$1 + X \equiv V_{n_p}^{\star} D^{\star} W \equiv V_{n_p} D^{\star}; \qquad (1 + Y) \equiv U_1^{\star} D^{\star} W \equiv U_{n_p} D^{\star}.$$

A partir de ces relations, de la même manière que dans [8] nous pouvons montrer que pour les zéros $\delta_k (k \geqq 1)$ de $D^{\star}(z)$,

$$\left| \prod_k U_1(\delta_k) \right| \geqq 1, \qquad \left| \prod_k V_{n_p}(\delta_k) \right| \geqq 1,$$

les inégalités n'ayant lieu que si $U_1(z) \equiv V_{n_p}(z) \equiv 1$.

D'autre part, à partir de (55),

$$| Q_{n_p}(\delta_k) | \equiv | U_1(\delta_k) | . | V_{n_p}(\delta_k) | . | H(\delta_k) |,$$

avec

$$Q_{n_p}(\delta_k) \equiv q^{(p)}(1 - \delta_k^2)(1 + Y(\delta_k)) - \delta_k \equiv - \delta_k,$$

d'où

$$1 \equiv \prod_k | u_1(\delta_k) | \prod_k | V_{n_p}(\delta_k) | . \left| \prod_k H(\delta_k) \right|;$$

or $\left| \prod_k H(\delta_k) \right|$ est un entier, et par suite,

$$\left| \prod_k U_1(\delta_k) \right| = \left| \prod_k V_{n_p}(\delta_k) \right| = 1,$$

égalités qui ne sont valables que si

$$U_1(z) \equiv V_{n_p}(z) \equiv 1$$

et le lemme 3.7 est ainsi établi :

D'après le lemme 3.6, il existe un polynome $V_n(z)$, avec $V_n(0) = 1$, tel que

$$Q + zB \equiv V_n(z) [q - z - qz^2 + \varepsilon_2 q z^n (1 - z^2)]$$

et le lemme 3.7 (avec $p = 1$) nous affirme que

$$U_1(z) \equiv V_n(z) \equiv 1.$$

soit

$$A - Q \equiv z \tag{56}$$

et

$$Q + zB \equiv q - z - qz^2 - \varepsilon q z^{n-1}(1 - z^2), \tag{57}$$

avec $s = n \geqq 3$.

De (56), il vient

$$\frac{A(z)}{Q(z)} = 1 + \frac{z}{q = q_1 z + q_2 z^2 + \ldots + \varepsilon z^n}$$
$$\equiv \left(1, \frac{1}{q}, - \frac{q_1}{q^2}, \frac{q_1^2}{q^3} - \frac{q_2}{q^2}, \ldots\right).$$

Par suite, pour que $\frac{A}{Q}$ admette le développement considéré,

$$q_1 = -2$$

et, d'après (7),

$$4 - qq_2 = q^2 - 2q + 4 \quad \text{ou} \quad q^2 - q + 4,$$

soit

$$1 - q \leqq q_2 \leqq 2 - q. \tag{58}$$

Examinons le cas $q = 1$.

De (57), nous tirons pour $n = 3$

$$\frac{B}{Q} \equiv (1,\ 1 - \varepsilon - q_2,\ \ldots).$$

D'après le lemme 3.1,

$$1 \leqq 1 - \varepsilon - q_2 \leqq 2,$$

d'où à partir de (58), $\varepsilon = -1$.

Si $q_2 = 0$, $Q(z) \equiv 1 - 2z - z^3$ et $Q\left(\frac{1}{2}\right) < 0$, en contradiction avec $\theta < 2$; nous avons nécessairement $q_2 = 1$ et

$$\frac{B}{Q} = (1,\ 1,\ \ldots).$$

Pour $n \geqq 4$, (57) donne

$$\frac{B}{Q} \equiv (1,\ 1 - q_2,\ \ldots).$$

Du lemme 3.1, nous déduisons $q_2 \leqq 0$ et de (58), $q_2 = 0$.

Ainsi quel que soit $n \geqq 3$, $\frac{B(z)}{Q(z)}$ admet le développement

$$(1,\ 1,\ \ldots).$$

Les développements $(1,\ 1,\ 3,\ \ldots)$ étant antérieurement étudiés,

$$\frac{B}{Q} \equiv (1,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

mais alors $B(z)$ jouit des mêmes propriétés que $A(z)$ et, d'après (56),

$$A(z) \equiv B(z).$$

Enfin de (56) et (57), nous tirons

$$Q(z) \equiv 1 - 2z - \varepsilon z^n(1 - z) \qquad (n \geqq 2).$$

La condition $Q\left(\frac{1}{2}\right) \geqq 0$ exige $\varepsilon = -1$, et nous obtenons la suite des $\alpha_n (n \geqq 2)$ définis par

$$\frac{A(z)}{Q(z)} \equiv \frac{(1 - z)(1 + z^n)}{1 - 2z + z^n(1 - z)} \qquad (n \geqq 2),$$

résultat d'ailleurs valable pour $n \geqq 1$, en ajoutant celui obtenu dans le lemme 3.2.

