

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

TOSHIO NISHINO

TSUNÉO YOSHIOKA

**Sur l'itération des transformations rationnelles de l'espace
de deux variables complexes**

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 82, n° 2 (1965), p. 327-376

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1965_3_82_2_327_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1965, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR L'ITÉRATION DES TRANSFORMATIONS RATIONNELLES DE L'ESPACE DE DEUX VARIABLES COMPLEXES

PAR MM. TOSHIO NISHINO ET TSUNÉO YOSHIOKA.

1. INTRODUCTION. — Dans l'espace de deux variables complexes x et y , considérons une transformation T définie par deux fonctions rationnelles $\Phi(x, y)$ et $\Psi(x, y)$:

$$(T) \quad \begin{cases} x_1 = \Phi(x, y), \\ y_1 = \Psi(x, y), \end{cases}$$

et ses itérées successives T^2, T^3, \dots :

$$(T^n) \quad \begin{cases} x_n = \Phi_n(x, y) = \Phi(\Phi_{n-1}(x, y), \Psi_{n-1}(x, y)), \\ y_n = \Psi_n(x, y) = \Psi(\Phi_{n-1}(x, y), \Psi_{n-1}(x, y)) \\ \text{(avec } T^1 = T, \Phi_1 = \Phi, \Psi_1 = \Psi). \end{cases}$$

Supposons toujours que le jacobien de la transformation T ne s'annule pas identiquement. Dans nos présentes études, pour éviter la complexité qui aura lieu à cause de la présence des points d'indétermination, nous supposons d'ailleurs que les fonctions rationnelles $\Phi(x, y)$ et $\Psi(x, y)$ sont des polynômes en x et y .

Il s'agit alors de connaître l'allure des conséquents successifs $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \dots$ d'un point variable (x, y) .

Au cas d'une variable, dans son Mémoire sur l'itération des fonctions rationnelles ⁽¹⁾, G. Julia a recherché l'allure des conséquents successifs,

⁽¹⁾ G. JULIA, *Mémoire sur l'itération des fonctions rationnelles* (*J. Liouville*, t. 83, 1918, Mémoire couronné par l'Académie des Sciences de Paris en 1918).

avec un grand succès, en portant son attention à l'ensemble des points en lesquels la suite des itérées successives cesse d'être normale ⁽¹⁾. Pour cette raison, nous nous dirigeons vers l'étude de cet ensemble, que nous appellerons ensemble de Julia de la transformation.

Dans le présent Mémoire, nous nous proposons d'observer quelques circonstances qui peuvent surgir dans l'itération des transformations rationnelles entières de deux variables, en donnant chaque fois un exemple qui réalise la possibilité indiquée. Nos études seront faites surtout sur l'ensemble de Julia.

Tout d'abord, nous donnerons dans le n° 2 une définition de la normalité d'une famille de transformations rationnelles entières. Remarquons que la normalité dépend du choix des points à l'infini, avec lesquels l'espace fini est compactifié. Nous adoptons ici pour l'espace compactifié l'espace produit de la sphère de Riemann de la variable x et de celle de la variable y . Lorsqu'on prend pour compactifié l'espace projectif complexe, admettant x et y pour ses coordonnées inhomogènes, on aura une autre définition de la normalité. La normalité étant définie, nous pouvons former l'ensemble de Julia \mathcal{E} d'une transformation rationnelle entière T . Cet ensemble \mathcal{E} est, par définition, l'ensemble des points où la suite des itérées successives $\{T^n\}$ de T cesse d'être normale. Dans notre sens, \mathcal{E} est l'ensemble des points auxquels au moins une des deux suites de polynomes $\{\Phi_n(x, y)\}$ et $\{\Psi_n(x, y)\}$ cesse d'être normale dans le sens habituel.

Quant aux propriétés de l'ensemble de Julia \mathcal{E} de la transformation T , la première chose à savoir est l'invariance de \mathcal{E} à la fois par T et par T^{-1} ; c'est-à-dire, tous les conséquents et tous les antécédents d'un point de \mathcal{E} appartiennent à \mathcal{E} . Pour la démontrer, nous établirons dans le n° 3 un lemme général, qui sera utilisé autrement deux fois plus tard. On observe ensuite que \mathcal{E} jouit d'une autre propriété fondamentale : \mathcal{E} satisfait au théorème de continuité. Cette propriété-ci se déduira immédiatement d'un théorème général, dû aussi à G. Julia ⁽²⁾. Au cas d'une variable, G. Julia a montré que l'ensemble de Julia possède la propriété d'homogénéité ⁽²⁾. Mais, dans le cas de deux variables, \mathcal{E} ne possède pas nécessairement l'homogénéité, comme nous le verrons au n° 14.

La construction de l'ensemble de Julia était très simple dans le cas d'une variable. D'après G. Julia ⁽¹⁾, il suffit de former l'ensemble dérivé de celui qui se compose de tous les points doubles répulsifs et de tous les groupes circulaires répulsifs, à moins que la fonction rationnelle à itérer ne soit linéaire. Dans le cas de deux variables, on verra plus tard que, pour obtenir

⁽¹⁾ Il s'agit des points *irréguliers* de la théorie des familles normales.

⁽²⁾ G. JULIA, *Sur les familles de fonctions analytiques de plusieurs variables* (*Acta math.*, t. 47, 1926, p. 53).

l'ensemble de Julia, il n'est pas suffisant de former l'adhérence de l'ensemble de tous les points doubles semi-répulsifs et de tous les groupes circulaires semi-répulsifs, mais il est nécessaire de prendre certaines parties sur certaines courbes analytiques invariantes. Nous pouvons, pour quelques transformations particulières, construire l'ensemble de Julia à partir des points doubles semi-répulsifs et des groupes circulaires semi-répulsifs et par l'intermédiaire des courbes analytiques invariantes. Mais, pour une transformation générale, nous n'avons pu y réussir.

Parmi les courbes analytiques invariantes, celles qui nous intéressent beaucoup plus sont des courbes invariantes, dites de Poincaré, issues des points doubles semi-répulsifs ou des groupes circulaires semi-répulsifs. On peut s'assurer de l'existence des courbes invariantes de Poincaré en vertu des fonctions transcendentes découvertes par H. Poincaré ⁽³⁾.

Selon les cas, une courbe invariante de Poincaré peut être, soit algébrique, soit transcendante. Lorsqu'elle est algébrique, son genre est, d'après É. Picard ⁽⁴⁾, 0 ou bien 1. Mais, sous l'hypothèse que les fonctions $\Phi(x, y)$ et $\Psi(x, y)$ sont des polynômes, le cas où elle est une courbe elliptique est exclu.

La restriction de la transformation T à une courbe analytique invariante C donne naissance à une transformation τ de C. Si la courbe C est une courbe invariante de Poincaré et qu'elle est algébrique, donc rationnelle, on pourra alors appliquer à τ tous les résultats classiques, obtenus notamment par G. Julia ⁽¹⁾ et par P. Fatou ⁽²⁾.

Un point de l'ensemble de Julia de τ appartient *a priori* à l'ensemble de Julia de T. Nous observerons dans le n° 16 que, si un point P_0 est un point double semi-répulsif de T mais il est un point double attractif de τ , alors le domaine de convergence vers P_0 sur la courbe C fait partie de l'ensemble de Julia de T. Or, dans ce domaine sur C la suite des itérées successives de τ est normale. C'est une raison pour laquelle la construction de l'ensemble de Julia exige les courbes analytiques invariantes.

Finalement, nous étudierons les transformations du type particulier suivant :

$$\begin{cases} x_1 = \Phi(x, y), \\ y_1 = y, \end{cases}$$

où $\Phi(x, y)$ est un polynôme en x et y . Une telle transformation peut être considérée comme transformation rationnelle d'une variable x à un para-

⁽³⁾ H. POINCARÉ, *Sur une classe nouvelle de transcendentes uniformes* (J. Liouville, t. 6, 1890, p. 313).

⁽⁴⁾ Voir É. PICARD, *Leçons sur quelques équations fonctionnelles*, Gauthier-Villars, Paris, 1928.

⁽²⁾ P. FATOU, *Sur les équations fonctionnelles* (Bull. Soc. Math. France, t. 47, 1919, p. 161; t. 48, 1920, p. 33 et 208).

mètre y . A ce titre, elle mérite d'être étudiée. Même pour cette transformation tellement simple, l'étude de l'itération n'est pas si facile, quand la transformation est non birationnelle. Quant à l'ensemble de Julia, nous réduirons dans le n° 23 les possibilités à trois. La première se réalise toujours. Nous sommes moins heureux pour les deux autres possibilités. Jusqu'ici, nous n'avons pas réussi à les exclure ni à donner des exemples qui les réalisent.

2. FAMILLE NORMALE DE TRANSFORMATIONS ET ENSEMBLE DE JULIA. —

Dans l'espèce de deux variables complexes x et y , considérons une famille \mathfrak{S} de transformations rationnelles entières, dont chaque transformation S est définie par un couple de polynômes $(S_1(x, y), S_2(x, y))$ en x et y . Nous disons que la famille \mathfrak{S} est normale en un point P_0 à distance finie s'il existe un voisinage U de P_0 tel que, de toute suite infinie de transformations de \mathfrak{S} , on puisse extraire une suite partielle infinie

$$S^{(1)}, S^{(2)}, S^{(3)}, \dots$$

de manière que, $S^{(m)}$ étant définie par $(S_1^{(m)}(x, y), S_2^{(m)}(x, y))$, chacune des deux suites de polynômes

$$S_1^{(1)}(x, y), S_1^{(2)}(x, y), S_1^{(3)}(x, y), \dots$$

et

$$S_2^{(1)}(x, y), S_2^{(2)}(x, y), S_2^{(3)}(x, y), \dots$$

converge uniformément dans U ou bien vers une fonction holomorphe dans U ou bien vers la constante infinie ∞ .

Cette définition étant faite, revenons à l'itération d'une transformation rationnelle entière T , définie par deux polynômes $\Phi(x, y)$ et $\Psi(x, y)$ en deux variables complexes x et y :

$$(T) \quad \begin{cases} x_1 = \Phi(x, y), \\ y_1 = \Psi(x, y). \end{cases}$$

Supposons toujours que la transformation T est non dégénérée, c'est-à-dire que le jacobien

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial y} - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

ne s'annule pas identiquement. La transformation T pourra être, soit birationnelle, soit non birationnelle.

La $n^{\text{ième}}$ itérée T^n de T ($n = 1, 2, 3, \dots$) est alors exprimée par

$$(T^n) \quad \begin{cases} x_n = \Phi_n(x, y) = \Phi(\Phi_{n-1}(x, y), \Psi_{n-1}(x, y)), \\ y_n = \Psi_n(x, y) = \Psi(\Phi_{n-1}(x, y), \Psi_{n-1}(x, y)), \end{cases}$$

(avec $T^1 = T, \Phi_1 = \Phi, \Psi_1 = \Psi$).

Les fonctions $\Phi_n(x, y)$ et $\Psi_n(x, y)$ sont aussi des polynomes. Nous appellerons le point (x_n, y_n) *conséquent d'ordre n* du point (x, y) et, inversement, (x, y) *antécédent d'ordre n* de (x_n, y_n) . En général, un point admet plusieurs antécédents d'ordre n . D'ailleurs, il peut arriver que les antécédents d'ordre 1 d'un point forment une courbe analytique complexe.

Pour l'espace compactifié, nous prendrons toujours l'espace produit de la sphère de Riemann de la variable x et de celle de la variable y . Mais, dans la plus grande partie de ce Mémoire, pour les points dont l'allure des conséquents est étudiée, nous n'envisagerons que des points à distance finie.

L'ensemble des points à distance finie où la suite des itérées successives de T :

$$T, T^2, T^3, \dots$$

cesse d'être normale s'appellera *ensemble de Julia* de T et sera désigné par \mathcal{E} . Cet ensemble \mathcal{E} est, par définition, l'ensemble des points auxquels au moins une des deux suites

$$\begin{aligned} \Phi_1(x, y), \Phi_2(x, y), \Phi_3(x, y), \dots, \\ \Psi_1(x, y), \Psi_2(x, y), \Psi_3(x, y), \dots \end{aligned}$$

cesse d'être normale. Les points de \mathcal{E} s'appelleront *points de Julia* de T .

Dans tout le cours du Mémoire, nous conserverons les notations et les hypothèses que nous venons de poser.

3. PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES DE \mathcal{E} . — L'ensemble de Julia \mathcal{E} est *a priori* un ensemble fermé dans l'espace fini de x et y . Il satisfait au théorème de continuité. En effet, d'après G. Julia ⁽²⁾, l'ensemble des points auxquels la suite $\{\Phi_n(x, y)\}$ cesse d'être normale satisfait au théorème de continuité. Il en est de même pour $\{\Psi_n(x, y)\}$. Toute réunion d'ensembles y satisfaisant y satisfait aussi. Donc, \mathcal{E} y satisfait.

Tous les conséquents d'un point de Julia sont a priori des points de Julia. Nous allons montrer l'inverse : *Tous les antécédents d'un point de Julia sont aussi des points de Julia.* Pour ceci, établissons le lemme suivant, qui sera utilisé encore plus tard.

Soient U un voisinage connexe de l'origine de deux variables x et y et V un voisinage de l'origine de deux autres variables z et w . Soient $f(x, y)$ et $g(x, y)$ deux fonctions holomorphes dans U , telles que

(i) $f(0, 0) = 0, g(0, 0) = 0$;

(ii) elles définissent une application holomorphe S de U dans V :

$$(S) \quad \begin{cases} z = f(x, y), \\ w = g(x, y); \end{cases}$$

(iii) leur jacobien $J(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x}$ ne s'annule pas identiquement.

Soit $\{h(z, w)\}$ une famille de fonctions holomorphes dans V . Pour chaque fonction $h(z, w)$ de la famille, posons

$$H(x, y) = h(f(x, y), g(x, y)).$$

Soit $\{H(x, y)\}$ la famille des fonctions holomorphes dans U ainsi obtenues. Dans cette situation, si $\{H(x, y)\}$ est une famille normale dans U , alors $\{h(z, w)\}$ est une famille normale dans un voisinage, plus petit que V , de l'origine de (z, w) .

En effet, remarquons d'abord que, lorsque le jacobien $J(x, y)$ ne s'annule pas à l'origine, le lemme est trivialement vrai. D'ailleurs, même si $J(0, 0) = 0$, le lemme est vrai, pourvu que l'origine de (x, y) soit un point isolé de l'image réciproque par S de l'origine de (z, w) . Car, on peut alors regarder localement le voisinage U comme revêtement analytique sur V avec la projection S . Dans ce cas, S est une application ouverte à l'origine; d'où il s'ensuit immédiatement le lemme.

Il ne reste donc de le démontrer qu'au cas où l'image réciproque σ_0 par S de l'origine de (z, w) est une courbe analytique sans point isolé. Pour mettre en évidence le principe sur lequel reposera la démonstration pour ce cas, donnons encore un lemme :

Conservons les notations du lemme précédent. Soit donnée une courbe analytique C dans V , passant par l'origine de (z, w) . Supposons que la famille $\{h(z, w)\}$ satisfait aux deux conditions suivantes :

(α) $\{h(z, w)\}$ est une famille normale au voisinage de tout point de C , différent de l'origine;

(β) les traces sur C des fonctions de la famille forment une famille normale sur C ⁽⁶⁾.

Sous ces hypothèses, $\{h(z, w)\}$ est une famille normale au voisinage de l'origine.

Commençons par réduire le premier lemme au deuxième. L'ensemble σ des zéros du jacobien $J(x, y)$ contient la courbe σ_0 . U étant supposé suffisamment petit, il existe une droite complexe C^* dans U , passant par l'origine, telle que C^* ne rencontre σ dans U qu'à l'origine. L'image C de C^* par S est alors une courbe analytique dans V , passant par l'origine de (z, w) , par rapport à laquelle les deux conditions (α) et (β) du deuxième

(6) Sans diminuer la généralité, nous pouvons supposer que C est l'ensemble des zéros d'une fonction holomorphe dans V ; et que C est irréductible à l'origine. Dans la condition (β), nous exigeons seulement la normalité de la famille correspondante sur la normalisée de la courbe C .

lemme sont remplies, d'après la remarque faite au début. Ceci achève la réduction.

Donnons ensuite la démonstration du deuxième lemme, dans le cas favorable où la courbe C est régulière à l'origine. Dans ce cas, quitte à changer les coordonnées locales, nous pouvons supposer que la courbe C s'exprime par l'équation $z = 0$. Nous pouvons trouver alors deux rayons suffisamment petits $r > 0$ et $\rho > 0$, de telle manière que le polycylindre $\Delta = \{|z| \leq r, |\varpi| \leq \rho\}$ soit contenu dans V ; et que, dans un voisinage V_0 , connexe et contenu dans V , de l'ensemble $\{|z| \leq r, |\varpi| = \rho\}$, la famille $\{h(z, \varpi)\}$ soit normale.

De toute suite infinie de fonctions de la famille, nous pouvons extraire une nouvelle suite infinie

$$(S) \quad h_1(z, \varpi), \quad h_2(z, \varpi), \quad h_3(z, \varpi), \quad \dots,$$

de manière que (S) converge uniformément dans V_0 et que la suite correspondante de traces sur C :

$$(S_0) \quad h_1(0, \varpi), \quad h_2(0, \varpi), \quad h_3(0, \varpi), \quad \dots$$

converge uniformément sur C . Lorsque la suite (S) converge vers une fonction holomorphe dans V_0 , alors le principe du maximum garantit la convergence uniforme de la suite (S) dans le polycylindre Δ . Au contraire, lorsque (S) converge vers la constante infinie ∞ uniformément dans V_0 , la suite correspondante (S₀) doit converger aussi vers ∞ . S'il en est ainsi, toute fonction de (S), à partir d'un certain rang, ne prend jamais la valeur 0 sur la réunion de l'ensemble $\{|z| \leq r, |\varpi| = \rho\}$ et du disque $\{z = 0, |\varpi| \leq \rho\}$; donc, elle ne s'annule jamais dans Δ , d'après le théorème de continuité. Nous pouvons alors appliquer ledit principe à la suite

$$\frac{1}{h_1(z, \varpi)}, \quad \frac{1}{h_2(z, \varpi)}, \quad \frac{1}{h_3(z, \varpi)}, \quad \dots$$

Il en résulte que la famille $\{h(z, \varpi)\}$ est normale sur le voisinage Δ de l'origine, dans le cas favorable.

