

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

OLAV ARNFINN LAUDAL

Sur les limites projectives et inductives

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 82, n° 2 (1965), p. 241-296

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1965_3_82_2_241_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1965, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LES LIMITES PROJECTIVES ET INDUCTIVES.

PAR M. OLAV ARNFINN LAUDAL.



INTRODUCTION.

Dans ce travail nous allons construire une théorie de cohomologie et d'homologie sur la catégorie des ensembles ordonnés.

Dans la littérature on a vu de nombreux essais dans cette direction, voir par exemple: ([5], [6], [7], [8], [13], [15], [19] et [21]).

Cependant, il n'existe jusqu'à présent aucun exposé complet de la théorie. Nous nous proposons maintenant de commencer un tel exposé.

Le travail est composé de trois chapitres, dont les deux derniers seront publiés ultérieurement. Le premier chapitre traitera la théorie des limites projectives et inductives, et contient le corps essentiel de la théorie. Le second chapitre expose la théorie élémentaire de la cohomologie et de l'homologie des ensembles ordonnés, généralisant la théorie Čechiste classique. Nous démontrons par exemple des théorèmes de dualité généralisant ceux de Poincaré et de Lefschetz, des théorèmes de coefficients universels et nous sommes en mesure de construire une théorie assez satisfaisante de cohomologie et d'homologie locale.

Dans le troisième chapitre, nous trouvons des relations entre la théorie générale du chapitre II et la théorie singulière, la cohomologie de Čech, l'homologie d'Alexandroff [1], l'homologie de Borel-Moore [3] et la cohomologie de Vietoris. A titre d'exemple, nous montrons que les résultats de Zeeman ([31], [32] et [33]) sont des conséquences presque immédiates de théorèmes généraux des chapitres I et III (voir [17]). Une première

réduction de ce travail a paru miméographiée à l'Université d'Oslo (janvier 1963).

Notations.

Π, \times , produit direct;
 Π, \oplus , somme directe;
 $\underline{C}, \underline{D}, \dots$, catégories;
 $\underline{F}, \underline{G}, \dots$, foncteurs;
 Γ, Λ, \dots , ensembles ordonnés;
 Λ_0 , ensemble ordonné opposé de Λ ;
 $P\Lambda$, ensemble ordonné des parties de Λ ;
 $R^{(p)} F$, dérivé à droite du foncteur F ;
 $L_{(q)} G$, dérivé à gauche du foncteur G .

Nous désignons par [20] la référence au numéro 20 de la Bibliographie, et par 1.1 (resp. 1.2.3) la référence au paragraphe 1 du chapitre I (resp. la référence au résultat 1.2.3 du chapitre I).

Introduction. — Dans le premier paragraphe nous introduisons le foncteur limite projective (resp. limite inductive) sur un ensemble ordonné Λ , relatif à un sous-ensemble Λ_1 de Λ , $\lim_{\leftarrow \Lambda/\Lambda_1}$ (resp. $\lim_{\rightarrow \Lambda/\Lambda_1}$), et nous étudions les dérivés de ce foncteur.

En particulier, nous trouvons des conditions pour que ces dérivés s'annulent. La proposition 1.1.9 généralise des résultats de Yeh [30] et de Roos [24].

La notion de α -foncteur, qui, plus tard, jouera un rôle fondamental, est introduite, et nous en déduisons quelques résultats élémentaires.

Nous montrons, 1.1.11, que dans des cas particuliers, la cohomologie et l'homologie des ensembles semi-simpliciaux s'identifient avec les dérivés des foncteurs \lim_{\leftarrow} et \lim_{\rightarrow} sur des ensembles ordonnés bien choisis.

Ceci généralise un résultat de Deheuvels [7] et sera le point de départ pour l'étude de la théorie singulière du chapitre III. Le reste du premier paragraphe est voué à l'étude de deux schémas simpliciaux canoniquement associés à un ensemble ordonné. Nous en déduisons des foncteurs résolvants pour \lim_{\leftarrow} et \lim_{\rightarrow} , et nous montrons à titre d'exemple que pour des espaces topologiques normaux la cohomologie de Čech s'identifie avec les dérivés d'un foncteur de la forme $\lim_{\rightarrow} \lim_{\leftarrow}$, ce qui justifie la construction générale du chapitre II.

Dans le deuxième paragraphe nous construisons des complexes résolvants pour \lim_{\leftarrow} et \lim_{\rightarrow} utilisant la méthode de [14]. Le résultat généralise des

résultats de Deheuvels ([5], [6], 17]) et de Roos [24]. Nous introduisons la notion de cofinalité et nous trouvons des conditions sur un sous-ensemble Λ_1 de Λ pour que les dérivés de $\lim_{\leftarrow \Lambda}$ (resp. $\lim_{\rightarrow \Lambda_0}$) soient isomorphes aux dérivés de $\lim_{\leftarrow \Lambda_1}$ (resp. $\lim_{\rightarrow \Lambda_1^0}$). Il y a peut-être lieu d'appeler ce théorème,

1.2.4, *le théorème de cofinalité*.

Le troisième paragraphe est consacré à la formulation et à la démonstration de la *proposition* 1.3.1 qui généralise un résultat de [14]. Cette proposition est fondamentale pour le reste de ce travail, et contribue à la justification de la notion de α -foncteur.

Il faut dire que indépendamment de nous, Deheuvels ([6], [7]) a étudié une situation analogue mais plus particulière.

Le quatrième paragraphe est consacré à l'étude de $\lim_{\leftarrow \Lambda}$ et $\lim_{\rightarrow \Lambda_0}$ comme fonction de Λ .

On verra que \lim_{\leftarrow} et \lim_{\rightarrow} sont de beaux foncteurs sur la catégorie dont les objets sont les ensembles ordonnés et dont les flèches sont les α -foncteurs. Nous introduisons la notion de I-homotopie entre deux α -foncteurs et nous montrons que ceci généralise la notion d'homotopie classique.

Le cinquième paragraphe aborde la théorie homologique du chapitre II. Ici nous introduisons la notion de *foncteur de supports* qui nous permet, plus tard, d'étudier la cohomologie à supports contenus dans un anti-filtre, respectivement l'homologie localement finie et ces généralisations.

A titre d'exemple nous démontrons un théorème généralisant la dualité de Poincaré pour les complexes simpliciaux localement finie.

1.1. Systèmes projectifs et le foncteur \lim_{\leftarrow} (resp. \lim_{\rightarrow}).

Soit Λ un ensemble ordonné. Si Λ_1 est un sous-ensemble de Λ nous allons toujours considérer Λ_1 comme ensemble ordonné, l'ordre étant induit par celui de Λ .

Nous désignons par $\hat{\Lambda}_1$ l'ensemble des éléments de Λ , majorés par au moins un élément de Λ_1 . Nous posons en particulier pour tout $\lambda \in \Lambda$

$$\hat{\lambda} = \{\lambda\}.$$

On sait depuis longtemps que la catégorie \underline{C}_Λ des systèmes projectifs de L-modules sur Λ est une catégorie abélienne possédant suffisamment d'objets injectifs et projectifs. Nous écrivons \underline{C} (resp. \underline{C}_0) au lieu de \underline{C}_Λ (resp. $\underline{C}_{\Lambda_0}$) si aucune confusion n'est à craindre.

Soit Λ_1 un sous-ensemble de Λ tel que $\Lambda_1 = \hat{\Lambda}_1$, alors nous allons définir un foncteur

$$\begin{aligned} \lim_{\leftarrow \Lambda/\Lambda_1} : \underline{C} &\rightarrow \text{mod}_L \\ \left(\text{resp. } \lim_{\leftarrow \Lambda_0/\Lambda_1^0} : \underline{C}_0 &\rightarrow \text{mod}_L \right) \end{aligned}$$

Pour tout objet F (resp. G) de \underline{C} (resp. \underline{C}_0) $\lim_{\leftarrow \Lambda/\Lambda_1}$ (resp. $\lim_{\leftarrow \Lambda_0/\Lambda_1^0}$) sera l'unique, à un isomorphisme près, L -module possédant une famille d'homomorphismes $\{\Pi_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ (resp. $\{\Pi^\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$).

$$\begin{aligned} \Pi_\lambda : \lim_{\leftarrow \Lambda/\Lambda_1} F &\rightarrow F_\lambda \\ \left(\text{resp. } \Pi^\lambda : \lim_{\leftarrow \Lambda_0/\Lambda_1^0} G &\rightarrow \lim_{\leftarrow \Lambda_0/\Lambda_1^0} G \right) \end{aligned}$$

qui satisfait aux conditions suivantes :

(i) La famille $\{\Pi_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ (resp. $\{\Pi^\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$) définit un homomorphisme du système projectif constant $\lim_{\leftarrow \Lambda/\Lambda_1} F$ (resp. du système projectif G) dans

le système projectif F (resp. le système projectif constant $\lim_{\leftarrow \Lambda_0/\Lambda_1^0} G$).

(ii) Pour tout $\lambda \in \Lambda_1$ on a $\Pi_\lambda = 0$ (resp. $\Pi^\lambda = 0$), et

(iii) $\lim_{\leftarrow \Lambda/\Lambda_1} F$ (resp. $\lim_{\leftarrow \Lambda_0/\Lambda_1^0} G$) est universel pour des propriétés.

On démontre facilement que $\lim_{\leftarrow \Lambda/\Lambda_1}$ (resp. $\lim_{\leftarrow \Lambda_0/\Lambda_1^0}$) existe et qu'il est exact à gauche (resp. à droite).

Posons :

$$\begin{aligned} \lim_{\leftarrow \Lambda/\Lambda_1}^{(*)} &= R^{(*)} \lim_{\leftarrow \Lambda/\Lambda_1} \\ \left(\text{resp. } \lim_{\leftarrow \Lambda_0/\Lambda_1^0}^{(*)} &= L_{(*)} \lim_{\leftarrow \Lambda_0/\Lambda_1^0} \right) \end{aligned}$$

alors il est facile de montrer qu'on a un isomorphisme de foncteurs :

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim_{\leftarrow \Lambda/\Lambda_1}^{(*)} \simeq \text{Ext}^{(*)}(\underline{L}_{\Lambda/\Lambda_1}, *) \\ \left[\text{resp. } \text{Hom}_L \left(\lim_{\leftarrow \Lambda_0/\Lambda_1^0}^{(*)}, R \right) \simeq \text{Ext}^{(*)}(*, R_{\Lambda/\Lambda_1}) \right] \end{array} \right.$$

où $\underline{L}_{\Lambda/\Lambda_1}$ (resp. R_{Λ/Λ_1}) est un système projectif sur Λ (resp. Λ_0) défini par

$$\begin{aligned} (\underline{L}_{\Lambda/\Lambda_1})_\lambda &= \begin{cases} L & \text{si } \lambda \notin \Lambda_1, \\ 0 & \text{si } \lambda \in \Lambda_1 \end{cases} \\ \left[\text{resp. } (R_{\Lambda/\Lambda_1})_\lambda &= \begin{cases} R & \text{si } \lambda \notin \Lambda_1, \text{ (R un L-module injectif)} \\ 0 & \text{si } \lambda \in \Lambda_1 \end{cases} \right] \end{aligned}$$

les homomorphismes associés au couple $\lambda_2 < \lambda_1$ (resp. $\lambda_1 < \lambda_2$) étant nuls si $\lambda_2 \in \Lambda_1$, et l'identité sinon.

Soit Λ_1 un sous-ensemble quelconque de Λ , alors on peut considérer $\lim_{\Lambda_1} \left(\text{resp. } \lim_{\Lambda_1^0} \right)$ comme foncteur sur \underline{C}_Λ (resp. $\underline{C}_{\Lambda_0}$), composition de la restriction évidente

$$\underline{C}_\Lambda \rightarrow \underline{C}_{\Lambda_1} \quad (\text{resp. } \underline{C}_{\Lambda_0} \rightarrow \underline{C}_{\Lambda_1^0})$$

et le foncteur

$$\lim_{\Lambda_1} : \underline{C}_{\Lambda_1} \rightarrow \text{mod}_L$$

$$\left(\text{resp. } \lim_{\Lambda_1^0} : \underline{C}_{\Lambda_1^0} \rightarrow \text{mod}_L \right).$$

Ceci fait, il est clair comment définir l'homomorphisme de foncteurs sur \underline{C} (resp. \underline{C}_0) :

$$\Delta(\Lambda, \Lambda_1) : \lim_{\Lambda}^* \rightarrow \lim_{\Lambda_1}^*$$

$$\left(\text{resp. } \nabla(\Lambda, \Lambda_1) : \lim_{\Lambda_1^0}^* \rightarrow \lim_{\Lambda_0}^* \right).$$

Soient maintenant Γ et Λ deux ensembles ordonnés, et considérons une application

$$x : \Gamma \rightarrow P\Lambda$$

satisfaisante aux conditions suivantes :

- (x)₁ Pour tout $\gamma \in \Gamma$ on a $x(\gamma) = \widehat{x(\gamma)}$;
- (x)₂ Si $\gamma_1 < \gamma_2$, alors $x(\gamma_1) \subseteq x(\gamma_2)$.

Nous dirons alors que x est un x -foncteur de Γ dans Λ . Si Γ_1 est un sous-ensemble de Γ , alors on pose

$$x(\Gamma_1) = \bigcup_{\gamma_1 \in \Gamma_1} x(\gamma_1).$$

En particulier on désigne par

$$\text{im } x$$

le sous-ensemble $x(\Gamma)$ de Λ .

Remarque 1. — Soient X et Y deux espaces topologiques, et soit $f : X \rightarrow Y$ une application continue. Les ensembles O'_X et O'_Y des ouverts de X et Y sont ordonnés, et l'application $f^{-1} : O'_Y \rightarrow O'_X$ conserve l'ordre.

Définissons

$$x_{f^{-1}} : O'_X \rightarrow PO'_Y$$

et

$$x_f : O'_Y \rightarrow PO'_X$$

par $x_{f^{-1}}(\mathbf{U}) = \{V \mid f^{-1}(V) \subseteq \mathbf{U}\}$ $x_f(V) = \widehat{f^{-1}(V)}$, alors il est clair que $x_{f^{-1}}$ et x_f sont des x -foncteurs. En général, si

$$h: \Gamma \rightarrow \Lambda$$

est une application conservant l'ordre on peut y associer deux x -foncteurs

$$\begin{aligned} x_{h^{-1}}: \Gamma &\rightarrow P\Lambda, \\ x_h: \Lambda &\rightarrow P\Gamma \end{aligned}$$

définis par

$$\begin{aligned} x_{h^{-1}}(\gamma) &= \widehat{h(\gamma)}, \\ x_h(\lambda) &= h^{-1}(\widehat{\lambda}). \end{aligned}$$

Notons que dans la définition de x -foncteur on n'exclut pas la situation triviale

$$x(\gamma) = \emptyset \quad \text{pour tout } \gamma \in \Gamma.$$

Soient donnés deux x -foncteurs

$$x, x_1: \Gamma \rightarrow P\Lambda$$

tel que pour tout $\gamma \in \Gamma$ on a

$$x_1(\gamma) \subseteq x(\gamma),$$

et posons

$$\Gamma(x, x_1) = \{\gamma \mid x(\gamma) = x_1(\gamma)\}.$$

Partant d'un système projectif F (resp. G) sur Λ (resp. Λ_0) on définit un système projectif sur Γ (resp. Γ_0) par

$$\begin{aligned} \gamma &\rightsquigarrow \lim_{\leftarrow x(\gamma)/x_1(\gamma)} F \\ \left(\text{resp. } \gamma &\rightsquigarrow \lim_{\rightarrow x(\gamma)_0/x_1(\gamma)_0} G\right). \end{aligned}$$

Il est clair que pour tout $\gamma \in \Gamma$ on a un homomorphisme canonique

$$\begin{aligned} \lim_{\leftarrow \text{im } x/\text{im } x_1} &\rightarrow \lim_{\leftarrow x(\gamma)_0/x_1(\gamma)} F \\ \left(\text{resp. } \lim_{\rightarrow x(\gamma)_0/x_1(\gamma)_0} G &\rightarrow \lim_{\rightarrow \text{im } x_0/\text{im } x_1^0} G\right) \end{aligned}$$

et que la famille de ces homomorphismes définit un homomorphisme canonique

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} \lim_{\leftarrow \text{im } x/\text{im } x_1} &\rightarrow \lim_{\leftarrow \Gamma/\Gamma_1} \lim_{\leftarrow x(x)/x_1(x)} F \\ \left(\text{resp. } \lim_{\rightarrow \Gamma_0/\Gamma_1^0} \lim_{\rightarrow x(\gamma)_0/x_1(\gamma)_0} G &\rightarrow \lim_{\rightarrow \text{im } x_0/\text{im } x_1^0} G\right) \end{aligned} \right.$$

pour tout $\Gamma_1 \subseteq \Gamma(x, x_1)$.

LEMME 1. I. I. — *Supposons que Λ_1 et Λ_2 sont des sous-ensembles de Λ tel que $\Lambda_1 = \hat{\Lambda}_1, \Lambda_2 = \hat{\Lambda}_2, \Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2$. Alors on a un isomorphisme canonique :*

$$\begin{aligned} \lim_{\leftarrow \Lambda/\Lambda_1} F &\simeq \lim_{\leftarrow \Lambda_2/\Lambda_1 \cap \Lambda_2} F \\ \left(\text{resp. } \lim_{\rightarrow \Lambda_0/\Lambda_1^0} G &\simeq \lim_{\rightarrow \Lambda_2^0/(\Lambda_1 \cap \Lambda_2)_0} G \right), \end{aligned}$$

Démonstration. — Pour tout $\lambda \in \Lambda_2$ on a un homomorphisme canonique

$$\begin{aligned} \mathbb{H}_\lambda : \lim_{\leftarrow \Lambda_2/\Lambda_1 \cap \Lambda_2} F &\rightarrow F_\lambda \\ \left(\text{resp. } \mathbb{H}^\lambda : G_\lambda &\rightarrow \lim_{\rightarrow \Lambda_2^0/(\Lambda_1 \cap \Lambda_2)_0} G \right), \end{aligned}$$

nul si $\lambda \in \Lambda_1 \cap \Lambda_2$.

Posons pour tout $\lambda \in \Lambda, \lambda \notin \Lambda_2$:

$$\mathbb{H}_\lambda = 0 \quad (\text{resp. } \mathbb{H}^\lambda = 0),$$

alors

$$\begin{aligned} \lim_{\leftarrow \Lambda_2/\Lambda_1 \cap \Lambda_2} F \text{ et la famille } \{ \mathbb{H}_\lambda \}_{\lambda \in \Lambda} \\ \left(\text{resp. } \lim_{\rightarrow \Lambda_2^0/(\Lambda_1 \cap \Lambda_2)_0} G \text{ et la famille } \{ \mathbb{H}^\lambda \}_{\lambda \in \Lambda} \right) \end{aligned}$$

satisfont aux conditions (i), (ii) et (iii). Donc par l'unicité de la solution d'un problème universel on a bien l'isomorphisme cherché.