Il nous reste le cas $q \geqq 2$.

Pour $n = s \geqq 4$, (57) donne, si $B(z) = 1 + b_1 z + \ldots + \varepsilon z^s$,

$$b_1 = -q - q_2,$$

soit d'après (58)

$$-2 \leqq b_1 \leqq -1.$$

Nous considérons la fonction :

$$\varphi(z) \equiv \frac{A-P}{Q-B}.$$

En remarquant que pour $s \geqq 4$, les développements de $\frac{P}{Q}$ et $\frac{B}{Q}$ coïncident au moins jusqu'à l'ordre 2 ($B - P \equiv \varepsilon z^{s-1}$), la fonction $\varphi(z)$ admet le développement

$$\varphi \equiv \left(1, \frac{1}{q-1}, \frac{2+b_1}{(q-1)^2}, \ldots\right).$$

De la même manière que pour les fonctions $f_\nu(z)$ du théorème 2.2, elle définit un élément de l'ensemble S_{q-1} ; nous devons avoir

$$2 + b_1 \geqq 1,$$

d'où $b_1 = -1$, et

$$\varphi \equiv \left(1, \frac{1}{q-1}, \frac{1}{(q-1)^2}, \ldots\right)$$

et, d'après le lemme 3.6, en remplaçant q par $q-1$, il existe un polynome $V_n(z)$ à coefficients entiers rationnels avec $V_n(0) = 1$, tel que

$$Q - B \equiv V_n(q - 1 - z - (q-1)z^2 + \varepsilon_2 z^n (q-1)(1 - Z^2)$$

et du lemme 8.7 nous déduisons $V_n(z) \equiv 1$ et

$$Q - B \equiv (q-1)z - (q-1)z^2 + \varepsilon_2 z^n (q-1)(1-z^2). \tag{59}$$

Les relations (57) et (59) donnent

$$Q(z) \equiv q - 2z - (q-1)z^2 - \varepsilon_2 z^n (1-z) \qquad (n \geqq 3). \tag{60}$$

Nous obtenons une suite d'éléments de S'_q, dont le plus petit élément est donné par $\varepsilon = -1$, $n = 3$; la substitution $z = \frac{1}{\theta^*}$ dans le polynome déduit pour $\varepsilon = -1$ et $n = 3$ donne

$$\theta^{*3} Q\left[\frac{1}{\theta^*}\right] = (1 - \theta^*)\left[(q-1)(1+\theta^*) - \frac{1}{\theta^*}\right] < 0 \qquad (q \geqq 2)$$

et les éléments définis par (60) seront tous supérieurs à θ^*, cas à rejeter dans notre étude.

Reste le cas $s=3$. De (56) et (57), nous tirons

$$Q(z) \equiv q - 2z - qz^2 + z^3 \quad \text{ou} \quad q - 2z + q_2 z^2 - z^3, \quad \text{avec} \quad q_2 + q \leqq 2.$$

La substitution $z = \frac{1}{\theta^*}$ donne dans les deux cas :

$$\theta^{*3} Q\left[\frac{1}{\theta^*}\right] \leqq (1-\theta^*)\,(q-2+(q-1)\,\theta^*) < 0 \quad \text{pour } q \geqq 2$$

en contradiction avec $\theta < \theta^\star$.

En conclusion, pour $q \geqq 2$ et $d_1 \leqq s-3$, il n'existe aucun élément de S'_q inférieur à $\theta^\star$.

L'ensemble de nos résultats peuvent être résumé dans les deux théorèmes suivants :

THÉORÈME 3.1. — *Les éléments de* S'_1 *inférieurs à* 2, *sont les nombres* α_n, β_n *et le nombre particulier* $\hat{\theta}'_2$. *Le nombre* 2 *est le plus petit élément de* S''_1.

Pour tout élément $\alpha_n (n \geqq 3)$ *il existe trois polynomes* $A(z) \not\equiv P(z)$; *d'après le théorème* 2.2, *nous pouvons construire au moins six suites ayant* α_n *comme point d'accumulation. Par contre, pour tout* β_n, α_1 *et* α_2, *il n'existe que deux polynomes* $A(z) \not\equiv P(z)$.

THÉORÈME 3.2. — *Les seuls éléments de* S'_q *inférieur à* $\theta^\star$ *sont, outre* $\theta^\star$, *les nombres* $\alpha_{1,q}$, $\alpha_{2,q}$, $\alpha_{3,q}$. *A chacun de ces nombres est associée une seule fraction rationnelle, nécessairement de rang infini.*

CHAPITRE IV.

PLUS PETITS ÉLÉMENTS DE L'ENSEMBLE S_q.