Dans le cas général, en effectuant une transformation linéaire non dégénérée des coordonnées convenable, nous pouvons supposer que la courbe C s'exprime, pour un certain entier $m > 0$, par

$$(C) \quad \begin{cases} z = \zeta(t), \\ \varpi = t^m, \end{cases}$$

où $\zeta(t)$ est une fonction holomorphe au voisinage de l'origine dans le t -plan et elle s'annule à l'origine. Considérons l'application \tilde{S} , de l'espace de deux autres variables Z et W dans l'espace de (z, ϖ) , définie par

$$(\tilde{S}) \quad \begin{cases} z = Z, \\ \varpi = W^m. \end{cases}$$

Considérons ensuite la courbe \tilde{C} définie par

$$(\tilde{C}) \quad \begin{cases} z = \zeta(t), \\ W = t \end{cases}$$

et la famille $\{h(Z, W^m)\}$ de fonctions holomorphes dans $\tilde{V} = \tilde{S}^{-1}(V)$. Tout point de \tilde{C} , différent de l'origine, se transforme par \tilde{S} en un point de C , différent de l'origine. Donc, la famille $\{h(Z, W^m)\}$ est normale en tout point de \tilde{C} , différent de l'origine. La restriction de \tilde{S} est une application holomorphe de \tilde{C} sur C . Donc, les traces sur \tilde{C} des fonctions de $\{h(Z, W^m)\}$ forment une famille normale sur \tilde{C} . La famille $\{h(Z, W^m)\}$ satisfait ainsi aux conditions (α) et (β) par rapport à la courbe \tilde{C} , qui est maintenant régulière à l'origine. Cette famille-ci est normale au voisinage de l'origine de (Z, W) , d'après ce que nous avons montré dans le cas favorable. L'application \tilde{S} étant ouverte, la famille initiale $\{h(z, w)\}$ est normale dans un voisinage de l'origine de (z, w) .

Nous avons ainsi achevé la démonstration du deuxième lemme, donc celle du premier.

Revenons à l'invariance de l'ensemble de Julia. Soient P_0 un point et $P_1 = T(P_0)$ son conséquent d'ordre 1. En partant du cas trivial : $n = 1$, nous aurons, par récurrence sur l'ordre n ,

$$\Phi_{n+1}(x, y) = \Phi(\Phi_n(x, y), \Psi_n(x, y)) = \Phi_n(\Phi(x, y), \Psi(x, y)).$$

Ceci montre qu'à la famille $\{\Phi_n(x, y)\}$ au point P_1 correspond la famille $\{\Phi_{n+1}(x, y)\}$ au point P_0 , au titre de la correspondance du lemme précédent; il résulte de là que, si la famille $\{\Phi_n(x, y)\}$ cesse d'être normale en P_1 , elle ne peut être normale en P_0 . Il en est de même pour $\{\Psi_n(x, y)\}$. Par récurrence sur l'ordre n , nous voyons que tous les antécédents d'un point de Julia sont aussi des points de Julia.

4. POINTS DOUBLES ET GROUPES CIRCULAIRES. — Tout point à distance finie, laissé invariant par la transformation T , s'appelle *point double* de T . Tout point double appartient à l'intersection de deux courbes algébriques, respectivement définies par

$$x - \Phi(x, y) = 0$$

et par

$$y - \Psi(x, y) = 0;$$

et, réciproquement, tout point à distance finie, appartenant à l'intersection, est un point double. Si ces deux courbes n'ont aucune composante commune, il n'y a qu'un nombre fini de points doubles. Au contraire, il y en a une infinité.

Soit P_0 un point double de T . Nous appelons *multiplicateurs* de T au point double P_0 les deux valeurs propres de la matrice jacobienne

$$M_{P_0} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial x} & \frac{\partial \Phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \Psi}{\partial x} & \frac{\partial \Psi}{\partial y} \end{pmatrix}_{P_0}$$

de T en P_0 . Ce sont les deux racines de l'équation caractéristique de M_{P_0} :

$$\lambda^2 - (\text{tr} M_{P_0})\lambda + (\det M_{P_0}) = 0.$$

On voit aussitôt que les multiplicateurs de T au point double P_0 ne changent pas quand on applique une transformation analytique birégulière des coordonnées locales au voisinage de P_0 . En effectuant une transformation linéaire régulière des coordonnées convenable, on pourra ramener P_0 à l'origine et exprimer T sous l'une des trois formes suivantes :

$$\begin{aligned} (1) \quad & \begin{cases} x_1 = ax + \Phi'(x, y), \\ y_1 = by + \Psi'(x, y); \end{cases} \\ (2) \quad & \begin{cases} x_1 = ax + \Phi'(x, y), \\ y_1 = ay + \Psi'(x, y); \end{cases} \\ (3) \quad & \begin{cases} x_1 = ax + cy + \Phi'(x, y), \\ y_1 = ay + \Psi'(x, y), \end{cases} \end{aligned}$$

où a et b sont les multiplicateurs de T en P_0 [$a \neq b$ dans (1); $a = b$ dans (2) et dans (3)] et $\Phi'(x, y)$ et $\Psi'(x, y)$ sont des polynômes s'annulant à l'origine avec l'ordre ≥ 2 . Remarquons que, dans la troisième forme (3), on peut choisir tout arbitrairement le nombre complexe c , d'autant qu'il ne soit pas nul.

Lorsqu'un point P_0 à distance finie est un point double de la $n^{\text{ième}}$ itérée T^n de T et qu'il n'est pas point double de T^m quel que soit l'entier positif m inférieur à n , nous appelons P_0 *point double d'ordre n* de T . Dans un tel cas, les conséquents de P_0 :

$$P_1 = T(P_0), \quad P_2 = T(P_1), \quad \dots, \quad P_{n-1} = T(P_{n-2})$$

sont aussi des points doubles d'ordre n de T et les n points P_0, P_1, \dots, P_{n-1} sont distincts l'un de l'autre. Nous disons alors que les n points P_0, P_1, \dots, P_{n-1} forment un *groupe circulaire d'ordre n* . Nous appelons *multiplicateurs* de T en ce groupe les multiplicateurs de la $n^{\text{ième}}$ itérée T^n de T à l'un des points doubles P_0, P_1, \dots, P_{n-1} de T^n . Pour justifier la définition, remarquons que l'équation caractéristique pour T^n est la même en tous ces points. En effet, la matrice jacobienne de T^n en P_i ($i = 0, 1, \dots, n-1$) est

$$N_{P_i} = M_{P_{i-1}} \dots M_{P_0} M_{P_{n-1}} \dots M_{P_{i+1}} M_{P_i}.$$

Or, les matrices $N_{p_0}, N_{p_1}, \dots, N_{p_{n-1}}$ ont la même trace et le même déterminant. Leurs équations caractéristiques se coïncident l'une avec l'autre.

5. POINTS DOUBLES ATTRACTIFS ET GROUPES CIRCULAIRES ATTRACTIFS. — Envisageons un point double $P_0 = (x_0, y_0)$ de la transformation T , où les multiplicateurs a et b de T sont tous les deux plus petits que l'unité en module :

$$\begin{aligned} x_0 &= \Phi(x_0, y_0) & \text{et} & & y_0 &= \Psi(x_0, y_0); \\ |a| &< 1 & \text{et} & & |b| &< 1. \end{aligned}$$

Nous appelons un tel point P_0 *point double attractif* de T . En effectuant une transformation linéaire des coordonnées convenable, on ramène P_0 à l'origine et l'on écrit T sous l'une des trois formes (1), (2) et (3), précédemment indiquées. D'ailleurs, on suppose que le coefficient c dans (3) est choisi suffisamment petit pour qu'on ait

$$|a| + |c| < 1.$$

Nous allons montrer que les conséquents successifs de tout point assez voisin de P_0 tendent vers P_0 , d'une façon uniforme. En effet, on peut trouver deux nombres réels positifs M assez grand et r assez petit, tels que, pour tout ρ ($0 < \rho \leq r$), on ait

$$\begin{aligned} |\Phi'(x, y)| &\leq \rho^2 M, \\ |\Psi'(x, y)| &\leq \rho^2 M, \end{aligned}$$

si $|x| \leq \rho$ et $|y| \leq \rho$. En reprenant r plus petit au besoin, on peut supposer qu'il existe un nombre réel positif λ plus petit que l'unité, tel qu'on ait

$$|a| + |c| + rM \leq \lambda < 1$$

et

$$|b| + rM \leq \lambda < 1,$$

où l'on convient de poser $c = 0$ dans les cas (1) et (2). Si $|x| \leq \rho \leq r$ et $|y| \leq \rho \leq r$, on a

$$|\Phi(x, y)| \leq (|a| + |c| + \rho M)\rho \leq \lambda\rho,$$

et, de même,

$$|\Psi(x, y)| \leq \lambda\rho.$$

Soit Δ_ρ le polycylindre de rayon ρ , ayant son centre à l'origine

$$(\Delta_\rho) \quad |x| \leq \rho, \quad |y| \leq \rho.$$

Alors, nous voyons que la transformation T envoie Δ_ρ dans la partie Δ_λ , complètement intérieure à Δ_ρ pour tout ρ ($0 < \rho \leq r$). D'où, chacune des suites $\{\Phi_n(x, y)\}$ et $\{\Psi_n(x, y)\}$ converge uniformément dans Δ_ρ vers la constante nulle. Le voisinage Δ_ρ ne contient aucun point de Julia.

Considérons ensuite un groupe circulaire P_0, P_1, \dots, P_{n-1} d'ordre n de T , auquel les multiplicateurs sont plus petits que l'unité en module. Nous appelons un tel groupe *groupe circulaire attractif* de T . Le même raisonnement que nous venons de faire pour T s'applique, sans être modifié, à la $n^{\text{ième}}$ itérée T^n en un groupe circulaire attractif d'ordre n . On pourra trouver un voisinage Δ_i de chaque point P_i du groupe ($i = 0, 1, \dots, n-1$), de manière que T^n applique Δ_i dans une partie complètement intérieure à Δ_i , et que la suite de transformations

$$T^{n+j}, T^{2n+j}, T^{3n+j}, \dots$$

converge uniformément dans Δ_i vers la transformation constante $T^{(j)}$ telle que $T^{(j)}(\Delta_i) = P_k$, où i, j et k sont des entiers tels que

$$0 \leq i \leq n-1, \quad 0 \leq j \leq n-1, \quad 0 \leq k \leq n-1, \quad i+j \equiv k \pmod{n}.$$

6. DOMAINE DE CONVERGENCE VERS UN POINT DOUBLE ATTRACTIF OU VERS UN GROUPE CIRCULAIRE ATTRACTIF. — A chaque point double attractif P_0 de T correspond un domaine $\mathcal{O}(P_0)$, non nécessairement connexe, formé de tous les points dont les conséquents successifs convergent vers le point P_0 . Avec G. Julia, nous appelons $\mathcal{O}(P_0)$ *domaine de convergence total vers le point double attractif* P_0 .

Pour voir ce domaine d'une façon plus nette, considérons l'ensemble ouvert Ω formé des points auxquels la suite $\{T^n\}$ est normale. Cet ensemble Ω est le complémentaire de l'ensemble de Julia \mathcal{E} dans l'espace fini. Considérons ensuite les composantes connexes de Ω . On a vu que la suite $\{T^n\}$ est normale au voisinage de P_0 . Donc, P_0 appartient à l'une de ces composantes connexes, soit $\mathcal{O}_0 = \mathcal{O}_0(P_0)$. Dans le domaine \mathcal{O}_0 , la suite $\{T^n\}$ converge vers la transformation constante, envoyant \mathcal{O}_0 en P_0 , d'une façon uniforme à l'intérieur complet de \mathcal{O}_0 . Avec G. Julia, nous appelons \mathcal{O}_0 *domaine de convergence immédiat vers le point double attractif* P_0 . Si un point P admet un de ses conséquents contenu dans \mathcal{O}_0 , soit $P' = T^m(P)$, alors les conséquents successifs de P' , donc ceux de P , convergent vers P_0 , avec ceux de tout point assez voisin de P , d'une façon uniforme. Il en résulte que la suite $\{T^n\}$ est normale au voisinage de P ; que la composante connexe de Ω , contenant P , prend part au domaine $\mathcal{O}(P_0)$; et, inversement, que $\mathcal{O}(P_0)$ est contenu dans le domaine Ω .

Observons le domaine de convergence total $\mathcal{O}(P_0)$, de l'autre côté. Comme nous l'avons vu dans le n° 3, les conséquents successifs et les antécédents successifs de tout point de Julia sont aussi des points de Julia. La frontière du domaine de convergence immédiat \mathcal{O}_0 vers P_0 se compose des points de Julia. Prenons une des composantes connexes de $T^{-1}(\mathcal{O}_0)$, soit \mathcal{O}' . \mathcal{O}' ne contient aucun point de Julia. Donc, il est contenu dans une des composantes connexes de Ω , soit \mathcal{O}_1 . Nous allons

voir que \mathcal{O}' coïncide avec \mathcal{O}_1 . En effet, si \mathcal{O}' possédait un point frontière P , intérieur à \mathcal{O}_1 , l'image par T d'un petit voisinage connexe de P ne contiendrait aucun point de Julia. Cette image serait contenue dans \mathcal{O}_0 , puisqu'elle est connexe et qu'elle a un point commun avec \mathcal{O}_0 . Alors, ce voisinage de P , suffisamment petit, serait contenu dans \mathcal{O}' . C'est absurde.

Le domaine \mathcal{O}_1 coïncide ou bien avec le domaine de convergence immédiat \mathcal{O}_0 , ou bien avec une des composantes connexes de Ω , autre que \mathcal{O}_0 . Dans le dernier cas, nous appelons \mathcal{O}_1 *antécédent d'ordre 1* de \mathcal{O}_0 . En tenant compte du domaine de Riemann de la transformation inverse T^{-1} , lequel n'étant pas malheureusement un revêtement analytique dans le sens habituel, nous obtenons seulement un nombre fini d'antécédents d'ordre 1 de \mathcal{O}_0 . Remarquons qu'il peut se faire que \mathcal{O}_0 n'admette aucun antécédent d'ordre 1, c'est-à-dire que l'image réciproque $T^{-1}(\mathcal{O}_0)$ coïncide exactement avec \mathcal{O}_0 .

Supposons que \mathcal{O}_0 admette au moins un antécédent \mathcal{O}_1 d'ordre 1. Pour la même raison, chaque composante connexe de $T^{-1}(\mathcal{O}_1)$ est une composante connexe de Ω . Nous l'appelons *antécédent d'ordre 2* de \mathcal{O}_0 . Tout antécédent d'ordre 2 est aussi distinct de \mathcal{O}_0 que de tous les antécédents d'ordre 1 de \mathcal{O}_0 . A partir de chaque antécédent d'ordre 1 de \mathcal{O}_0 , on aura ainsi effectivement un nombre fini d'antécédents d'ordre 2 de \mathcal{O}_0 . Et, puis, à partir de chaque antécédent d'ordre 2 de \mathcal{O}_0 , on obtiendra un nombre fini d'*antécédents d'ordre 3* de \mathcal{O}_0 , qui diffèrent de \mathcal{O}_0 , de tous les antécédents d'ordre 1 et de tous les antécédents d'ordre 2; et ainsi de suite. S'il existe au moins un antécédent d'ordre 1 de \mathcal{O}_0 , ce procédé continuera indéfiniment.

Nous avons ainsi vu que le domaine de convergence immédiat $\mathcal{O}_0(P_0)$ vers un point double attractif P_0 est la composante connexe, contenant P_0 , du domaine de normalité Ω de la suite $\{T^n\}$; le domaine de convergence total $\mathcal{O}(P_0)$ vers P_0 ou bien coïncide avec le domaine de convergence immédiat $\mathcal{O}_0(P_0)$, ou bien se compose de $\mathcal{O}_0(P_0)$ et de tous les antécédents de $\mathcal{O}_0(P_0)$, dont le nombre est l'infini dénombrable et dont chacun est une des composantes connexes de Ω ; le domaine de convergence total $\mathcal{O}(P_0)$ se caractérise ou bien comme ensemble des points dont les conséquents successifs admettent P_0 pour point d'accumulation, ou bien comme ensemble des points qui admettent un voisinage, dont les conséquents successifs de tout point convergent uniformément vers P_0 ; la suite $\{T^n\}$ converge dans $\mathcal{O}(P_0)$ vers la transformation constante, envoyant $\mathcal{O}(P_0)$ en P_0 , d'une façon uniforme à l'intérieur complet de $\mathcal{O}(P_0)$.

Ces énoncés sont absolument les mêmes qu'au cas d'une variable ⁽¹⁾. Dans les exemples donnés par G. Julia ⁽¹⁾, on peut trouver les possibilités que nous venons d'indiquer.

Aux groupes circulaires attractifs nous pouvons appliquer le même raisonnement. Soit $\mathfrak{g} = (P_0, P_1, \dots, P_{n-1})$ un groupe circulaire attractif d'ordre n de T . L'ensemble $\mathcal{O}(\mathfrak{g})$ des points, dont les conséquents successifs admettent pour point d'accumulation au moins un des n points P_0, P_1, \dots, P_{n-1} du groupe, s'appelle domaine de convergence total vers le groupe circulaire attractif \mathfrak{g} . On verra facilement que $\mathcal{O}(\mathfrak{g})$ est la réunion des domaines de convergence totaux, disjoints l'un de l'autre, de la $n^{\text{ième}}$ itérée T^n vers les points doubles attractifs P_0, P_1, \dots, P_{n-1} de T^n . Il n'y a aucun point de Julia de T dans le domaine $\mathcal{O}(\mathfrak{g})$. Donc, $\mathcal{O}(\mathfrak{g})$ est une certaine réunion, finie ou infinie, de composantes connexes de Ω .