Q. E. D.

Il est immédiat que la condition suivante sur un α -foncteur

$$\alpha : \Gamma \rightarrow P\Lambda$$

(α)₃ : Si γ_1 et γ_2 sont des éléments de Γ et si $\lambda \in \alpha(\gamma_1) \cap \alpha(\gamma_2)$ alors il existe un $\gamma < \gamma_1, \gamma_2$ tel que $\lambda \in \alpha(\gamma)$, est plus forte que la condition suivante

(α)₄ : Si γ_1 et γ_2 sont des éléments de Γ et si $\lambda \in \alpha(\gamma_1) \cap \alpha(\gamma_2)$, alors il existe des éléments $\gamma'_1 < \gamma_1, \gamma'_2 < \gamma_2$ et $\gamma > \gamma'_1, \gamma'_2$ tels que :

$$\lambda \in \alpha(\gamma'_1) \cap \alpha(\gamma'_2).$$

LEMME 1. I. 2. — *Supposons que α satisfait à la condition (α)₄, alors l'homomorphisme (2) est un isomorphisme.*

Démonstration. — Pour $\gamma < \gamma'$ (resp. $\gamma > \gamma'$) notons par $\mathbb{H}^{\gamma\gamma'}$ (resp. $\mathbb{H}_{\gamma\gamma'}$) l'homomorphisme

$$\begin{aligned} \lim_{\leftarrow \alpha(\gamma')/\alpha_1(\gamma')} F &\rightarrow \lim_{\leftarrow \alpha(\gamma)/\alpha_1(\gamma)} F \\ \left(\text{resp. } \lim_{\rightarrow \alpha(\gamma)_0/\alpha_1(\gamma)_0} G &\rightarrow \lim_{\rightarrow \alpha(\gamma')_0/\alpha_1(\gamma')_0} G \right). \end{aligned}$$

Soit $\lambda \in x(\lambda)$ et considérons les homomorphismes canoniques :

$$\left. \begin{array}{c} \lim_{\leftarrow \Gamma/\Gamma_1} \lim_{\leftarrow x(\gamma)/x_1(\gamma)} F \\ \downarrow \Pi_\gamma \\ \lim_{\leftarrow x(\gamma)/x_1(\gamma)} F \\ \downarrow \Pi_\lambda^\gamma \\ F_\lambda \end{array} \right\} \text{ resp. } \left. \begin{array}{c} G_\lambda \\ \downarrow \Pi_\gamma^\lambda \\ \lim_{\leftarrow x(\gamma_0)/x_1(\gamma_0)} G \\ \downarrow \Pi_\gamma \\ \lim_{\leftarrow \Gamma_0/\Gamma_1^0} \lim_{\leftarrow x(\gamma_0)/x_1(\gamma_0)} G \end{array} \right\}.$$

Si $\lambda \in x(\gamma_1) \cap x(\gamma_2)$, alors par $(x)_\lambda$, il existe des éléments γ'_1, γ'_2 et γ de Γ tels que

$$\begin{aligned} \gamma'_1 < \gamma_1, \quad \gamma'_2 < \gamma_2, \quad \gamma'_1, \gamma'_2 < \gamma; \\ \lambda \in x(\gamma'_1) \cap x(\gamma'_2) \subseteq x(\gamma). \end{aligned}$$

Nous avons donc

$$\begin{aligned} \Pi_\lambda^{\gamma'_1} \circ \Pi_{\gamma_1} &= \Pi_\lambda^{\gamma'_1} \circ \Pi_{\gamma'_1 \gamma_1} \circ \Pi_{\gamma_1} = \Pi_\lambda^{\gamma'_1} \circ \Pi_{\gamma'_1 \gamma} \circ \Pi_\gamma = \Pi_\lambda^\gamma \circ \Pi_\gamma, \\ \Pi_\lambda^{\gamma'_2} \circ \Pi_{\gamma_2} &= \Pi_\lambda^{\gamma'_2} \circ \Pi_{\gamma'_2 \gamma_2} \circ \Pi_{\gamma_2} = \Pi_\lambda^{\gamma'_2} \circ \Pi_{\gamma'_2 \gamma} \circ \Pi_\gamma = \Pi_\lambda^\gamma \circ \Pi_\gamma, \\ (\text{resp. } \Pi_{\gamma_1} \circ \Pi_{\gamma_1}^\lambda &= \Pi_{\gamma_1} \circ \Pi_{\gamma_1 \gamma'_1} \circ \Pi_{\gamma'_1}^\lambda = \Pi_\gamma \circ \Pi_{\gamma \gamma'_1} \circ \Pi_{\gamma'_1}^\lambda = \Pi_\gamma \circ \Pi_{\gamma_1}^\lambda, \\ \Pi_{\gamma_2} \circ \Pi_{\gamma_2}^\lambda &= \Pi_{\gamma_2} \circ \Pi_{\gamma_2 \gamma'_2} \circ \Pi_{\gamma'_2}^\lambda = \Pi_\gamma \circ \Pi_{\gamma \gamma'_2} \circ \Pi_{\gamma'_2}^\lambda = \Pi_\gamma \circ \Pi_{\gamma_2}^\lambda), \end{aligned}$$

ce qui montre que les homomorphismes

$$\Pi_\lambda^\gamma \circ \Pi_\gamma \quad (\text{resp. } \Pi_\gamma \circ \Pi_\gamma^\lambda)$$

définissent des homomorphismes

$$\begin{aligned} \varepsilon_\lambda: \lim_{\leftarrow \Gamma/\Gamma_1} \lim_{\leftarrow x(\gamma)/x_1(\gamma)} F \rightarrow F_\lambda \\ (\text{resp } \varepsilon^\lambda: G_\lambda \rightarrow \lim_{\leftarrow \Gamma_0/\Gamma_1^0} \lim_{\leftarrow x(\gamma_0)/x_1(\gamma_0)} G). \end{aligned}$$

On vérifie que

$$\begin{aligned} \lim_{\leftarrow \Gamma/\Gamma_1} \lim_{\leftarrow x(\gamma)/x_1(\gamma)} F \text{ et la famille } \{ \varepsilon_\lambda \}_{\lambda \in \Lambda} \\ (\text{resp. } \lim_{\leftarrow \Gamma_0/\Gamma_1^0} \lim_{\leftarrow x(\gamma_0)/x_1(\gamma_0)} G \text{ et la famille } \{ \varepsilon^\lambda \}_{\lambda \in \Lambda}) \end{aligned}$$

satisfont aux conditions (i), (ii) et (iii). On peut donc conclure que l'homomorphisme (2) est un isomorphisme.

Q. E. D.

COROLLAIRE 1. I. 3. — *Supposons que x satisfait aux conditions de 1. I. 2 et que $\text{im } x = \Lambda$. Alors on a un isomorphisme de foncteurs*

$$\begin{aligned} \lim_{\leftarrow \Gamma} \lim^* \simeq \lim^* \\ (\text{resp. } \lim_{\leftarrow \Gamma_0} \lim^* \simeq \lim^*). \end{aligned}$$

Démonstration. — Immédiate.

Définition 1.1.4. — On dit qu'un système projectif F (resp. G) sur Λ (resp. Λ_0) est flasque (resp. coflasque) si pour tout $\lambda \in \Lambda$ et tout sous-ensemble Λ_1 de $\hat{\lambda}$ tel que $\Lambda_1 = \hat{\Lambda}_1$ l'homomorphisme

$$\Delta(\hat{\lambda}, \Lambda_1) F \quad [\text{resp. } \nabla(\hat{\lambda}, \Lambda_1) G]$$

est surjectif (resp. injectif).

Définition 1.1.5. — On dit que le sous-ensemble Λ_1 de Λ est cofinal (dans Λ) si $\Delta(\Lambda, \Lambda_1)$ et $\nabla(\Lambda, \Lambda_1)$ sont des isomorphismes de foncteurs.

Remarque. — Dans [30], Zuei-Zong Yeh appela « star epimorph » tout système projectif F tel que pour tout sous-ensemble Λ_1 de Λ , $\Delta(\Lambda, \Lambda_1) F$ est surjectif. J. E. Roos [24] donna plus tard le nom « flasque » à ces systèmes. Cependant il nous semble que la bonne notion est celle de 1.1.4. Par exemple, si Λ est filtrant à gauche, alors tout système projectif constant sur Λ est flasque au sens de 1.1.4 mais bien sûr non pas au sens de [24].

LEMME 1.1.6. — *Supposons que F (resp. G) soit flasque (resp. coflasque). Soit Λ_1 un sous-ensemble de Λ tel que $\Lambda_1 = \hat{\Lambda}_1$, alors $\Delta(\Lambda, \Lambda_1) F$ [resp. $\nabla(\Lambda, \Lambda_1) G$] est surjectif (resp. injectif).*

Démonstration.

1° $\Delta(\Lambda, \Lambda_1) F$ est surjectif. Soit $f_1 \in \lim_{\leftarrow \Lambda_1} F$ et soit Ω l'ensemble des couples (Λ_2, f_2) tels que

$$\Lambda_1 \subseteq \Lambda_2 \subseteq \Lambda, \quad \Lambda_2 = \hat{\Lambda}_2, \quad f_2 \in \lim_{\leftarrow \Lambda_2} F, \quad \Delta(\Lambda_2, \Lambda_1) F(f_2) = f_1.$$

Ω est un ensemble, ordonné par la relation $(\Lambda_2, f_2) < (\Lambda_3, f_3)$ évidente.

a. Ω n'est pas vide puisque $(\Lambda_1, f_1) \in \Omega$.

b. Ω est inductif. En effet, soit $(\Lambda_i, f_i)_{i \in I}$ un sous-ensemble linéairement ordonné de Ω et posons $\Lambda_0 = \bigcup_{i \in I} \Lambda_i$. Alors si f_0 est l'élément de $\lim_{\leftarrow \Lambda_0} F$ défini par la famille $\{f_{i\lambda}\}_{\lambda \in \Lambda_i, i \in I}$ on voit tout de suite que $(\Lambda_0, f_0) \in \Omega$ et que $(\Lambda_i, f_i) < (\Lambda_0, f_0)$ pour tout $i \in I$.

Soit donc (Λ_0, f_0) un élément maximal de Ω et supposons que $\Lambda_0 \neq \Lambda$. Prenons un élément $\lambda_0 \notin \Lambda$, $\lambda_0 \notin \Lambda_0$ et posons

$$\begin{aligned} \Lambda_2 &= \hat{\lambda}_0 \cap \Lambda_0 \\ \Lambda_1 &= \hat{\lambda}_0 \cup \Lambda_0, \end{aligned}$$

On a $\Lambda_2 = \hat{\Lambda}_2$, $\Lambda_1 = \hat{\Lambda}_1$, $\Lambda_0 \subsetneq \Lambda_1$.

Soit f_2 l'image de f_0 dans $\lim_{\leftarrow \Lambda_2} F$, et soit f_{λ_0} un élément de F_{λ_0} dont l'image dans $\lim_{\leftarrow \Lambda_2} F$ est f_2 . Il est immédiat que f_0 et f_{λ_0} définit un élément f_1 de $\lim_{\leftarrow \Lambda_1} F$ dont l'image dans $\lim_{\leftarrow \Lambda_0} F$ est f_0 . Il en résulte que $(\Lambda_1, f_1) \in \Omega$, $(\Lambda_0, f_0) \not\leq (\Lambda_1, f_1)$, en contradiction avec la maximalité de (Λ_0, f_0) . Donc $\Lambda_0 = \Lambda$ et $f_1 \in \text{im } \Delta(\Lambda, \Lambda_1) F$.

2° $\nabla(\Lambda, \Lambda_1) G$ est injectif. Soit \mathfrak{V} l'ensemble des sous-ensembles Λ_2 de Λ contenant Λ_1 tels que $\Lambda_2 = \hat{\Lambda}_2$, $\nabla(\Lambda_2, \Lambda_1) G$ est injectif. \mathfrak{V} est ordonné par inclusion.

a. \mathfrak{V} n'est pas vide puisque $\Lambda_1 \in \mathfrak{V}$.

b. \mathfrak{V} est inductif. Soit en effet $\{\Lambda_i\}_{i \in I}$ un sous-ensemble linéairement ordonné de \mathfrak{V} . Munissons I de l'ordre induit des inclusions des Λ_i . Posons $\Lambda_0 = \bigcup_{i \in I} \Lambda_i$. D'après (1.1.3) on a

$$\lim_{\rightarrow I_0} \lim_{\rightarrow \Lambda_i} G \simeq \lim_{\rightarrow \Lambda_0} G$$

donc, puisque $\lim_{\rightarrow I_0}$ est exact, on a $\Lambda_0 \in \mathfrak{V}$, $\Lambda_i < \Lambda_0$ pour tout $i \in I$.

Soit donc Λ_0 un élément maximal de \mathfrak{V} et supposons que $\Lambda_0 \neq \Lambda$. Soit λ_0 un élément de Λ n'appartenant pas à Λ_0 . Posons $\Lambda_2 = \Lambda_0 \cap \hat{\lambda}_0$, $\Lambda_1 = \Lambda_0 \cup \hat{\lambda}_0$. Il est clair que $\Lambda_1 = \hat{\Lambda}_1$, $\Lambda_2 = \hat{\Lambda}_2$. Utilisant 1.1.3 on voit que

$$\lim_{\rightarrow \Lambda_1} G \simeq \lim_{\rightarrow \Lambda_0} G \oplus G_{\lambda_0},$$

$$\lim_{\rightarrow \Lambda_1} G.$$

Puisque $\lim_{\rightarrow \Lambda_0} G \rightarrow G_{\lambda_0}$ est injectif on voit que $\lim_{\rightarrow \Lambda_0} G \rightarrow \lim_{\rightarrow \Lambda_1} G$ est injectif.

Donc $\Lambda_1 \in \mathfrak{V}$, en contradiction avec la maximalité de Λ_0 .

Q. E. D.

LEMME 1.1.7. — Pour tout sous-ensemble Λ_1 de Λ avec $\Lambda_1 = \hat{\Lambda}_1$ il existe une suite exacte de foncteurs

$$0 \rightarrow \lim_{\leftarrow \Lambda/\Lambda_1}^* \rightarrow \lim_{\leftarrow \Lambda}^* \rightarrow \lim_{\leftarrow \Lambda_1}^* \\ \left(\text{resp. } \lim_{\rightarrow \Lambda_1}^* \rightarrow \lim_{\rightarrow \Lambda_0}^* \rightarrow \lim_{\rightarrow \Lambda_0/\Lambda_1}^* \rightarrow 0 \right).$$

Démonstration. — Soit L_{Λ_1} (resp. R_{Λ_1}) le système projectif sur Λ (resp. Λ_0) défini par :

$$(L_{\Lambda_1})_{\lambda} = \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda \notin \Lambda_1, \\ L & \text{si } \lambda \in \Lambda_1, \end{cases}$$

les homomorphismes associés au couple $\lambda_1 < \lambda_2$ étant nuls si $\lambda_2 \notin \Lambda_1$, l'identité sinon.

[Resp.

$$(R_{\Lambda_1})_\lambda = \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda \notin \Lambda_1 \\ R & \text{si } \lambda \in \Lambda_1, R \text{ injectif,} \end{cases}$$

les homomorphismes associés au couple $\lambda_2 < \lambda_1$ (dans Λ_0) étant nuls si $\lambda_2 \notin \Lambda_1$, l'identité sinon.]

Alors on a une suite exacte de systèmes projectifs sur Λ (resp. Λ_0)

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow L_{\Lambda/\Lambda_1} \rightarrow L_{\Lambda/\emptyset} \rightarrow L_{\Lambda_1} \rightarrow 0 \\ (\text{resp. } 0 \rightarrow R_{\Lambda/\Lambda_1} \rightarrow R_{\Lambda/\emptyset} \rightarrow R_{\Lambda_1} \rightarrow 0). \end{aligned}$$

Utilisant (1) et l'isomorphisme évident

$$\begin{aligned} \lim_{\leftarrow \Lambda_1} F \simeq \text{Hom}_{\underline{C}_\Lambda} (L_{\Lambda_1}, F) \\ \left[\text{resp. } \text{Hom}_L \left(\lim_{\rightarrow \Lambda_1^0} G, R \right) \simeq \text{Hom}_{\underline{C}_{\Lambda_0}} (G, R_{\Lambda_1}) \right], \end{aligned}$$

la conclusion du lemme résulte de l'exactitude de $\text{Hom}_L (*, R)$, R étant injectif.

Q. E. D.

COROLLAIRE 1. I. 8. — Si F (resp. G) est flasque (resp. coflasque) alors on a une suite exacte

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \lim_{\leftarrow \Lambda/\Lambda_1} F \rightarrow \lim_{\leftarrow \Lambda} F \rightarrow \lim_{\leftarrow \Lambda_1} F \rightarrow 0 \\ (\text{resp. } 0 \rightarrow \lim_{\rightarrow \Lambda_1^0} G \rightarrow \lim_{\rightarrow \Lambda_0} G \rightarrow \lim_{\rightarrow \Lambda_0/\Lambda_1^0} G \rightarrow 0). \end{aligned}$$

Démonstration. — Cela résulte de 1. I. 6 et 1. I. 7.

Q. E. D.

PROPOSITION 1. I. 9. — Soit F (resp. G) flasque (resp. coflasque) alors pour tout sous-ensemble Λ_1 de Λ tel que $\Lambda_1 = \hat{\Lambda}_1$ on a

$$\begin{aligned} \lim_{\leftarrow \Lambda/\Lambda_1}^{(p)} F = 0 \text{ pour } p \geq 1 \\ (\text{resp. } \lim_{\rightarrow \Lambda_0/\Lambda_1^0}^{(q)} G = 0 \text{ pour } q \geq 1). \end{aligned}$$

Démonstration. — Considérons une suite exacte de systèmes projectifs sur Λ (resp. Λ_0)

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow F \rightarrow F_1 \rightarrow F_2 \rightarrow 0 \\ (\text{resp. } 0 \rightarrow G_2 \rightarrow G_1 \rightarrow G \rightarrow 0). \end{aligned}$$

Il s'agit de montrer que la suite

$$\begin{aligned} & 0 \rightarrow \lim_{\leftarrow \Lambda/\Lambda_1} F \xrightarrow{\varphi_1} \lim_{\leftarrow \Lambda/\Lambda_1} F_1 \xrightarrow{\varphi_2} \lim_{\leftarrow \Lambda/\Lambda_1} F_2 \rightarrow 0 \\ & \left(\text{resp. } 0 \rightarrow \lim_{\rightarrow \Lambda_0/\Lambda_1^0} G_2 \xrightarrow{\psi_2} \lim_{\rightarrow \Lambda_0/\Lambda_1^0} G_1 \xrightarrow{\psi_1} \lim_{\rightarrow \Lambda_0/\Lambda_1^0} G \rightarrow 0 \right) \end{aligned}$$

est exacte. Il suffit de montrer que φ_2 (resp. ψ_2) est surjectif (resp. injectif).

Considérons le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} & & 0 & & \\ & & \uparrow & & \\ 0 & \rightarrow & \lim_{\leftarrow \Lambda_1} F & \rightarrow & \lim_{\leftarrow \Lambda_1} F_1 \xrightarrow{\varphi_1} \lim_{\leftarrow \Lambda_1} F_2 \rightarrow 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \rightarrow & \lim_{\leftarrow \Lambda} F & \rightarrow & \lim_{\leftarrow \Lambda} F_1 \xrightarrow{\varphi_2} \lim_{\leftarrow \Lambda} F_2 \rightarrow 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \rightarrow & \lim_{\leftarrow \Lambda/\Lambda_1} F & \xrightarrow{\varphi_1} & \lim_{\leftarrow \Lambda/\Lambda_1} F_1 \xrightarrow{\varphi_2} \lim_{\leftarrow \Lambda/\Lambda_1} F_2 \rightarrow 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow \\ & & 0 & & 0 \end{array}$$

$$\text{resp. } \left\{ \begin{array}{ccccc} & & & & 0 \\ & & & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & \lim_{\rightarrow \Lambda_1^0} G_2 & \xrightarrow{\psi_2} & \lim_{\rightarrow \Lambda_1^0} G_1 \rightarrow \lim_{\rightarrow \Lambda_1^0} G \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & \lim_{\rightarrow \Lambda_0} G_2 & \xrightarrow{\psi_3} & \lim_{\rightarrow \Lambda_0} G_1 \rightarrow \lim_{\rightarrow \Lambda_0} G \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & \lim_{\rightarrow \Lambda_0/\Lambda_1^0} G_2 & \xrightarrow{\psi_2} & \lim_{\rightarrow \Lambda_0/\Lambda_1^0} G_1 \xrightarrow{\psi_1} \lim_{\rightarrow \Lambda_0/\Lambda_1^0} G \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 0 & & 0 \end{array} \right\}$$

Par 1.1.7 et 1.1.8 toutes les suites dans ce diagramme sont exactes.

Par « diagram chasing » on voit qu'il suffit de montrer que φ_3 et φ_4 (resp. ψ_3 et ψ_4) sont surjectifs (resp. injectifs). Il en résulte qu'on peut supposer $\Lambda_1 = \emptyset$.

$\Gamma^0 \varphi_2$ est surjectif. Soit $f_2 \in \lim_{\leftarrow \Lambda} F_2$ et soit Λ_1 un sous-ensemble de Λ .

Notons par $f_2(\Lambda_1)$ l'image de f_2 dans $\lim_{\leftarrow \Lambda_1} F_2$, et soient

$$\begin{aligned} \varphi_1(\Lambda_1) &: \lim_{\leftarrow \Lambda_1} F \rightarrow \lim_{\leftarrow \Lambda_1} F_1, \\ \varphi_2(\Lambda_1) &: \lim_{\leftarrow \Lambda_1} F_1 \rightarrow \lim_{\leftarrow \Lambda_1} F_2. \end{aligned}$$

Considérons l'ensemble ordonné Ω de tous les couples $(\Lambda_1, f_1(\Lambda_1))$, où Λ_1 est un sous-ensemble de Λ tel que $\Lambda_1 = \hat{\Lambda}_1$ et

$$f_1(\Lambda_1) \in \lim_{\leftarrow \Lambda_1} F_1, \quad \varphi_2(\Lambda_1)(f_1(\Lambda_1)) = f_2(\Lambda_1).$$

l'ordre étant défini comme dans la démonstration de 1.1.6. Puisque $\lim_{\leftarrow \hat{\lambda}} F = F_\lambda$ pour tout $\lambda \in \Lambda$ et tout F , on a que $\varphi_2(\hat{\lambda})$ est surjectif.

Il en résulte :

- a. Ω n'est pas vide.
- b. Ω est inductif.

Soit donc $(\Lambda_0, f_1(\Lambda_0))$ un élément maximal de Ω et supposons que $\Lambda_0 \neq \Lambda$. Il existe alors un $\lambda_0 \in \Lambda$, $\lambda_0 \notin \Lambda_0$. Posons $\Lambda_1 = \hat{\lambda}_0 \cup \Lambda_0$, $\Lambda_2 = \hat{\lambda}_0 \cap \Lambda_0$. Soient $f_1(\Lambda_2)$ l'image de $f_1(\Lambda_0)$ dans $\lim_{\leftarrow \Lambda_2} F_1$, f_0 un élément de $F_{1\lambda_0}$ tel que $\varphi_2(\hat{\lambda}_0)(f_0) = f_2(\hat{\lambda}_0)$, et f_1 l'image de f_0 dans $\lim_{\leftarrow \Lambda_2} F_1$. Il est clair que

$$f_1(\Lambda_2) - f_1 \in \ker \varphi_2(\Lambda_2).$$

Donc il existe un élément $f(\Lambda_2) \in \lim_{\leftarrow \Lambda_2} F$ tel que

$$\varphi_1(\Lambda_2)(f(\Lambda_2)) = f_1(\Lambda_2) = f_1.$$

Puisque F est flasque il existe un $f \in \lim_{\leftarrow \Lambda_0} F = F_{\lambda_0}$ dont l'image dans $\lim_{\leftarrow \Lambda_2} F$ est $f(\Lambda_2)$.