Nous connaissons, d'après [10], tous les nombres de S_1 inférieurs à $\alpha_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et même ceux qui dépassent α_1 d'une quantité suffisamment petite. Pisot [14] a déjà déterminé les quatre plus petits éléments de S_q, en s'intéressant aux nombres de S_q inférieurs à $\theta_{2,q}$ (nombre qui sera défini dans la suite). Il a montré que, pour ces nombres, les fractions rationnelles associées admettaient les développements :

$$\left(1, \frac{1}{q}, \frac{1}{q^2}, \dots\right),$$

lesquels développements déterminaient les nombres θ'_q, $\theta'_{n,q}$ et $\hat{\theta}'_{n,q}$. Parmi ces derniers, les seuls qui soient inférieurs à $\theta_{2,q}$ sont $\theta'_{1,q}$, $\theta''_{2,q}$ et $\theta'_{3,q}$.

Nous dépasserons ce résultat en nous intéressant aux nombres de S_q définis par les développements

$$\left(1, \frac{1}{q}, u_2, \ldots\right), \qquad 1 \leqq q^2 u_2 \leqq 2.$$

Nous considérons en particulier les nombres $\theta_{n,q}$ et $\hat{\theta}_{n,q}$ zéros des polynomes $P_n(z)$ et $\hat{P}_n(z)$ définis par les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
(1-z^2)\,P_{2n}\;(z) &\equiv \hat{A}(z) - z^{2n}\;\hat{P}(z) \qquad (n \geqq 1);\\
(1-z\;)\,P_{2n+1}(z) &\equiv \hat{A}(z) - z^{2n+1}\,\hat{P}(z) \qquad (n \geqq 0);\\
\hat{P}_{2n}\;(z) &\equiv \hat{A}(z) + z^{2n}\;\hat{P}(z) \qquad (n \geqq 1);\\
(1+z\;)\,\hat{P}_{2n+1}(z) &= \hat{A}(z) + z^{2n+1}\,\hat{P}(z) \qquad (n \geqq 0);
\end{aligned}$$

où $\hat{P}(z)$ et $\hat{A}(z)$ désignent respectivement les polynomes

$$\begin{aligned}
\hat{P}(z) &\equiv q - 1 + qz - (q-2)z^2 - qz^3;\\
\hat{A}(z) &\equiv q + (q-1)z - (q-1)z^2 - (q-1)z^3.
\end{aligned}$$

Le nombre $\alpha_{1,q}$ défini par

$$\frac{\hat{A}(z)}{\hat{Q}(z)} \equiv \left(1, \frac{1}{q}, \frac{2}{q^2}, \ldots, u_n, \ldots\right); \qquad \hat{Q}(z) \equiv -z^3\,\hat{P}\left(\frac{1}{z}\right)$$

est le seul point d'accumulation des nombres $\theta_{n,q}$ et $\hat{\theta}_{n,q}$.

Nous montrerons que la famille des éléments de S_q inférieurs à $\alpha_{1,q}$ contient, outre les nombres $\theta'_{n,q}$, $1 \leqq n \leqq 4$ (tous les nombres θ'_n pour $q=1$), les nombres $\theta_{n,q}$ et un nombre particulier θ'', zéro du polynome :

$$P''(z) \equiv q - z - (q-2)z^2 - z^3 + z^3(1 + (q-2)z + 2z^2 - qz^3).$$

De plus, les nombres de S_q, qui sont supérieurs à $\alpha_{1,q}$, mais suffisamment voisins, appartiennent à la famille des $\hat{\theta}_{n,q}$ (et à la famille des $\hat{\theta}_{n,q}$ pour $q=1$).

Nous pouvons remarquer que ce sont les seules familles de nombres de S_q tendant vers $\alpha_{1,q}$ que le théorème 2.2 met en évidence. En effet, $\alpha_{1,q}$ est défini par la seule fraction rationnelle $\dfrac{\hat{A}(z)}{\hat{Q}(z)}$ pour $q \geqq 2$; pour $q=1$, le nombre α_1 est de plus défini par $\dfrac{1-z^2}{1-z-z^2}$. En opérant comme il a été indiqué dans la réciproque du théorème 2.2, nous formons la suite des nombres $\theta_{n,q}$ (et θ'_n pour $q=1$) et la suite des nombres $\hat{\theta}_{n,q}$ (et $\hat{\theta}'_n$ pour $q=1$).

Signalons que les différents nombres mis en évidence vérifient pour $q \geqq 2$:

$$\theta_{1,q} = \theta'_{1,q} < \theta'_{2,q} < \theta'_{3,q} < \theta_{2,q} < \theta'' < \theta'_{4,q} < \ldots < \theta_{n,q} < \alpha_{1,q} < \ldots < \hat{\theta}_{n+1,q} < \hat{\theta}_{n,q} < \ldots,$$

ces résultats fourniront une nouvelle démonstration du fait que $\alpha_{1,q}$ est le plus petit élément de S'_q. On voit de plus que c'est un élément isolé.