7. POINTS DOUBLES NON ATTRACTIFS ET GROUPES CIRCULAIRES NON ATTRACTIFS. — Considérons un point double P_0 de T , tel qu'au moins un des multiplicateurs de T en P_0 soit plus grand que l'unité en module. Nous appelons un tel point *point double semi-répulsif* de T . Soient a et b les multiplicateurs de T en P_0 , avec $|a| > 1$. Après une transformation linéaire non dégénérée des coordonnées convenable, ramenons P_0 à l'origine et exprimons T sous l'une des trois formes (1), (2) et (3), indiquées dans le n° 4. En correspondant à ces formes, la $n^{\text{ième}}$ itérée T^n s'exprime respectivement sous les formes suivantes :

$$(1)_n \quad \begin{cases} x_n = a^n x + \dots, \\ y_n = b^n y + \dots; \end{cases}$$

$$(2)_n \quad \begin{cases} x_n = a^n x + \dots \\ y_n = a^n y + \dots; \end{cases}$$

$$(3)_n \quad \begin{cases} x_n = a^n x + nca^{n-1}y + \dots, \\ y_n = a^n y + \dots, \end{cases}$$

où les termes non écrits s'annulent à l'origine avec l'ordre ≥ 2 . La dérivée $\left(\frac{\partial x_n}{\partial x}\right)_{(0,0)}$ est égale à a^n , qui tend vers l'infini ∞ quand n augmente indéfiniment. En tenant compte de ce que l'origine est un point double, on voit que l'origine est un point de Julia de T . Pour la même raison, chaque point d'un groupe circulaire de T , où au moins un des multiplicateurs est plus grand que l'unité en module est un point de Julia. Un tel groupe s'appelle *groupe circulaire semi-répulsif* de T .

Supposons ensuite que les multiplicateurs a et b de T en un point double P_0 sont tous les deux plus grands que l'unité en module : $|a| > 1$ et $|b| > 1$. Nous appelons un tel point P_0 *point double répulsif* de T . On considère comme d'habitude la transformation inverse T^{-1} , localement

au voisinage de P_0 . T^{-1} s'exprime sous l'une des trois formes suivantes, qui correspondent respectivement aux formes (1), (2) et (3) du n° 4 :

$$(1)_{-1} \quad \begin{cases} x_{-1} = \frac{1}{a}x + \dots, \\ y_{-1} = \frac{1}{b}y + \dots; \end{cases}$$

$$(2)_{-1} \quad \begin{cases} x_{-1} = \frac{1}{a}x + \dots, \\ y_{-1} = \frac{1}{a}y + \dots, \end{cases}$$

$$(3)_{-1} \quad \begin{cases} x_{-1} = \frac{1}{a}x - \frac{c}{a^2}y + \dots \\ y_{-1} = \frac{1}{a}y + \dots \end{cases}$$

où P_0 est supposé situé à l'origine et les termes non écrits sont des fonctions holomorphes au voisinage de l'origine, s'annulant à l'origine avec l'ordre ≥ 2 . Les itérées successives de T^{-1} convergent vers la transformation constante à P_0 , uniformément dans un voisinage de P_0 . Cela signifie qu'il existe un voisinage Δ de l'origine P_0 tel que le conséquent $T(\Delta)$ de Δ contienne Δ dans son intérieur complet. Les conséquents successifs $T(\Delta)$, $T^2(\Delta)$, $T^3(\Delta)$, ... s'agrandiront de plus en plus. A ce moment-là se pose un problème. Quel terrain finit-il par être recouvert des conséquents successifs de Δ ? Nous nous arrêterons sur ce problème plus tard dans le n° 13. Sur un *groupe circulaire répulsif*, on pourra dire la même chose.

Dans le cas où l'un des multiplicateurs de T en un point double P_0 est égal à l'unité en module et l'autre ne dépasse pas l'unité en module, le point double P_0 peut être, soit un point de Julia, soit un point dont au voisinage, la suite $\{T^n\}$ est normale. Par exemple, pour la transformation

$$\begin{cases} x_1 = x + x^2, \\ y_1 = y^2, \end{cases}$$

en vertu de ce que G. Julia a observé sur l'exemple $z_1 = z + z^2$ (1), on verra que l'origine, où les multiplicateurs de T sont 1 et 0, est un point de Julia. Mais, pour la transformation

$$\begin{cases} x_1 = x, \\ y_1 = y^2, \end{cases}$$

ses itérées successives convergent uniformément vers la transformation $x_1 = x$, $y_1 = 0$ dans un voisinage de l'origine, où les multiplicateurs sont aussi 1 et 0.

8. COURBES ANALYTIQUES INVARIANTES. — Une courbe analytique C dans l'espace est dite invariante par la transformation T , si le conséquent de tout point de C appartient aussi à C . Nous entendons par une courbe analytique une partie de l'espace, laquelle est l'image d'un nombre fini de variétés analytiques complexes connexes à une dimension par une application holomorphe non dégénérée (nirgends entartet). D'une façon rigoureuse, il faudrait la définir avec ces variétés de paramètre et cette application holomorphe. Mais, nous ne rencontrerons aucune confusion dans ce qui suit. Nous la considérerons comme ensemble dans l'espace.

Parmi les courbes analytiques invariantes par T , celles qui joueront un rôle dans nos études sont les courbes de points doubles d'ordre quelconque et les courbes invariantes, issues des points doubles semi-répullsifs ou des groupes circulaires semi-répullsifs, définies par les fonctions transcendentes de Poincaré. Les dernières seront précisées dans les numéros suivants.

La courbe C de points doubles d'ordre $\mathbf{1}$ de T se présente éventuellement comme réunion des composantes irréductibles communes de deux courbes algébriques, respectivement définies par $x - \Phi(x, y) = 0$ et par $y - \Psi(x, y) = 0$. Si elle existe, elle est donnée par

$$F(x, y) = 0,$$

où $F(x, y)$ est le facteur commun de $x - \Phi(x, y)$ et $y - \Psi(x, y)$. Les fonctions de définition de T peuvent se mettre sous les formes

$$(4) \quad \begin{cases} \Phi(x, y) = x + F(x, y) \Phi^*(x, y), \\ \Psi(x, y) = y + F(x, y) \Psi^*(x, y), \end{cases}$$

où $\Phi^*(x, y)$ et $\Psi^*(x, y)$ sont des polynomes relativement premiers.

Pour la simplicité, supposons que la courbe C passe par l'origine : $F(0, 0) = 0$. Écrivons

$$(5) \quad \begin{cases} F(x, y) = \alpha x + \beta y + \dots, \\ \Phi^*(x, y) = A + \dots \\ \Psi^*(x, y) = B + \dots, \end{cases}$$

où α , β , A et B sont des constantes et les termes non écrits sont des polynomes s'annulant à l'origine avec des ordres supérieurs. A l'aide de (5), nous obtenons l'équation caractéristique à l'origine :

$$\begin{aligned} \lambda^2 - (\alpha + \beta) \lambda + (1 + \alpha A + \beta B) \\ = (\lambda - 1)(\lambda - (1 + \alpha A + \beta B)) = 0. \end{aligned}$$

Nous avons ainsi vu que l'un des multiplicateurs de T est égal à l'unité, en tout point de la courbe de points doubles d'ordre $\mathbf{1}$. Mais, l'autre multi-

plicateur peut prendre toute valeur complexe; par exemple, on le voit chez la transformation

$$\begin{cases} x_1 = x, \\ y_1 = by + \Psi'(y), \end{cases}$$

où b est une constante arbitrairement choisie et $\Psi'(y)$ est un polynôme en y , n'ayant que des termes de degré ≥ 2 . En effet, sur l'axe $\{y = 0\}$, qui prend part à la courbe de points doubles, les multiplicateurs sont toujours 1 et b .

Si l'autre multiplicateur b en un point P_0 de C est différent de l'unité, alors la courbe C est régulière en P_0 . En effet, après une transformation linéaire non dégénérée des coordonnées convenable, ramenons P_0 à l'origine et écrivons les formules (1) et (4) en même temps :

$$\begin{cases} \Phi(x, y) = x + F(x, y) & \Phi^*(x, y) = x + \Phi'(x, y), \\ \Psi(x, y) = y + G(x, y) & \Psi^*(x, y) = by + \Psi'(x, y). \end{cases}$$

En comparant les termes de degré 1 à l'aide de (5), on aura

$$\begin{cases} x + A(\alpha x + \beta y) = x, \\ y + B(\alpha x + \beta y) = by \quad (b \neq 1); \end{cases}$$

d'où

$$A = 0, \quad B \neq 0, \quad \alpha = 0, \quad \beta = \frac{b-1}{B} \neq 0.$$

Puisque $\frac{\partial F(0, 0)}{\partial y} = \beta \neq 0$, la courbe C de points doubles est régulière à l'origine P_0 . Son tangent en P_0 est le plan $\{y = 0\}$.

Mais, si les multiplicateurs de T en un point de la courbe de points doubles sont tous les deux égaux à l'unité, on ne peut savoir rien de plus, au voisinage de ce point.

De même, on peut parler de *la courbe de points doubles d'ordre n* de T . Elle existe éventuellement comme réunion des composantes irréductibles communes de deux courbes algébriques, respectivement définies par $x - \Phi_n(x, y) = 0$ et par $y - \Psi_n(x, y) = 0$, où les composantes qui font partie des courbes de points doubles d'ordres inférieurs à n sont exclues. Nous ne répétons pas ici les détails.

9. FONCTIONS TRANSCENDANTES DE POINCARÉ. — Rappelons ici les fonctions transcendentes, découvertes par H. Poincaré⁽⁷⁾. Soit T une transformation rationnelle non dégénérée :

$$(T) \quad \begin{cases} x_1 = \Phi(x, y), \\ y_1 = \Psi(x, y). \end{cases}$$

(7) Dans son Mémoire cité en (3), H. Poincaré a traité les cas généraux, où le nombre des variables est quelconque.

Supposons que les fonctions rationnelles $\Phi(x, y)$ et $\Psi(x, y)$ sont holomorphes en un point $P_0 = (x_0, y_0)$ et que P_0 est un point double semi-répulsif de T . Soient a et b les multiplicateurs de T en P_0 , avec $|a| > 1$. H. Poincaré a montré que, si $a^n \neq b$ pour tout $n = 2, 3, \dots$, on peut trouver un couple de fonctions d'une variable complexe t :

$$\begin{cases} x = \xi(t), \\ y = \eta(t), \end{cases}$$

uniformes et méromorphes dans tout le t -plan, de manière qu'on ait

$$(6) \quad \begin{cases} \xi(at) = \Phi(\xi(t), \eta(t)), \\ \eta(at) = \Psi(\xi(t), \eta(t)); \end{cases}$$

$$(7) \quad \begin{cases} (\xi(0), \eta(0)) = (x_0, y_0), \\ \left(\frac{d\xi(0)}{dt}, \frac{d\eta(0)}{dt} \right) \neq (0, 0). \end{cases}$$

Nous appellerons les fonctions $\xi(t)$ et $\eta(t)$ *fonctions de Poincaré*.

Bornons-nous désormais au cas où $\Phi(x, y)$ et $\Psi(x, y)$ sont des polynômes. H. Poincaré a indiqué, de plus, que, dans ce cas, les fonctions $\xi(t)$ et $\eta(t)$ sont des fonctions entières.

Le couple $(\xi(t), \eta(t))$ définit une application holomorphe σ du t -plan dans l'espace de (x, y) donc une courbe analytique C dans l'espace. Les conditions (6) signifient que le conséquent du point $(\xi(t), \eta(t))$ est $(\xi(at), \eta(at))$. Ceci montre que la courbe C est invariante par T . Les conditions (7) montrent que C est issue de P_0 et régulière à l'origine $t = 0$. Nous appellerons C *courbe invariante de Poincaré, issue du point double semi-répulsif P_0 et associée au multiplicateur a* .

Dans le reste de ce numéro, avant de traiter l'itération, nous rappelons encore les résultats de H. Poincaré, concernant l'unicité des fonctions de Poincaré (*).

Si $(\xi(t), \eta(t))$ est un couple de fonctions de Poincaré et qu'on pose, pour une constante non nulle k ,

$$\begin{cases} \tilde{\xi}(t) = \xi(kt), \\ \tilde{\eta}(t) = \eta(kt), \end{cases}$$

alors le couple $(\tilde{\xi}(t), \tilde{\eta}(t))$ vérifie aussi les conditions (6) et (7). Mais, ce couple-ci ne diffère pas essentiellement de ce couple-là. Ils définissent la même courbe invariante. Donc, nous les disons *équivalents*.

Dans le cas, où $a \neq b$, $|a| > 1$ et $|a| \geq |b|$, on voit que les conditions : $a^n \neq b$ ($n = 2, 3, \dots$) sont remplies. Alors, le couple de fonctions

(*) Voir aussi, S. LATTÈS, *Sur les équations fonctionnelles qui définissent une courbe ou une surface invariante par une transformation* (Ann. di Mat., t. 13, 1907, p. 1).

de Poincaré, associé au multiplicateur a , est uniquement déterminé à l'équivalence près.

Dans le cas, où $a \neq b$, $|a| > 1$ et $|b| > |a|$, il faut exiger les conditions : $a^n \neq b$ ($n = 2, 3, \dots$). Si ces conditions sont remplies, l'existence et l'unicité sont assurées, à l'équivalence près. Mais, pour l'autre multiplicateur b ($|b| > 1$), les conditions : $b^n \neq a$ ($n = 2, 3, \dots$) étant trivialement remplies, on aura un autre couple de fonctions de Poincaré, mais un seul autre à l'équivalence près. De plus, on aura, sous ces conditions, les fonctions transcendentes de Picard, dont nous parlerons plus tard dans le n° 13.

Dans le cas, où $a = b$, avec $|a| > 1$ et que la matrice jacobienne de T au point P_0 est diagonalisable, on voit que les conditions : $a^n \neq b$ ($n = 2, 3, \dots$) sont aussi triviales. Mais, l'unicité est perdue. En réalité, pour chaque droite complexe L passant par P_0 , on peut trouver un couple de fonctions de Poincaré, mais un seul à l'équivalence près, tel que la courbe C définie par ce couple admette la droite L pour son tangent en P_0 . On obtient donc une infinité de couples de fonctions de Poincaré. Signalons que ce cas correspond à la forme (2) du n° 4.

Dans le cas, où $a = b$ avec $|a| > 1$ et que la matrice jacobienne de T en P_0 n'est pas diagonalisable, on s'assure de l'existence et de l'unicité à l'équivalence près. Ce cas correspond à la forme (3).

10. COURBES INVARIANTES DE POINCARÉ. — Envisageons une courbe invariante de Poincaré C , issue d'un point double semi-répulsif P_0 et associée à un multiplicateur a ($|a| > 1$) de T en P_0 . La courbe C se représente par l'application holomorphe σ , du t -plan dans l'espace de (x, y) , définie par les fonctions de Poincaré $\xi(t)$ et $\eta(t)$. Considérons la restriction τ de T à la courbe invariante C et, de l'autre côté, la transformation τ_0 du t -plan, définie par

$$(\tau_0) \quad t_1 = at.$$

En vertu de (6) du numéro précédent, τ_0 correspond à τ par l'intermédiaire de σ :

$$\sigma(\tau_0(t)) = \tau(\sigma(t)).$$

Par rapport à l'itération de τ_0 , les conséquents successifs t_1, t_2, t_3, \dots d'un point quelconque t autre que l'origine s'éloignent de l'origine indéfiniment. Comme τ_0 est biunivoque, tout point du t -plan possède un seul antécédent d'ordre 1. Les antécédents successifs $t_{-1}, t_{-2}, t_{-3}, \dots$ d'un point t s'approchent de l'origine indéfiniment.

Bien que la transformation τ_0 du t -plan soit biunivoque, la transformation τ de la courbe C n'est pas nécessairement biunivoque. τ est biunivoque si et seulement si σ est biunivoque. En effet, si un point $\sigma(t_1)$ de la

courbe C admet au moins deux antécédents distincts d'ordre 1 dans C, soient $\sigma(t)$ et $\sigma(t')$, alors $\sigma(at) = \sigma(at')$. t et t' sont distincts, donc at et at' sont distincts. σ n'est pas biunivoque. Inversement, supposons que deux points distincts t et t' du t -plan ont la même image $\sigma(t) = \sigma(t')$. Leurs antécédents $\frac{t}{a^n}$ et $\frac{t'}{a^n}$ d'ordre n s'approchent de l'origine aussi voisins qu'on veut, mais ils restent encore distincts quel que soit l'ordre n . Grâce à la régularité de la courbe C au voisinage de l'origine $t = 0$, σ est biunivoque au voisinage de l'origine. On peut donc supposer $\sigma\left(\frac{t}{a^n}\right) \neq \sigma\left(\frac{t'}{a^n}\right)$ pour l'ordre n assez élevé. Or, leurs conséquents $\sigma(t)$ et $\sigma(t')$ d'ordre n se coïncident. On aura, pour un certain ordre m ,

$$\sigma\left(\frac{t}{a^{m+1}}\right) \neq \sigma\left(\frac{t'}{a^{m+1}}\right), \quad \sigma\left(\frac{t}{a^m}\right) = \sigma\left(\frac{t'}{a^m}\right).$$

Ceci montre que la transformation τ de C n'est pas biunivoque.

Le cas où la transformation τ est biunivoque se réalise dans l'exemple suivant bien simple. Considérons la transformation T définie par

$$\begin{cases} x_1 = x^2, \\ y_1 = 2y. \end{cases}$$

Le point $P_0 = (1, 0)$ est un point double semi-répulsif, où les multiplicateurs de T sont 2 et 2. La courbe C, définie par

$$\begin{cases} x = e^t, \\ y = t, \end{cases}$$

est une courbe invariante de Poincaré, issue de P_0 et associée au multiplicateur 2. En effet, on a $e^{2t} = (e^t)^2$ et $2t = 2t$. L'application σ du t -plan dans l'espace de (x, y) est manifestement biunivoque. Donc, d'après ce que nous venons de montrer, la transformation τ de C est biunivoque.