Soit $f'_1 = \varphi_1(\hat{\lambda}_0)(f)$ et posons $f''_1 = f_1 + f'_1$. On voit alors facilement que $f_1(\Lambda_0)$ et f''_1 définissent un élément $f_1(\Lambda_1)$ de $\lim_{\leftarrow \Lambda_1} F_1$ tel que $(\Lambda_1, f_1(\Lambda_1)) \in \Omega$ et tel que

$$(\Lambda_0, f_1(\Lambda_0)) \not\leq (\Lambda_1, f_1(\Lambda_1)),$$

donc contradiction.

2° ψ_2 est injectif. Soit \mathcal{V} l'ensemble ordonné par inclusion des sous-ensembles Λ_1 de Λ tel que $\Lambda_1 = \hat{\Lambda}_1$ et tels que la suite

$$0 \rightarrow \lim_{\rightarrow \Lambda_1^0} G_2 \xrightarrow{\psi_2(\Lambda_1)} \lim_{\rightarrow \Lambda_1^1} G_1 \xrightarrow{\psi_1(\Lambda_1)} \lim_{\rightarrow \Lambda_1^0} G \rightarrow 0$$

soit exacte.

- a. \mathcal{V} n'est pas vide puisque $\hat{\lambda} \in \mathcal{V}$ pour tout $\lambda \in \Lambda$.
- b. \mathcal{V} est inductif. Cela résulte de l'exactitude de $\lim_{\rightarrow I}$ pour I linéairement ordonné, et de 1.1.3, (voir la démonstration de 1.1.6).

Soit donc Λ_0 un élément maximal de \mathfrak{V} et supposons que $\Lambda_0 \neq \Lambda$. Il existe alors un $\lambda_0 \in \Lambda$, $\lambda_0 \notin \Lambda_0$. Posons $\Lambda_1 = \hat{\lambda}_0 \cup \Lambda_0$, $\Lambda_2 = \hat{\lambda}_0 \cap \Lambda_0$.

Utilisant 1.1.3 on trouve un diagramme commutatif dont toutes les suites sont exactes

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & 0 \\
 & & & & & & \downarrow \\
 \lim G_2 & \longrightarrow & \lim G_1 & \longrightarrow & \lim G & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow \Lambda_0^{\circ} & & \downarrow \Lambda_0^{\circ} & & \downarrow \Lambda_0^{\circ} & & \downarrow \rho \\
 0 \rightarrow \lim G_2 \oplus G_{2\lambda_0} & \rightarrow & \lim G_1 \oplus G_{1\lambda_0} & \rightarrow & \lim G \oplus G_{\lambda_0} & \rightarrow & 0 \\
 \downarrow \Lambda_0^{\circ} & & \downarrow \Lambda_0^{\circ} & & \downarrow \Lambda_0^{\circ} & & \downarrow \\
 \lim G_2 & \xrightarrow{\psi_2(\Lambda_1)} & \lim G_1 & \longrightarrow & \lim G & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow \Lambda_1^{\circ} & & \downarrow \Lambda_1^{\circ} & & \downarrow \Lambda_1^{\circ} & & \downarrow \\
 & & & & & & 0
 \end{array}$$

ρ est injectif puisque, par hypothèse, $\lim G \rightarrow G_{\lambda_0}$ l'est. Par « diagram chasing » on voit que $\psi_2(\Lambda_1)$ est injectif, donc que $\Lambda_1 \in \mathfrak{V}$. Or Λ_1 est strictement plus grand que Λ_0 , donc contradiction.

Q. E. D.

Soit maintenant $\{\bar{F}_{\lambda}\}_{\lambda \in \Lambda}$ (resp. $\{\bar{G}_{\lambda}\}_{\lambda \in \Lambda}$) une famille de L-modules, et considérons le système projectif F (resp. G) sur Λ (resp. Λ_0) défini par

$$\begin{array}{c}
 \lambda \sim \prod_{\lambda_1 < \lambda} \bar{F}_{\lambda_1} \\
 \left(\text{resp. } \lambda \sim \prod_{\lambda < \lambda_1} \bar{G}_{\lambda_1} \right)
 \end{array}$$

les homomorphismes associés au couple $(\lambda_1 < \lambda_2)$ [resp. $(\lambda_2 < \lambda_1)$ dans Λ_0] étant les projections (resp. injections) évidentes. Montrons que F (resp. G) est flasque (resp. coflasque). En effet on a pour tous sous-ensembles Λ_1 et Λ_2 tels que $\Lambda_1 = \hat{\Lambda}_1$, $\Lambda_2 = \hat{\Lambda}_2$:

$$\begin{array}{c}
 \lim_{\leftarrow \Lambda_1/\Lambda_1 \cap \Lambda_2} F \simeq \prod_{\substack{\lambda \in \Lambda_1 \\ \lambda \notin \Lambda_2}} F_{\lambda} \\
 \left(\text{resp. } \lim_{\rightarrow \Lambda_2/(\Lambda_1 \cap \Lambda_2)} G \simeq \prod_{\substack{\lambda \notin \Lambda_2 \\ \lambda \in \Lambda_1}} \bar{G}_{\lambda} \right),
 \end{array}$$

d'où il résulte que F (resp. G) est flasque (resp. coflasque). Faute d'un meilleur nom nous appellons Π -flasque (resp. Π -coflasque) tout système projectif défini par une telle famille de modules.

On dit que F (resp. G) est Π -injectif (resp. Π -projectif) si F (resp. G) est défini par une famille de modules injectifs (resp. projectifs).

Nous avons dans [14] montré que tout objet Π -injectif (resp. Π -projectif) dans \underline{C} est injectif (resp. projectif). De plus on peut montrer que dans des cas assez généraux tout objet injectif (resp. projectif) est Π -injectif (resp. Π -projectif). Cependant il y a des injectifs qui ne sont pas Π -injectifs, ce qu'on peut voir facilement en regardant le système projectif constant R sur \mathbf{Z} , R étant un module injectif.

Nous allons maintenant étudier la relation entre la théorie homologique des ensembles semi-simpliciaux et la théorie des foncteurs \lim et \lim .

Soit donc donné un ensemble semi-simplicial E , et soient

$$S_i: E^n \rightarrow E^{n-1}$$

$i = 0, \dots, n$, les applications correspondantes aux applications strictement croissantes du $(n - 1)$ -simplexe type dans le n -simplexe type.

Classiquement on désigne par $C_n(E, L)$ le L -module libre engendré par l'ensemble E^n , et par d_n l'homomorphisme

$$C_n(E, L) \rightarrow C_{n-1}(E, L)$$

défini par :

$$d_n(e^n) = \sum_{i=0}^n (-1)^i S_i(e^n).$$

De plus, on pose :

$$\begin{aligned} C_q(E, N) &= C_q(E, L) \otimes N, & d_q &= d_q \otimes id_N, \\ C^p(E, M) &= \text{Hom}(C_p(E, L), M) & \delta^p &= \text{Hom}(d_p, id_M), \end{aligned}$$

pour tout L -module N et tout L -module M . On aura ainsi deux complexes

$$C_*(E, N) \quad \text{et} \quad C^*(E, M).$$

Soit E_1 un sous-ensemble semi-simplicial de E ; alors nous avons d'une façon évidente des homomorphismes de complexes :

$$\begin{aligned} i: C_*(E_1, N) &\rightarrow C_*(E, N), \\ j: C^*(E, M) &\rightarrow C^*(E_1, M). \end{aligned}$$

Par définition nous avons

$$\begin{aligned} H_{(i)}(E, E_1; N) &= H_{(i)}(\text{coker } i), \\ H^{(j)}(E, E_1; M) &= H^{(j)}(\text{ker } j). \end{aligned}$$

Définissons maintenant un ordre partiel dans E , en posant :

$$\text{si } m < n, \quad e^m < e^n$$

si et seulement s'il existe des i_1, i_2, \dots, i_r tels que

$$e^m = S_{i_1} \circ S_{i_2} \circ \dots \circ S_{i_r}(e^n)$$

$$\text{si } m = n, \quad e^m < e^n$$

si et seulement si $e^m = e^n$.

Dès maintenant il sera sous-entendu que, chaque fois qu'on considère E comme ensemble ordonné, c'est par rapport à cet ordre.

Pour tout $e^n \in E^n$ considérons le sous-ensemble semi-simplicial de E , noté \bar{e}^n , des « faces » de e^n . Si $e^m < e^n$, il existe une injection évidente $\bar{e}^m \rightarrow \bar{e}^n$, telle que

$$e^n \rightsquigarrow \bar{e}^n$$

définit un système projectif sur E_0 à valeurs dans la catégorie des ensembles semi-simpliciaux. Il en résulte que pour tout p (resp. q),

$$e^n \rightsquigarrow C^p(\bar{e}^n, M)$$

$$[\text{resp. } e^n \rightsquigarrow C_q(\bar{e}^n, N)]$$

définit un système projectif

$$C^p(M) \quad [\text{resp. } C_q(N)].$$

sur E (resp. E_0), à valeurs dans mod_L . De plus la famille $\{\delta_n^p\}_{n \geq 0}$ (resp. $\{\partial_\sigma^n\}_{n \geq 0}$) des différentielles

$$\delta_n^p: C^p(\bar{e}_n, M) \rightarrow C^{p+1}(\bar{e}_n, M)$$

$$[\text{resp. } \partial_\sigma^n: C_{q+1}(\bar{e}_n, N) \rightarrow C_q(\bar{e}_n, N)]$$

définit un homomorphisme de systèmes projectifs sur E (resp. E_0)

$$d^p: C^p(M) \rightarrow C^{p+1}(M)$$

$$[\text{resp. } d_q: C_{q+1}(N) \rightarrow C_q(N)].$$

Nous avons donc construit un complexe de systèmes projectifs sur E (resp. E_0)

$$\{C^\bullet(M), d^\bullet\} \quad [\text{resp. } \{C_\bullet(N), d_\bullet\}].$$

PROPOSITION 1.1.10. — *Soit E un ensemble semi-simplicial, et soit E_1 un sous-ensemble semi-simplicial de E , alors pour tout L -module M (resp. N) il existe une suite spectrale donnée par*

$$E_2^{p,q} = \lim_{\substack{\leftarrow \\ E/E_1}}^{(p)} H^q(\bar{e}, M)$$

$$\left(\text{resp. } E_{p,q}^2 = \lim_{\substack{\rightarrow \\ E_0/E_1}}^{(p)} H_q(\bar{e}, N) \right)$$

aboutissant à

$$H^{(c)}(E, E_1; M) \quad [\text{resp. } H_{(c)}(E, E_1; N)].$$

Démonstration. — Montrons premièrement que pour tout p (resp. q) le système projectif $C^p(M)$ [resp. $C_q(N)$] est II-flasque (resp. II-coflasque).

En effet, soit $\{\bar{F}_e\}_{e \in E}$ (resp. $\{\bar{G}_e\}_{e \in E}$) la famille de L-modules définie par

$$\bar{F}_e = \begin{cases} 0 & \text{si } e \notin E^p \\ M & \text{si } e \in E^p \end{cases}$$

$$\left(\text{resp. } \bar{G}_e = \begin{cases} 0 & \text{si } e \notin E^q \\ N & \text{si } e \in E^q \end{cases} \right),$$

alors il est facile de voir que $C^p(M)$ [resp. $C_q(N)$] est défini par $\{\bar{F}_e\}_{e \in E}$ (resp. $\{\bar{G}_e\}_{e \in E}$).

Soit maintenant :

$$C^* \text{ (resp. } C_*)$$

une résolution injective (resp. projective) du complexe $C(M)$ [resp. $C(N)$] dans la catégorie \underline{C}_E (resp. \underline{C}_{E^*}), et considérons le double-complexe :

$$\lim_{\leftarrow E/E_1} C^* \quad \left(\text{resp. } \lim_{\rightarrow E_0/E_1^*} C_* \right).$$

La première suite spectrale est donnée par

$${}^1E_2^{p,q} = H^p \left(\lim_{\leftarrow E/E_1}^{(q)} C^*(M) \right)$$

$$\left[\text{resp. } {}^1E_{p,q}^2 = H_p \left(\lim_{\rightarrow E_0/E_1^*} C_*(N) \right) \right]$$

et la deuxième suite spectrale est donnée par

$${}^0E_2^{p,q} = \lim_{\leftarrow E/E_1}^{(p)} H^q(\bar{e}, M)$$

$$\left(\text{resp. } {}^0E_{p,q}^2 = \lim_{\rightarrow E_0/E_1^*}^{(p)} H_q(\bar{e}, N) \right).$$

D'après la première partie de la démonstration, la première suite spectrale dégénère. La proposition résulte alors de ce que

$$\lim_{\leftarrow E/E_1} C^*(M) = \text{coker } i$$

$$\left(\text{resp. } \lim_{\rightarrow E_0/E_1^*} C_*(N) = \text{ker } j \right).$$

Q. E. D.

COROLLAIRE 1.1.11. — Supposons que E satisfait à la condition suivante :

Pour tout $e \in E$ l'ensemble semi-simplicial \bar{e} est acyclique. Alors on a l'isomorphisme naturel :

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{\leftarrow \\ E/E_1}}^{(*)} M \simeq H^{(*)}(E, E_1; M) \\ \left(\text{resp. } \lim_{\substack{\rightarrow \\ E_0/E_1^0}}^{(*)} N \simeq H_{(*)}(E, E_1; N) \right). \end{aligned}$$

Remarque 2. — Soit K un schéma simplicial. Il est alors clair que K satisfait à la condition de 1.1.11, donc nous avons un isomorphisme canonique

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{\leftarrow \\ K/K_1}}^{(*)} M \simeq H^{(*)}(K, K_1; M) \\ \left(\text{resp. } \lim_{\substack{\rightarrow \\ K_0/K_1^0}}^{(*)} N \simeq H_{(*)}(K, K_1; N) \right) \end{aligned}$$

pour tout sous-schéma K_1 de K .

Soit X un espace topologique T_1 , et soit $\Delta(X)$ l'ensemble simplicial des simplexes singuliers. Il est alors facile de montrer que $\Delta(X)$ ne satisfait pas à la condition de 1.1.11. Cependant nous allons, au chapitre III, montrer qu'il existe quand même un isomorphisme canonique

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{\leftarrow \\ \Delta(X)/\Delta(X_1)}}^{(*)} M \simeq H^{(*)}(X, X_1; M) \\ \left(\text{resp. } \lim_{\substack{\rightarrow \\ \Delta(X)_0/\Delta(X)_0}}^{(*)} N \simeq H_{(*)}(X, X_1; N) \right) \end{aligned}$$

pour tout sous-espace topologique X_1 de X .

Définition 1.1.12. — Soit E un ensemble semi-simplicial, alors on appelle système de coefficients pour la cohomologie (resp. pour l'homologie) sur E , tout système projectif sur E_0 (resp. E).

Soit E un ensemble semi-simplicial, soit E_1 un sous-ensemble semi-simplicial de E et soit F (resp. G) un système de coefficients pour la cohomologie (resp. pour l'homologie) de E . Définissons le complexe

$$C^*(E, E_1; F) \quad [\text{resp. } C_*(E, E_1; G)]$$

par

$$C^p(E, E_1; F) = \prod_{\substack{e^p \in E^p \\ e^p \in E_1^p}} F_{e^p} \quad \left(\text{resp. } C_q(E, E_1; G) = \prod_{\substack{e^q \in E^q \\ e^q \in E_1^q}} G_{e^q} \right),$$

la différentielle δ^p (resp. d_q) étant définie par :

$$\left(\begin{array}{l} \delta^p (\{f_{e^p}\})_{e^{p+1}} = \sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i \gamma_{s_i e^{p+1}}^{s_i e^{p+1}} (f_{s_i e^{p+1}}) \\ \text{resp. } d_q (g(e^{p+1})) = \sum_{i=0}^{q+1} (-1)^i \rho_{s_i e^{p+1}}^{e^{p+1}} (g) (s_i e^{p+1}) \end{array} \right),$$

où $F = \{F_e, \gamma\}$ (resp. $G = \{G_e, \rho\}$).

On a classiquement

$$\delta \circ \delta = 0 \quad (\text{resp. } d \circ d = 0).$$

Désignons par

$$H^*(E, E_1; F) \quad [\text{resp. } H_*(E, E_1; G)]$$

l'homologie de ce complexe.

Nous vérifions sans peine la relation :

$$\left(\begin{array}{l} H^0(E, E_1; F) \simeq \lim_{\substack{\leftarrow \\ E_0/E_1^1}} F \\ \text{resp. } H_0(E, E_1; G) \simeq \lim_{\substack{\rightarrow \\ E/E_1}} G \end{array} \right).$$

Avec un peu plus de travail nous pouvons démontrer :

THÉORÈME 1.1.13. — *Supposons que E satisfait à la condition de 1.1.11, alors nous avons un isomorphisme canonique :*

$$\left(\begin{array}{l} \lim_{\substack{\leftarrow \\ E_0/E_1^1}} F \simeq H^*(E, E_1; F) \\ \text{resp. } \lim_{\substack{\rightarrow \\ E/E_1}} G \simeq H_*(E, E_1; G) \end{array} \right).$$

La démonstration ne sera pas donnée ici.

A tout ensemble ordonné Λ sont associés deux schémas simpliciaux, notés

$$E_\Lambda \quad \text{et} \quad \Delta_\Lambda.$$

L'ensemble des sommets de E_Λ et de Δ_Λ est l'ensemble Λ . Les sous-ensembles distingués de E_Λ sont les sous-ensembles finis de Λ :

$$(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_p)$$

pour lesquels on a $\lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_p$.

Les sous-ensembles distingués de Δ_Λ sont les sous-ensembles finis de Λ :

$$(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_p)$$

pour lesquels on a $\bigcap_{i=0}^p \hat{\lambda}_i \neq \emptyset$.

A tout système projectif F (resp. G) sur Λ (resp. Λ_0) est associé un système de coefficients pour la cohomologie (resp. pour l'homologie) sur E_Λ et sur Δ_Λ , définis par :

$$F_{(\lambda_0, \dots, \lambda_p)} = F_{\lambda_0} \quad (\text{resp. } G_{(\lambda_0, \dots, \lambda_p)} = G_{\lambda_0})$$

et

$$F_{(\lambda_0, \dots, \lambda_p)} = \lim_{\substack{\longleftarrow \\ \bigcap_{i=0}^p \hat{\lambda}_i}} F \quad \left(\text{resp. } G_{(\lambda_0, \dots, \lambda_p)} = \lim_{\substack{\longrightarrow \\ \left(\bigcap_{i=0}^p \hat{\lambda}_i \right)^0}} G \right).$$

Si Λ_1 est un sous-ensemble de Λ tel que $\Lambda_1 = \hat{\Lambda}_1$, alors on peut y associer le sous-schéma E_{Λ_1} de E_Λ et le sous-schéma Δ_{Λ_1} de Δ_Λ .

Considérons maintenant les applications

$$\begin{aligned} x &: \Lambda \rightarrow PE_\Lambda, \\ \rho &: \Lambda \rightarrow P\Delta_\Lambda \end{aligned}$$

définies par

$$x(\lambda) = E_{\hat{\lambda}}, \quad \rho(\lambda) = \Delta_{\hat{\lambda}}.$$

Il est alors facile de voir que pour tout p (resp. q) les systèmes projectifs $C^p(x, F)$ [resp. $C_q(x, G)$] et $C^p(\rho, F)$ [resp. $C_q(\rho, G)$] sur Λ (resp. Λ_0) définis par

$$\lambda \rightsquigarrow C^p(x(\lambda); F) \quad [\text{resp. } \lambda \rightsquigarrow C_q(x(\lambda); G)],$$

et

$$\lambda \rightsquigarrow C^p(\rho(\lambda); F) \quad [\text{resp. } \lambda \rightsquigarrow C_q(\rho(\lambda); G)]$$

sont II-flasques (resp. II-coflasques). De plus on a

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{\longleftarrow \\ \Lambda/\Lambda_1}} C^*(x, F) &\simeq C^*(E_\Lambda, E_{\Lambda_1}; F) \\ \left(\text{resp. } \lim_{\substack{\longrightarrow \\ \Lambda_0/\Lambda_1^0}} C_*(x, G) \right) &\simeq C_*(E_\Lambda, E_{\Lambda_1}; G), \\ \lim_{\substack{\longleftarrow \\ \Lambda/\Lambda_1}} C^*(\rho, F) &\simeq C^*(\text{im } \rho, \rho(\Lambda_1); F) \\ \left(\text{resp. } \lim_{\substack{\longrightarrow \\ \Lambda_0/\Lambda_1^0}} C_*(\rho, G) \right) &\simeq C_*(\text{im } \rho, \rho(\Lambda_1); G). \end{aligned}$$

Cependant nous avons en général

$$\begin{aligned} \text{im } \rho &\neq \Delta_\Lambda, \\ \rho(\Lambda_1) &\neq \Delta_{\Lambda_1}. \end{aligned}$$

Utilisant l'application

$$(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_p) \rightsquigarrow (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_p, \lambda)$$

on fabrique une homotopie de

$$C^*(x(\lambda); F) \quad [\text{resp. } C_*(x(\lambda); G)]$$

et de

$$C(\rho(\lambda); F) \quad [\text{resp. } C(\rho(\lambda); G)]$$

montrant qu'avec les augmentations évidentes

$$\begin{aligned} F_\lambda &\rightarrow C^0(x(\lambda); F) & [\text{resp. } C_0(x(\lambda); G) \rightarrow G_\lambda], \\ F_\lambda &\rightarrow C^0(\rho(\lambda); F) & [\text{resp. } C_0(\rho(\lambda); G) \rightarrow G_\lambda], \end{aligned}$$

les complexes $C(x(\lambda); F)$ [resp. $C(x(\lambda); G)$] et $C(\rho(\lambda); F)$ [resp. $C(\rho(\lambda); G)$] sont acycliques.