La démonstration du lemme 3.1, reproduite pour les nombres de S_q inférieurs à $\hat{\theta}_{1,q}$, zéro du polynome :

$$q+(q-2)z-(q-3)z^2-qz^3$$

identique au polynome $D_3(z)$ associé aux développements :

$$\left(1, \frac{1}{q}, \frac{3}{q^2}, \ldots\right)$$

montre que les fractions rationnelles associées aux nombres de S_q inférieurs à $\hat{\theta}_{1,q}$ admettent les développements :

$$\left(1, \frac{1}{q}, u_2 \ldots\right) 1 \leqq q^2 u_2 \leqq 2.$$

Les nombres définis par $\left(1, \frac{1}{q}, \frac{1}{q^2}, \cdots\right)$ étant entièrement déterminés par le lemme 3.2, nous nous intéresserons aux nombres de S_q définis par

$$\frac{A}{Q} \equiv \left(1, \frac{1}{q}, \frac{2}{q^2}, \ldots, u_n, \ldots\right). \tag{1}$$

Nous appliquerons aux développements (1) toutes les propriétés des polynomes $D_n(z)$ et $D_n^\star(z)$. Ces propriétés rappelées dans le chapitre III sont systématiquement valables pour $n \geqq 3$ et seulement pour $s \geqq n \geqq 3$ dans le cas où $\frac{A(z)}{Q(z)}$ est de rang fini s. Nous utiliserons en particulier :

Première propriété. — Lorsque $u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$ sont connus et que $s \geqq n$ $\left(\text{dans le cas où } \frac{A}{Q} \text{ est de rang fini } s\right)$ nous déterminons $D_n(z)$. Nous en déduisons la valeur de W_n. Nous devons avoir $u_n \geqq W_n$, l'égalité entraînant $\theta = \tau_n$.

Deuxième propriété. — Nous formons ensuite le polynome $D_{n+1}(z)$ par la relation de récurrence

$$D_{n+1}(z) \equiv (1+z) D_n(z) - z\frac{u_n - w_n}{u_{n-1} - w_{n-1}} D_{n-1}(z).$$

Nous devons avoir $D_{n+1}(1) \geqq 0$, condition équivalente à $u_n \leqq w_n^\star$, l'égalité entraînant

$$\theta = \tau_n^\star \qquad \text{et} \qquad D_{n+1}(z) \equiv (1-z) D_n^\star(z),$$

si les deux inégalités strictes, $u_n > w_n$ et $D_{n+1}(1) > 0$ sont satisfaites, nous avons $s \geqq n+1$, dans le cas où $\frac{A(z)}{Q(z)}$ est de rang fini s.

Nous allons associer aux développements de (1), celui de $\frac{\hat{A}(z)}{\hat{Q}(z)}$

$$\frac{\hat{A}}{\hat{Q}} \equiv \left(1, \frac{1}{q}, \frac{2}{q^2}, \ldots, v_n, \ldots\right). \tag{2}$$

Soit N un entier tel que $u_n = v_n$ pour $n < N$ et $u_N \neq v_N$.

Nous remarquerons à partir de (1) et (2) que $N \geqq 3$. D'autre part, si $\frac{A}{Q}$ est de rang fini s, nous avons $s \geqq N$. En effet, il suffit d'appliquer le théorème de Rouché au polynome

$$(3) \qquad A(z)\hat{Q}(z) - \hat{A}(z)Q(z) \equiv q^2(u_N - v_N)z^N + k'_N z^{N+1} + \ldots,$$

avec

$$A(z) \equiv P(z) \equiv \varepsilon z^s Q\left(\frac{1}{z}\right).$$

Le premier membre de (3) admet au plus $s - 1 + 1$ zéros à l'intérieur du cercle unité, d'où $N \leqq s$.

Puisque $N \geqq 3$ et $s \geqq N$, dans le cas où $\frac{A(z)}{Q(z)}$ est de rang fini s, les polynomes $D_N(z)$ et $D_N^*(z)$ sont déterminés d'une manière unique et admettent toutes les propriétés signalées. Pour leur formation, nous utiliserons les polynomes $P_n(z)$ et $\hat{P}_n(z)$ dont les expressions ont été données dans l'introduction.

Avant d'entamer notre étude, signalons le résultat :

LEMME 4.1. — *$k_N = q^2(u_N - v_N)$ est un entier rationnel, Il en est de même pour le nombre*

$$k_{N+1} = q^2(u_{N+1} - v_{N+1}) - 4\frac{k_N}{q}.$$

Démonstration. — Le premier membre de (3) est un polynome à coefficients entiers rationnels; $k_N = q^2(u_N v_N)$ est, par suite, un entier rationnel. Le terme en z^{N+1} dans le second membre de (3) s'écrit

$$k'_N = q^2(u_{N+1} - v_{N+1}) + (q_1 + q - 2)\frac{k_N}{q}$$

puisque

$$Q(z) \equiv q + q\,1\,z + \ldots.$$
$$\hat{Q}(z) \equiv q + (q-2)z + \ldots,$$

En introduisant le nombre k_{N+1}, nous obtenons

$$k'_N = k_{N+1} + (q_1 + q + 2)\frac{k_N}{q}.$$

D'autre part, à partir de

$$\frac{A}{Q} \equiv \frac{q + (1 + q_1)z + a_2 z^2 + \ldots}{q + q_1 z + q_2 z^2 + \ldots} \equiv \left(1, \frac{1}{q}, \frac{2}{q^2}, \ldots\right).$$

L'identification des termes en z^2 donne

$$q(a_2 - q_2) = q_1 + 2,$$

d'où

$$k'_N = k_{N+1} + (a_2 - q_2 + 1)k_N.$$

Puisque k_N et k'_N sont des entiers rationnels, il en sera de même pour k_{N+1}.