Le cas où la transformation σ n'est pas biunivoque se réalise dans l'exemple suivant très intéressant. La transformation T, définie par

$$\begin{cases} x_1 = 3x - 4x^3, \\ y_1 = y - 4yx^2 \end{cases}$$

possède la droite $\{x = 0\}$ pour sa courbe de points doubles d'ordre 1. Ses multiplicateurs sont 3 et 1 en tout point $(0, \beta)$ de la droite. La courbe invariante de Poincaré C_β , issue du point $(0, \beta)$ et associée au multiplicateur 3, est unique à l'équivalence près et sera donnée par

$$\begin{cases} x = \sin t, \\ y = \beta \cos t, \end{cases}$$

En effet, les conditions (6) et (7) du numéro précédent seront vérifiées facilement, en vertu des formules bien connues

$$\begin{cases} \sin 3t = 3 \sin t - 4 \sin^3 t, \\ \beta \cos 3t = \beta \cos t - 4 \beta \cos t \sin^2 t. \end{cases}$$

Comme l'application du t -plan dans l'espace de (x, y) est périodique, elle n'est pas biunivoque. Donc la transformation τ_β , restriction de T à C_β , n'est pas biunivoque.

11. COURBES INVARIANTES TRANSCENDANTES. — Dans le premier exemple du numéro précédent, on verra que la courbe invariante de Poincaré

$$\begin{cases} x = e^t, \\ y = t \end{cases}$$

est transcendante. En effet, il est facile à voir que cette courbe possède ses singularités essentielles en tous les points de la courbe à l'infini $\{x = \infty\}$. En général, si une courbe analytique est définie par une fonction entière transcendante $\xi(t)$ et une fonction entière rationnelle non constante $\eta(t)$, la courbe est nécessairement transcendante.

S'il en est ainsi et, de plus, que les fonctions $\xi(t)$ et $\eta(t)$ définissent une courbe invariante de Poincaré, issue d'un point double semi-répulsif (x_0, y_0) et associée à un multiplicateur a ($|a| > 1$), alors le polynôme $\Psi(x, y)$ est un polynôme $\Psi(y)$ en y , indépendant de la variable x , et les polynômes $\Psi(y)$ et $\eta(t)$ se réduisent à des fonctions linéaires entières non constantes; d'une façon plus précise, on a

$$\Psi(x, y) = (1 - a)y_0 + ay$$

et

$$\eta(t) = y_0 + \beta t,$$

où β est une constante non nulle.

En effet, on aura les équations simultanées

$$\begin{cases} \xi(at) = \Phi(\xi(t), \eta(t)), \\ \eta(at) = \Psi(\xi(t), \eta(t)). \end{cases}$$

En écrivant

$$\Psi(x, y) = B_0(y) + B_1(y)x + \dots + B_l(y)x^l,$$

où les coefficients $B_k(y)$ sont des polynômes en y et $B_l(y)$ n'est pas identiquement nul, nous voyons que, si l était au moins égal à l'unité, la fonction $\xi(t)$ vérifierait l'équation algébrique non triviale

$$\eta(at) = B_0(\eta(t)) + B_1(\eta(t))\xi(t) + \dots + B_l(\eta(t))(\xi(t))^l;$$

parce que les coefficients sont des polynomes en t et, $\eta(t)$ étant un polynome non constant, $B_l(\eta(t))$ n'est pas identiquement nul. La fonction entière $\xi(t)$ se réduirait alors à un polynome, ce qui est contre l'hypothèse.

Donc, $\Psi(x, y)$ ne dépend pas de la variable x et peut s'écrire $\Psi(x, y) = \Psi(y)$. Sans diminuer la généralité, nous pouvons supposer que $y_0 = 0$ et qu'on peut écrire

$$\Psi(y) = b_1 y + b_2 y^2 + \dots + b_m y^m$$

et

$$\eta(t) = \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \dots + \beta_n t^n.$$

D'après les hypothèses, on a

$$b_m \neq 0, \quad m \geq 1 \quad \text{et} \quad \beta_n \neq 0, \quad n \geq 1.$$

L'équation $\eta(at) = \Psi(\eta(t))$ sera réécrite

$$\begin{aligned} & \beta_1(at) + \dots + \beta_n(at)^n \\ &= b_1(\beta_1 t + \dots + \beta_n t^n) + \dots + b_m(\beta_1 t + \dots + \beta_n t^n)^m; \end{aligned}$$

d'où m est nécessairement égal à l'unité. D'ailleurs, en tenant compte des inégalités $b_1 \neq 0$, $\beta_n \neq 0$ et $|a| > 1$, on observe que

$$\beta_1 = \dots = \beta_{n-1} = 0 \quad \text{et} \quad b_1 = a^n.$$

Le polynome $\Psi(y)$ s'étant déjà réduit à

$$\Psi(y) = b_1 y,$$

b_1 est un multiplicateur de T en tout point double d'ordre 1. Des conditions $b_1 \neq a^n$ ($n = 2, 3, \dots$) pour l'existence des fonctions de Poincaré, il résulte que $n = 1$. En revenant au cas général où y_0 n'est pas nécessairement nul, nous aurons tout de suite achevé la démonstration.

12. COURBES INVARIANTES ALGÈBRIQUES. — Il peut se faire qu'une courbe invariante de Poincaré soit algébrique. Dans le deuxième exemple du n° 10, la courbe C_β , définie par

$$\begin{cases} x = \sin t, \\ y = \beta \cos t, \end{cases}$$

est une courbe algébrique :

$$\beta^2 x^2 + y^2 = \beta^2.$$

Si une courbe invariante de Poincaré C est algébrique, son genre est au plus égal à l'unité. C'est un théorème dû à É. Picard (⁴). Dans notre cas où les fonctions de définition $\Phi(x, y)$ et $\Psi(x, y)$ sont des polynomes, le cas où C est une courbe elliptique sera exclu. En effet, É. Picard a montré (⁴) que les fonctions transcendentes de Poincaré $\xi(t)$ et $\eta(t)$ sont doublement périodiques quand le genre de C est égal à 1. Or, dans notre

cas, elles sont des fonctions entières. Elles se réduiraient à des constantes, ce qui est contre l'hypothèse.

Supposons encore que la courbe invariante de Poincaré C est algébrique. D'après ce qui précède, son genre est égal à 0. On représente alors la courbe C par un paramètre z :

$$\begin{cases} x = f(z), \\ y = g(z), \end{cases}$$

où $f(z)$ et $g(z)$ sont des fonctions rationnelles de z qui donnent une correspondance birationnelle entre la z -sphère et la courbe C . Par l'intermédiaire de cette correspondance, une transformation rationnelle R de la z -sphère :

$$z_1 = R(z)$$

correspond à la transformation τ de C , τ étant la restriction de T à C . On a alors

$$\begin{cases} f(R(z)) = \Phi(f(z), g(z)), \\ g(R(z)) = \Psi(f(z), g(z)). \end{cases}$$

A cette transformation rationnelle R d'une variable, nous pouvons appliquer tous les résultats classiques sur l'itération, obtenus notamment par G. Julia ⁽¹⁾ et P. Fatou ⁽⁵⁾. Si z' est un point de Julia de R , alors le point correspondant $(f(z'), g(z'))$ est un point de Julia de τ donc celui de T .

Il peut arriver que R soit birationnelle, c'est-à-dire que $R(z)$ soit une fonction linéaire. Nous allons montrer que, s'il en est ainsi, alors les fonctions $\xi(t)$ et $\eta(t)$ se réduisent toutes deux à des polynômes et elles donnent une représentation biunivoque de la courbe algébrique C par le paramètre t ; et que, par une homographie $z = \theta(t)$ convenable, on a

$$\begin{aligned} f(\theta(t)) &= \xi(t), \\ g(\theta(t)) &= \eta(t), \end{aligned}$$

et

$$R(\theta(t)) = \theta(at).$$

En effet, une homographie convenable de la z -sphère réduit $R(z)$ à l'une des deux formes suivantes :

$$R(z) = \alpha z \quad (|\alpha| \geq 1) \quad \text{ou} \quad R(z) = z + \beta \quad (\beta \neq 0).$$

Le point du z -plan, représentant le point $P_0 = (x_0, y_0)$, d'où C est issue, est un point double répulsif de R . Or, la transformation de la deuxième forme n'a pas de point double répulsif. La deuxième forme est ainsi exclue. Dans la première forme, l'origine doit être le seul point double répulsif de R et le multiplicateur α de R à l'origine doit coïncider avec le multi-

plicateur a de τ en P_0 , a étant le multiplicateur auquel C est associée. On a donc

$$f(0) = x_0, \quad g(0) = y_0, \quad R(z) = az.$$

En outre, en imaginant le plan tangent à C en P_0 , on voit

$$\frac{df(0)}{dz} : \frac{dg(0)}{dz} = \frac{d\zeta(0)}{dt} : \frac{d\eta(0)}{dt} \neq 0 : 0.$$

D'autre part,

$$\begin{cases} f(R(z)) = f(az) = \Phi(f(z), g(z)), \\ g(R(z)) = g(az) = \Psi(f(z), g(z)). \end{cases}$$

D'après l'unicité des fonctions de Poincaré, il existe une constante $k \neq 0$ telle que

$$\begin{cases} f(kt) = \zeta(t), \\ g(kt) = \eta(t); \end{cases}$$

d'où l'on tirera immédiatement les énoncés voulus.

Dans le premier exemple du n° 10 :

$$\begin{cases} x_1 = x^2, \\ y_1 = 2y, \end{cases}$$

la droite $\{x = 0\}$ est la courbe invariante de Poincaré, issue de l'origine et associée au multiplicateur 2. La transformation τ , restriction de T à cette droite, est birationnelle, donc R l'est aussi.

Il peut arriver que la transformation R ne soit pas birationnelle, ce que nous allons voir dans le deuxième exemple du n° 10 :

$$\begin{cases} x_1 = 3x - 4x^3, \\ y_1 = y - 4yx^2. \end{cases}$$

Pour la courbe invariante $C_\beta : x^2 + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ ($\beta \neq 0$), choisissons les fonctions rationnelles

$$\begin{cases} x = f(z) = \frac{i}{2} \left(z - \frac{1}{z} \right), \\ y = g(z) = \frac{\beta}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right), \end{cases}$$

par lesquelles, on voit facilement, la z -sphère correspond birationnellement à la courbe C_β . Considérons la transformation

$$z_1 = R(z) = z^3,$$

qui correspond à la transformation τ_β de C_β . Pour le voir, il suffit de vérifier

$$\begin{cases} f(z^3) = 3f(z) - 4(f(z))^3, \\ g(z^3) = g(z) - 4g(z)(f(z))^2, \end{cases}$$

ce qui est tout à fait immédiat. $R(z) = z^3$ n'est pas birationnelle.

13. FONCTIONS TRANSCENDANTES DE PICARD. — É. Picard a généralisé les fonctions transcendentes considérées par H. Poincaré (⁴). Au cas de deux variables, le résultat de É. Picard sera énoncé sous la forme suivante. Soit T une transformation rationnelle non dégénérée

$$(T) \quad \begin{cases} x_1 = \Phi(x, y), \\ y_1 = \Psi(x, y). \end{cases}$$

Supposons que les fonctions $\Phi(x, y)$ et $\Psi(x, y)$ sont holomorphes en un point $P_0 = (x_0, y_0)$ à distance finie et que le point P_0 est un point double répulsif de T . Soient a et b les multiplicateurs de T en P_0 :

$$|a| > 1 \quad \text{et} \quad |b| > 1.$$

Si

$$a \neq b, \quad a^n \neq b \quad \text{et} \quad b^n \neq a \quad (n = 2, 3, \dots),$$

alors on peut trouver deux fonctions

$$\begin{cases} x = \varphi(u, \nu), \\ y = \psi(u, \nu), \end{cases}$$

uniformes et méromorphes dans tout l'espace de deux variables complexes u et ν , et holomorphes à l'origine $u = 0, \nu = 0$, de manière que les conditions suivantes soient satisfaites :

$$(8) \quad \begin{cases} \varphi(au, b\nu) = \Phi(\varphi(u, \nu), \psi(u, \nu)), \\ \psi(au, b\nu) = \Psi(\varphi(u, \nu), \psi(u, \nu)) \end{cases}$$

$$(9) \quad \begin{cases} \varphi(0, 0) = x_0, \quad \psi(0, 0) = y_0, \\ \left(\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, \nu)} \right)_{(0,0)} \neq 0. \end{cases}$$

D'ailleurs, dans notre cas où les fonctions $\Phi(x, y)$ et $\Psi(x, y)$ sont des polynômes en x et y , les fonctions $\varphi(u, \nu)$ et $\psi(u, \nu)$ sont des fonctions entières.

Bornons-nous toujours à notre cas. Considérons dans l'espace des variables u et ν la transformation T_0 définie par

$$(T_0) \quad \begin{cases} u_1 = au, \\ \nu_1 = b\nu. \end{cases}$$

Soit S l'application holomorphe de l'espace de (u, ν) dans l'espace de (x, y) , définie par

$$(S) \quad \begin{cases} x = \varphi(u, \nu), \\ y = \psi(u, \nu). \end{cases}$$

Grâce aux conditions (8), T_0 correspond à T , par l'intermédiaire de S :

$$S \circ T_0 = T \circ S.$$

Nous avons trouvé dans le n° 7 un voisinage Δ de P_0 tel que le conséquent $T(\Delta)$ contienne Δ à son intérieur complet. Alors, les conséquents successifs $T(\Delta)$, $T^2(\Delta)$, $T^3(\Delta)$, ... s'agrandissent de plus en plus. Nous y avons posé la question : Quel terrain finit-il par être recouvert de ces conséquents ? L'image réciproque $\Delta_0 = S^{-1}(\Delta)$ est un voisinage de l'origine dans l'espace de (u, v) . Les conséquents successifs $T_0(\Delta_0)$, $T_0^2(\Delta_0)$, $T_0^3(\Delta_0)$, ... de Δ_0 par T_0 s'agrandissent alors indéfiniment et finissent par recouvrir tout l'espace de (u, v) . La question revient à demander quelle est l'image par S de tout l'espace de (u, v) . Quant à ce problème, rappelons un principe très intéressant, dû à P. Fatou ⁽⁹⁾ et repris par L. Bieberbach ⁽¹⁰⁾ : Si la transformation T est birationnelle et qu'elle admet un point double répulsif P'_0 , autre que P_0 , alors l'image par S de tout l'espace de (u, v) ne rencontre pas un certain voisinage de P'_0 . Mais, il nous semble que l'hypothèse que T est birationnelle soit essentielle dans le principe. Ici, rappelons encore un résultat dû à G. Julia ⁽¹⁾. Dans le cas d'une variable, tout point du plan sauf peut-être au plus deux points exceptionnels est recouvert des conséquents d'un voisinage d'un point double répulsif, quelque petit que soit le voisinage. Ceci nous amène à nous demander encore : Lorsque T n'est pas birationnelle, tout point de l'espace de (x, y) , sauf sur un nombre fini de courbes analytiques, est-il l'image par S d'un point de l'espace de (u, v) ? Malheureusement, nous ignorons la réponse.

Maintenant, en posant $v = 0$, récrivons (8) :

$$\begin{cases} \varphi(au, 0) = \Phi(\varphi(u, 0), \psi(u, 0)), \\ \psi(au, 0) = \Psi(\varphi(u, 0), \psi(u, 0)). \end{cases}$$

Ceci montre que les fonctions $\varphi(u, 0)$ et $\psi(u, 0)$ forment un couple de fonctions de Poincaré, attaché au point double P_0 et associé au multiplicateur a . Il en est de même pour les $\varphi(0, v)$ et $\psi(0, v)$, qui sont associées au multiplicateur b . On n'obtient donc aucune nouvelle courbe invariante. Nous indiquons qu'en vertu des fonctions de Picard, la transformation T devient plus visible; en effet, la transformation correspondant T_0 envoie la courbe $\{u = u_0\}$ ($u_0 = \text{Cte}$) en $\{u = au_0\}$ et $\{v = v_0\}$ en $\{v = bv_0\}$. Pour déterminer l'ensemble de Julia de certaines transformations particulières, nous utiliserons plus tard dans le n° 18 les fonctions de Picard.

Terminons l'étude sur les courbes analytiques invariantes en faisant une remarque. Il peut se faire qu'il existe une courbe analytique invariante

⁽⁹⁾ P. FATOU, *Sur les fonctions méromorphes de deux variables* (C. R., Acad. Sc., t. 175, 1922, p. 862); *Sur certaines fonctions uniformes de deux variables* (Ibid., p. 1030).

⁽¹⁰⁾ L. BIEBERBACH, *Beispiel zweier ganzer Funktionen zweier komplexer Variablen, welche eine schlichte volumtreue Abbildung des R_4 auf einen Teil seiner selbst vermitteln* (Sitzungsberichte, Berlin, 1933, p. 476).

qui ne peut être ni une composante des courbes de points doubles ni une courbe invariante de Poincaré. Par exemple, soit T la transformation définie par

$$\begin{cases} x_1 = x^2, \\ y_1 = by, \end{cases}$$

où b est une constante telle que $b = e^{2\pi i\theta}$, θ étant réel et incommensurable. Alors, la droite $\{x = 1\}$ est une courbe invariante, qui n'est aucune composante des courbes de points doubles de n'importe quel ordre. Aucun de ses points n'est un point double répulsif de la restriction τ de T sur elle. Donc, elle n'est jamais une courbe invariante de Poincaré. Dans un tel cas, si une telle courbe C est algébrique et de genre 0, la restriction τ de T à C est birationnelle et, en représentant C par un paramètre z , on peut exprimer τ sous l'une des deux formes suivantes :

$$z_1 = bz \quad (b = e^{2\pi i\theta}, \theta \text{ étant réel et incommensurable})$$

ou

$$z_1 = z + \beta \quad (\beta \text{ étant une constante non nulle}).$$

Car, sinon, ou bien C serait une composante de la courbe de points doubles d'un certain ordre ou bien τ admettrait au moins un point double répulsif.