Or ceci est équivalent à dire que nous avons deux résolutions II-flasques (resp. II-coflasques) de F (resp. G) sur Λ (resp. Λ_0), à savoir :

$$F \rightarrow C(x; F) \quad [\text{resp. } C(x, G) \rightarrow G]$$

et

$$F \rightarrow C(\rho; F) \quad [\text{resp. } C(\rho, G) \rightarrow G].$$

Utilisant 1.1.9 on voit qu'on a démontré le résultat suivant :

Théorème 1.1.14. — Soit Λ un ensemble ordonné, et considérons un système projectif F (resp. G) sur Λ (resp. Λ_0). Alors nous avons des isomorphismes canoniques :

$$\begin{aligned} \lim_{\leftarrow \Lambda/\Lambda_1}^{(*)} F &\simeq H^*(E_\Lambda, E_{\Lambda_1}; F) \\ &\left(\text{resp. } \lim_{\leftarrow \Lambda_0/\Lambda_1^0}^{(*)} G \simeq H^*(E_\Lambda, E_{\Lambda_1}; G) \right), \\ \lim_{\leftarrow \Lambda/\Lambda_1}^{(*)} F &\simeq H^*(\text{im } \rho, \rho(\Lambda_1); F) \\ &\left(\text{resp. } \lim_{\leftarrow \Lambda_0/\Lambda_1^0}^{(*)} G \simeq H^*(\text{im } \rho, \rho(\Lambda_1); G) \right). \end{aligned}$$

Remarque 3. — Il est évident que nous avons $E = E_{\Lambda_0}$, donc d'après 1.1.14, on a

$$\begin{aligned} \lim_{\leftarrow \Lambda}^{(*)} M &\simeq \lim_{\leftarrow \Lambda_0}^{(*)} N \\ &\left(\text{resp. } \lim_{\leftarrow \Lambda}^{(*)} N \simeq \lim_{\leftarrow \Lambda_0}^{(*)} N \right) \end{aligned}$$

pour tout L-module M (resp. N). Utilisant 1.1.13 on retrouve la forme absolue de 1.1.11.

Remarque 4. — Soit X un espace topologique tel que pour tout recouvrement ouvert U' de X il existe un recouvrement ouvert V' plus fin que U' pour lequel on a :

Pour toute famille finie $V_i \in V'$, $i = 0, \dots, p$, tel que $\bigcap_{i=0}^p V_i \neq \emptyset$ il existe un $U \in U'$ tel que $V_i \subseteq U$, $i = 0, \dots, p$.

Soit O_X l'ensemble ordonné des ouverts non vides de X . Au recouvrement U' (resp. V') on peut associer le recouvrement ouvert U (resp. V) de tous les éléments de O_X plus petits qu'un élément de U' (resp. V'). Le sous-ensemble de l'ensemble \mathcal{M}_X des recouvrements ouverts de X , des recouvrements de la forme U (resp. V) est cofinal.

Soit enfin

$$\rho_U : U \rightarrow P\Delta_U$$

définie par

$$\rho_U(V) = \Delta_{\emptyset},$$

alors on a

$$\Delta_V \subseteq \text{im } \rho_U.$$

Pour tout préfaisceau F sur X on a donc

$$\lim_{\substack{\longrightarrow \\ \{V\}}} C^*(\Delta_V; F) \simeq \lim_{\substack{\longrightarrow \\ \{U\}}} C^*(\text{im } \rho_U; F)$$

Or, par définition de la cohomologie de Čech on a

$$\check{H}^*(X; F) = \lim_{\substack{\longrightarrow \\ \{V\}}} H^*(\Delta_V; F)$$

Utilisant 1.1.14 on a donc le résultat suivant :

$$\check{H}^*(X; F) \simeq \lim_{\substack{\longrightarrow \\ M_x}} \lim_{\substack{\longleftarrow \\ U}} F.$$

1.2. Complexes résolvants pour \lim_{\longleftarrow} (resp. \lim_{\longrightarrow}) et théorème de cofinalité.

Pour tout ensemble ordonné Λ et tout sous-ensemble Λ_1 de Λ tel que $\Lambda_1 = \hat{\Lambda}_1$, il est facile de voir que le foncteur

$$(1) \quad F \rightsquigarrow C^*(E_\Lambda, E_{\Lambda_1}; F) \quad [\text{resp. } G \rightsquigarrow C_*(E_\Lambda, E_{\Lambda_1}; G)]$$

est un foncteur exact, donc d'après 1.1.14 est un foncteur résolvant pour $\lim_{\longleftarrow \Lambda/\Lambda_1}$ (resp. $\lim_{\longrightarrow \Lambda_0/\Lambda_1^c}$).

Nous allons construire ce foncteur par une autre méthode (voir [14]), mettant en évidence la relation (1) de 1.1. En effet nous allons retrouver le foncteur (1) en construisant une résolution Π -projective (resp. Π -injective) de L_{Λ/Λ_1} (resp. R_{Λ/Λ_1}) soit C_* (resp. C^*) et en calculant le complexe

$$\text{Hom}(C_*, F) \quad [\text{resp. } \text{Hom}(G, C^*)].$$

Pour le faire, soit Λ_0 un sous-ensemble quelconque de Λ et posons pour tout $\lambda \in \Lambda$

$$B_\lambda(\Lambda_0) = \{\lambda' \mid \lambda' \in \Lambda_0, \lambda' > \lambda\}.$$

Nous avons donc

$$\begin{aligned} B_\lambda(\Lambda_1) &\subseteq B_\lambda(\Lambda), \\ B_\lambda(\Lambda_1 \cap \Lambda_0) &\subseteq B_\lambda(\Lambda_0). \end{aligned}$$

Considérons les schémas simpliciaux

$$K_\lambda(\Lambda_0) \quad \text{et} \quad K_\lambda^+(\Lambda_0)$$

dont l'ensemble des sommets est $B_\lambda(\Lambda_0)$ et où les sous-ensembles

$$(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_p)$$

sont distingués si $\lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_p$ respectivement si $\lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_p$.

Il est clair que $K_\lambda(\Lambda_1 \cap \Lambda_0)$ est un sous-schéma simplicial de $K_\lambda(\Lambda_0)$, et que $K_\lambda^+(\Lambda_1 \cap \Lambda_0)$ est un sous-schéma simplicial de $K_\lambda^+(\Lambda_0)$.

De plus si $\lambda'_\lambda \lambda \in \Lambda$ et si $\lambda' > \lambda$, on a

$$B_{\lambda'}(\Lambda_0) \subseteq B_\lambda(\Lambda_0),$$

d'où :

$$\begin{aligned} K_{\lambda'}(\Lambda_0) &\subseteq K_\lambda(\Lambda_0), \\ K_{\lambda'}^+(\Lambda_0) &\subseteq K_\lambda^+(\Lambda_0). \end{aligned}$$

Pour tout $p \geq 0$ (resp. $q \geq 0$) on en déduit deux systèmes projectifs sur Λ (resp. Λ_0), donnés par :

$$\begin{aligned} \lambda &\rightsquigarrow C_p(K_\lambda(\Lambda_0), K_\lambda(\Lambda_0 \cap \Lambda_1); L), \\ \lambda &\rightsquigarrow C_p(K_\lambda^+(\Lambda_0), K_\lambda^+(\Lambda_0 \cap \Lambda_1); L), \\ [\text{resp. } \lambda &\rightsquigarrow C^q(K_\lambda(\Lambda_0), K_\lambda(\Lambda_0 \cap \Lambda_1); R), \\ \lambda &\rightsquigarrow C^q(K_\lambda^+(\Lambda_0), K_\lambda^+(\Lambda_0 \cap \Lambda_1); R)]. \end{aligned}$$

On va les noter :

$$\begin{aligned} C_p(\Lambda_0, \Lambda_1) \quad \text{et} \quad C_p^+(\Lambda_0, \Lambda_1) \\ [\text{resp. } C^q(\Lambda_0, \Lambda_1) \quad \text{et} \quad C^q_+(\Lambda_0, \Lambda_1)]. \end{aligned}$$

Pour tout $\lambda \in \Lambda$ nous avons des différentielles

$$\begin{aligned} d_p : \quad C_{p+1}(K_\lambda(\Lambda_0), K_\lambda(\Lambda_0 \cap \Lambda_1); L) \\ \rightarrow C_p(K_\lambda(\Lambda_0), K_\lambda(\Lambda_0 \cap \Lambda_1); L), \\ d_p^+ : \quad C_{p+1}(K_\lambda^+(\Lambda_0), K_\lambda^+(\Lambda_0 \cap \Lambda_1); L) \\ \rightarrow C_p(K_\lambda^+(\Lambda_0), K_\lambda^+(\Lambda_0 \cap \Lambda_1); L) \\ [\text{resp. } d^q : \quad C^q(K_\lambda(\Lambda_0), K_\lambda(\Lambda_0 \cap \Lambda_1); R) \\ \rightarrow C^{q+1}(K_\lambda(\Lambda_0), K_\lambda(\Lambda_0 \cap \Lambda_1); R), \\ d^q_+ : \quad C^q(K_\lambda^+(\Lambda_0), K_\lambda^+(\Lambda_0 \cap \Lambda_1); R) \\ \rightarrow C^{q+1}(K_\lambda^+(\Lambda_0), K_\lambda^+(\Lambda_0 \cap \Lambda_1); R)] \end{aligned}$$

induisant des différentielles

$$\begin{aligned} d_p &: C_{p+1}(\Lambda_0, \Lambda_1) \rightarrow C_p(\Lambda_0, \Lambda_1), \\ d_p^+ &: C_{p+1}^+(\Lambda_0, \Lambda_1) \rightarrow C_p^+(\Lambda_0, \Lambda_1) \\ [\text{resp. } d^q &: C^q(\Lambda_0, \Lambda_1) \rightarrow C^{q+1}(\Lambda_0, \Lambda_1) \\ d_+^q &: C_+^q(\Lambda_0, \Lambda_1) \rightarrow C_+^{q+1}(\Lambda_0, \Lambda_1)]. \end{aligned}$$

On démontre alors facilement :

PROPOSITION 1.2.1. — *Les systèmes projectifs $C_p(\Lambda_0, \Lambda_1)$ et $C_p^+(\Lambda_0, \Lambda_1)$ [resp. $C^q(\Lambda_0, \Lambda_1)$ et $C_+^q(\Lambda_0, \Lambda_1)$] sont II-projectifs (resp. II-injectifs).*

Démonstration. — Il faut seulement se rappeler que R est un L -module injectif. Le reste est plus ou moins trivial (voir [14] pour une démonstration).

Q. E. D.

Il faut maintenant trouver des conditions pour que les complexes de systèmes projectifs

$$\begin{aligned} (C_p(\Lambda_0, \Lambda_1), d_p) \quad \text{et} \quad (C_p^+(\Lambda_0, \Lambda_1), d_p^+) \\ [\text{resp. } (C^q(\Lambda_0, \Lambda_1), d^q) \quad \text{et} \quad (C_+^q(\Lambda_0, \Lambda_1), d_+^q)] \end{aligned}$$

sont des résolutions de

$$L_{\Lambda/\Lambda_1} \quad (\text{resp. } R_{\Lambda/\Lambda_1}).$$

Puisque pour tout $\lambda \in \Lambda$ les schémas simpliciaux $K_\lambda(\Lambda)$, $K_\lambda^+(\Lambda)$, $K_\lambda(\Lambda_1)$ et $K_\lambda^+(\Lambda_1)$ sont des cônes il est clair qu'on a :

LEMME 1.2.2. — *$C_\cdot(\Lambda, \Lambda_1)$ et $C_\cdot^+(\Lambda, \Lambda_1)$ (resp. $C^\cdot(\Lambda, \Lambda_1)$ et $C_+^\cdot(\Lambda, \Lambda_1)$) sont des résolutions II-projectives (resp. II-injectives) de L_{Λ/Λ_1} (resp. R_{Λ/Λ_1}).*

Supposons maintenant que Λ_0 satisfait aux conditions

- (i) Pour tout $\lambda \in \Lambda$, on a $B_\lambda(\Lambda_0) \neq \emptyset$.
- (ii) Pour tout $\lambda \in \Lambda_1$, on a $B_\lambda(\Lambda_0 \cap \Lambda_1) \neq \emptyset$.
- (iii) Pour toute famille finie $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ d'éléments de $B_\lambda(\Lambda_0)$ il existe un $\lambda_0 \in B_\lambda(\Lambda_0)$ tel que pour tout $i = 1, 2, \dots, p$ on a, ou bien $\lambda_i > \lambda_0$, ou bien $\lambda_i < \lambda_0$.

La condition (iii) exprime en particulier que pour tout $\lambda \in \Lambda$, B_λ est connexe.

De plus (i) et (iii) garantissent que pour tout $\lambda \in \Lambda$ les schémas simpliciaux $K_\lambda(\Lambda_0)$, et $K_\lambda^+(\Lambda_0)$ sont acycliques. En effet, (i) garantit qu'ils ne sont pas vides et (iii) garantit que tout cycle est un bord.

De même, on voit que pour tout $\lambda \in \Lambda_1$ $K_\lambda(\Lambda_0 \cap \Lambda_1)$ et $K_\lambda^+(\Lambda_0 \cap \Lambda_1)$ sont acycliques.

Il vient alors :

LEMME 1.1.3. — *Supposons que Λ_0 satisfait aux conditions (i), (ii) et (iii) alors $C_*(\Lambda_0)$ et $C_+(\Lambda_0)$ [resp. $C^*(\Lambda_0)$ et $C^+(\Lambda_0)$] sont des résolutions Π -projectives (resp. Π injectives) de L_{Λ/Λ_1} (resp. R_{Λ/Λ_1}).*

Calculons les complexes

$$\begin{aligned} & \text{Hom}(C_*(\Lambda_0, \Lambda_1), F) \quad \text{et} \quad \text{Hom}(C_+(\Lambda_0, \Lambda_1), F) \\ & [\text{resp. } \text{Hom}(G, C^*(\Lambda_0, \Lambda_1)) \quad \text{et} \quad \text{Hom}(G, C^+(\Lambda_0, \Lambda_1))]. \end{aligned}$$

Pour ce faire posons :

$$\begin{aligned} & \prod_{\Lambda/\Lambda_1}^p F = \text{Hom}(C_p(\Lambda, \Lambda_1), F), \\ & \prod_{\Lambda/\Lambda_1}^p F = \text{Hom}(C_p^+(\Lambda, \Lambda_1), F) \\ & \left[\text{resp. } \text{Hom}\left(\prod_q^{\Lambda_0/\Lambda_1^q} G, R\right) = \text{Hom}(G, C^q(\Lambda, \Lambda_1)) \right. \\ & \left. \text{Hom}\left(\prod_q^{\Lambda_0/\Lambda_1^q} G, R\right) = \text{Hom}(G, C_+^q(\Lambda, \Lambda_1)) \right]. \end{aligned}$$

On aura alors

$$\begin{aligned} & \prod_{\Lambda/\Lambda_1}^p F = \prod_{\substack{\lambda_0 < \dots < \lambda_p \\ \lambda_p \notin \Lambda_1}} F_{\min(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_p)} \\ & \prod_{\Lambda/\Lambda_1}^p F = \prod_{\substack{\lambda_0 \leq \dots \leq \lambda_p \\ \lambda_p \notin \Lambda_1}} F_{\min(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_p)} \\ & \left(\begin{aligned} & \text{resp. } \prod_q^{\Lambda_0/\Lambda_1^q} G = \prod_{\substack{\lambda_0 > \dots > \lambda_q \text{ (dans } \Lambda_0) \\ \lambda_q \notin \Lambda_1}} G_{(\max \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_p)} \\ & \prod_q^{\Lambda_0/\Lambda_1^q} G = \prod_{\substack{\lambda_0 \geq \dots \geq \lambda_p \text{ (dans } \Lambda_0) \\ \lambda_q \notin \Lambda_1}} G_{\max(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_p)} \end{aligned} \right). \end{aligned}$$

Notons que nous identifions $\prod_{\Lambda/\Lambda_1}^p F$ (resp. $\prod_q^{\Lambda_0/\Lambda_1^q} G$) avec le sous-module (resp. module quotient) de

$$\prod_{\lambda_0 < \dots < \lambda_p} F_{\min(\lambda_0, \dots, \lambda_p)} \quad \left(\text{resp. } \prod_{\lambda_0 > \dots > \lambda_q \text{ (dans } \Lambda_0)} G_{\max(\lambda_0, \dots, \lambda_q)} \right)$$

ayant des « projections » (resp. « injections ») correspondant aux $(\lambda_0, \dots, \lambda_p)$ [resp. $(\lambda_0, \dots, \lambda_q)$] avec $\lambda_p \in \Lambda_1$ (resp. $\lambda_q \in \Lambda_1$), nulles.

Avec cette convention nous pouvons expliciter les différentielles ∂^p et δ_+^p (resp. d_p et d_p^+) définies par

$$\begin{aligned} \partial^p &= \text{Hom}(d_p, F), \\ \delta_+^p &= \text{Hom}(d_p^+, F) \\ [\text{resp. } \text{Hom}(d_p, R) &= \text{Hom}(G, d_p) \\ \text{Hom}(d_p^+, R) &= \text{Hom}(G, d_p^+)]. \end{aligned}$$

Nous avons

$$(\delta^p \xi)_{(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{p+1})} = r_{\lambda_0}^{\lambda_1} \xi_{(\lambda_1, \dots, \lambda_{p+1})} + \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^i \xi_{(\lambda_0, \dots, \hat{\lambda}_i, \dots, \lambda_{p+1})}$$

et l'analogie pour δ_+^p

$$\left(\text{resp. } d_q \mathcal{G}_{(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{q+1})} = \rho_{\lambda_1}^{\lambda_0} \mathcal{G}_{(\lambda_1, \dots, \lambda_{q+1})} + \sum_{i=1}^{q+1} (-1)^i \mathcal{G}_{(\lambda_0, \dots, \hat{\lambda}_i, \dots, \lambda_{q+1})} \right)$$

et l'analogie pour d_q^+ .

Nous voyons donc qu'il y a un isomorphisme canonique de complexes

$$\begin{aligned} C^*(E_\Lambda, E_{\Lambda_1}; F) &\simeq \prod_{\Lambda/\Lambda_1}^{\cdot} F \\ \left(\text{resp. } C^*(E_\Lambda, E_{\Lambda_1}; G) &\simeq \prod_{\Lambda_0/\Lambda_1}^{\cdot} G \right). \end{aligned}$$

De plus on a un isomorphisme :

$$\begin{aligned} \text{Hom}(C^*(\Lambda_0, \Lambda_1), F) &\simeq \prod_{\Lambda_0/\Lambda_0 \cap \Lambda_1}^{\cdot} F \\ \left[\text{resp. } \text{Hom} \left(\prod_{\Lambda_0/(\Lambda_0 \cap \Lambda_1)}^{\cdot} R, G \right) &\simeq \text{Hom}(G, C^*(\Lambda_0, \Lambda_1)) \right]. \end{aligned}$$

Il en résulte :

THÉORÈME 1.2.4. — *Supposons que Λ_0 satisfait aux conditions (i), (ii) et (iii) ci-dessus, alors nous avons un isomorphisme canonique :*

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim_{\substack{\leftarrow \\ \Lambda/\Lambda_1}}^{(*)} F \simeq \lim_{\substack{\leftarrow \\ \Lambda_0/\Lambda_0 \cap \Lambda_1}}^{(*)} F \\ \left(\text{resp. } \lim_{\substack{\rightarrow \\ \Lambda/\Lambda_1}}^{(*)} G \simeq \lim_{\substack{\rightarrow \\ \Lambda_0/(\Lambda_0 \cap \Lambda_1)}}^{(*)} G \right). \end{array} \right.$$

En particulier, Λ_0 est cofinal dans Λ .