Dans la suite de notre étude, nous devons distinguer deux cas suivant que N est pair ou impair.

A. *Premier cas :* $N = 2p$, $p \geqq 2$. — Il est facile de vérifier que

$$q(1+z)\,D_{2p}(z) \equiv P_{2p}(z) + \frac{p+2}{p+1}\,z P_{2p-2}(z).$$

Nous en déduisons :

$$w_{2p} = v_{2p} - \frac{1}{q^2}\,\frac{p+2}{p+1}.$$

Il résulte de la première propriété des $D_n(z)$ que

$$u_{2p} \geqq w_{2p} = v_{2p} - \frac{1}{q^2}\,\frac{p+2}{p+1},$$

soit

$$q^2(u_{2p} - v_{2p}) \geqq -\frac{p+2}{p+1},$$

or $k_{2p} = q^2(u_{2p} - v_{2p})$ est un entier rationnel, il vient que

$$1 \leqq k_{2p}.$$

Nous formons ensuite le polynome :

$$D_{2p+1}(z) \equiv (1+z)\,D_{2p}(z) - z\,\frac{(u_{2p} - v_{2p})}{(u_{2p-1} - w_{2p-1})}\,D_{2p-1}(z),$$

avec

$$q D_{2p-1} \equiv P_{2p-2}(z) \qquad \text{et} \qquad u_{2p-1} - w_{2p-1} = v_{2p-1} - w_{2p-1} = \frac{1}{q^2}.$$

En utilisant la deuxième propriété, soit $D_{2p+1}(1) \geqq 0$, il s'ensuit

$$k_{2p} \leqq \frac{p}{p-1},$$

sauf dans le cas $p = 2$, où l'égalité $k_{2p} = 2$ est possible, l'entier k_{2p} admet seulement les valeurs -1 et $+1$.

a. $k_{2p} = 2$, avec $p = 2$: Mais nous avons alors $D_{2p+1}(1) = 0$ et la deuxième propriété des $D_n(z)$ donne

$$D_{2p+1}(z) \equiv (1-z)\,D^{\star}_{2p}(z) \qquad \text{et} \qquad \theta = \tau^{\star}_{2p}$$

et un calcul simple montre que

$$D(z) \equiv \hat{P}_{2p-1}(z) - z P_{2p-2}(z),$$

Soit $D_5(\hat{\theta}_{1,q}) > -\theta_{1,q} P_2(\hat{\theta}_{1,q}) > 0$; il en résulte que $D^{\star}_4(\hat{\theta}_{1,q}) < 0$, condition équivalente à $\hat{\theta}_{1,q} < \tau^{\star}_4 = \theta$. Le cas $k_{2p} = 2$ est à éliminer puisque nous limitons notre étude aux nombres $\theta < \hat{\theta}_{1,q}$.

b. $k_{2p} = +1$: Dans ce cas, le polynome $D_{2p+1}(z)$ se met sous la forme plus simple :

$$qD_{2p+1}(z) \equiv P_{2p}(z) - zP_{2p-2}(z) \equiv \hat{P}_{2p-1}(z).$$

Nous en déduisons :

$$w_{2p+1} = v_{2p+1} = \frac{2(q-2)}{q^3},$$

soit, d'après la première propriété,

$$k_{2p+1} = q^2(u_{2p+1} - v_{2p+1}) - \frac{4}{q} \geqq -2.$$

Nous formons ensuite le polynome :

$$D_{2p+2}(z) \equiv (1+z)D_{2p+1}(z) - z - \frac{u_{2p+1} - w_{2p+1}}{u_{2p} - w_{2p}} D_{2p}(z).$$

Il en résulte, d'après la deuxième propriété,

$$k_{2p+1} \leqq -2 + \frac{4p+6}{p^2+p-1},$$

k_{2p+1} étant un entier rationnel, d'après le lemme 4.1, et vérifiant les inégalités

$$-2 \leqq k_{2p+1} \leqq -2 + \frac{4p+6}{p^2+p-1},$$

nous avons les deux cas suivants :

(α) $k_{2p+1} = -2$: Mais alors $u_{2p+1} = w_{2p+1}$, soit $\theta = \tau_{2p+1} = \hat{\theta}_{2p-1,q}$;