En remplaçant T par son itérée T^n , on pourra appliquer aux groupes circulaires semi-répulsifs d'ordre n tout ce que nous avons fait depuis le n° 9.

14. ENSEMBLE DE JULIA. — Dès maintenant, nous allons étudier l'ensemble de Julia \mathcal{E} de la transformation rationnelle entière T . C'est le but principal du présent Mémoire. L'ensemble \mathcal{E} est, par définition, l'ensemble des points, à distance finie, auxquels au moins une des deux suites $\{\Phi_n(x, y)\}$ et $\{\Psi_n(x, y)\}$ cesse d'être normale. Il est un ensemble fermé dans l'espace fini et il satisfait au théorème de continuité.

Commençons par considérer l'ensemble E formé des points doubles semi-répulsifs de tous les ordres. Un point (x, y) à distance finie appartient à E si et seulement si, pour un certain ordre $n \geq 1$, les équations simultanées

$$\begin{cases} x - \Phi_n(x, y) = 0, \\ y - \Psi_n(x, y) = 0 \end{cases}$$

sont remplies et qu'au moins un des deux multiplicateurs de la $n^{\text{ième}}$ itérée T^n en ce point double de T^n est plus grand que l'unité en module. Nous avons déjà vu que l'ensemble E est contenu dans l'ensemble de Julia \mathcal{E} . Donc, l'adhérence \bar{E} de E fait partie de \mathcal{E} .

Au cas d'une variable, G. Julia a observé que l'ensemble de Julia coïncide exactement avec l'adhérence de l'ensemble formé des points doubles répulsifs de tous les ordres, à moins que la transformation ne soit bira-

tionnelle (¹). Au contraire, il peut se faire au cas de deux variables que \bar{E} ne coïncide pas avec \mathcal{E} .

Par exemple, envisageons la transformation suivante :

$$\begin{cases} x_1 = ax, \\ y_1 = y^2, \end{cases}$$

où a est une constante plus grande que l'unité en module. Sa $n^{\text{ième}}$ itérée s'exprime par

$$\begin{cases} x_n = a^n x, \\ y_n = y^{2^n}. \end{cases}$$

L'origine est un point double semi-répulsif où les multiplicateurs sont a et 0 . Les points doubles de tous les ordres, distincts de l'origine, sont tous répulsifs et ils forment un ensemble dense sur la circonférence $\Gamma = \{x = 0, |y| = 1\}$. L'ensemble fermé \bar{E} se compose donc de l'origine et de ce cercle Γ . L'origine est donc un point isolé de \bar{E} . Or, un ensemble satisfaisant au théorème de continuité ne peut admettre aucun point isolé. Chez cette transformation, \bar{E} ne coïncide pas avec \mathcal{E} . En réalité, l'ensemble de Julia de cette transformation se compose de l'hyper-surface $\{|y| = 1\}$ et de la droite complexe $L = \{x = 0\}$.

Au cas d'une variable, G. Julia a montré que l'ensemble de Julia jouit de la propriété d'homogénéité : S'il est parfait discontinu au voisinage d'un de ses points, il l'est partout; S'il est continu linéaire au voisinage d'un de ses points, il l'est partout; Il n'occupe aucune partie superficielle à moins qu'il ne coïncide avec la sphère de Riemann tout entière (¹). Mais, pour la transformation donnée ci-dessus, l'hyper-surface $\{|y| = 1\}$ a trois dimensions et le plan $\{x = 0\}$ a deux dimensions. Au cas de deux variables, l'ensemble de Julia ne jouit pas nécessairement de la propriété d'homogénéité.

15. Considérons encore la transformation précédente :

$$\begin{cases} x_1 = ax, \\ y_1 = y^2, \end{cases}$$

et regardons le voisinage de l'origine. La droite $L^* = \{y = 0\}$ est évidemment la seule courbe invariante de Poincaré issue de l'origine. Elle est associée au multiplicateur a . L'origine est un point double répulsif de la restriction τ^* de la transformation T à la droite L^* . Dans une autre direction, il existe une courbe invariante passant par l'origine. C'est la droite $L = \{x = 0\}$. La restriction τ de T à L admet l'origine pour son point double attractif, vers lequel le domaine de convergence total est l'intérieur $L_0 = \{x = 0, |y| < 1\}$ du cercle Γ sur L . Les conséquents

successifs de tout point de L_0 convergent vers l'origine, de la manière uniforme à l'intérieur complet de L_0 .

Considérons un point (x, y) suffisamment voisin de L_0 , mais n'appartenant pas à L_0 ; c'est-à-dire, $x \neq 0$, $|y| < 1$ et $|x|$ est suffisamment petit. Ses conséquents successifs s'approchent de la droite L^* indéfiniment et ils s'éloignent de la droite L indéfiniment. Ceci montre que tout point de L_0 ne peut être un point où la suite $\{T^n\}$ est normale, bien que la suite $\{\tau^n\}$ soit normale en tout point de L_0 . Car, s'il l'était, une transformation limite de la suite $\{T^n\}$ envierait un voisinage d'un point de L_0 dans un voisinage de l'origine. C'est impossible.

Ce phénomène nous conduit à la considération suivante. Revenons à la transformation générale T . Soit V un ensemble quelconque dans l'espace fini. Considérons ses conséquents successifs $T(V)$, $T^2(V)$, $T^3(V)$, ... et l'ensemble limite $D(V)$ de la suite d'ensembles $\{T^n(V)\}$ dans l'espace produit de la x -sphère et de la y -sphère. Un point, à distance finie ou à l'infini, appartient à $D(V)$ si et seulement si tout voisinage de ce point rencontre une infinité de $T^n(V)$. Si $V' \subset V$ sont deux ensembles, on a directement $D(V') \subset D(V)$. Pour un point quelconque P , à distance finie, considéré comme ensemble formé d'un seul point P , on aura $D(P)$. D'autre part, formons l'intersection D_P de tous les $D(V)$, V parcourant le système complet de tous les voisinages de P . On a *a priori* $D(P) \subset D_P$. Ils sont tous deux compacts.

Si $D(P) \neq D_P$, alors P est un point de Julia de T .

En effet, soit Q un point quelconque de D_P . On peut choisir une suite infinie de points $\{P^{(v)}\}$ tendant vers P et une suite infinie d'itérées $\{T^{n_v}\}$ ($n_1 < n_2 < n_3 < \dots$), de manière que la suite de points $\{T^{n_v}(P^{(v)})\}$ tende vers Q . Si la suite $\{T^n\}$ est normale en P , on peut extraire de la suite $\{T^{n_v}\}$ une suite nouvelle convergeant uniformément dans un voisinage de P . Q est alors un point d'accumulation des conséquents du point P . Le point Q appartient forcément à $D(P)$, ce qui achève la démonstration. Nous avons ainsi obtenu un critère d'un point de Julia.

Dans l'exemple précédent, envisageons un point $P = (0, y)$ avec $|y| < 1$. On voit que $D(P)$ consiste en le seul point $(0, 0)$ et que D_P est la droite complexe $L^* = \{y = 0\}$, le point à l'infini $(\infty, 0)$ y compris. Donc, P est un point de Julia de T .

16. D'une façon plus générale, soit P_0 un point double semi-répulsif de la transformation générale T . Soient a et b les deux multiplicateurs de T en P_0 . Supposons que $|a| > 1$ et $|b| < 1$, et, de plus, qu'il existe une courbe analytique invariante C , issue de P_0 et régulière en P_0 , telle que la restriction τ de T à C admette P_0 pour son point attractif, c'est-à-

dire qu'on puisse trouver un voisinage U de P_0 sur C dont les conséquents successifs tendent uniformément vers P_0 . Soit C_0 l'ensemble des points de C , dont les conséquents successifs tendent vers P_0 . Dans ces hypothèses, nous allons montrer que tout point de C_0 est un point de Julia de T .

Remarquons d'abord que le vecteur tangent à C en P_0 est un vecteur propre, associé à la racine caractéristique b , de la transformation induite de T sur l'espace tangent en P_0 . Donc, ce vecteur est transversal au vecteur tangent à la courbe invariante de Poincaré C^* , issue de P_0 et associée au multiplicateur a . Remarquons ensuite que C_0 est une partie ouverte de C , contenant aussi P_0 que le voisinage U indiqué plus haut.

En tenant compte de ce que tous les antécédents d'un point de Julia sont des points de Julia, on voit que, pour démontrer l'énoncé, il suffit de trouver un voisinage U_0 de P_0 sur C_0 tel que tout point de U_0 soit un point de Julia.

D'après les hypothèses et les remarques que nous venons de faire, nous pouvons trouver une transformation analytique birégulière des coordonnées dans un voisinage Δ de P_0 , telle que P_0 soit l'origine par rapport aux nouvelles coordonnées X et Y ; que la courbe invariante C soit définie par $X = 0$; et que la courbe invariante de Poincaré C^* soit définie par $Y = 0$. Alors, les courbes C et C^* étant invariantes, la transformation T peut s'écrire sous la forme

$$(10) \quad \begin{cases} X_1 = X(a + \Phi^*(X, Y)), \\ Y_1 = Y(b + \Psi^*(X, Y)), \end{cases}$$

où $\Phi^*(X, Y)$ et $\Psi^*(X, Y)$ sont des fonctions holomorphes dans Δ , s'annulant en P_0 toutes les deux.

Si la fonction $b + \Psi^*(0, Y)$ s'annule identiquement sur la courbe $C \cap \Delta$, $C \cap \Delta$ est envoyé en P_0 par T . P_0 étant un point de Julia, tout point de C_0 est un point de Julia; d'où, l'énoncé. Nous supposons donc désormais que $b + \Psi^*(0, Y)$ ne s'annule pas identiquement sur $C \cap \Delta$. Remarquons qu'on a, sur $C \cap \Delta$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial X_1(0, Y)}{\partial X} &= a + \Phi^*(0, Y), & \frac{\partial X_1(0, Y)}{\partial Y} &= 0, \\ \frac{\partial Y_1(0, Y)}{\partial Y} &= b + \Psi^*(0, Y) + Y \frac{\partial \Psi^*(0, Y)}{\partial Y} \end{aligned}$$

et, en écrivant

$$\Psi^*(0, Y) = b_1 Y + b_2 Y^2 + \dots,$$

on a

$$\frac{\partial Y_1(0, Y)}{\partial Y} = b + 2b_1 Y + 3b_2 Y^2 + \dots$$

Soit $\Delta(\rho)$ un polycylindre ouvert autour de P_0 de rayon $\rho > 0$ par rapport aux coordonnées X et Y :

$$(\Delta(\rho)) \quad |X| < \rho, \quad |Y| < \rho.$$

En tenant compte des remarques faites plus haut, on peut trouver un nombre positif $r > 0$ assez petit et un nombre positif M assez grand, de manière qu'on ait

(i) $\Delta(r)$ soit complètement intérieur à Δ ;

(ii) si $\rho < r$, $|X| \leq \rho$ et $|Y| \leq \rho$, alors

$$|\Phi^*(X, Y)| \leq \rho M,$$

$$|\Psi^*(X, Y)| \leq \rho M;$$

(iii)

$$\lambda = |a| - rM > 1,$$

$$\mu = |b| + rM < 1;$$

(iv) $\frac{\partial X_1}{\partial X}$ ne s'annule jamais sur $C \cap \Delta(r)$;

(v) $\frac{\partial Y_1}{\partial Y}$ ne s'annule sur $C \cap \Delta(r)$ qu'en P_0 .

Posons

$$\lambda' = |a| + rM.$$

Les conditions (i), (ii) et (iii) impliquent que, si les coordonnées X et Y d'un point P satisfont à

$$|X| < \frac{r}{\lambda'} \quad \text{et} \quad |Y| < r,$$

le conséquent $T(P)$ de P appartient à $\Delta(r)$ et les coordonnées X_1 et Y_1 de $T(P)$ satisfont à

$$(11) \quad |X_1| \geq \lambda |X| \quad \text{et} \quad |Y_1| \leq \mu |Y|.$$

Donc, on a $C \cap \Delta(r) \subset C_0$. Les conditions (iv) et (v) impliquent que le jacobien de la transformation T ne s'annule en aucun point de $C \cap \Delta(r)$, distinct de l'origine P_0 . Supposons, par contre, qu'une suite partielle infinie $\{T^{n_\nu}\}$ ($n_1 < n_2 < n_3 < \dots$) converge uniformément vers une transformation T^* dans un voisinage δ d'un point Q de $C \cap \Delta(r)$. Comme les conséquents successifs de Q convergent vers le point double P_0 , T^* est holomorphe dans δ et T^* applique Q en P_0 . En remplaçant, au besoin, δ par un plus petit voisinage de Q , on peut supposer que T^* envoie δ dans $\Delta\left(\frac{r}{4}\right)$ et qu'à partir d'un certain ordre n_{ν_0} , T^{n_ν} envoie δ dans $\Delta\left(\frac{r}{2}\right)$.

Les conséquents successifs de Q étant évidemment différents de l'origine P_0 , le jacobien de toute transformation itérée T^{n_ν} ne réduit pas à zéro en Q . Donc, il existe un voisinage δ^* de $T^{n_{\nu_0}}(Q)$ de la forme

$$(\delta^*) \quad |X| \leq \varepsilon, \quad |Y - Y^*| \leq \varepsilon \quad (\varepsilon > 0),$$

tel que l'image de δ par T^{n_ν} contienne δ^* , où $(0, Y^*)$ sont les coordonnées de $T^{n_{\nu_0}}(Q)$. Prenons un certain ordre $n_\nu > n_{\nu_0}$ tel que $\varepsilon \lambda^{n_\nu - n_{\nu_0}}$ dépasse $\frac{r}{2}$.

Posons $m = n_v - n_{v_0}$ et choisissons un nombre positif ε_0 ($0 < \varepsilon_0 < \varepsilon$) assez petit pour que $\varepsilon_0 \lambda'^m$ soit inférieur à r . Considérons un polycylindre fermé δ_ρ^* :

$$(\delta_\rho^*) \quad |X| \leq \rho, \quad |Y - Y^*| \leq \varepsilon,$$

et agrandissons ρ de plus en plus continûment à partir de ε_0 . En tenant compte des inégalités (11) et en faisant attention au domaine où la forme (10) est valide, nous pouvons trouver un certain rayon ρ tel que $\varepsilon_0 \leq \rho < \varepsilon$ et que $T^m(\delta_\rho^*)$ ne soit pas contenu dans $\Delta\left(\frac{r}{2}\right)$ mais il soit contenu dans $\Delta(r)$. C'est impossible, parce que toute $T^{n_v}(n_v \geq n_{v_0})$ envoie δ dans $\Delta\left(\frac{r}{2}\right)$.

C. Q. F. D.

17. Lorsqu'il y a deux courbes invariantes de Poincaré issues d'un point double répulsif, il peut arriver que l'une d'elles soit contenue dans l'ensemble de Julia \mathcal{E} et l'autre ne soit pas contenue dans \mathcal{E} ; ou bien il peut arriver que toutes les deux soient contenues dans \mathcal{E} .

La première possibilité a lieu dans l'exemple suivant :

$$\begin{cases} x_1 = axy^2, \\ y_1 = y^2, \end{cases}$$

avec une constante a telle que $|a| > 1$. Le point $(0, 1)$ est un point double répulsif, où les multiplicateurs sont a et 2 . Deux droites complexes $\{y = 1\}$ et $\{x = 0\}$ sont les courbes invariantes de Poincaré, issues de $(0, 1)$ et associées respectivement aux multiplicateurs a et 2 . Sur la droite $\{x = 0\}$, tout point de la partie $\{x = 0, |y| < 1\}$ est un point où la suite des itérées successives de la transformation est normale. En effet, pour le voir, il suffira de former

$$\begin{cases} x_n = a^n x y^{2+2^2+\dots+2^n}, \\ y_n = y^{2^n}. \end{cases}$$

Le domaine $\{x : \text{fini}, |y| < 1\}$ est visiblement le domaine de convergence immédiat vers le point double attractif $(0, 0)$ de la transformation. La droite $\{y = 1\}$ est évidemment contenue dans l'ensemble de Julia. D'ailleurs, sur la circonférence $\{x = 0, |y| = 1\}$ se trouvent un ensemble dense de points doubles répulsifs d'ordres élevés, de chacun desquels sort une courbe invariante de Poincaré de la forme $\{y = e^{i\theta}\}$ (θ : réel). L'adhérence de la réunion de ces courbes invariantes est l'hypersurface $\{|y| = 1\}$ à trois dimensions. Cette hypersurface forme, avec

la partie $\{x=0, |y|>1\}$ de la courbe invariante de Poincaré $\{x=0\}$ issue de $(0, 1)$, l'ensemble de Julia de la transformation.

Pour cet exemple, nous nous proposons de considérer les points à l'infini. Il y a deux points d'indétermination $(0, \infty)$ et $(\infty, 0)$. En tout point sur la courbe $\{y=\infty\}$, sauf au point $(0, \infty)$, la suite des itérées successives de la transformation est normale. De l'autre côté, la suite est aussi normale en tout point de la partie $\{x=\infty, |y|>1\}$ de la courbe $\{x=\infty\}$. En réalité, le domaine $\{x \neq 0, |y|>1\}$, où x et y peuvent prendre la valeur infinie ∞ , est le domaine de convergence immédiat vers le point double attractif (∞, ∞) . La partie $\{x=\infty, |y|\leq 1\}$ de la courbe $\{x=\infty\}$ peut être considérée comme partie de l'ensemble de Julia complété.

La deuxième possibilité, que nous avons indiquée au début de ce numéro, aura lieu dans la transformation particulière T de la forme suivante :

$$\begin{cases} x_1 = \Phi(x), \\ y_1 = \Psi(y), \end{cases}$$

où $\Phi(x)$ et $\Psi(y)$ sont des fonctions rationnelles de degré ≥ 2 respectivement en x et en y . Pour la transformation de cette forme, il n'est pas nécessaire de supposer que les fonctions rationnelles $\Phi(x)$ et $\Psi(y)$ soient entières. La transformation ne possède aucun point d'indétermination. Il n'y aura non plus de raison à ce qu'on exclut de la considération les points à l'infini.