Remarque. — Supposons que Λ_0 est cofinal dans Λ . Il n'est pas vrai que ceci entraîne l'isomorphisme (2). En effet, soit Λ_0 et Λ les ensembles ordonnés ayant les graphes :



Fig. A.

Il est trivial que Λ_0 est cofinal dans Λ , cependant en calculant on trouve

$$\lim_{\leftarrow \Lambda_0}^{(1)} L = L,$$

$$\lim_{\leftarrow \Lambda}^{(p)} L = 0 \quad \text{pour } p > 0,$$

Il est facile de montrer que, dans ce cas, la condition (iii) n'est pas satisfaite.

D'après les définitions, on a une suite exacte de complexes de systèmes projectifs :

$$0 \rightarrow C_*(\Lambda_1, \emptyset) \rightarrow C_*(\Lambda, \emptyset) \rightarrow C_*(\Lambda, \Lambda_1) \rightarrow 0$$

[resp. $0 \rightarrow C^*(\Lambda, \Lambda_1) \rightarrow C^*(\Lambda, \emptyset) \rightarrow C^*(\Lambda_1, \emptyset) \rightarrow 0$],

d'où une suite exacte de complexes :

$$0 \rightarrow \text{Hom}(C_*(\Lambda, \Lambda_1), F) \rightarrow \text{Hom}(C_*(\Lambda_1, \emptyset), F) \rightarrow \text{Hom}(C_*(\Lambda, \emptyset), F) \rightarrow 0$$

[resp. $0 \rightarrow \text{Hom}(G, C^*(\Lambda, \Lambda_1)) \rightarrow \text{Hom}(G, C^*(\Lambda, \emptyset)) \rightarrow \text{Hom}(G, C^*(\Lambda_1, \emptyset)) \rightarrow 0$]

qui induit une suite exacte de foncteurs résolvant :

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 \rightarrow \prod_{\Lambda/\Lambda_1} \xrightarrow{i_1} \prod_{\Lambda} \xrightarrow{i_2} \prod_{\Lambda_1} \rightarrow 0 \\ \left(\text{resp. } 0 \rightarrow \prod_{\Lambda_1^0} \xrightarrow{j_1} \prod_{\Lambda_0} \xrightarrow{j_2} \prod_{\Lambda_0/\Lambda^0} \rightarrow 0 \right) \end{array} \right.$$

Il est facile de voir que i_1 (resp. j_1) est l'injection évidente et que i_2 (resp. j_2) est la surjection évidente.

La suite exacte (3) induit alors la suite exacte de foncteurs

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 \rightarrow \lim_{\leftarrow \Lambda/\Lambda_1} \rightarrow \lim_{\leftarrow \Lambda} \rightarrow \lim_{\leftarrow \Lambda_1} \rightarrow \lim_{\leftarrow \Lambda/\Lambda_1}^{(1)} \rightarrow \dots \\ \rightarrow \lim_{\leftarrow \Lambda/\Lambda_1}^{(\rho)} \rightarrow \lim_{\leftarrow \Lambda}^{(\rho)} \rightarrow \lim_{\leftarrow \Lambda_1}^{(\rho)} \rightarrow \lim_{\leftarrow \Lambda/\Lambda_1}^{(\rho+1)} \rightarrow \dots \\ \text{(resp. } 0 \leftarrow \lim_{\leftarrow \Lambda_0/\Lambda_1^0} \leftarrow \lim_{\leftarrow \Lambda_0} \leftarrow \lim_{\leftarrow \Lambda_1^0} \leftarrow \lim_{\leftarrow \Lambda_0/\Lambda_1^0}^{(1)} \leftarrow \dots \\ \leftarrow \lim_{\leftarrow \Lambda_0/\Lambda_1^0}^{(q)} \leftarrow \lim_{\leftarrow \Lambda_0}^{(q)} \leftarrow \lim_{\leftarrow \Lambda_1^0}^{(q)} \leftarrow \lim_{\leftarrow \Lambda_0/\Lambda_1^0}^{(q+1)} \leftarrow \dots \text{)} \end{array} \right.$$

Ce qu'on a déjà vu montre que cette suite est la suite exacte du foncteur $\text{Ext}^{(\cdot)}$ de la catégorie C_Λ associée à la suite exacte :

$$0 \rightarrow L_{\Lambda_1/\emptyset} \rightarrow L_\Lambda/\emptyset \rightarrow L_{\Lambda/\Lambda_1} \rightarrow 0 \\ \text{(resp. } 0 \rightarrow R_{\Lambda/\Lambda_1} \rightarrow R_\Lambda/\emptyset \rightarrow R_{\Lambda_1/\emptyset} \rightarrow 0,$$

où $L_{\Lambda_1/\emptyset}$ (resp. $R_{\Lambda_1/\emptyset}$) est défini par

$$(L_{\Lambda_1/\emptyset})_\lambda = \begin{cases} L & \text{si } \lambda \in \Lambda_1, \\ O & \text{si } \lambda \notin \Lambda_1 \end{cases} \\ \left(\text{resp. } (R_{\Lambda_1/\emptyset}) = \begin{cases} R & \text{si } \lambda \in \Lambda_1, \\ O & \text{si } \lambda \notin \Lambda_1 \end{cases} \right)$$

les homomorphismes étant définis comme d'habitude.

1.3. La suite spectrale associée à un α -foncteur.

Considérons deux α -foncteurs

$$\alpha, \alpha_1: \Gamma \rightarrow \text{PA}$$

tels que pour tout $\gamma \in \Gamma$ on a $\alpha_1(\gamma) \subseteq \alpha(\gamma)$, et supposons que α et α_1 satisfont à la condition $(\alpha)_3$, et que $\Gamma_1 = \hat{\Gamma}_1$ est un sous-ensemble de $\Gamma(\alpha, \alpha_1)$ [voir (1.1)]. Oublions pour le moment l'ordre dans Λ , c'est-à-dire, considérons Λ comme un ensemble ordonné trivialement. Pour tout $p \geq 1$ tout sous-ensemble Λ_1 de Λ désignons par $\Lambda_1(p)$ l'ensemble, ordonné trivialement, de tous les $(p+1)$ -uples

$$(\lambda_0 < \dots < \lambda_p),$$

avec $\lambda_p \in \Lambda_1$. Il est alors clair que

$$\gamma \rightsquigarrow \alpha(\gamma)(p) \quad \text{et} \quad \gamma \rightsquigarrow \alpha_1(\gamma)(p)$$

définissent deux α -foncteurs

$$\bar{\alpha}, \bar{\alpha}_1: \Gamma \rightarrow \text{PA}(p)$$

tels que pour tout $\gamma \in \Gamma$, $\bar{x}_1(\gamma) \subseteq \bar{x}(\gamma)$ et tels que \bar{x} et \bar{x}_1 satisfont à la condition $(x)_3$.

On a aussi $\Gamma_1 \subseteq \Gamma(\bar{x}, \bar{x}_1)$.

Si F (resp. G) est un système projectif sur Λ (resp. Λ_0), alors on peut définir un système projectif

$$F(p) \text{ [resp. } G(q)] \text{ sur } \Lambda(p) \text{ [resp. } \Lambda(q)_0]$$

par :

$$F(p)_{(\lambda_0 < \dots < \lambda_p)} = F_{\lambda_0} \text{ [resp. } G(q)_{(\lambda_0 < \dots < \lambda_q)} = G_{\lambda_0}].$$

Il vient alors de 1.1.2, qu'on a l'isomorphisme canonique

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \prod_{\Lambda/\Lambda_1}^p F \simeq \lim_{\leftarrow \Lambda(p)/\Lambda_1(p)} F(p) \\ \left(\text{resp. } \prod_q^{\Lambda_0/\Lambda_1^0} \simeq \lim_{\rightarrow \Lambda_0(q)/\Lambda_1^0(q)} G(q) \right) \end{array} \right.$$

Utilisant cet isomorphisme et le lemme 1.1.2 nous obtenons pour tout sous-ensemble Γ_2 de Γ avec $\Gamma_2 = \hat{\Gamma}_2$ un isomorphisme canonique

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim_{\leftarrow \Gamma_2/\Gamma_1 \cap \Gamma_2} \prod_{\substack{x(\gamma)/x_1(\gamma) \\ x(\Gamma_2)/x_1(\Gamma_2)}} \simeq \prod_{\substack{x(\Gamma_2)/x_1(\Gamma_2) \\ x(\Gamma_2)_0/x_1(\Gamma_2)_0}} \\ \left(\text{resp. } \lim_{\rightarrow \Gamma_2^0/(\Gamma_1 \cap \Gamma_2)_0} \prod_{\substack{x(\gamma)_0/x_1(\gamma)_0 \\ x(\Gamma_2)_0/x_1(\Gamma_2)_0}} \simeq \prod_{\substack{x(\Gamma_2)_0/x_1(\Gamma_2)_0 \\ x(\Gamma_2)_0/x_1(\Gamma_2)_0}} \right) \end{array} \right.$$

En particulier nous voyons que les systèmes projectifs \prod_x^{\cdot} (resp. \prod_x^x) et $\prod_{x_1}^{\cdot}$ (resp. $\prod_{x_1}^{x_1}$) sur Γ (resp. Γ_0) définis par

$$\begin{aligned} \gamma &\rightsquigarrow \prod_{x(\gamma)}^{\cdot} \quad \left(\text{resp. } \gamma \rightsquigarrow \prod_{x(\gamma)_0}^{x(\gamma)_0} \right) \\ \gamma &\rightsquigarrow \prod_{x_1(\gamma)}^{\cdot} \quad \left(\text{resp. } \gamma \rightsquigarrow \prod_{x_1(\gamma)_0}^{x_1(\gamma)_0} \right) \end{aligned}$$

sont flasques, donc par 1.1.9 nous avons

$$\begin{aligned} \lim_{\leftarrow \Gamma/\Gamma_1}^{(p)} \prod_x^{\cdot} &= o \left(\text{resp. } \lim_{\rightarrow \Gamma_0/\Gamma_1^0} \prod_x^x = o \right), \\ \lim_{\leftarrow \Gamma/\Gamma_1}^{(p)} \prod_{x_1}^{\cdot} &= o \left(\text{resp. } \lim_{\rightarrow \Gamma_0/\Gamma_1^0} \prod_{x_1}^{x_1} = o \right), \end{aligned}$$

pour $p \geq 1$ (resp. $q \geq 1$). Utilisant la suite exacte de systèmes projectifs sur Γ (resp. Γ_0) :

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \prod_{x/x_1} \rightarrow \prod_x \rightarrow \prod_{x_1} \rightarrow 0 \\ \left(\text{resp. } 0 \rightarrow \prod_{x_1} \rightarrow \prod_x \rightarrow \prod_{x/x_1} \rightarrow 0 \right) \end{aligned}$$

où \prod_{x/x_1} (resp. \prod_{x_1}) est le système projectif sur Γ défini par

$$\gamma \rightsquigarrow \prod_{x(\gamma)/x_1(\gamma)} \quad \left(\text{resp. } \gamma \rightsquigarrow \prod_{x(\gamma)_0/x_1(\gamma)_0} \right),$$

et l'isomorphisme (2); on en déduit

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim_{\Gamma/\Gamma_1}^{(p)} \prod_{x/x_1} = 0 \quad \left(\text{resp. } \lim_{\Gamma_0/\Gamma_1^0}^{(q)} \prod_{x/x_1} \right) \\ \text{[pour } p \geq 1 \quad \text{(resp. } q \geq 1 \text{).]} \end{array} \right.$$

de plus on a un homomorphisme de double-complexes :

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim_{\Gamma/\Gamma_1} \prod_{x(\gamma)/x_1(\gamma)} \rightarrow \prod_{\Gamma/\Gamma_1} \prod_{x(\gamma)/x_1(\gamma)} \\ \left(\text{resp. } \prod_{\Gamma_0/\Gamma_1^0} \prod_{x(\gamma)_0/x_1(\gamma)_0} \rightarrow \lim_{\Gamma_0/\Gamma_1^0} \prod_{x(\gamma)_0/x_1(\gamma)_0} \right) \end{array} \right.$$

Utilisant la deuxième suite spectrale du double-complexe

$$(5) \quad \prod_{\Gamma/\Gamma_1} \prod_{x(\gamma)/x_1(\gamma)} \quad \left(\text{resp. } \prod_{\Gamma_0/\Gamma_1^0} \prod_{x(\gamma)_0/x_1(\gamma)_0} \right),$$

on voit que l'homomorphisme (4) induit des isomorphismes en homologie. Il en résulte :

PROPOSITION 1.3.1. — *Il existe une suite spectrale donnée par*

$$\begin{aligned} E_2^{p,q} = \lim_{\Gamma/\Gamma_1}^{(p)} \lim_{x(\gamma)/x_1(\gamma)}^{(q)*} \\ \left(\text{resp. } E_{p,q}^2 = \lim_{\Gamma_0/\Gamma_1^0}^{(p)} \lim_{x(\gamma)_0/x_1(\gamma)_0}^{(q)*} \right) \end{aligned}$$

aboutissant à

$$\lim_{\text{im } x/\text{im } x_1}^{(*)} \quad \left(\text{resp. } \lim_{\text{im } x_0/\text{im } x_1^0}^{(*)} \right).$$

Démonstration. — Puisque l'homomorphisme (4) induit des isomorphismes en homologie, il suffit de calculer la première suite spectrale du double-complexe (5).

Q. E. D.

En particulier, si $\Gamma_1 = \hat{\Gamma}_1$ est un sous-ensemble de l'ensemble ordonné Γ , et si $\Lambda_1 = \hat{\Lambda}_1$ est un sous-ensemble de l'ensemble ordonné Λ , on peut considérer l'ensemble ordonné $\Gamma \times \Lambda$, produit ensembliste de Γ et de Λ , et les α -foncteurs

$$\alpha, \alpha_1 : \Gamma \rightarrow P(\Gamma \times \Lambda)$$

définis par

$$\begin{aligned} \alpha(\gamma) &= \hat{\gamma} \times \Lambda \\ \alpha_1(\gamma) &= \hat{\gamma} \times \Lambda_1 \cup (\hat{\gamma} \cap \Gamma_1) \times \Lambda. \end{aligned}$$

Il est immédiat que α et α_1 satisfont à la condition $(\alpha)_3$. De plus on a

$$\begin{aligned} \text{im } \alpha &= \Gamma \times \Lambda, \\ \text{im } \alpha_1 &= \Gamma \times \Lambda_1 \cup \Gamma_1 \times \Lambda. \end{aligned}$$

Puisque le sous-ensemble $\{\gamma\} \times \Lambda$ de $\alpha(\gamma)$ satisfait, par rapport à $\alpha_1(\gamma) \subseteq \alpha(\gamma)$, aux conditions (i), (ii) et (iii) de 1.2, on voit que

$$\lim_{\leftarrow}^{(*)} \alpha(\gamma) / \alpha_1(\gamma) \quad \left(\text{resp.} \quad \lim_{\leftarrow}^{(*)} \alpha(\gamma) / \alpha_1(\gamma) \right)$$

s'identifie avec

$$\lim_{\rightarrow}^{(*)} \Lambda / \Lambda_1 \quad \left(\text{resp.} \quad \lim_{\rightarrow}^{(*)} \Lambda / \Lambda_1 \right)$$

si $\gamma \notin \Gamma_1$, et avec nul si $\gamma \in \Gamma_1$. Nous avons donc démontré le résultat suivant :

COROLLAIRE 1.3.2. — *Il existe une suite spectrale, donnée par*

$$\begin{aligned} E_2^{p,q} &= \lim_{\leftarrow}^{(p)} \Gamma / \Gamma_1 \quad \lim_{\leftarrow}^{(q)} \Lambda / \Lambda_1 \\ \left(\text{resp.} \quad E_{p,q}^2 &= \lim_{\rightarrow}^{(p)} \Gamma_0 / \Gamma_1^0 \quad \lim_{\rightarrow}^{(q)} \Lambda_0 / \Lambda_1^0 \right) \end{aligned}$$

aboutissant à

$$\lim_{\leftarrow}^{(*)} \Gamma \times \Lambda / \Gamma \times \Lambda_1 \cup \Gamma_1 \times \Lambda \quad \left(\text{resp.} \quad \lim_{\rightarrow}^{(*)} \Gamma \times \Lambda / \Gamma \times \Lambda_1 \cup \Gamma_1 \times \Lambda \right).$$

Ce corollaire généralise un résultat de J. E. Roos [24].

1.4. Foncteurs associés à un \varkappa -foncteur.

Soient Σ et Λ deux ensembles ordonnés et considérons deux \varkappa -foncteurs

$$\varkappa, \varkappa_1: \Sigma \rightarrow P\Lambda$$

tels que pour tout $\sigma \in \Sigma$ nous avons

$$\varkappa_1(\sigma) \subseteq \varkappa(\sigma).$$

Partant de (\varkappa, \varkappa_1) on peut définir deux nouveaux \varkappa -foncteurs

$$\varkappa^{-1}, \varkappa_1^{-1}: \Lambda_0 \rightarrow P\Sigma$$

par

$$\varkappa^{-1}(\lambda) = \{\sigma \mid \lambda \in \varkappa(\sigma)\},$$

$$\varkappa_1^{-1}(\lambda) = \{\sigma \mid \lambda \in \varkappa_1(\sigma)\}.$$

tel que pour tout $\lambda \in \Lambda$ on a

$$\varkappa_1^{-1}(\lambda) \subseteq \varkappa^{-1}(\lambda).$$

Utilisant ces \varkappa -foncteurs nous allons définir deux foncteurs :

$$(\varkappa, \varkappa_1)_* : \underline{C}_\Lambda \rightarrow \underline{C}_\Sigma,$$

$$(\varkappa, \varkappa_1)^* : \underline{C}_\Sigma \rightarrow \underline{C}_\Lambda,$$

$$[\text{resp. } (\varkappa, \varkappa_1)^* : \underline{C}_{\Lambda_0} \rightarrow \underline{C}_{\Sigma_0},$$

$$(\varkappa, \varkappa_1)_* : \underline{C}_{\Sigma_0} \rightarrow \underline{C}_{\Lambda_0}].$$

par

$$((\varkappa, \varkappa_1)_* F)_\sigma = \lim_{\substack{\leftarrow \\ \varkappa(\sigma)/\varkappa_1(\sigma)}} F,$$

$$((\varkappa, \varkappa_1)^* S)_\lambda = \lim_{\substack{\rightarrow \\ \varkappa^{-1}(\lambda)/\varkappa_1^{-1}(\lambda)}} S$$

$$\left(\text{resp. } ((\varkappa, \varkappa_1)^* G)_\sigma = \lim_{\substack{\rightarrow \\ \varkappa(\sigma_0)/\varkappa_1(\sigma_0)}} G, \right.$$

$$\left. ((\varkappa, \varkappa_1)_* T)_\lambda = \lim_{\substack{\leftarrow \\ \varkappa^{-1}(\lambda_0)/\varkappa_1^{-1}(\lambda_0)}} T \right).$$

Nous avons dans [15] démontré le résultat suivant :

LEMME 1.4.1. — Les foncteurs $(\varkappa, \varkappa_1)_*$ et $(\varkappa, \varkappa_1)^*$ sont adjoints. En particulier nous avons un isomorphisme de bi-foncteurs

$$\text{Hom}_{\underline{C}_\Lambda}((\varkappa, \varkappa_1)^* S, F) \simeq \text{Hom}_{\underline{C}_\Sigma}(S, (\varkappa, \varkappa_1)_* F)$$

$$\left(\text{resp. } \text{Hom}_{\underline{C}_{\Sigma_0}}((\varkappa, \varkappa_1)^* G, T) \simeq \text{Hom}_{\underline{C}_{\Lambda_0}}(G, (\varkappa, \varkappa_1)_* T) \right).$$

Combinant les homomorphismes de complexes

$$(1) \quad \prod_{\Lambda/\Lambda_1} \rightarrow \prod_{\text{im } x/\text{im } x_1} \quad \left(\text{resp. } \prod_{\text{im } x_0/\text{im } x_1^0} \rightarrow \prod_{\Lambda_0/\Lambda_1^0} \right)$$

$$(2) \quad (x, x_1)_* \rightarrow \prod_{x/x_1} \quad \left(\text{resp. } \prod_{x/x_1} \rightarrow (x, x_1)^* \right)$$

avec l'homomorphisme (4) de 1.3 on obtient le diagramme :

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{c} \prod_{\Lambda/\Lambda_1} \rightarrow \prod_{\text{im } x/\text{im } x_1} \rightarrow \prod_{\Sigma/\Sigma_1} \prod_{x/x_1} \leftarrow \prod_{\Sigma/\Sigma_1} (x, x_1)_* \\ \left(\text{resp. } \prod_{\Lambda_0/\Lambda_1^0} \leftarrow \prod_{\text{im } x_0/\text{im } x_1^0} \leftarrow \prod_{\Sigma_0/\Sigma_1^0} \prod_{x/x_1} \rightarrow \prod_{\Sigma_0/\Sigma_1^0} (x, x_1)^* \right) \end{array} \right.$$

qui a un sens pour tout sous-ensemble Λ_1 de Λ tel que $\Lambda_1 = \hat{\Lambda}_1$ et tel que $\text{im } x_1 \subseteq \Lambda_1$, et pour tout sous-ensemble Σ_1 de Σ contenus dans $\Sigma(x, x_1)$.