(β) $k_{2p+1} \geqq -1$, avec $p \leqq 4$: Si nous exprimons la valeur de $D_{2p+2}(z)$ pour $z = \hat{\theta}_{2p-1,q}$, il vient

$$D_{2p+2}(\hat{\theta}_{2p-1,q}) = -\frac{p+1}{2b+3}(k_{2p+1}+2)\hat{\theta}_{2p-1,q} D_{2p}(\hat{\theta}_{2p-1,q}) > 0.$$

Il en résulte les inégalités

$$\theta > \tau_{2p+2} > \hat{\theta}_{2p-1,q} > \hat{\theta}_{7,p}.$$

Nous éliminons ce dernier cas en nous bornant dorénavant aux membres de S_q inférieurs à $\hat{\theta}_{7,q}$.

c. $k_{2p} = -1$: Nous obtenons

$$qD_{2p+1}(z) \equiv P_{2p-1}(z), \qquad \text{d'où} \qquad w_{2p+1} = v_{2p+1}\frac{2(q-2)}{q^3}$$

et la première propriété de $D_n(z)$ entraîne

$$k_{2p+1} = q^2(u_{2p+1} - v_{2p+1}) + \frac{4}{q} \geqq 2.$$

Nous formons ensuite le polynome :

$$D_{2p+2}(z) \equiv (1+z)\,D_{2p+1})(z) - (p+1)\,(k_{2p+1}-2)\,z\,D_{2p}(z).$$

De la deuxième propriété, nous tirons

$$k_{2p+1} \leqq 2 + \frac{2(2p-1)}{p^2+p-1}.$$

Les deux inégalités bornant les valeurs de l'entier k_{2p+1} montrent :

(α) ou bien $k_{2p+1}=2$, soit $u_{2p+1}=w_{2p+1}$, ce qui entraîne $\theta=\theta_{2p-1}$;

(β) ou bien $k_{2p+1}\geqq 3$, avec $p=2$.

L'étude de ce dernier cas $\left[s \geqq 2p+2=6 \text{ si } \frac{A(z)}{Q(z)} \text{ est de rang fini}\right]$ se poursuit de la même manière. Nous formons le polynome :

$$q\,D_6(z) \equiv q - z - (q-2)\,z^2 + (q-2)\,z^4 + 2z^5 - qz^5.$$

Nous utilisons ensuite

$$D_7(z) \equiv (1+z)\,D_6(z) - zq^2(u_6-w_6)\,D_5(z).$$

L'inégalité $D_7(1)\geqq 0$ est équivalente à

$$q^2(u_6-w_6) \leqq \frac{2}{3}$$

et, d'après la première propriété, $q^2(u_6-w_6)\geqq 0$; ce nombre entier rationnel est nécessairement nul. Nous en concluons que $\theta=\tau_6$, zéro du polynome $D_6(z)$; c'est le nombre particulier représenté par θ'' dans l'introduction.

B. *Deuxième cas :* $N=2p+1$, avec $p\geqq 1$. — Il est facile de voir que

$$q\,D_{2p+1} = q^2(u_{2p+1}-v_{2p+1}) \geqq -1.$$

Nous formons ensuite le polynome :

$$D_{2p+2}(z) \equiv (1+z)\,D_{2p+1}(z) - z\,\frac{u_{2p+1}-w_{2p+1}}{u_{2p}-w_{2p}}\,D_{2p}(z),$$

où $D_{2p}(z)$ désigne le même polynome que celui que nous avons utilisé au début de l'étude du premier cas.

Remarquons que nous avons

$$u_{2p}-w_{2p}=v_{2p}-w_{2p}=\frac{1}{q^2}\,\frac{p+2}{p+1},$$

d'où

$$D_{2p+2}(z) \equiv (1+z\,D_{2p+1}(z) - \frac{p+1}{p+2}\,(k_{2p+1}+1)\,z\,D_{2p}(z).$$

En exprimant la deuxième propriété, soit $D_{2p+2}(1) \geqq 0$, il vient

$$k_{2p+1} \leqq 1 + \frac{2(p-1)}{p^2+p-1}.$$

Les deux inégalités bornant les valeurs possibles de l'entier non nul k_{2p+1} montrent que nous devons examiner successivement :

a. $k_{2p+1} = -1$: Mais alors $u_{2p+1} = w_{2p+1}$, d'où $\theta = \tau_{2p+1} = \theta_{2p,q}$.

b. $k_{2p+1} \geqq 2$, avec $p \leqq 2$: En exprimant la valeur de $q(1+z)D_{2p+2}(z)$ pour $z = \hat{\theta}_{2p,q}$,

$$q(1+\hat{\theta}_{2p,q})D_{2p+2}(\hat{\theta}_{2p,q}) \geqq \left[1 + \hat{\theta}_{2p}\left(2 - \frac{p+1}{p+2}(k_{2p+1}+1)\right) - k_{2p+1}\hat{\theta}^2_{2p,q}\right] P_{2p}(\hat{\theta}_{2p,q}).$$