Soient T_x et T_y les transformations, respectivement définies par $\Phi(x)$ et $\Psi(y)$, de la x -sphère et de la y -sphère. Si x_0 est un point double répulsif d'ordre m de T_x et que y_0 est un point double répulsif d'ordre n de T_y , alors le point (x_0, y_0) est manifestement un point double répulsif d'ordre $\frac{mn}{(m, n)}$ de T. Les courbes $\{y=y_0\}$ et $\{x=x_0\}$ sont deux courbes invariantes de Poincaré issues de (x_0, y_0) . Évidemment, tous les points de ces courbes sont des points de Julia. Soit Ω_x le domaine dans la x -sphère, formé des points auxquels la suite des itérées successives de T_x est normale et soit Ω_y celui dans la y -sphère pour la suite $\{T_y^n\}$. Il est tout à fait facile de voir que le domaine des points où la suite $\{T^n\}$ est normale est le domaine produit $\Omega_x \times \Omega_y$. D'après les résultats de G. Julia ⁽¹⁾, l'ensemble des points doubles répulsifs, de tous les ordres, d'une transformation rationnelle non birationnelle d'une variable est une partie dense dans l'ensemble de Julia. Donc, nous pouvons dire que l'ensemble de Julia de la présente transformation T est l'adhérence de la réunion des courbes invariantes de Poincaré, issues de tous les points doubles répulsifs de T, de tous les ordres.

18. Dans certains cas, nous pouvons étudier l'itération à l'aide des fonctions de Picard.

Soit $P_0 = (x_0, y_0)$ un point double répulsif. Supposons que les multiplicateurs a et b en P_0 , étant tous deux plus grands que l'unité en module, vérifient les conditions supplémentaires :

$$a \neq b, \quad a^n \neq b \quad \text{et} \quad b^n \neq a \quad (n = 2, 3, \dots).$$

En conservant les notations du n° 13, on aura une application holomorphe S , de l'espace de (u, v) dans l'espace de (x, y) , définie par deux fonctions de Picard :

$$(S) \quad \begin{cases} x = \varphi(u, v), \\ y = \psi(u, v). \end{cases}$$

Considérons dans l'espace de (u, v) deux suites de fonctions entières $\{\varphi_n(u, v)\}$ et $\{\psi_n(u, v)\}$, définies par

$$\begin{cases} \varphi_n(u, v) = \varphi(a^n u, b^n v), \\ \psi_n(u, v) = \psi(a^n u, b^n v), \end{cases}$$

pour $n = 1, 2, 3, \dots$. Ces deux suites correspondent par l'intermédiaire de S respectivement aux suites $\{\Phi_n(x, y)\}$ et $\{\Psi_n(x, y)\}$:

$$(12) \quad \begin{cases} \varphi_n(u, v) = \Phi_n(\varphi(u, v), \psi(u, v)), \\ \psi_n(u, v) = \Psi_n(\varphi(u, v), \psi(u, v)). \end{cases}$$

En effet, les formules pour $n = 1$ ne sont pas autre chose que les relations (8) du n° 13. En supposant que les équations (12) soient vraies pour n ($n \geq 1$) et en utilisant les relations (8) et les formules obtenues à la fin du n° 3, on aura

$$\begin{aligned} \varphi_{n+1}(u, v) &= \varphi(a^{n+1}u, b^{n+1}v) \\ &= \Phi(\varphi(a^n u, b^n v), \psi(a^n u, b^n v)) \\ &= \Phi(\varphi_n(u, v), \psi_n(u, v)) \\ &= \Phi(\Phi_n(\varphi(u, v), \psi(u, v)), \Psi_n(\varphi(u, v), \psi(u, v))) \\ &= \Phi_{n+1}(\varphi(u, v), \psi(u, v)). \end{aligned}$$

Il en est de même pour la seconde formule.

Grâce à ces formules (12), nous pouvons appliquer le lemme établi dans le n° 3. Soit Q un point de l'espace de (u, v) et soit $P = S(Q)$ son image par S . *Le point P appartient à l'ensemble de Julia & de T si et seulement si au moins une des deux suites $\{\varphi_n(u, v)\}$ et $\{\psi_n(u, v)\}$ cesse d'être normale en Q .*

Donnons un exemple simple. Chez la transformation T définie par

$$\begin{cases} x_1 = x^2 y^3, \\ y_1 = y^3, \end{cases}$$

le point $(1, 1)$ est un point double répulsif, où les multiplicateurs sont 2 et 5. Ces multiplicateurs remplissent les conditions supplémentaires. Les fonctions de Picard seront données par

$$\begin{cases} \varphi(u, v) = e^{u+v}, \\ \psi(u, v) = e^v. \end{cases}$$

En effet, il suffit de vérifier les relations

$$\begin{cases} \varphi(2u, 5v) = e^{2u+5v} = (\varphi(u, v))^2 (\psi(u, v))^3, \\ \psi(2u, 5v) = e^{5v} = (\psi(u, v))^5. \end{cases}$$

La suite $\{\psi_n(u, v)\}$ converge vers l'infini dans le domaine $\{\operatorname{Re}(v) > 0\}$ et vers zéro dans le domaine $\{\operatorname{Re}(v) < 0\}$, d'une façon uniforme à l'intérieur complet de chacun des domaines. Donc, elle ne peut être normale en aucun point de l'hyperplan $\{\operatorname{Re}(v) = 0\}$ à trois dimensions. En tenant compte de

$$\operatorname{Re}(2^n u + 5^n v) = 5^n \left(\left(\frac{2}{5} \right)^n \operatorname{Re}(u) + \operatorname{Re}(v) \right),$$

on voit facilement qu'il en est parfaitement de même pour la suite $\{\varphi_n(u, v)\}$. L'image par S de l'hyperplan $\{\operatorname{Re}(v) = 0\}$ est l'hypersurface $\{x \neq 0, |y| = 1\}$. D'après ce que nous venons de montrer, elle prend part à l'ensemble de Julia \mathcal{E} , donc son adhérence $\{|y| = 1\}$ est contenue dans \mathcal{E} .

Mais, deux droites complexes $\{x = 0\}$ et $\{y = 0\}$ échappent à toute détermination suivant cette méthode. Malgré nous, pour cette transformation tellement simple, il vaut mieux former

$$\begin{cases} x_n = x^{2^n} y^{5^n - 2^n}, \\ y_n = y^{5^n} \end{cases}$$

et évaluer

$$\log |x_n| = 2^n \left(\log |x| + \left(\left(\frac{5}{2} \right)^n - 1 \right) \log |y| \right);$$

qui tend vers $+\infty$ pour $|y| > 1$ et vers $-\infty$ pour $|y| < 1$, quand n augmente indéfiniment.

Alors, on observe, dans l'espace complet, qu'il y a deux points attractifs $(0, 0)$ et (∞, ∞) , vers lesquels les domaines de convergence sont respectivement $\{|x| < +\infty, |y| < 1\}$ et $\{0 < |x| \leq +\infty, 1 < |y| \leq +\infty\}$; que l'ensemble de Julia complété est le complémentaire de ces domaines, c'est-à-dire qu'il se compose de l'hypersurface $\{|x| \leq +\infty, |y| = 1\}$ et deux droites $\{x = 0, 1 \leq |y| \leq +\infty\}$ et $\{x = \infty, |y| \leq 1\}$; que se trouvent deux points d'indétermination $(0, \infty)$ et $(\infty, 0)$.

19. Dans ce numéro et le suivant, nous étudierons les courbes de points doubles. Supposons que la transformation T admette une courbe C de

points doubles d'ordre 1. Elle est, par définition, la réunion des composantes communes des deux courbes algébriques, respectivement définies par $x - \Phi(x, y) = 0$ et $y - \Psi(x, y) = 0$. Nous avons vu dans le n° 8 que l'un des multiplicateurs en chaque point de C est égal à l'unité. Les points de C où le multiplicateur autre que l'unité est plus petit que l'unité en module forment une partie ouverte C_0 de C.

Soit $P_0 \in C_0$ un tel point avec le multiplicateur a ($|a| < 1$). Nous allons montrer que la suite des itérées successives de T converge uniformément dans un voisinage Δ_0 de P_0 vers une transformation holomorphe qui applique le voisinage Δ_0 sur la courbe C_0 .

Nous avons observé dans le n° 8 que la courbe C est régulière en P_0 . On pourra alors trouver une transformation analytique birégulière des coordonnées dans un voisinage Δ de P_0 , de manière que P_0 soit l'origine des nouvelles coordonnées X et Y; que la courbe C soit donnée dans Δ par l'équation $X = 0$; et que la transformation T s'exprime, dans un plus petit voisinage que Δ , sous la forme

$$\begin{cases} X_1 = aX + X\tilde{\Phi}(X, Y), \\ Y_1 = Y + X\tilde{\Psi}(X, Y), \end{cases}$$

où $\tilde{\Phi}(X, Y)$ et $\tilde{\Psi}(X, Y)$ sont des fonctions holomorphes dans Δ , s'annulant toutes les deux à l'origine. Soit $\Delta(\rho)$ le polycylindre autour de P_0 de rayon $\rho > 0$, par rapport aux X et Y :

$$(\Delta(\rho)) \quad |X| < \rho, \quad |Y| < \rho.$$

D'après les hypothèses, il existe deux nombres réels positifs M assez grand et r assez petit, pour que :

- (i) $\Delta(r)$ soit complètement intérieur à Δ ;
- (ii) si $0 < \rho < r$, $|X| \leq \rho$ et $|Y| \leq \rho$, on ait

$$\begin{aligned} |\tilde{\Phi}(X, Y)| &\leq \rho M, \\ |\tilde{\Psi}(X, Y)| &\leq \rho M; \end{aligned}$$

- (iii)

$$\lambda = |a| + rM < 1.$$

Posons

$$\Lambda = \frac{1}{1-\lambda} = 1 + \lambda + \lambda^2 + \dots$$

et

$$r_0 = \frac{r}{\Lambda}.$$

Si $P = (X, Y)$ est un point de $\Delta(r_0)$, alors tous ses conséquents $P_n = (X_n, Y_n)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) appartiennent à $\Delta(r)$ et l'on a

$$\begin{aligned} |X_n| &< \lambda^n \rho, \\ |Y_n| &< (1 + \lambda + \dots + \lambda^n) \rho, \end{aligned}$$

quand P appartient à $\Delta(\rho)$ pour $0 < \rho < r_0$.

En effet, les inégalités sont vraies pour $n = 0$. Supposons qu'elles soient vraies pour n . Alors, on aura

$$\begin{aligned} |X_{n+1}| &= |aX_n + X_n \tilde{\Phi}(X_n, Y_n)| \\ &\leq \lambda^n \rho (|a| + (1 + \lambda + \dots + \lambda^n) \rho M) \\ &< \lambda^n \rho (|a| + \Lambda r_0 M) = \lambda^{n+1} \rho < \Lambda \rho < r, \\ |Y_{n+1}| &= |Y_n + X_n \tilde{\Psi}(X_n, Y_n)| \\ &< (1 + \lambda + \dots + \lambda^n) \rho + \lambda^n \rho (1 + \lambda + \dots + \lambda^n) \rho M \\ &< (1 + \lambda + \dots + \lambda^n) \rho + \lambda^n \rho \Lambda r_0 M \\ &\leq (1 + \lambda + \dots + \lambda^n + \lambda^{n+1}) \rho < \Lambda \rho < r. \end{aligned}$$

Donc, la suite $\{T^n\}$ est normale dans $\Delta_0 = \Delta(r_0)$, parce que $\{X_n\}$ converge uniformément vers zéro et que $\{Y_n\}$ est bornée en module dans Δ_0 . Or, les conséquents successifs de tout point de Δ_0 admettent pour leur point limite un et un seul point de la courbe C de points doubles. La suite $\{T^n\}$ converge uniformément dans Δ_0 . Ceci achève la démonstration de l'énoncé voulu.

L'ensemble des points dont les conséquents successifs admettent un point de C_0 pour leur point limite forme un domaine $\mathcal{O}(C_0)$, non nécessairement connexe, de l'espace. Dans ce domaine, la suite des itérées successives de T converge vers une transformation holomorphe, envoyant ce domaine sur C_0 , d'une façon uniforme à l'intérieur complet du domaine.

Nous allons voir que *tout point frontière de ce domaine est un point de Julia*.

En effet, supposons que la suite $\{T^n\}$ soit normale dans un voisinage connexe U d'un point frontière Q du domaine $\mathcal{O}(C_0)$. Alors, la suite $\{T^n\}$ convergerait vers une transformation limite T^*

$$(T^*) \quad \begin{cases} x_1 = \Phi^*(x, y), \\ y_1 = \Psi^*(x, y), \end{cases}$$

uniformément à l'intérieur de U . Les fonctions limites $\Phi^*(x, y)$ et $\Psi^*(x, y)$ seraient holomorphes dans U et liées par une relation algébrique

$$F(\Phi^*(x, y), \Psi^*(x, y)) = 0,$$

où l'équation $F(x, y) = 0$ est celle définissant la composante irréductible C' de C , sur laquelle se trouverait l'image $T^*(U \cap \mathcal{O}(C_0))$. Le point limite P des conséquents successifs de Q serait situé sur C' . P ne pourrait être un

point de la partie attractive C_0 . Donc, le multiplicateur autre que l'unité, qui est une fonction holomorphe sur C , ne réduit pas à une constante sur C' et il tomberait, au point P , égal à l'unité en module. T^* serait maintenant une application ouverte de U sur C' , donc l'image $T^*(U)$ admettrait un point P' où le multiplicateur, autre que l'unité, est plus grand que l'unité en module. Ceci montre qu'il y aurait un point dans U , dont les conséquents successifs convergent vers le point P' . En imaginant la transformation inverse au voisinage de P' et en y appliquant le raisonnement que nous avons employé tout à l'heure pour T au voisinage de C_0 , on voit que c'est une contradiction.

La frontière du domaine $\mathcal{O}(C_0)$ ne se compose que de points de Julia. Ce fait nous permet d'appeler $\mathcal{O}(C_0)$ *domaine de convergence total vers la partie attractive C_0 de la courbe de points doubles d'ordre 1*.

En remplaçant T par la $n^{\text{ème}}$ itérée T^n , on peut dire la même chose sur la partie attractive de la courbe de points doubles d'ordre n . Nous ne la répétons pas.

La circonstance que nous venons d'étudier peut surgir actuellement chez la transformation

$$\begin{cases} x_1 = x^2, \\ y_1 = x^2 + y. \end{cases}$$

La droite $\{x=0\}$ est la seule courbe de points doubles, en tout point de laquelle le multiplicateur autre que l'unité se réduit à 0. Il est facile à voir que le domaine $\{|x| < 1, |y| \leq +\infty\}$ est le domaine de convergence vers la courbe attractive de points doubles $\{x=0\}$.

Pour cette transformation, le point à l'infini (∞, ∞) est un point d'indétermination et la courbe à l'infini $\{x=\infty\}$ est une courbe dégénérée, envoyée au point d'indétermination (∞, ∞) . D'ailleurs, les conséquents d'une courbe $\{x=\alpha\}$, α étant une constante telle que $|\alpha| > 1$, s'approchent de la courbe $\{x=\infty\}$ indéfiniment. Pour cette raison, l'allure des conséquents successifs d'un point (x, y) , avec $|x| > 1$ devient très compliquée. Afin de la connaître, on aurait besoin des études ultérieures. Nous la laissons de côté pour la présente étude.

20. Soit encore C la courbe de points doubles d'ordre 1 de la transformation T . Les points de C auxquels le multiplicateur autre que l'unité est plus grand que l'unité en module forment une partie ouverte de C . Cette partie fait partie de l'ensemble de Julia de T .

Considérons encore la transformation, déjà citée dans les nos 10 et 12,

$$\begin{cases} x_1 = 3x - 4x^3, \\ y_1 = y - 4yx^2. \end{cases}$$

La droite $C = \{x = 0\}$ est la courbe de points doubles d'ordre 1. En tout point de cette courbe, le multiplicateur autre que l'unité est égal à 3. Nous avons déjà trouvé la seule courbe invariante de Poincaré C_β , issue de chaque point $(0, \beta)$ de C et associée au multiplicateur 3. C_β a été donnée par

$$\begin{cases} x = \xi(t) = \sin t, \\ y = \eta(t, \beta) = \beta \cos t. \end{cases}$$

Nous nous proposons de déterminer l'ensemble de Julia de cette transformation. Pour ceci, considérons, dans l'espace de deux variables t et β , deux suites de fonctions entières $\{\xi_n(t)\}$ et $\{\eta_n(t, \beta)\}$, définies par

$$\begin{cases} \xi_n(t) = \sin 3^n t, \\ \eta_n(t, \beta) = \beta \cos 3^n t, \end{cases}$$

pour $n = 1, 2, 3, \dots$. Tout pareillement à l'équation (12) du n° 18, on obtient, par récurrence sur l'ordre n , les relations

$$\begin{cases} \xi_n(t) = \Phi_n(\xi(t), \eta(t, \beta)), \\ \eta_n(t, \beta) = \Psi_n(\xi(t), \eta(t, \beta)). \end{cases}$$

Soit S' l'application holomorphe, de l'espace de (t, β) dans l'espace de (x, y) , définie par $\xi(t)$ et $\eta(t, \beta)$. Soit Q un point de l'espace de (t, β) et soit $P = S'(Q)$ son image par S' . D'après le lemme établi dans le n° 3, le point P appartient à l'ensemble de Julia \mathcal{E} de T si et seulement si au moins une des deux suites $\{\xi_n(t)\}$ et $\{\eta_n(t, \beta)\}$ cesse d'être normale au point Q .