Remarque 1. — Soient $\Lambda_1 = \hat{\Lambda}_1$ un sous-ensemble de Λ , $\Sigma_1 = \hat{\Sigma}_1$ un sous-ensemble de Σ et soit x un x -foncteur : $\Sigma \rightarrow P\Lambda$ tel que $x(\Sigma_1) \subseteq \Lambda_1$. Définissons le x -foncteur x_1 par

$$x_1(\sigma) = x(\sigma \cap \Sigma_1).$$

Nous avons alors une situation comme ci-dessus [l'ensemble $\Sigma(x, x_1)$ contient Σ_1].

Supposons maintenant que x et x_1 satisfont à la condition $(x)_3$ de 1.3, alors l'homomorphisme (4) de 1.3 induit des isomorphismes en homologie. Il en résulte que (3) induit le diagramme suivant :

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{c} \lim_{\leftarrow \Lambda/\Lambda_1}^{(*)} \xrightarrow{k} \lim_{\leftarrow \text{im } x/\text{im } x_1}^{(*)} \xleftarrow{i} \lim_{\leftarrow \Sigma/\Sigma_1}^{(*)} (x, x_1)_* \\ \left(\text{resp. } \lim_{\leftarrow \Lambda_0/\Lambda_1^0}^{(*)} \xleftarrow{l} \lim_{\leftarrow \text{im } x_0/\text{im } x_1^0}^{(*)} \xrightarrow{j} \lim_{\leftarrow \Sigma_0/\Sigma_1^0}^{(*)} (x, x_1)^* \right) \end{array} \right.$$

Nous désignons par

$$(x, x_1)^* \quad [\text{resp. } (x, x_1)_*]$$

l'homomorphisme i (resp. j), et par :

$$*(x, x_1) \quad [\text{resp. } \cdot(x, x_1)]$$

l'homomorphisme k (resp. l).

Supposons maintenant donné un troisième ensemble ordonné Δ , et deux α -foncteurs

$$\rho, \rho_1: \Lambda \rightarrow P \Delta$$

tels que pour tout $\lambda \in \Lambda$, $\rho_1(\lambda) \subseteq \rho(\lambda)$ et tels que ρ et ρ_1 satisfont à la condition $(\alpha)_3$ de 1.3. Nous allons définir la composition de (α, α_1) et de (ρ, ρ_1) . Désignons par $(\rho \circ \alpha)$ le α -foncteur $\Sigma \rightarrow P \Delta$ défini par

$$(\rho \circ \alpha)(\sigma) = \rho(\alpha(\sigma))$$

et par $(\rho \circ \alpha)_1$ le α -foncteur $\Sigma \rightarrow P \Delta$ défini par

$$(\rho \circ \alpha)_1(\sigma) = \rho(\alpha_1(\sigma)) \cup \rho_1(\alpha(\sigma)).$$

Nous avons donc trivialement

$$(\rho \circ \alpha)_1(\sigma) \subseteq (\rho \circ \alpha)(\sigma),$$

pour tout $\sigma \in \Sigma$.

Cela fait, nous disons que $((\rho \circ \alpha), (\rho \circ \alpha)_1)$ est la composition de (α, α_1) et de (ρ, ρ_1) , en écrit :

$$((\rho \circ \alpha), (\rho \circ \alpha)_1) = (\rho, \rho_1) \circ (\alpha, \alpha_1)$$

Il est facile de voir qu'on a

$$\Sigma(\alpha, \alpha_1) \subseteq \Sigma((\rho \circ \alpha), (\rho \circ \alpha)_1).$$

Supposons maintenant que α, α_1, ρ et ρ_1 satisfont à la condition $(\alpha)_3$. On vérifie alors sans peine que $\rho \circ \alpha, \rho \circ \alpha_1$ et $\rho_1 \circ \alpha$ satisfont à $(\alpha)_3$. Puisque $(\rho \circ \alpha)_1 = \rho \circ \alpha_1 \cup \rho_1 \circ \alpha$ on a

$$\begin{aligned} \prod_{(\rho \circ \alpha)_1} &= \prod_{\rho \circ \alpha_1} \times \prod_{\rho_1 \circ \alpha} \\ &\quad \prod_{\rho \circ \alpha_1 \cap \rho_1 \circ \alpha} \\ \left(\text{resp. } \prod_{(\rho \circ \alpha)_1} &= \prod_{\rho \circ \alpha_1} \oplus \prod_{\rho_1 \circ \alpha} \right. \\ &\quad \left. \prod_{\rho \circ \alpha_1 \cap \rho_1 \circ \alpha} \right). \end{aligned}$$

Utilisant la suite spectrale 1.3.1 on en déduit

$$1^{\circ} \quad \lim_{\leftarrow \Sigma/\Sigma_1} \prod_{(\rho \circ \alpha)_1} \simeq \prod_{\text{im}(\rho \circ \alpha)_1}$$

$$\left(\text{resp. } \lim_{\rightarrow \Sigma_0/\Sigma_1^0} \prod_{(\rho \circ \alpha)_1} \simeq \prod_{\text{im}(\rho \circ \alpha)_1^0} \right)$$

$$2^{\circ} \quad \lim_{\leftarrow \Sigma/\Sigma_1}^{(p)} \prod_{(\rho \circ \alpha)_1} = 0$$

$$\left(\text{resp. } \lim_{\rightarrow \Sigma_0/\Sigma_1^0}^{(q)} \prod_{(\rho \circ \alpha)_1} = 0 \right)$$

pour $p \geq 1$ (resp. $q \geq 1$), pourvu que $\rho \circ \alpha_1 \cap \rho_1 \circ \alpha$ satisfasse à la condition $(\alpha)_3$.

Considérons maintenant la condition suivante sur Σ .

(o) Pour tous $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma$, s'il existe des éléments $\sigma, \sigma' \in \Sigma$ tels que $\sigma, \sigma' < \sigma_1, \sigma_2$ alors il existe un élément $\sigma_0 \in \Sigma$ tel que $\sigma_0 < \sigma_1, \sigma_2, \sigma, \sigma' < \sigma_0$.

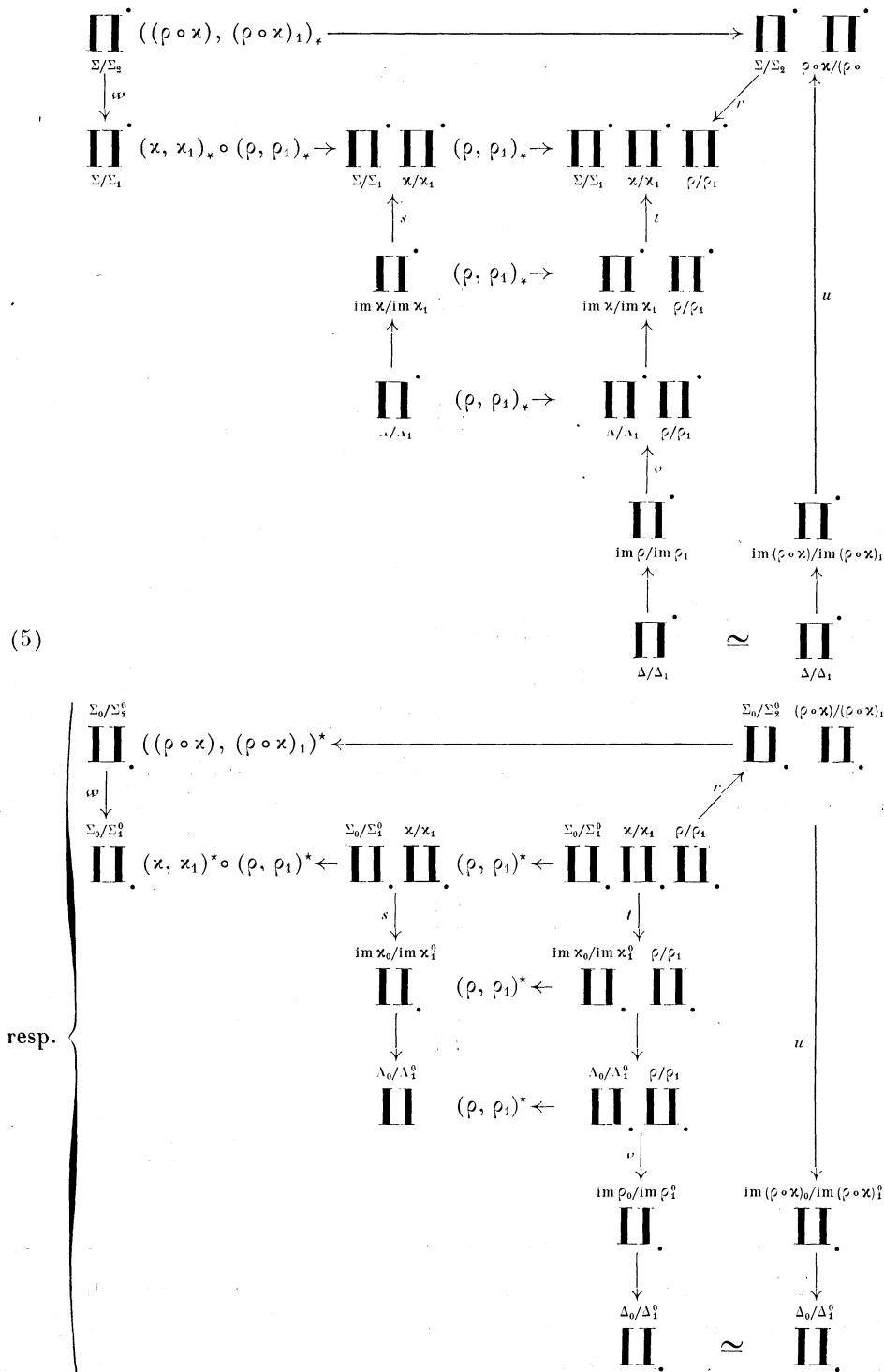
Un calcul trivial montre que si Σ satisfait à la condition (o) alors $\rho \circ \alpha_1 \cap \rho_1 \circ \alpha$ satisfait à la condition $(\alpha)_3$. Comme on l'a déjà vu, 1° et 2° impliquent

$$\lim_{\leftarrow \Sigma/\Sigma_1}^{(p)} \prod_{(\rho \circ \alpha)/(\rho \circ \alpha)_1} = 0$$

$$\left(\text{resp. } \lim_{\rightarrow \Sigma_0/\Sigma_1^0}^{(q)} \prod_{(\rho \circ \alpha)/(\rho \circ \alpha)_1} = 0 \right),$$

pour $p \geq 1$, (resp. $q \geq 1$), et ceci entraîne l'existence d'un diagramme (4) pour le couple $((\rho \circ \alpha), (\rho \circ \alpha)_1)$.

Supposons que Σ_1 et Σ_2 sont des sous-ensembles de Σ tels que $\Sigma_1 = \hat{\Sigma}_1$, $\Sigma_2 = \hat{\Sigma}_2$, $\Sigma_1 \subseteq \Sigma_2$, $\Sigma_1 \subseteq \Sigma(\alpha, \alpha_1)$, $\Sigma_2 \subseteq \Sigma((\rho \circ \alpha), (\rho \circ \alpha)_1)$, supposons que Λ_1 est un sous-ensemble de Λ tel que $\Lambda_1 = \hat{\Lambda}_1$, $\Lambda_1 \subseteq \Lambda(\rho, \rho_1)$, $\text{im } \alpha_1 \subseteq \Lambda_1$, et supposons enfin que $\Delta_1 = \hat{\Delta}_1$ est un sous-ensemble de Δ tel que $\text{im } \rho_1 \subseteq \Delta_1$. Alors on a le diagramme suivant



où les homomorphismes r, s, t, u et φ induisent des isomorphismes en homologie.

On voit facilement en utilisant 1.1.2 et le commencement de la suite exacte (4) de 1.2 qu'on a un isomorphisme canonique

$$\begin{aligned} & ((\rho \circ x), (\rho \circ x)_1)_* \simeq (x, x_1)_* \circ (\rho, \rho_1)_* \\ & [\text{resp. } ((\rho \circ x), (\rho \circ x)_1)^* \simeq (x, x_1)^* \circ (\rho, \rho_1)^*], \end{aligned}$$

donc si $\Sigma_1 = \Sigma_2$ l'homomorphisme ω se réduit à l'identité. Notons que les conditions faites sur Λ_1 entraînent en particulier

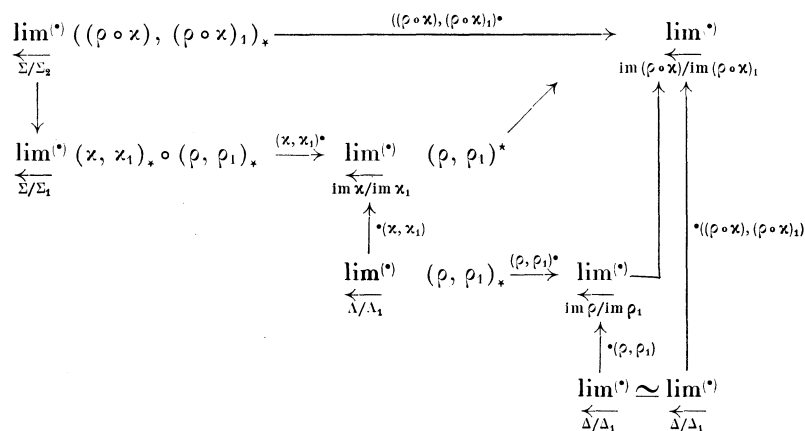
$$\rho(\Lambda_1) = \rho_1(\Lambda_1) \subseteq \text{im } \rho_1 \subseteq \Delta_1.$$

Remarque 2. — Soient Σ, Λ et Δ comme ci-dessus, et supposons donnés des sous-ensembles $\Sigma_1 \subseteq \Sigma, \Lambda_1 \subseteq \Lambda$ et $\Delta_1 \subseteq \Delta$ tels que $\Sigma_1 = \hat{\Sigma}_1, \Lambda_1 = \hat{\Lambda}_1, \Delta_1 = \hat{\Delta}_1$, et deux x -foncteurs

$$\begin{aligned} x &: \Sigma \rightarrow P\Lambda, \\ \rho &: \Lambda \rightarrow P\Delta, \end{aligned}$$

tels que $x(\Sigma_1) \subseteq \Lambda_1, \rho(\Lambda_1) \subseteq \Delta_1$, alors tenant compte de la remarque 1, nous pouvons d'une façon naturelle construire des x -foncteurs x_1 et ρ_1 . Nous obtenons alors une situation comme ci-dessus. Pourtant, en général le x -foncteur associé au x -foncteur $(\rho \circ x)$ par la méthode de la remarque 1 n'est pas égal à $(\rho \circ x)_1$ défini ci-dessus. Du diagramme (5) on déduit le résultat suivant :

THÉORÈME 1.4.2. — *Sous les conditions ci-dessus il existe un diagramme commutatif :*



(resp. le dual.)

En particulier, si $\text{im } \alpha = \Lambda$, $\text{im } \alpha_1 = \Lambda_1$, $\text{im } \rho = \Delta$ et $\text{im } \rho_1 = \Delta_1$, il existe des homomorphismes

$$\begin{aligned} (\alpha, \alpha_1)^* &: \lim_{\leftarrow \Sigma/\Sigma_1}^{(*)} (\alpha, \alpha_1)_* \rightarrow \lim_{\leftarrow \Lambda/\Lambda_1}^{(*)} \\ \left(\text{resp. } (\alpha, \alpha_1)_* &: \lim_{\leftarrow \Lambda_0/\Lambda_1^0}^{(*)} \rightarrow \lim_{\leftarrow \Sigma_0/\Sigma_1^0}^{(*)} (\alpha, \alpha_1)^* \right), \\ (\rho, \rho_1)^* &: \lim_{\leftarrow \Delta/\Delta_1}^{(*)} (\rho, \rho_1)_* \rightarrow \lim_{\leftarrow \Delta/\Delta_1}^{(*)} \\ \left(\text{resp. } (\rho, \rho_1)_* &: \lim_{\leftarrow \Delta_0/\Delta_1^0}^{(*)} \rightarrow \lim_{\leftarrow \Lambda_0/\Lambda_1^0}^{(*)} (\rho, \rho_1)^* \right) \end{aligned}$$

et l'on peut écrire :

$$\begin{aligned} ((\rho \circ \alpha), (\rho \circ \alpha)_1)^* &= (\rho, \rho_1)^* \circ (\alpha, \alpha_1)^* \\ [\text{resp. } ((\rho \circ \alpha), (\rho \circ \alpha)_1)_* &= (\alpha, \alpha_1)_* \circ (\rho, \rho_1)_*]. \end{aligned}$$

Considérons, à titre d'exemple, un sous-ensemble quelconque Λ_1 de Λ , et l'injection canonique

$$i: \Lambda_1 \rightarrow \Lambda.$$

A i il est associé un α -foncteur α_i [voir 1.1] donné par

$$\alpha_i(\lambda) = \hat{\lambda} \cap \Lambda_1.$$

Pour tout système projectif F (resp. G) sur Λ (resp. Λ_0), nous avons un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \prod_{\Lambda} F & \xrightarrow{r} & \prod_{\Lambda_1} F' \\ \downarrow s & & \downarrow \nu \\ \prod_{\Lambda} \prod_{\hat{\lambda}} F & \rightarrow & \prod_{\Lambda} \prod_{\alpha_i} F' \\ \uparrow \iota & & \uparrow \kappa \\ \prod_{\Lambda} \lim_{\leftarrow \hat{\lambda}} F & \rightarrow & \prod_{\Lambda} \alpha_{i*} F' \\ \uparrow u & & \uparrow \\ \prod_{\Lambda} F & = & \prod_{\Lambda} F \end{array}$$

$$\text{resp. } \left\{ \begin{array}{ccc} \prod_{\Lambda_0} G & \xleftarrow{r} & \prod_{\Lambda_1} G' \\ \uparrow s & & \uparrow \nu \\ \prod_{\Lambda_0} \prod_{\Lambda_0} G & \xleftarrow{\alpha_i} & \prod_{\Lambda_0} \prod_{\Lambda_0} G' \\ \downarrow t & & \downarrow \nu \\ \prod_{\Lambda_0} \lim G & \xleftarrow{\alpha_i} & \prod_{\Lambda_0} \alpha_i^* G' \\ \downarrow u & & \downarrow \nu \\ \prod_{\Lambda_0} G & = & \prod_{\Lambda_0} G \end{array} \right.$$

où F' (resp. G') est la restriction de F (resp. G) à Λ_1 . Dans ce diagramme les homomorphismes s , t , u , et ν induisent des isomorphismes en homologie, et l'homomorphisme r est la projection (resp. injection) canonique. Il en résulte alors que l'homomorphisme

$$\alpha_i^* \quad (\text{resp. } \alpha_{i_1})$$

s'identifie avec l'homomorphisme canonique :

$$\begin{array}{ccc} \lim_{\Lambda}^{(*)} & \rightarrow & \lim_{\Lambda_1}^{(*)} \\ \leftarrow_{\Lambda} & & \leftarrow_{\Lambda_1} \\ \left(\text{resp. } \lim_{\Lambda_1}^{(*)} \rightarrow \lim_{\Lambda_0}^{(*)} \right) & & \end{array}$$

induit par i_2 (resp. j_1) de [4.2, (3)].

Comme conséquence immédiate de ceci nous voyons que si $i : \Lambda \rightarrow \Lambda$ est l'identité, alors

$$\alpha_i^* \quad (\text{resp. } \alpha_{i_1})$$

est l'identité.

Remarque 3. — Soient E et E' deux ensembles semi-simpliciaux, et soit

$$\varphi : E \rightarrow E'$$

une application simpliciale.

Considérons le α -foncteur

$$\alpha_\varphi : E' \rightarrow PE$$

défini par $\alpha_\varphi(e') = \varphi^{-1}(e')$.

Remarquons que \hat{e}' et $\alpha_\varphi(e')$ sont des sous-ensembles semi-simpliciaux de E , et que la restriction de φ à $\alpha_\varphi(e')$ est une application simpliciale

$$\varphi : \alpha_\varphi(e') \rightarrow \hat{e}'.$$

Cette application induit un homomorphisme de systèmes projectifs sur E' (resp. E'_0).

$$C(M)_{E'} \rightarrow \alpha_{\varphi^*} C(M)_E$$

[resp. $\alpha_{\varphi^*} C(N)_E \rightarrow C(N)_{E'}$].

Nous avons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
 \prod_E M & \rightarrow & \prod_{E'} \prod_{\alpha} M & \leftarrow & \prod_{E'} \alpha_* M & \leftarrow & \prod_{E'} M \\
 \downarrow i & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow k \\
 \prod_E C(M)_E & \rightarrow & \prod_{E'} \prod_{\alpha} C(M)_E & \leftarrow & \prod_{E'} \alpha_* C(M)_E & \leftarrow & \prod_{E'} C(M)_{E'} \\
 \uparrow j & & & & & & \uparrow l \\
 C(E, M) & \xleftarrow{\varphi^*} & & \xrightarrow{\varphi^*} & & & C(E', M)
 \end{array}$$

(resp. le dual),

où φ' (resp. φ) est l'application induite par φ dans la théorie simpliciale. Supposons maintenant que E et E' satisfont à la condition de 1.1.11, alors les homomorphismes i, j, k et l induisant des isomorphismes en homologie, nous obtenons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
 \lim_{\leftarrow E'}^{(*)} M & \rightarrow & \lim_{\leftarrow E'}^{(*)} \alpha_{\varphi^*} M & \xrightarrow{\alpha_{\varphi^*}^*} & \lim_{\leftarrow E}^{(*)} M \\
 \wr \downarrow & & & & \downarrow \wr \\
 H'(E'; M) & \longrightarrow & & \longrightarrow & H'(E; M)
 \end{array}$$

(resp. le dual).

montrant que l'isomorphisme 1.1.11 est compatible avec les applications simpliciales.