Le zéro supérieur à 1 de $P_{2p}(z)$ étant inférieur à $\hat{\theta}_{2p,q}$, nous déduisons $P_{2p}(\hat{\theta}_{2p,q}) < 0$. D'autre part, l'expression en $\hat{\theta}_{2p}$ est visiblement négative; il en résulte

$$D_{2p+2}(\hat{\theta}_{2p,q}) > 0, \qquad \text{soit} \quad \tau_{2p+2} > \hat{\theta}_{2p,q}.$$

Nous en déduisons les inégalités :

$$\theta > \tau_{2p+2} > \hat{\theta}_{2p,q} \geqq \hat{\theta}_{4,q} \qquad (p \leqq 2).$$

Ce cas doit être écarté, puisque nous avons limité notre étude aux nombres de S_q inférieurs à $\hat{\theta}_{7,q} < \hat{\theta}_{4,q}$.

c. $k_{2p+1} = 1$: L'étude de ce cas $\left[\text{où } s \geqq 2p+2, \text{ quand } \frac{A(z)}{Q(z)} \text{ est de rang fini } s\right]$ se poursuit toujours de la même façon. Le polynome $D_{2p+2}(z)$ admet ici une forme plus simple, c'est-à-dire

$$q(1+z)D_{2p+2}(z) \equiv \hat{P}_{2p}(z) + \frac{2z}{p+2}P_{2p}(z),$$

d'où

$$q^2(w_{2p+2} - v_{2p+2}) \equiv \frac{4}{q} - \left(2 + \frac{4}{p+2}\right),$$

et la première propriété donne

$$-2 - \frac{4}{p+2} \leqq k_{2p+2} = q^2(u_{2p+2} - v_{2p+2}) - \frac{4}{q}.$$

Nous formons ensuite le polynome $D_{2p+3}(z)$, soit

$$q\,D_{2p+3}(z) \equiv \hat{P}_{2p}(z) - z\,\frac{k_{2p+2}+2}{2}P_{2p}(z).$$

La deuxième propriété, $D_{2p+3}(1) \geqq 0$, entraîne

$$k_{2p+2} \leqq -2 + \frac{4}{p}.$$

Les deux inégalités bornant les valeurs possibles de l'entier k_{2p+2} montrent que nous devons examiner successivement :

(α) $k_{2p+2} = -3$, avec $1 \leqq p \leqq 2$.

Le cas $p = 2$ nous donne $u_{2p+2} = w_{2p+2}$, soit $\theta = \tau_{2p+2} = \tau_6$; mais ce dernier cas est à écarter, puisque le polynome $q\,D_6(z)$ n'est pas à coefficients entiers.

Tandis que, si $p = 1$, nous pouvons vérifier que

$$q(1 + \hat{\theta}_{3,q})\,D_4(\hat{\theta}_3) = \hat{\theta}_{3,q}^2(\hat{\theta}_{3,q}^2 - 4\theta_{3,q} + 1)\,P^*(\hat{\theta}_{3,q}) > 0,$$

ce qui entraîne $\theta \geqq \tau_4 > \hat{\theta}_{3,q} > \hat{\theta}_{7,q}$. Cette dernière possibilité est à éliminer puisque nous limitons notre étude aux nombres inférieurs à $\hat{\theta}_{7,q}$.

(β) $k_{2p+2} \geqq -1$, avec $p \leqq 4$.

La substitution $z = \hat{\theta}_{2p,q}$ zéro du polynome $P_{2p}(z)$ dans $q\,D_{2p+3}(z)$ entraîne

$$q\,D_{2p+3}(\hat{\theta}_{2p,q}) = -\hat{\theta}_{2p,q}\frac{k_{2p+2}+2}{2}P_{2p}(\hat{\theta}_{2p}) > 0.$$

ce qui donne

$$\theta > \tau_{2p+3} > \theta_{2p,q} > \hat{\theta}_{8,q}.$$

Nous éliminons ce cas, en limitant notre étude aux nombres θ inférieurs à $\hat{\theta}_{8,q}$.

(γ) $k_{2p+2} = -2$ $\left[\text{avec } s \geqq 2p+3 \text{ si } \dfrac{A(z)}{Q(z)} \text{ est de rang fini } s\right]$.

Nous poursuivons notre étude toujours de la même manière. Nous considérons

$$q\,D_{2p+3}(z) \equiv \hat{P}_{2p}(z).$$

Nous formons ensuite le polynome :

$$D_{2p+4} \equiv (1+z)\,D_{2p+3}(z) - \frac{p+2}{4}q^2(u_{2p+3} - w_{2p+3})\,z\,D_{2p+2}(z).$$