A l'aide des formules bien connues,

$$\begin{aligned} \sin(\theta + is) &= \frac{e^s + e^{-s}}{2} \sin \theta + i \frac{e^s - e^{-s}}{2} \cos \theta, \\ \cos(\theta + is) &= \frac{e^s + e^{-s}}{2} \cos \theta - i \frac{e^s - e^{-s}}{2} \sin \theta, \end{aligned}$$

θ et s étant réels, on voit qu'en tout point de l'hyperplan $\{\operatorname{Im}(t) = 0\}$, la suite $\{\xi_n(t)\}$ cesse d'être normale; que, dans le domaine $\{\operatorname{Im}(t) \neq 0\}$, elle converge vers ∞ uniformément à l'intérieur complet du domaine; que la suite $\{\eta_n(t, \beta)\}$ cesse d'être normale non seulement sur l'hyperplan $\{\operatorname{Im}(t) = 0\}$, mais aussi sur la droite complexe $\{\beta = 0\}$; et qu'en dehors de ces deux ensembles, cette suite-ci converge vers ∞ uniformément sur tout compact. Un point (x, y) à distance finie échappe à l'image par S' de l'espace de (t, β) si et seulement si $x = \pm 1$, $y \neq 0$. Or, un tel point appartient à l'adhérence de l'image de l'hyperplan $\{\operatorname{Im}(t) = 0\}$. Il appartient à \mathcal{E} . L'ensemble de Julia \mathcal{E} de T se compose donc de l'hyperplan $\{\operatorname{Im}(x) = 0, -1 \leq \operatorname{Re}(x) \leq 1, |y| < +\infty\}$ et de la droite

complexe $\{|x| < +\infty, y = 0\}$. Il n'est pas si difficile de voir que l'ensemble de Julia complété est l'adhérence de l'ensemble de Julia \mathcal{E} dans l'espace complet. Nous omettons ici les détails.

21. ÉTUDE DE L'ITÉRATION D'UNE TRANSFORMATION DU TYPE PARTICULIER :

$$(T) \quad \begin{cases} x_1 = \Phi(x, y), \\ y_1 = y. \end{cases}$$

Les transformations de ce type peuvent être considérées comme transformations d'une variable x à un paramètre y . A ce titre, elles nous intéressent.

Dans le cas général où la transformation à itérer est non birationnelle, l'étude de son itération n'est pas si facile, malgré sa forme tellement simple. Nous esquisserons pour les points de Julia de T un mode de raisonnement qui réduit les possibilités à trois. Tout point de l'ensemble \bar{E} , introduit dans le n° 14, est un point de Julia. C'est la première possibilité, qui a lieu dans toute transformation non birationnelle de ce type. A partir de l'hypothèse qu'un point de Julia n'appartienne pas à \bar{E} , nous arriverons dans la suite à l'une des deux possibilités. Mais, nous n'avons pas réussi jusqu'ici à les exclure ni à donner des exemples qui les réalisent. Donc il reste encore douteux qu'il n'y ait pas de points de Julia en dehors de l'ensemble \bar{E} .

Dans le cas où la transformation à itérer est birationnelle, l'étude est considérablement facile. Dans ce cas, il y a actuellement, en dehors de \bar{E} , des points de Julia, qui forment une hypersurface portant une infinité de courbes invariantes d'ordres infiniment élevés. Mais, les deux possibilités, laissées douteuses ci-dessus, ne se présentent pas. Nous étudierons le cas birationnel dans le dernier numéro.

22. Supposons donc que la transformation T n'est pas birationnelle. Cette hypothèse et celles de permanentes reviennent à dire que $\Phi(x, y)$ est un polynôme dont le degré k en x est plus grand que l'unité. Nous pouvons donc écrire

$$\Phi(x, y) = A(y)x^k + A_1(y)x^{k-1} + \dots + A_k(y),$$

où le coefficient $A(y)$ du terme de degré maximal k ne se réduit pas à la constante nulle. La $n^{\text{ième}}$ itérée de T s'exprimera par

$$(T^n) \quad \begin{cases} x_n = \Phi_n(x, y), \\ y_n = y, \end{cases}$$

où $\Phi_1(x, y) = \Phi(x, y)$ et $\Phi_n(x, y) = \Phi(\Phi_{n-1}(x, y), y)$. Le terme du polynôme $\Phi_n(x, y)$ de degré maximal en x est

$$(A(y))^{1+k+\dots+k^{n-1}} x^{k^n}.$$

Pour la présente transformation T , tout point double d'ordre n appartient à la courbe C_n de points doubles d'ordre n . La courbe algébrique définie par l'équation

$$x - \Phi_n(x, y) = 0$$

est la réunion des courbes C_m , m divisant n .

L'un des multiplicateurs en un point double d'ordre n est égal à 1. L'autre est égal à $\frac{\partial \Phi_n}{\partial x}$. Désignons par C_n^* la partie de C_n , formée des points en lesquels $\left| \frac{\partial \Phi_n}{\partial x} \right|$ est plus grand que 1; et par C_n^0 la partie de C_n , formée des points en lesquels $\left| \frac{\partial \Phi_n}{\partial x} \right|$ est plus petit que 1. Nous avons appelé C_n^* partie répulsive de C_n et C_n^0 partie attractive de C_n . L'ensemble E , introduit dans le n° 14, est, par définition, la réunion des parties répulsives C_n^* ($n = 1, 2, 3, \dots$). L'adhérence \bar{E} fait partie de l'ensemble de Julia \mathcal{E} de T .

Afin d'étudier l'itération à fond, il est indispensable d'envisager les points à l'infini sur la droite à l'infini $C_\infty = \{x = \infty\}$. Mais, l'étude étant locale par rapport au paramètre y , nous excluons de notre considération l'autre droite à l'infini $\{y = \infty\}$.

Pour chaque valeur finie β , la droite $L_\beta = \{|x| \leq +\infty, y = \beta\}$, parallèle à l'axe de x , est une courbe invariante. Désignons par τ_β la transformation restreinte à L_β . La transformation τ_β de la droite L_β peut être considérée comme transformation rationnelle entière d'une variable x . Nous pouvons y appliquer tous les résultats classiques.

Nous appellerons *valeurs exceptionnelles* toutes les racines de l'équation

$$A(y) = 0.$$

Elles sont en nombre fini. Si β est une valeur non exceptionnelle, le coefficient du $\Phi_n(x, y)$ au terme de degré maximal en x ne s'annule pas et, donc, la droite L_β ne peut être contenue dans aucune des C_n . D'ailleurs, la transformation τ_β n'est pas birationnelle.

Notons, pour chaque valeur finie β quelconque, $E_\beta = E \cap L_\beta$ la section de E par la droite L_β . Si β est une valeur non exceptionnelle, E se compose d'une infinité dénombrable de points. \bar{E}_β est l'ensemble de Julia de τ_β . Le point à l'infini (∞, β) , étant un point double attractif de τ_β , n'appartient pas à \bar{E}_β ni à \bar{E} . Pour une valeur exceptionnelle β , nous verrons plus tard que le point à l'infini (∞, β) est un point d'indétermination et un point limite d'une suite de points de Julia de T , qui se trouvent à distance finie. Nous convenons d'ajouter à l'ensemble de Julia \mathcal{E} les points à l'infini (∞, β) , pour toutes les valeurs exceptionnelles β .

Un point double (α, β) d'ordre n , en lequel $\left| \frac{\partial \Phi_n}{\partial x} \right| = 1$, s'appelle *point double indifférent* d'ordre n de τ_β . Si τ_β n'est pas birationnelle, un tel point est, d'après G. Julia ⁽¹¹⁾, un point de Julia de τ_β . Donc, tout voisinage d'un tel point sur L_β contient une infinité de points de E_β .

Pour chaque valeur finie non exceptionnelle β , soit $\mathcal{O}_\beta(\infty)$ le domaine de convergence total de τ_β vers le point double attractif (∞, β) , ce point à l'infini étant compris dans $\mathcal{O}_\beta(\infty)$. On sait bien que ce domaine $\mathcal{O}_\beta(\infty)$ sur L_β coïncide avec le domaine de convergence immédiat. Autrement dit, $\mathcal{O}_\beta(\infty)$ est connexe. Désignons par $\mathcal{O}(\infty)$ la réunion des $\mathcal{O}_\beta(\infty)$, β parcourant l'ensemble de toutes les valeurs non exceptionnelles. Nous verrons plus tard que $\mathcal{O}(\infty)$ est un ensemble ouvert et connexe et que la suite $\{T^n\}$ est normale dans $\mathcal{O}(\infty)$.

23. Les notations étant ainsi précisées, nous nous proposons d'étudier l'ensemble de Julia \mathcal{E} de la transformation non birationnelle T .

Soit $P_0 = (x_0, y_0)$ un point de Julia de T , à distance finie. Nous allons réduire les possibilités à trois :

1° P_0 appartient à \bar{E} .

2° P_0 n'appartient pas à \bar{E} . P_0 est un point limite d'une suite infinie de points (α_ν, β_ν) , $\nu = 1, 2, 3, \dots$, tels que chaque valeur β_ν soit distincte de y_0 et non exceptionnelle; que chaque (α_ν, β_ν) soit un point double attractif d'ordre n_ν de τ_{β_ν} ; et que les ordres n_1, n_2, n_3, \dots croissent indéfiniment.

3° P_0 n'appartient pas à \bar{E} . y_0 est une valeur exceptionnelle. τ_{y_0} est une rotation d'angle commensurable à 2π . La suite de fonctions $\{\Phi_n(x, y)\}$ est quasi normale en P_0 . Il existe un voisinage U de P_0 , tel que la suite $\{\Phi_n(x, y)\}$ converge vers la constante infinie dans U sauf sur la droite complexe L_{y_0} ; que le complémentaire $U - L_{y_0}$ de L_{y_0} dans U soit contenu dans le domaine $\mathcal{O}(\infty)$; et que la suite $\{\Phi_n(x, y)\}$ reste bornée sur L_{y_0} dans U .

La première possibilité a lieu actuellement pour toute transformation non birationnelle du présent type. Supposons donc que P_0 n'appartienne pas à l'ensemble fermé \bar{E} . Prenons un cercle de centre x_0 dans le x -plan et un cercle de centre y_0 dans le y -plan, de manière qu'étant γ et δ respectivement leurs intérieurs, le voisinage $U = \gamma \times \delta$ de P_0 ne contienne aucun point de \bar{E} .

a. Tout point (α, y_0) sur la droite L_{y_0} dans U est un point de Julia de T .

En effet, pour toute valeur $\beta \in \delta$, $L_\beta \cap U$ ne contient aucun point de \bar{E}_β . Donc, β étant exceptionnelle ou non, la suite des itérées successives de τ_β

⁽¹¹⁾ G. JULIA, *Sur quelques problèmes relatifs à l'itération des fonctions rationnelles* (C. R. Acad. Sc., t. 168, 1919, p. 147).

est normale dans $L_\beta \cap U$. Autrement dit, β étant fixée dans δ , la suite $\{\Phi_n(x, \beta)\}$ de fonctions de la seule variable x est normale dans γ . On pourra directement réduire la démonstration de cet énoncé *a* au lemme suivant, obtenu par T. Nishino ⁽¹²⁾ :

Soient γ et δ comme les précédents et soit γ' un cercle intérieur à γ dans le x -plan, concentrique ou non. Soient $\{h(x, y)\}$ une famille de fonctions holomorphes dans $U = \gamma \times \delta$. Supposons que, pour toute valeur $\beta \in \delta$, la famille $\{h(x, \beta)\}$ de fonctions de la variable x est normale dans γ et que la famille $\{h(x, y)\}$ est normale dans $U' = \gamma' \times \delta$. *Sous ces hypothèses, la famille $\{h(x, y)\}$ est normale dans U tout entier.*

Maintenant, soit M la courbe des points, au-dessus desquels le domaine de Riemann \mathcal{R} de la transformation inverse T^{-1} est ramifié ou dégénéré. La courbe M est l'image par T de la courbe algébrique donnée par l'équation

$$(13) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} = k A(y) x^{k-1} + (k-1) A_1(y) x^{k-2} + \dots + A_{k-1}(y) = 0.$$

Donc, M est une courbe algébrique. Elle est un ensemble fermé. Nous disons que

b. Si le voisinage U de P_0 ne rencontre ni \bar{E} ni M , il existe dans U au moins un point double d'un certain ordre.

La démonstration se repose sur l'idée de P. Fatou. Au-dessus de U , il y a k feuillets de \mathcal{R} . La transformation inverse T^{-1} possède donc dans U au moins deux branches distinctes, uniformes et holomorphes, soient

$$\begin{cases} x_{-1} = f(x, y), \\ y_{-1} = y \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x_{-1} = g(x, y), \\ y_{-1} = y. \end{cases}$$

Les fonctions $f(x, y)$ et $g(x, y)$ sont uniformes et holomorphes dans U et telles que l'équation

$$f(x, y) = g(x, y)$$

n'admette aucune racine dans U . Considérons la suite des fonctions

$$\frac{\Phi_n(x, y) - g(x, y)}{f(x, y) - g(x, y)},$$

$n = 1, 2, 3, \dots$, qui sont toutes holomorphes dans U . Cette suite ne peut jamais être normale en P_0 , car la suite $\{\Phi_n(x, y)\}$ ne l'est pas en P_0 . Donc, une infinité de fonctions de cette suite-là admettent la valeur 0 ou bien la valeur 1. Il en résulte qu'au moins une des deux équations

$$\Phi_n(x, y) = f(x, y) \quad \text{et} \quad \Phi_n(x, y) = g(x, y)$$

(12) T. NISHINO, à paraître au *Journal of Mathematics of Kyoto University*.

admet dans U au moins une racine pour un certain ordre n . Lorsqu'il en est ainsi pour la première, choisissons une racine (α, β) dans U :

$$\Phi_n(\alpha, \beta) = f(\alpha, \beta).$$

Alors, on a

$$\Phi_{n+1}(\alpha, \beta) = \Phi(\Phi_n(\alpha, \beta), \beta) = \Phi(f(\alpha, \beta), \beta) = \alpha,$$

ce qui montre que (α, β) est un point double d'ordre $n + 1$.

c. Si U ne rencontre pas \bar{E} et que y_0 est non exceptionnelle, alors il existe dans U un point double (α, β) d'un certain ordre n , qui est un point double attractif d'ordre n de τ_β .

Sans diminuer la généralité, nous pouvons supposer que toute valeur $\beta \in \delta$ est non exceptionnelle. Le coefficient $A(y)$ du terme de degré maximal ne s'annule jamais dans δ . L'équation (13) montre que M ne rencontre L_{y_0} qu'en un nombre fini de points. Si P_0 est situé sur M , prenons un point P_1 dans U , situé sur la même droite L_{y_0} et n'appartenant pas à la courbe M . D'après *a*, P_1 est aussi un point de Julia de T . D'après *b*, en tout cas, il existe un point double $Q = (\alpha, \beta)$ d'un certain ordre n dans U . τ_β étant non birationnelle, Q ne peut être ni répulsif ni indifférent. Donc, Q est un point double attractif de τ_β d'ordre n .

Remarquons que Q n'est pas un point de Julia de T , donc il n'est pas situé sur L_{y_0} .

d. Si U ne rencontre pas \bar{E} et que y_0 est non exceptionnelle, alors on peut trouver une suite infinie de points $Q_\nu = (\alpha_\nu, \beta_\nu)$, $\nu = 1, 2, 3, \dots$, tels que cette suite tende vers P_0 ; que chaque valeur β_ν soit distincte de y_0 et non exceptionnelle; que chaque point Q_ν soit un point double attractif de τ_{β_ν} d'un certain ordre n_ν ; et que les ordres n_1, n_2, n_3, \dots croissent indéfiniment.

En effet, supposons encore que δ ne contienne aucune valeur exceptionnelle. D'après *c*, il existe une suite de points doubles Q_1, Q_2, Q_3, \dots , satisfaisant aux premières trois conditions ci-dessus. Il suffit de montrer que les ordres n_1, n_2, n_3, \dots ne sont pas bornés dans leur ensemble. S'ils étaient bornés, tous les points Q_ν appartiendraient à une et la même des courbes algébriques \tilde{C}_n , définies par l'équation

$$x - \Phi_n(x, y) = 0,$$

soit à \tilde{C}_N . Par exemple, il suffit de prendre pour N le produit des entiers, apparaissant dans l'ensemble $\{n_\nu\}$. La courbe \tilde{C}_N étant un ensemble fermé, le point limite P_0 appartiendrait à \tilde{C}_N . P_0 serait donc un point double d'un certain ordre. Par rapport à τ_{y_0} , si P_0 était attractif, P_0 ne serait pas un point de Julia de T , ce qui est contre l'hypothèse. Si P_0 était répulsif ou bien indifférent, P_0 appartiendrait à \bar{E}_{y_0} car, τ_{y_0} n'est pas birationnelle, mais, c'est aussi contre l'hypothèse. Nous avons épuisé

tous les cas. Par conséquent, les ordres ne peuvent jamais être bornés dans leur ensemble.

Lorsqu'un point de Julia $P_0 = (x_0, y_0)$ n'appartient pas à \bar{E} et que y_0 est non exceptionnelle, nous avons ainsi réduit les possibilités à la deuxième, 2^o.

e. Il reste donc le cas où y_0 est une valeur exceptionnelle. Supposons encore que U ne rencontre pas E et qu'il n'y a dans δ aucune valeur exceptionnelle, distincte de y_0 . Sous ces hypothèses, distinguons les deux cas suivants.

Dans le cas où il existe une suite infinie de points de Julia (α_ν, β_ν) , $\nu = 1, 2, 3, \dots$, tels que cette suite tende vers P_0 et que chaque valeur β_ν soit non exceptionnelle, donc distincte de y_0 , on aura, de nouveau, une suite de points (α_ν, β_ν) , $\nu = 1, 2, 3, \dots$, satisfaisant aux conditions indiquées dans l'énoncé *d* ou à celles pour la possibilité 2^o.