Définition 1.4.3. — Soit I un ensemble ordonné et soit P un sous-ensemble non vide de I , alors on dit que P est un *point de* I si :

- (i) Pour tout $i_1, i_2 \in P$, il existe un $i \in P$, $i < i_1, i_2$.
- (ii) Si $i_1 \in P$ et si $i \in I$, $i_1 < i$ alors $i \in P$.

Considérons alors deux ensembles ordonnés Σ et I , et supposons donnés deux points P_1 et P_0 de I , alors on peut définir deux α -foncteurs

$$\Pi_0, \Pi_1 : \Sigma \times I \rightarrow P\Sigma$$

par

$$\Pi_j(\sigma, i) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } i \notin P_j, \\ \hat{\sigma} & \text{si } i \in P_j \end{cases} \quad (j = 0, 1).$$

Les conditions (i) et (ii) garantissent que Π_j ($j = 0, 1$) sont des α -foncteurs satisfaisant à la condition $(\alpha)_3$. Considérons aussi le α -foncteur :

$$\Pi : \Sigma \times I \rightarrow P\Sigma$$

donné par

$$\Pi(\sigma, i) = \hat{\sigma}.$$

En général, Π ne satisfait pas à la condition $(\chi)_3$.

Cependant il est clair que pour tout $(\sigma, i) \in \Sigma \times I$ on a

$$\Pi_j(\sigma, i) \subseteq \Pi(\sigma, i)$$

donc nous avons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} \prod_{\Sigma}^{\cdot} & \rightarrow & \prod_{\Sigma \times I}^{\cdot} & \prod_{\Pi_0}^{\cdot} & \leftarrow & \prod_{\Sigma \times I}^{\cdot} & \Pi_{0*} \\ \parallel & & \uparrow k & & & \uparrow & \\ \prod_{\Sigma}^{\cdot} & \rightarrow & \prod_{\Sigma \times I}^{\cdot} & \prod_{\Pi}^{\cdot} & \leftarrow & \prod_{\Sigma \times I}^{\cdot} & \Pi_* \\ \parallel & & \downarrow l & & & \downarrow & \\ \prod_{\Sigma}^{\cdot} & \rightarrow & \prod_{\Sigma \times I}^{\cdot} & \prod_{\Pi_1}^{\cdot} & \leftarrow & \prod_{\Sigma \times I}^{\cdot} & \Pi_{1*} \\ & & & & & & \text{(resp. le dual).} \end{array}$$

Nous allons trouver des conditions pour que les homomorphismes k et l induisent des isomorphismes en homologie.

Premièrement on voit, utilisant la suite spectrale 1.3.2, qu'il suffit de trouver des conditions pour que les homomorphismes :

$$\begin{array}{c} \prod_1^{\cdot} M \rightarrow \prod_1^{\cdot} M_{P_j} \quad (j = 0, 1) \\ \left(\text{resp. } \prod_{I_0}^{\cdot} N_{P_j} \rightarrow \prod_{I_0}^{\cdot} N \right), \end{array}$$

où M (resp. N) est un L -module et où M_{P_j} (resp. N_{P_j}) est le système projectif sur I (resp. I_0) défini par

$$\begin{array}{c} (M_{P_j})_i = \begin{cases} M & \text{si } i \in P_j, \\ 0 & \text{si } i \notin P_j \end{cases} \\ \left(\text{resp. } (N_{P_j})_i = \begin{cases} N & \text{si } i \in P_j, \\ 0 & \text{si } i \notin P_j \end{cases} \right) \end{array}$$

induisent des isomorphismes en homologie.

Or, M_{P_j} (resp. N_{P_j}) est flasque (resp. coflasque), puisqu'on a pour tout sous-ensemble $I_1 = \hat{I}_1$ de I :

$$\begin{array}{c} \lim_{\leftarrow I_1} M_{P_j} = \begin{cases} M & \text{si } I_1 \cap P_j \neq \emptyset, \\ 0 & \text{si } I_1 \cap P_j = \emptyset \end{cases} \\ \left(\text{resp. } \lim_{\rightarrow I_1^c} N_{P_j} = \begin{cases} N & \text{si } I_1 \cap P_j \neq \emptyset, \\ 0 & \text{si } I_1 \cap P_j = \emptyset \end{cases} \right). \end{array}$$

En particulier on a

$$\lim_{\leftarrow I} M_{P_j} = M \quad \left(\text{resp. } \lim_{\rightarrow I_0} N_{P_j} = N \right),$$

donc nous avons le résultat suivant :

THÉORÈME 1.4.4. — *Supposons que pour tout système projectif constant M (resp. N) sur I (resp. I_0) on a :*

(i) $\lim_{\leftarrow I} M = 0$ (resp. $\lim_{\rightarrow I_0} N = 0$) pour $p \geq 1$ (resp. $q \geq 1$);

(ii) *l'homomorphisme canonique*

$$M \rightarrow \lim_{\leftarrow I} M \quad \left(\text{resp. } \lim_{\rightarrow I_0} N \rightarrow N \right)$$

est un isomorphisme,

alors k et l induisent des isomorphismes en homologie, nous avons les isomorphismes fonctoriels :

$$\lim_{\leftarrow \Sigma \times 1}^{(*)} \Pi_{0*} \simeq \lim_{\leftarrow \Sigma \times 1}^{(*)} \Pi_* \simeq \lim_{\leftarrow \Sigma \times 1}^{(*)} \Pi_{1*} \quad (\text{resp. le dual})$$

et les homomorphismes :

$$\Pi_0^* \text{ et } \Pi_1^* \quad (\text{resp. le dual})$$

s'identifient,

Nous sommes maintenant en mesure de définir une *homotopie entre deux α -foncteurs.*

Définition 1.4.5. — Soient α_0 et α_1 deux α -foncteurs :

$$\alpha_0, \alpha_1 : \Sigma \rightarrow P\Lambda,$$

satisfaisant à la condition $(\alpha)_3$, alors on dit que α_0 et α_1 sont I -homotopes s'il existe des points P_0, P_1 de I et un α -foncteur

$$\rho : \Sigma \rightarrow P(\Lambda \times I)$$

tels que

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \Pi_0 \circ \rho, \\ \alpha_1 &= \Pi_1 \circ \rho. \end{aligned}$$

Le α -foncteur ρ sera appelé *une I -homotopie*, effectuant la I -homotopie entre α_0 et α_1 .

Supposons pour simplifier qu'on a

$$\text{im } \rho = \Lambda \times I$$

et considérons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 \prod_{\Lambda} & \rightarrow & \prod_{\Lambda \times I} & \prod_{\Pi_0} & \leftarrow & \prod_{\Lambda \times I} & \Pi_{0*} & \rightarrow & \prod_{\Sigma} & \prod_{\rho} & \Pi_{0*} & \leftarrow & \prod_{\Sigma} & \rho_* \Pi_{0*} \\
 \parallel & & \uparrow & & & \uparrow & & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\
 \prod_{\Lambda} & \rightarrow & \prod_{\Lambda \times I} & \prod_{\Pi} & \leftarrow & \prod_{\Lambda \times I} & \Pi_* & \rightarrow & \prod_{\Sigma} & \prod_{\rho} & \Pi_* & \leftarrow & \prod_{\Sigma} & \rho_* \Pi_* \\
 \parallel & & \downarrow & & & \downarrow & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 \prod_{\Lambda} & \rightarrow & \prod_{\Lambda \times I} & \prod_{\Pi_1} & \leftarrow & \prod_{\Lambda \times I} & \Pi_{1*} & \rightarrow & \prod_{\Sigma} & \prod_{\rho} & \Pi_{1*} & \leftarrow & \prod_{\Sigma} & \rho_* \Pi_{1*} \\
 & & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & & & & & \text{(resp. le dual).}
 \end{array}$$

Par inspection de ce diagramme il en résulte, utilisant 1.4.4 qu'on a le résultat suivant.

THÉORÈME 1.4.6. — *Supposons que α_0 et α_1 sont I-homotopes. Soit ρ la I-homotopie effectuant l'homotopie en question, et supposons que I est acyclique, c'est-à-dire que I satisfait aux conditions (i) et (ii) de 1.4.4, alors si*

$$\text{im } \rho = \Lambda \times I,$$

les homomorphismes

$$\begin{aligned}
 \alpha_0, \alpha_1 : \lim_{\leftarrow \Sigma}^{(*)} \rho_* \Pi_* &\rightarrow \lim_{\leftarrow \Lambda}^{(*)} \\
 \left(\text{resp. } \alpha_0, \alpha_1 : \lim_{\rightarrow \Lambda_0}^{(*)} &\rightarrow \lim_{\rightarrow \Sigma_0}^{(*)} \rho^* \Pi^* \right)
 \end{aligned}$$

définis par α_0 et α_1 s'identifient.

Remarque 4. — Soient E_1 et E_2 deux ensembles semi-simpliciaux, et considérons l'ensemble semi-simplicial

$$E_1 \times E_2,$$

produit de E_1 et de E_2 dans la catégorie des ensembles semi-simpliciaux.

On a

$$\begin{aligned}
 E_1 \times E_2 &= \{ (e_1^p, e_2^p) \mid e_i^p \in E_i^p \} & (i = 1, 2, p \geq 0), \\
 s_i (e_1^p, e_2^p) &= (s_i e_1^p, s_i e_2^p) & (i = 0, \dots, p).
 \end{aligned}$$

Soit

$$E_1 \otimes E_2$$

l'ensemble ordonné, produit ensembliste de E_1 et de E_2 , et soit

$$\varphi : E_1 \times E_2 \rightarrow E_1 \otimes E_2$$

l'injection d'ensembles ordonnés.

Nous allons trouver des conditions sur E_1 et E_2 et sur le système projectif F (resp. G) sur $E_1 \otimes E_2$ [resp. $(E_1 \otimes E_2)_0$] pour que φ induise un isomorphisme

$$\begin{aligned} \lim_{(E_1 \otimes E_2)}^{(*)} F &\simeq \lim_{E_1 \times E_2}^{(*)} F \\ \left(\text{resp. } \lim_{(E_1 \otimes E_2)_0}^{(*)} G &\simeq \lim_{(E_1 \times E_2)_0}^{(*)} G \right). \end{aligned}$$

Soit, à titre d'exemple, $E_1 = E_2 =$ l'ensemble semi-simplicial des faces du 1-simplexe type. E_1 et E_2 sont donc des ensembles ordonnés ayant des graphes :



Fig. B.

On vérifiera facilement que les ensembles ordonnés $E_1 \times E_2$ et $E_1 \otimes E_2$ ont des graphes :



Fig. C.

Il est donc clair que dans ce cas on ne peut pas avoir l'isomorphisme en question, même pas pour les systèmes projectifs constants.

Or, supposons que E_1 et E_2 sont des ensembles simpliciaux et soient ν^i les applications $E_j' \rightarrow E_j^{i+1}$ ($j = 1, 2, i = 0, \dots, p + 1$) associées aux applications

$$V_i: (A^0, \dots, A^i, \dots, A^{p+1}) \rightarrow (A^0, \dots, A^p)$$

défini par

$$V_i(A^j) = \begin{cases} A^j & \text{pour } j \leq i, \\ A^{j-i} & \text{pour } j < i. \end{cases}$$

Pour tout $l_j' \in E_j'$ notons par

$$\bar{l}_j'$$

le plus petit sous-ensemble simplicial de E_j contenant l'_j . Définissons alors le α -foncteur :

$$\alpha : E_1 \otimes E_2 \rightarrow P(E_1 \times E_2)$$

par

$$\alpha(l'_1, l'_2) = \{ (l'_1, l'_2) \mid l'_1 \in \bar{l}'_1, l'_2 \in \bar{l}'_2 \}.$$

On peut montrer que α satisfait à la condition $(\alpha)_3$ et que pour tout $(l'_1, l'_2) \in E_1 \otimes E_2$, l'ensemble ordonné

$$\alpha(l'_1, l'_2)$$

est filtrant à droite.

Il en résulte, que si $l'_1 \in E_1^0$ et si $M(l'_1)$ [resp. $N(l'_1)$] est le système projectif sur $E_1 \times E_2$ [resp. $(E_1 \times E_2)_0$] défini par

$$M(l'_1)_{(l'_1, l'_2)} = \begin{cases} M & \text{si } l'_1 > l'_1^0, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\left(\text{resp. } N(l'_1)_{(l'_1, l'_2)} = \begin{cases} N & \text{si } l'_1 > l'_1^0, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \right)$$

alors on a

$$\lim_{\leftarrow \alpha(l'_1, l'_2)}^{(p)} M(l'_1) = 0 \quad \text{pour } p \geq 1$$

$$\left(\text{resp. } \lim_{\rightarrow \alpha(l'_1, l'_2)_0}^{(q)} N(l'_1) = 0 \quad \text{pour } q \geq 1 \right)$$

et

$$(\alpha_* M(l'_1))_{(l'_1, l'_2)} = \begin{cases} M & \text{si } l'_1 > l'_1^0, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\left(\text{resp. } (\alpha^* N(l'_1))_{(l'_1, l'_2)} = \begin{cases} N & \text{si } l'_1 > l'_1^0, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \right).$$

Notons $M_{l'_1} = \alpha_* M(l'_1)$ (resp. $N_{l'_1} = \alpha^* N(l'_1)$). Utilisant la suite spectrale 1.3.1 on a donc l'isomorphisme

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim_{\leftarrow E_1 \times E_2}^{(*)} M_{l'_1} \simeq \lim_{\leftarrow E_1 \otimes E_2}^{(*)} M_{l'_1} \\ \left(\text{resp. } \lim_{\rightarrow (E_1 \times E_2)_0}^{(*)} N_{l'_1} \simeq \lim_{\rightarrow (E_1 \otimes E_2)_0}^{(*)} N_{l'_1} \right) \end{array} \right.$$

De la même manière on montre que pour tout système projectif constant M (resp. N) sur $E_1 \otimes E_2$ [resp. $(E_1 \otimes E_2)_0$] il existe un isomorphisme

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim_{\leftarrow E_1 \times E_2}^{(*)} M \simeq \lim_{\leftarrow E_1 \otimes E_2}^{(*)} M \\ \left(\text{resp. } \lim_{\rightarrow (E_1 \times E_2)_0}^{(*)} N \simeq \lim_{\rightarrow (E_1 \otimes E_2)_0}^{(*)} N \right) \end{array} \right.$$

Ce dernier résultat est étroitement lié au théorème d'Eilenberg-Zilber.

Maintenant, supposons données deux applications simpliciales

$$f_0, f_1 : E_1 \rightarrow E_2$$

et soit I un ensemble simplicial, alors nous disons que f_0 et f_1 sont I -homotopes, s'il existe deux éléments $i_0, i_1 \in I^0$ et une application simpliciale

$$\rho : E_1 \times I \rightarrow E_2$$

tels que

$$(8) \quad f_j(\rho_j^i) = \rho(\rho_j^i, v_{i_1} \circ \dots \circ v_{i_p} i_j) \quad \text{pour } j = 0, 1.$$

Soient

$$\Pi_j : E \rightarrow E_1 \times I \quad (j = 0, 1)$$

les applications simpliciales définies par

$$\Pi_j(\rho_j^i) = (\rho_j^i, v_{i_1} \circ \dots \circ v_{i_p} i_j) \quad (j = 0, 1),$$

alors (8) équivaut à

$$(9) \quad f_j = \rho \circ \Pi_j \quad (j = 0, 1).$$

Par la *remarque 1* de 1.1 on en déduit des α -foncteurs :

$$\begin{aligned} \alpha_{f_j} : E_2 &\rightarrow PE_1, \\ \alpha_\rho : E_2 &\rightarrow P(E_1 \times I), \\ \alpha_{\Pi_j} : E_1 \times I &\rightarrow PE_1. \end{aligned}$$

D'après (9) on a

$$\alpha_{f_j} = \alpha_{\Pi_j} \circ \alpha_\rho.$$

Considérons aussi le α -foncteur :

$$\alpha_{\Pi} : E_1 \times I \rightarrow PE_1$$

défini par

$$\alpha_{\Pi}(\rho_j^i, i^p) = \hat{\rho}_j^i$$

Nous avons alors un diagramme commutatif

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{ccccccc} \prod_{E_1} & \rightarrow & \prod_{E_1 \times I} & \prod_{\alpha_{\Pi_0}} & \leftarrow & \prod_{E_1 \times I} & \alpha_{\Pi_0} \\ \parallel & & \uparrow & & & \uparrow & \\ \prod_{E_1} & \rightarrow & \prod_{E_1 \times I} & \alpha_{\Pi} & \leftarrow & \prod_{E_1 \times I} & \alpha_{\Pi} \\ \parallel & & \downarrow & & & \downarrow & \\ \prod_{E_1} & \rightarrow & \prod_{E_1 \times I} & \alpha_{\Pi_1} & \leftarrow & \prod_{E_1 \times I} & \alpha_{\Pi_1} \end{array} \right.$$

(resp. le dual).

Pour tout système projectif constant M (resp. N) sur E_1 (resp. E_1^0) le système projectif sur $E_1 \times I$ (resp. $(E_1 \times I)_0$), l'homologie de

$$\prod_{x_{\Pi_j}} M \quad \left(\text{resp. } \prod_{x_{\Pi_j}} N \right) \quad (j = 0, 1)$$

est donné par

$$\lim_{\leftarrow x_{\Pi_j}}^{(p)} M = \begin{cases} 0 & \text{si } p \neq 0, \\ M_{i_j} & \text{si } p = 0 \end{cases} \quad (j = 0, 1)$$

$$\left(\text{resp. } \lim_{\leftarrow x_{\Pi_j}^0}^{(q)} N = \begin{cases} 0 & \text{si } q \neq 0, \\ N_{i_j} & \text{si } q = 0 \end{cases} \right).$$

Le système projectif sur $E_1 \times I$ [resp. $(E_1 \times I)_0$] l'homologie de

$$\prod_{x_{\Pi}} M \quad \left(\text{resp. } \prod_{x_{\Pi}} N \right)$$

est donné par

$$\lim_{\leftarrow x_{\Pi}^0}^{(p)} M = \begin{cases} 0 & \text{si } p \neq 0, \\ M & \text{si } p = 0 \end{cases}$$

$$\left(\text{resp. } \lim_{\leftarrow x_{\Pi}^0}^{(q)} N = \begin{cases} 0 & \text{si } q \neq 0, \\ N & \text{si } q = 0 \end{cases} \right)$$

Il en résulte, utilisant (6), (7) et (10) :

THÉORÈME 1.4.7. — *Supposons que pour tout système projectif constant M (resp. N) sur I (resp. I_0) on a :*

- (i) $\lim_{\leftarrow I}^{(p)} M = 0$ (resp. $\lim_{\leftarrow I_0}^{(q)} N = 0$) pour $p \geq 1$ (resp. $q \geq 1$);
- (ii) l'homomorphisme canonique

$$M \rightarrow \lim_{\leftarrow I} M \quad \left(\text{resp. } \lim_{\leftarrow I_0} N \rightarrow N \right)$$

est un isomorphisme.

Alors on a des isomorphismes :

$$\lim_{\leftarrow E_1 \times I}^{(*)} x_{\Pi_0^*} M \simeq \lim_{\leftarrow E_1 \times I}^{(*)} x_{\Pi^*} M \simeq \lim_{\leftarrow E_1 \times I}^{(*)} x_{\Pi_1^*} M$$

$$\left(\text{resp. } \lim_{\leftarrow (E_1 \times I)_0}^{(*)} x_{\Pi_0^*} N \simeq \lim_{\leftarrow (E_1 \times I)_0}^{(*)} x_{\Pi^*} N \simeq \lim_{\leftarrow (E_1 \times I)_0}^{(*)} x_{\Pi_1^*} N \right)$$

et les homomorphismes

$$x_{\Pi_0^*} \text{ et } x_{\Pi_1^*} \quad \left(\text{resp. } x_{\Pi_0^*} \text{ et } x_{\Pi_1^*} \right)$$

induits par Π_0 et Π_1 s'identifient.

De là, on déduit automatiquement :

THÉORÈME 1.4.8. — *Supposons que f_0 et f_1 sont I-homotopes, et supposons que I satisfait aux conditions (i) et (ii) de 1.4.7, alors les homomorphismes*

$$\begin{aligned} f_0, f_1 : \lim_{\leftarrow E_2}^{(*)} M &\rightarrow \lim_{\leftarrow E_1}^{(*)} M \\ \left(\text{resp. } f_0, f_1 : \lim_{\leftarrow E_1}^{(*)} N &\rightarrow \lim_{\leftarrow E_2}^{(*)} N \right) \end{aligned}$$

définis par f_0 et f_1 , s'identifient.