Les deux propriétés principales de $D_n(z)$ donnent, pour l'entier rationnel $q^2(u_{2p+3} - w_{2p+3})$,

$$0 \leqq q^2(u_{2p+3} - w_{2p+3}) \leqq \frac{8}{p+1},$$

lesquelles inégalités nous conduisent à considérer les deux cas suivants :

$$-q^2(u_{2p+3}-w_{2p+3})=0, \qquad \text{mais alors} \quad \theta=\hat{\theta}_{2p,q},$$

et

$$-q^2(u_{2p+3}-w_{2p+3})\geqq 1, \qquad \text{avec} \quad p\leqq 7.$$

En exprimant $D_{2p+4}(z)$ pour $z=\hat{\theta}_{2p,q}$, compte tenu de

$$D_{2p+3}(\hat{\theta}_{2p,q})=\hat{P}_{2p}(\hat{\theta}_{2p,q})=0$$

$$q(1+\hat{\theta}_{2p,q})D_{2p+2}(\hat{\theta}_{2p,q})=\frac{2\hat{\theta}_{2p,q}}{p+2}P_{2p}(\hat{\theta}_{2p,q}),$$

nous déduisons

$$D_{2p+4}(\hat{\theta}_{2p,q})=\frac{\hat{\theta}^2_{2p,q}}{2(1+\hat{\theta}_{2p,q})}q^2(u_{2p+3}-w_{2p+3})P_{2p}(\hat{\theta}_{2p,q})>0,$$

ce qui nous donne

$$\theta>\tau_{2p+4}>\hat{\theta}_{2p,q}\geqq\hat{\theta}_{14,q}.$$

Nous écartons ce dernier cas, en nous limitant aux nombres de S_q inférieurs à $\hat{\theta}_{14q}$.

L'ensemble de ces résultats est résumé dans le théorème suivant :

THÉORÈME 4.1. — *Les nombres θ de S_q, inférieurs à $\hat{\theta}_{14,q}$ et qui n'appartiennent pas à l'ensemble des $(\theta'_q, \theta'_{n,q}$ et $\hat{\theta}'_{n,q})$ sont les nombres $\theta_{n,q}$, les nombres $\hat{\theta}_{n,q}$ où $n\geqq 14$, le nombre θ''.*

Le nombre $\alpha_{1,q}$ est le seul point d'accumulation des nombres $\theta\leqq\hat{\theta}_{14,q}$.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] L. AHLFORS, *Eine Method in der Theorie der meromorphen Funktionen* (*Comm. Helsingfors*, t. 8, 1935, nº 10, 14 pages).

[2] M. AMARA, *Familles normales de fractions rationnelles* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 258, 1964, p. 4879-4880).

[3] M. AMARA, *Sur un ensemble remarquable de nombres algébriques* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 260, 1965, p. 1052-1054).

[4] M. AMARA, *Ensembles fermés de nombres algébriques*, Séminaire Dubreil-Pisot, 1965-1966, nº 6.

[5] D. G. CANTOR, *Powers series with integral coefficients* (*Bull. Amer. Math. Soc.*, t. 69, 1963, p. 362-366).

[6] CHAMPY (Mme Chr. BLANCHARD), *Fonctions méromorphes dans le cercle unité et leurs séries de Taylor* (*Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, t. 8, 1958, p. 211-262).

[7] F. DRESS, *Déterminants de Hankel du quotient de deux séries entières à coefficients entiers* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 256, 1963, p. 105-133).

[8] J. DUFRESNOY et C. PISOT, *Sur un ensemble d'entiers algébriques* (*Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, 3e série, t. 70, 1953, p. 105-133).

[9] J. DUFRESNOY et C. PISOT, *Sur les dérivées successives d'un ensemble fermé d'entiers algébriques* (*Bull. Sc. math.*, 2e série, t. 77, 1953, p. 129-136).

[10] J. DUFRESNOY et C. PISOT, *Étude de certaines fonctions méromorphes bornées sur le cercle unité. Application à un ensemble fermé d'entiers algébriques* (*Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, 3e série, t. 72, 1955, p. 69-92).

[11] J. DUFRESNOY et C. PISOT, *Sur les ensembles d'accumulation d'un ensemble fermé d'entiers algébriques* (*Bull. Sc. math.*, 2e série, t. 79, 1955, p. 54-64).

[12] M. GRANDET-HUGOT (Mme), *Ensembles fermés d'entiers algébriques* (*Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, 3e série, t. 92, 1965, p. 1-35).

[13] R. NEVANLINNA, *Le théorème de Picard-Borel et la Théorie des fonctions méromorphes*, Gauthier-Villars, Paris, 1929 (Collection de monographies sur la théorie des fonctions).

[14] C. PISOT, *Familles compactes de fractions rationnelles et ensembles fermés de nombres algébriques* (*Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, 3e série, t. 81, 1964, p. 165-188).

[15] R. SALEM, *A remarquable class of algebraic integers. Proof of conjecture of Vijayaraghavan* (*Duke math. J.*, t. 11, 1944, p. 103-188).

[16] R. SALEM, *Powers series with integral coefficients* (*Duke math. J.*, t. 12, 1945, p. 153-172).

[17] T. SCHIMIZU, *On the theory of meromorphie function* (*Japan J. math.*, t. 6, 1929, p. 119-171).

[18] C. L. SIEGEL, *Algebraic integers whose conjugate lie in the circle* (*Duke math. J.*, t. 11, 1944, p. 577-602).