Dans le cas contraire, on peut supposer, sans restreindre la généralité, que, dans le voisinage U , il n'y a des points de Julia que sur la droite L_{y_0} . Dans un tel cas, la suite $\{\Phi_n(x, y)\}$ de fonctions holomorphes est quasi normale. Par suite, elle converge vers la constante infinie dans $U - L_{y_0}$, puisque $U - L_{y_0}$ est contenu dans $\mathcal{O}(\infty)$. La suite $\{x - \Phi_n(x, y)\}$ est aussi quasi normale. Une infinité de $x - \Phi_n(x, y)$ admettent leurs zéros dans U . Or, $\mathcal{O}(\infty)$ n'a pas de points doubles dans l'espace fini. Chacune d'elles s'annule identiquement sur L_{y_0} . Autrement dit, la droite L_{y_0} fait partie de la courbe de points doubles d'un certain ordre. La transformation τ_{y_0} doit être une rotation d'angle commensurable à 2π . Nous sommes ainsi arrivé à la possibilité 3^o.

Le cas où P_0 est un point à l'infini sera étudié dans le numéro suivant. Avant d'avancer à l'infini, examinons la réciproque.

Soit $P_0 = (x_0, y_0)$ un point à distance finie. Si la possibilité 1^o a lieu, P_0 est nécessairement un point de Julia. Lorsque la possibilité 2^o se présente, considérons, pour chaque point double attractif (α_ν, β_ν) de τ_{β_ν} d'ordre n_ν , le domaine de convergence $\mathcal{O}(n_\nu)$ vers la partie attractive $C_{n_\nu}^0$ de la courbe de points doubles d'ordre n_ν . Dans le n^o 19, nous avons vu que tout point frontière de $\mathcal{O}(n_\nu)$ est un point de Julia de T . D'ailleurs, si n_ν et $n_{\nu'}$ sont distincts, $\mathcal{O}(n_\nu)$ et $\mathcal{O}(n_{\nu'})$ sont disjoints. Donc, il existe une suite infinie de points de Julia, convergeant vers P_0 . L'ensemble de Julia étant fermé, P_0 est nécessairement un point de Julia. Si l'on a la possibilité 3^o, alors la suite $\{\Phi_n(x, y)\}$ converge vers la constante infinie en dehors de L_{y_0} et elle reste bornée sur L_{y_0} . P_0 est nécessairement un point de Julia de T .

24. Dans ce numéro, supposons encore que la transformation T est non birationnelle et conservons les notations dans les deux numéros précédents. Nous allons étudier les points à l'infini sur $C_\infty = \{x = \infty\}$.

Pour mettre en lumière l'allure de la transformation aux environs de C_∞ , effectuons la transformation des coordonnées

$$\begin{cases} X = \frac{1}{x}, \\ Y = y. \end{cases}$$

et exprimons T , par rapport aux nouvelles coordonnées, sous la forme

$$(14) \quad \begin{cases} X_1 = \frac{X^k}{A(Y) + A_1(Y)X + \dots + A_k(Y)X^k}, \\ Y_1 = Y. \end{cases}$$

Voyons d'abord les propriétés suivantes :

f. $\mathcal{O}(\infty)$ est un ensemble ouvert et connexe. La suite $\{T^n\}$ converge vers la transformation limite T^ :*

$$(T^*) \quad \begin{cases} x_1 = \infty, \\ y_1 = y, \end{cases}$$

uniformément à l'intérieur complet de $\mathcal{O}(\infty)$.

En effet, le raisonnement, employé dans le n° 19, s'applique à la transformation T de la forme (14). Soit β une valeur non exceptionnelle : $A(\beta) \neq 0$. Prenons un voisinage ouvert δ de β dans le y -plan, écarté de toutes les valeurs exceptionnelles. On peut trouver un rayon assez grand R , de manière que la suite $\{T^n\}$ converge vers la transformation limite T^* , uniformément dans le voisinage $\Delta = \{R < |x| \leq +\infty, y \in \delta\}$ du point (∞, β) .

Soit $P = (\alpha, \beta)$ un point de $\mathcal{O}_\beta(\infty)$, β étant une valeur non exceptionnelle. Son conséquent d'un certain ordre n appartient à Δ . Donc, le $n^{\text{ième}}$ conséquent $T^n(U)$ d'un certain voisinage U de P sera contenu dans Δ . La suite $\{T^n\}$ converge nécessairement vers T^* uniformément dans U . U est contenu dans $\mathcal{O}(\infty)$. $\mathcal{O}(\infty)$ est donc ouvert. D'ailleurs, $\mathcal{O}_\beta(\infty)$ est connexe quelle que soit la valeur β . Par conséquent, $\mathcal{O}(\infty)$ l'est aussi. Les énoncés *f* ont été démontrés.

g. Soit β une valeur exceptionnelle. Si la transformation τ_β de L_β admet son domaine de convergence $\mathcal{O}_\beta(\infty)$ vers le point double (∞, β) , alors tout point de $\mathcal{O}_\beta(\infty)$ est un point de Julia de T ⁽¹³⁾.

⁽¹³⁾ Une telle possibilité se présente, ou bien quand on a $A_j(\beta) \neq 0$ pour un certain $j \leq k-2$; ou bien quand

$$A_1(\beta) = \dots = A_{k-2}(\beta) = 0, \quad |A_{k-1}(\beta)| > 1;$$

ou bien quand

$$A_1(\beta) = \dots = A_{k-2}(\beta) = 0, \quad A_{k-1}(\beta) = 1, \quad A_k(\beta) \neq 0.$$

Dans les deux premiers cas, (∞, β) est un point double attractif de τ_β . Dans le dernier cas, il est un point double indifférent et il est un point de Julia de τ_β .

En effet, soit $P = (\alpha, \beta)$ un point de $\mathcal{O}_\beta(\infty)$, à distance finie. Supposons que la suite $\{T^n\}$ était normale sur un voisinage fermé U de P , de la forme

$$(U) \quad |x - \alpha| \leq \rho, \quad |y - \beta| \leq r$$

(ρ et r étant des nombres réels positifs). La suite $\{\Phi_n(x, y)\}$ converge vers ∞ au point P . Elle devrait converger vers la constante infinie uniformément sur U . D'autre part, de la forme (14), on voit que (∞, β) est un point d'indétermination de T . Prenons un voisinage dicylindrique $\Delta = \{R \leq |x| \leq +\infty, |y - \beta| \leq r\}$, r étant le même pour U et $R > 0$, de manière que l'ensemble Σ des zéros de

$$A(y)x^k + A_1(y)x^{k-1} + \dots + A_k(y),$$

c'est-à-dire, de

$$A(Y) + A_1(Y)X + \dots + A_k(Y)X^k,$$

ne rencontre pas l'ensemble Γ à trois dimensions réelles :

$$(\Gamma) \quad |X| \leq \frac{1}{R}, \quad |Y - \beta| = r.$$

Alors, les conséquents successifs $T^n(U)$ de U seraient contenus dans Δ à partir d'un certain ordre N .

Considérons un disque $D = \{x = \alpha, |y - \beta| \leq r\}$ dans U et son conséquent $T^N(D)$ d'ordre N . $T^N(D)$ serait contenu dans Δ . Nous disons que $T^N(D)$ intersecte effectivement la surface analytique Σ . En effet, Σ passe par (∞, β) . Le disque à l'infini $D_\infty = \{x = \infty, |y - \beta| \leq r\}$ intersecte Σ . Or, $T^N(D)$ peut se déformer continûment en D_∞ dans Δ , en conservant la circonférence sur Γ pendant la déformation. Le nombre d'intersections étant invariant, on en conclut que $T^N(D)$ intersecte effectivement Σ .

Soit $Q = (\alpha', \beta')$ un point d'intersection. D'une part, tous les conséquents de $T^N(D)$ se trouveraient dans Δ . Par suite, $T(Q)$ serait dans Δ : $|\Phi(\alpha', \beta')| \geq R$. D'autre part, Q étant un point de Σ , $\Phi(\alpha', \beta')$ serait égal à 0. Nous avons tiré une contradiction. L'énoncé g a été démontré.

Revenons maintenant aux problèmes principaux. Soit β une valeur exceptionnelle. En réduisant les possibilités à deux suivantes, nous allons montrer que le point à l'infini (∞, β) est un point limite d'une suite de points de Julia, qui se trouvent tous à distance finie.

1° *Il existe une suite infinie de points, à distance finie, tous appartenant à E et convergeant vers (∞, β) .*

2° *Il existe un voisinage dicylindrique Δ de (∞, β) , ne contenant aucun point de E . La suite $\{\Phi_n(x, y)\}$ de fonctions méromorphes est quasi normale dans Δ . Elle converge en dehors de L_β vers la constante infinie, d'une façon uniforme à l'intérieur complet de $\Delta - L_\beta$. La transformation τ_β de L_β est*

une rotation d'angle commensurable à 2π . Tout point, à distance finie, de L_β dans Δ est un point de Julia de T.

Supposons donc que la première possibilité n'a pas de lieu. On peut trouver un voisinage dicylindrique Δ de (∞, β) :

$$(\Delta) \quad R < |x| \leq +\infty, \quad |y - \beta| < r,$$

R et r étant réels et positifs, tel qu'il n'y ait aucun point de E dans Δ et que, si $|y - \beta| < r$ et $y \neq \beta$, alors y ne soit pas exceptionnelle. Alors, pour chaque valeur β' telle que $|\beta' - \beta| < r$ et $\beta' \neq \beta$, la suite des itérées successives de $\tau_{\beta'}$ reste normale dans $\Delta \cap L_{\beta'}$. Ceci montre $\Delta - L_\beta \subset \mathcal{O}(\infty)$. La suite $\{\Phi_n(x, y)\}$ est normale dans $\Delta - L_\beta$ et converge vers la constante infinie uniformément à l'intérieur de $\Delta - L_\beta$.

Soit P un point, à distance finie, de L_β dans Δ . Supposons que la suite $\{\Phi_n(x, y)\}$ était normale en P. Elle convergerait vers l'infini au point P. P appartiendrait à $\mathcal{O}_\beta(\infty)$. Or, tout point de $\mathcal{O}_\beta(\infty)$, à distance finie, est, d'après g , un point de Julia. Nous sommes arrivés à une contradiction. Tout point de L_β dans Δ , distinct de (∞, β) est un point de Julia de T. En appliquant aux points de Julia, à distance finie, sur L_β , les résultats obtenus dans le numéro précédent, on voit que τ_β est une rotation d'angle commensurable à 2π . Nous avons achevé la démonstration de la réduction des possibilités.

Donc, pour une valeur exceptionnelle β , il a été ainsi justifié de considérer le point à l'infini (∞, β) , qui est un point d'indétermination, comme point de Julia de T.

La première possibilité se réalise dans la transformation

$$\begin{cases} x_1 = y^2 x^2 + x - 1, \\ y_1 = y. \end{cases}$$

En effet, la valeur $y = 0$ est exceptionnelle. β étant une valeur non nulle finie, sur la droite L_β se trouvent deux points doubles $(\frac{1}{\beta}, \beta)$ et $(\frac{-1}{\beta}, \beta)$ d'ordre 1, où les multiplicateurs autres que l'unité sont respectivement $1 + 2\beta$ et $1 - 2\beta$. Au moins une de ces deux valeurs est extérieure au cercle unité autour de l'origine, donc elle est plus grande que l'unité en module. Il s'ensuit qu'au moins un des deux points doubles est répulsif pour τ_β . En outre, ce point tend vers $(\infty, 0)$ quand β tend vers zéro.

Nous sommes moins heureux dans la deuxième possibilité. Nous n'avons pas réussi jusqu'ici à l'exclure ni à construire des exemples qui la réalisent.

Observons que, dans tous les cas, un point de Julia de T est un point limite d'une suite infinie de points doubles, d'ordres non nécessairement égaux à l'unité.

Enfin, nous allons montrer que *tout point frontière du domaine $\mathcal{O}(\infty)$ est un point de Julia*. Ceci nous permet d'appeler $\mathcal{O}(\infty)$ *domaine de convergence, total et immédiat, vers la partie attractive de la courbe à l'infini C_∞* .

En effet, soit $P = (\alpha, \beta)$ un point frontière de $\mathcal{O}(\infty)$, à distance finie. Si la suite $\{\Phi_n(x, y)\}$ était normale en P , elle convergerait vers la constante infinie, au voisinage de P . Les consécutifs successifs de P tendraient vers (∞, β) . Si β n'était pas exceptionnelle, P appartiendrait, par définition, à $\mathcal{O}(\infty)$. Donc, il serait intérieur à $\mathcal{O}(\infty)$, ce qui est contre l'hypothèse. Si β était exceptionnelle, P appartiendrait à $\mathcal{O}_\beta(\infty)$. D'après g , P serait un point de Julia. C'est absurde. D'où, l'énoncé.

25. Dans ce numéro final, nous étudions le cas où la transformation à itérer T est birationnelle. Elle peut s'exprimer par

$$(T) \quad \begin{cases} x_1 = A(y)x + B(y), \\ y_1 = y, \end{cases}$$

où $A(y)$ ne se réduit pas à la constante nulle.

Lorsque $A(y)$ se réduit à une constante non nulle, l'étude de l'itération de T est tout à fait facile. Nous la laissons au lecteur. Supposons donc ici que $A(y)$ ne se réduit pas à une constante.

Considérons d'abord une valeur finie β telle que $|A(\beta)| < 1$. Le point $P_\beta = \left(\frac{B(\beta)}{1-A(\beta)}, \beta\right)$ est un point double attractif d'ordre 1 de la restriction τ_β de T à la droite $L_\beta = \{|x| \leq +\infty, y = \beta\}$. Sur L_β , il n'y a de point double d'aucun ordre, autre que P_β et que (∞, β) . β parcourant l'ensemble des β telles que $|A(\beta)| < 1$, P_β décrit la *partie attractive C^0* de la courbe C de points doubles d'ordre 1.

Si $A(\beta)$ ne se réduit pas à 0, le point à l'infini (∞, β) est le seul point double répulsif de τ_β ; donc, il appartient à l'ensemble de Julia complété de T .

Si $A(\beta)$ se réduit à 0, τ_β se réduit à une transformation constante et la droite L_β est dégénérée par τ_β . Le point à l'infini (∞, β) est un point d'indétermination de T . Mais, il est adhérent à l'ensemble des points doubles (∞, y) avec $0 < |A(y)| < 1$. La suite $\{T^n\}$ ne peut être une famille normale au voisinage de (∞, β) , même si l'on excluait du voisinage ce point d'indétermination. Pour cette raison, (∞, β) sera considéré comme point de Julia de T . La partie C_∞^*

$$(C_\infty^*) \quad x = \infty, \quad |A(y)| < 1$$

de la courbe à l'infini C_∞ fait partie de l'ensemble de Julia. Elle s'appelle *partie répulsive* de C_∞ .

En tout cas, si $|A(\beta)| < 1$, les conséquents successifs de tout point de L_β , à distance finie, convergent vers le point P_β . Par conséquent, le domaine \mathcal{O} :

$$(\mathcal{O}) \quad |x| < +\infty, \quad |A(y)| < 1$$

est le *domaine de convergence, total et immédiat, vers la partie attractive* C^0 de la courbe C de points doubles d'ordre 1. Dans ce domaine \mathcal{O} , les itérées successives de T convergent vers la transformation limite

$$\begin{cases} x_1 = \frac{B(y)}{1-A(y)}, \\ y_1 = y, \end{cases}$$

uniformément à l'intérieur complet de \mathcal{O} .

Considérons ensuite une valeur finie β telle que $|A(\beta)| > 1$. Le point $Q_\beta = \left(\frac{B(\beta)}{1-A(\beta)}, \beta\right)$ est le seul point double répulsif de τ_β . Le point à l'infini (∞, β) est le seul point double attractif de τ_β . L'ensemble C^* des points Q_β :

$$(C^*) \quad x = A(y)x + B(y), \quad x : \text{fini}, \quad |A(y)| > 1$$

est la *partie répulsive* de C . Elle fait partie de l'ensemble de Julia. Les conséquents successifs de tout point sur L_β , distinct de Q_β , convergent vers (∞, β) . Le domaine $\mathcal{O}(\infty)$:

$$(\mathcal{O}(\infty)) \quad (x, y) \neq Q_\beta, \quad |x| \leq +\infty, \quad |A(y)| > 1$$

est le *domaine de convergence; total et immédiat, vers la partie attractive* $C_\infty^0 = \{x = \infty, |A(y)| > 1\}$ de la courbe à l'infini C_∞ . La suite $\{T^n\}$ converge vers la transformation limite

$$\begin{cases} x_1 = \infty, \\ y_1 = y \end{cases}$$

uniformément à l'intérieur complet de $\mathcal{O}(\infty)$.

Considérons finalement une valeur finie β telle que $|A(\beta)| = 1$. Si $A(\beta)$ est différent de l'unité, τ_β est une rotation de centre $\left(\frac{B(\beta)}{1-A(\beta)}, \beta\right)$ et d'angle égal à l'argument de $A(\beta)$. Si, de plus, l'argument de $A(\beta)$ est commensurable à 2π , l'itérée de τ_β d'un certain ordre n se réduit à la transformation identique; par suite, n étant un tel minimum, la droite L_β fait partie de la courbe de points doubles d'ordre n . Si $A(\beta) = 1$ et $B(\beta) = 0$, alors τ_β est la transformation identique. Si $A(\beta) = 1$ et $B(\beta) \neq 0$, τ_β est un déplacement parallèle; il n'y a sur L_β aucun point double à distance finie; le point à l'infini (∞, β) est un point double indifférent.

D'après ce qui précède, tout voisinage d'un point quelconque de l'hypersurface Γ à trois dimensions réelles :

$$(\Gamma) \quad |x| \leq +\infty, \quad |A(y)| = 1$$

admet à la fois des points de \mathcal{O} et des points de $\mathcal{O}(\infty)$. Ceci montre que tout point de Γ est un point de Julia de T . En excluant de notre considération la droite à l'infini $\{y = \infty\}$, l'ensemble de Julia de T se compose des parties répulsives C^* et C_z^* et de l'hypersurface Γ . Or, Γ ne fait pas de partie de l'ensemble \bar{E} . Dans le cas birationnel, on reconnaît ainsi que l'ensemble \bar{E} ne coïncide pas avec l'ensemble de Julia \mathcal{E} .