A titre d'exemple, soient E_1 et E_2 deux schémas simpliciaux, et soient

$$f_0, f_1 : E_1 \rightarrow E_2$$

deux applications simpliciales, tels que pour tout simplex σ_1 de E_1 , $f_0(\sigma_1)$ et $f_1(\sigma_1)$ sont contenus dans le même simplex σ_2 de E_2 .

Notons par I le schéma simplicial $\{i_0, i_1\}$ où tous les sous-ensembles finis sont distingués.

On note par $\bar{E}_1, \bar{E}_2, \bar{I}$ les ensembles simpliciaux des simplex singuliers de E_1, E_2 et I. Les applications f_0, f_1 induisent des applications simpliciales

$$\bar{f}_0, \bar{f}_1 : \bar{E}_1 \rightarrow \bar{E}_2.$$

Définissons l'application simpliciale

$$\rho : \bar{E}_1 \times \bar{I} \rightarrow \bar{E}_2$$

par

$$\rho((A^0, A^1, \dots, A^p), (i_{r_0}, i_{r_1}, \dots, i_{r_p})) = (f_{r_0}(A^0), f_{r_1}(A^1), \dots, f_{r_p}(A^p)),$$

où pour tout $i = 0, \dots, p$, $r_i = 0, 1$.

On vérifie alors facilement que

$$\bar{f}_0 \text{ et } \bar{f}_1$$

sont \bar{I} -homotopes, moyennant la \bar{I} -homotopie ρ .

1.5. Foncteurs de supports.

Dans la théorie classique de topologie algébrique, la cohomologie à supports contenue dans un antifiltre joue un rôle fondamental.

Nous allons ici montrer comment cette théorie peut être généralisée. Il va être clair que cette théorie est le point de départ pour l'étude de la dualité de type Poincaré.

Soit Ψ un ensemble ordonné et soit

$$\Phi : \Psi_0 \rightarrow \text{PA}$$

un α -foncteur. Dès maintenant nous dirons qu'un tel Φ est un *foncteur de supports sur Λ défini sur Ψ* .

Partant d'un foncteur de support sur Λ défini sur Ψ on définit un système

projectif sur Ψ (resp. Ψ_0), noté $\prod_{\Lambda/\Phi}^{\Lambda_0/\Phi_0}$ (resp. $\prod_{\Lambda/\Phi}$) par

$$\psi \rightsquigarrow \prod_{\Lambda/\Phi(\psi)}^{\Lambda_0/\Phi(\psi)_0}$$

$$\left(\text{resp. } \psi \rightsquigarrow \prod_{\Lambda/\Phi(\psi)} \right).$$

Notre préoccupation principale dans ce paragraphe sera de trouver des conditions pour qu'on ait

$$\lim_{\leftarrow \Psi}^{(p)} \prod_{\Lambda/\Phi}^{\Lambda_0/\Phi_0} = 0 \quad \text{pour } p \geq 1$$

$$\left(\text{resp. } \lim_{\leftarrow \Psi_0}^{(q)} \prod_{\Lambda/\Phi} = 0 \quad \text{pour } q \geq 1 \right).$$

Pour commencer, considérons la suite exacte de systèmes projectifs sur Ψ (resp. Ψ_0).

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 \rightarrow \prod_{\Lambda/\Phi}^{\Phi_0} \rightarrow \prod_{\Lambda}^{\Lambda_0} \rightarrow \prod_{\Phi}^{\Lambda_0/\Phi_0} \rightarrow 0 \\ \left(\text{resp. } 0 \rightarrow \prod_{\Lambda/\Phi} \rightarrow \prod_{\Lambda} \rightarrow \prod_{\Phi} \rightarrow 0 \right). \end{array} \right.$$

LEMME 1.5.1. — *Supposons que Ψ est filtrant à droite, alors nous avons*

$$\lim_{\leftarrow \Psi_0}^{(q)} \prod_{\Lambda/\Phi} = 0 \quad \text{pour } q \geq 1.$$

Si, de plus, Ψ contient un sous-ensemble cofinal dénombrable, nous avons

$$\lim_{\leftarrow \Psi}^{(p)} \prod_{\Lambda/\Phi}^{\Lambda_0/\Phi_0} = 0 \quad \text{pour } p \geq 1.$$

Démonstration. — Puisque, d'après l'hypothèse, $\lim_{\leftarrow \Psi_0}$ est exact, la première conclusion est triviale. Si Ψ contient un sous-ensemble cofinal dénombrable, on a

$$\lim_{\leftarrow \Psi}^{(p)} = 0 \quad \text{pour } p \geq 2,$$

donc on déduit de (1) une suite exacte :

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \lim_{\leftarrow \Psi} \prod_{\Phi_0}^{\Phi_0} \rightarrow \lim_{\leftarrow \Psi} \prod_{\Lambda_0}^{\Lambda_0} \rightarrow \lim_{\leftarrow \Psi} \prod_{\Lambda_0/\Phi_0}^{\Lambda_0/\Phi_0} \rightarrow \lim_{\leftarrow \Psi}^{(1)} \prod_{\Phi_0}^{\Phi_0} \\ \rightarrow \lim_{\leftarrow \Psi}^{(1)} \prod_{\Lambda_0}^{\Lambda_0} \rightarrow \lim_{\leftarrow \Psi}^{(1)} \prod_{\Lambda_0/\Phi_0}^{\Lambda_0/\Phi_0} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Or, puisque \prod_{Λ_0} est un système projectif constant sur Ψ , on a $\lim_{\leftarrow \Psi}^{(1)} \prod_{\Lambda_0}^{\Lambda_0} = 0$.

Il en résulte immédiatement :

$$\lim_{\leftarrow \Psi}^{(1)} \prod_{\Lambda_0/\Phi_0}^{\Lambda_0/\Phi_0} = 0.$$

Q. E. D.

COROLLAIRE 1.5.2. — Supposons que Ψ est filtrant à droite, alors on a la suite exacte :

$$0 \rightarrow \lim_{\leftarrow \Psi_0} \prod_{\Lambda/\Phi} \rightarrow \prod_{\Lambda} \rightarrow \lim_{\leftarrow \Psi_0} \prod_{\Phi} \rightarrow 0$$

si, de plus, Ψ contient un sous-ensemble cofinal dénombrable, et si pour tout $\lambda \in \Lambda$ il existe un $\psi \in \Psi$ tel que $\lambda \notin \Phi(\psi)$, alors on a la suite exacte :

$$0 \rightarrow \prod_{\Lambda_0}^{\Lambda_0} \rightarrow \lim_{\leftarrow \Psi} \prod_{\Lambda_0/\Phi_0}^{\Lambda_0/\Phi_0} \rightarrow \lim_{\leftarrow \Psi}^{(1)} \prod_{\Phi_0}^{\Phi_0} \rightarrow 0.$$

Démonstration. — Ceci est une conséquence immédiate de la démonstration de 1.5.1 et le fait que si $\bigcap_{\psi \in \Psi} \Phi(\psi) = \emptyset$ on a

$$\lim_{\leftarrow \Psi} \prod_{\Phi_0}^{\Phi_0} = 0$$

Q. E. D.

PROPOSITION (1.5.3). — Soit Φ un foncteur de supports sur Λ défini sur Ψ . Supposons que Φ satisfait à la condition suivante :

(c) Si $\Phi(\psi_1) \cup \Phi(\psi_2) \neq \Lambda$, alors il existe un nombre fini d'éléments ψ^j de Ψ , $j = 1, \dots, n$ tels que

$$\psi^j < \psi_1, \psi_2, \quad \bigcap_{j=1}^n \Phi(\psi^j) = \Phi(\psi_1) \cup \Phi(\psi_2).$$

(resp. : (H a) Si $\Phi(\psi_1) \cup \Phi(\psi_2) \neq \Lambda$ alors on a

$$\Phi(\psi_1) \cup \Phi(\psi_2) = \bigcap_{\Psi < \psi_1, \psi_2} \Phi(\psi),$$

(H b) Pour tout $\psi \in \Psi$ et pour tout sous-ensemble $\Psi_1 \subseteq \hat{\psi}$, il existe un nombre fini d'éléments ψ^i de Ψ_1 , $i = 1, \dots, m$ tels que

$$\hat{\Psi}_1 = \bigcup_{i=1}^m \hat{\psi}^i.$$

Dans ce cas, le système projectif

$$\prod_{\Lambda/\Phi} \left(\text{resp. } \prod_{\Lambda_0/\Phi_0} \right)$$

est coflasque (resp. flasque).

Démonstration. — Puisque pour tout $\psi \in \Psi$

$$\prod_{\Lambda/\Phi(\psi)} \rightarrow \prod_{\Lambda} \left(\text{resp. } \prod_{\Lambda_0} \rightarrow \prod_{\Lambda_0/\Phi(\psi)_0} \right)$$

est injectif (resp. surjectif) il suffit de montrer que pour tout $\psi \in \Psi$, et pour tout sous-ensemble $\Psi_1 = \hat{\Psi}_1$ de $\hat{\psi}$ l'homomorphisme

$$k^p: \lim_{\substack{\rightarrow \\ \Psi_1^p}} \prod_{\Lambda/\Phi}^p \rightarrow \prod_{\Lambda}^p \quad (p \geq 0)$$

$$\left(\text{resp. } l_q: \prod_{\Lambda_0}^q \rightarrow \lim_{\substack{\leftarrow \\ \Psi_1}} \prod_{\Lambda_0/\Phi}^q \quad (q \geq 0) \right)$$

est injectif (resp. surjectif).

Pour tout $r \geq 0$ considérons l'ensemble $\Lambda(r)$ et le α -foncteur

$$\Phi(r): \Psi_0 \rightarrow P\Lambda(r)$$

de 1.3. Il est clair qu'on a un isomorphisme fonctoriel :

$$\prod_{\Lambda/\Phi}^p \simeq \prod_{\Lambda(p)/\Phi(p)}^0$$

$$\left(\text{resp. } \prod_{\Lambda_0/\Phi_0}^q \simeq \prod_{\Lambda_0(q)/\Phi_0(q)}^0 \right),$$

donc il suffit de montrer que k^0 (resp. l_0) est injectif (resp. surjectif).

k^0 est injectif : Pour tout $\psi \in \Psi$ considérons $\prod_{\Lambda/\Phi(\psi)}^0$ comme le sous-module de \prod_{Λ}^0 des fonctions sur Λ nulles sur $\Phi(\psi)$. Si $f \in \prod_{\Lambda}^0$ désignons par Λ_f l'ensemble des $\lambda \in \Lambda$ tels que $f_\lambda \neq 0$.

Soit donc $g \in \lim_{\substack{\longrightarrow \\ \Psi_1^0}} \prod_{\Lambda/\Phi}^0$, $g \neq 0$, et représentons g par la famille finie $\{g_{\psi_i}\}_{i=1, \dots, s}$ d'éléments $g_{\psi_i} \in \prod_{\Lambda/\Phi(\psi_i)}$.

Supposons que cette famille contient un nombre minimal d'éléments. Posons $\Lambda_i = \Lambda_{g_{\psi_i}}$, $i = 1, \dots, s$. Par la minimalité de $\{g_{\psi_i}\}_{i=1, \dots, s}$, on a $\Lambda_i \neq \emptyset$ pour tout $i = 1, \dots, s$.

De la définition de Λ_f on déduit

$$\Lambda_1 \subseteq \Lambda - \Phi(\psi_1).$$

Supposons que $1, \dots, t_i, t_i \leq s$ sont tous les j pour lesquels on a $\Lambda_i \cap \Lambda_j \neq \emptyset$, et soit t_i le plus petit parmi les t_i , quand on varie $i = 1, \dots, s$, et la représentation de g par des familles de s éléments.

Dire que $k^0(g) = 0$, c'est dire qu'en tant qu'éléments de \prod_{Λ}^0 on a

$$(2) \quad \sum_{i=1}^s g_{\psi_i} = 0.$$

Il est facile de voir que (2) entraîne $t_1 \geq 2$. La condition (c) garantit qu'il existe des éléments $\psi^k < \psi_1, \psi_2$, $k = 1, \dots, r$ tels que

$$\bigcap_{k=1}^r \Phi(\psi^k) = \Phi(\psi_1) \cup \Phi(\psi_2),$$

ce qui est équivalent de

$$\bigcup_{k=1}^r (\Lambda - \Phi(\psi^k)) = (\Lambda - \Phi(\psi_1)) \cap (\Lambda - \Phi(\psi_2)).$$

Or ceci montre qu'on peut choisir des éléments $f_k \in \prod_{\Lambda/\Psi(\psi^k)}^0$ tels que $\sum_{k=1}^r f_k$ est égal à la restriction de g_1 à

$$\Lambda_1 \cap \Lambda_2 \subseteq (\Lambda - \Phi(\psi_1)) \cap (\Lambda - \Phi(\psi_2)).$$

Soit g'_1 l'élément $g_1 - \sum_{k=1}^r f_k$ de $\prod_{\Lambda/\Phi(\psi_1)}^0$ et soit g'_2 l'élément $g_2 + \sum_{k=1}^r f_k$ de $\prod_{\Lambda/\Phi(\psi_2)}^0$, alors la famille

$$\{g'_1, g'_2, g_3, \dots, g_s\}$$

représente l'élément g . Or, on a

$$\Lambda_{g'_1} \cap \Lambda_{g'_2} = \emptyset$$

et

$$\Lambda_{g'_i} \subseteq \Lambda_{g_i},$$

donc :

$$\Lambda_{g'_j} \cap \Lambda_{g_j} = \emptyset \quad \text{pour } j > t_1,$$

ce qui est en contradiction avec la minimalité de t_1 .

Q. E. D.

l_0 est surjectif : Pour tout système projectif G sur Λ_0 , et pour tout $\psi \in \Psi$, considérons $\prod_0^{\Lambda_0/\Phi(\psi)}$ comme sous-ensemble de $\prod_{\lambda \in \Lambda - \Phi(\psi)} \dots$. La condition (H a) garantit alors que tout élément $f \in \lim_{\leftarrow \Psi_1} \prod_0^{\Lambda_0/\Phi_0}$ s'identifie avec un élément f' de $\prod_{\substack{\Lambda - \cap \Phi(\psi) \\ \psi \in \Psi_1}} G_\lambda$. Il reste seulement de voir que $f' \in \prod_{\substack{\Lambda - \cap \Phi(\psi) \\ \psi \in \Psi_1}} G_\lambda$, ce qui résulte trivialement de (H b).

Q. E. D.

Exemple 1. — Soit donné un α -foncteur

$$\alpha: \Psi \rightarrow P\Lambda$$

satisfaisant à la condition $(\alpha)_3$, alors on en déduit un foncteur de supports sur Λ défini sur Ψ , Φ_α en posant

$$\Phi_\alpha(\psi) = \overline{\{\lambda \mid \lambda \notin \alpha(\psi)\}}.$$

Si $\lambda \notin \Phi_\alpha(\psi_1) \cup \Phi_\alpha(\psi_2)$ on a $\lambda \in \alpha(\psi_1) \cap \alpha(\psi_2)$, donc il existe un $\psi < \psi_1, \psi_2$ tel que $\lambda \in \alpha(\psi)$. En général on ne sait pas si $\lambda \notin \Phi_\alpha(\psi)$ ou non, mais dans des cas particulièrement intéressants, ceci est vrai, donc Φ_α satisfait à la condition (H a).

Exemple 2. — Sur tout ensemble ordonné Λ on peut construire un foncteur de supports défini sur Λ lui-même,

$$\Phi_\Lambda: \Lambda \rightarrow P\Lambda$$

en posant

$$\Phi_\Lambda(\lambda) = \{\lambda' \mid \lambda' \in \Lambda, \lambda' \not\triangleright \lambda\}.$$

Si $\lambda \notin \Phi_\Lambda(\lambda_1) \cup \Phi_\Lambda(\lambda_2)$, alors $\lambda > \lambda_1, \lambda_2$, donc puisque $\lambda \notin \Phi_\Lambda(\lambda)$ il est clair que Φ_Λ satisfait à (H a).

Soit maintenant K un schéma simplicial localement fini. Si $\sigma \in K$ est un simplexe, alors l'ensemble des simplexes $\sigma' > \sigma$ est fini. Il en résulte que le foncteur de supports sur K défini sur K , Φ_K satisfait aux condi-

tions (c), (H a) et (H b). D'après 1.5.3, le système projectif $\prod_{K/\Phi_K} \left(\text{resp. } \prod_{K_0/\Phi_{K_0}} \right)$ sur K^0 (resp. K) est coflasque (resp. flasque). L'homomorphisme de double-complexes :

$$\begin{array}{c} \lim_{\substack{\longrightarrow \\ K}} \prod_{K/\Phi_K} \longleftarrow \prod_{K/\Phi_K} \\ \left(\text{resp. } \lim_{\substack{\longrightarrow \\ K_0}} \prod_{K_0/\Phi_{K_0}} \longrightarrow \prod_{K_0/\Phi_{K_0}} \right) \end{array}$$

induit donc des isomorphismes en homologie. Notons qu'on a

$$\begin{array}{c} \lim_{\substack{\longleftarrow \\ K/\Phi_K(\sigma)}} \simeq H^*(K, K - st(\sigma); *) \\ \left(\text{resp. } \lim_{\substack{\longrightarrow \\ K_0/\Phi_{K_0}(\sigma_0)}} \simeq H_*(K, K - st(\sigma); *) \right). \end{array}$$

Posons

$$\begin{array}{c} H_{s.f.}(K; *) = H_0 \left(\lim_{\substack{\longrightarrow \\ K} } \prod_{K/\Phi_K} * \right) \\ \left[\text{resp. } H_{s.f.}^l(K; *) = H_0 \left(\lim_{\substack{\longleftarrow \\ K_0} } \prod_{K_0/\Phi_{K_0}} * \right) \right], \end{array}$$

alors calculant la première suite spectrale du double-complexe

$$\prod_{K/\Phi_K} \prod_{K_0/\Phi_{K_0}}$$

on voit qu'il existe une suite spectrale donnée par le terme

$$\begin{array}{c} E_2^{p,q} = \lim_{\substack{\longrightarrow \\ K}}^{(p)} \underline{H}^q(*) \\ \left(\text{resp. } E_{p,q}^2 = \lim_{\substack{\longleftarrow \\ K_0}}^{(p)} \underline{H}_q(*) \right), \end{array}$$

où \underline{H}^q (resp. \underline{H}_q) est le système projectif sur K (resp. K_0) défini par

$$\begin{array}{c} \sigma \rightsquigarrow H^q(K, K - st(\sigma); *) \\ [\text{resp. } \sigma \rightsquigarrow H_q(K, K - st(\sigma); *)], \end{array}$$

aboutissant à

$$H_{s.f.}(K; *) \quad [\text{resp. } H_{s.f.}^l(K; *)].$$

Supposons que K est une variété combinatoire, alors on a

$$\underline{H}^q(M) = \begin{cases} O & \text{si } q \neq n = \dim K, \\ M & \text{si } q = n \end{cases}$$

$$\left(\text{resp. } \underline{H}_q(N) = \begin{cases} O & \text{si } q \neq n, \\ N & \text{si } q = n \end{cases} \right),$$

de plus on a

$$\lim_{\substack{\rightarrow \\ K}} {}^{(p)}M \simeq H_p(K; M) \quad \left(\text{resp. } \lim_{\substack{\leftarrow \\ K_0}} {}^{(p)}N \simeq H^p(K; N) \right).$$

Donc nous avons montré la dualité de Poincaré :

$$H_p(K; M) \simeq H_{s.f.}^{n-p}(K; M),$$

$$[\text{resp. } H^p(K; N) \simeq H_{n-p}^{l.f.}(K; N)].$$

Si l'on se donne dans K un sous-schéma L tel que (K, L) est une variété combinatoire relative, alors on aura

$$H_p(K, L; M) \simeq H_{s.f.}^{n-p}(K; M)$$

$$[\text{resp. } H^p(K, L; N) \simeq H_{n-p}^{l.f.}(K; N)].$$

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] P. S. ALEXANDROFF, *On local properties of closed sets* (Ann. Math., t. 36, 1935, p. 1-35).
- [2] A. BOREL, *The Poincaré duality in generalized manifolds* (Mich. Math. J., t. 4, 1957, p. 227-239).
- [3] A. BOREL et J. C. MOORE, *Homology theory for locally compact spaces* (Mich. Math. J., t. 7, 1960, p. 137-159).
- [4] A. BOREL et HAÉFLIGER, *Classe d'homologie fondamentale* (Bull. Soc. Math. Fr., t. 89, 1961, p. 461-513).
- [5] R. DEHEUVELS, *Homologie dans un antifaisceau* (C. R. Acad. Fr., t. 250, 1960, p. 2492-2494).
- [6] R. DEHEUVELS, *Exposé au Séminaire Dubreil-Pisot*, 1961.
- [7] R. DEHEUVELS, *Homologie des ensembles ordonnés et des espaces topologiques* (Bull. Soc. Math. Fr., t. 90, 1962, p. 261-320).
- [8] O. GERSTNER, *Homologie-Moduln über abelschen Halbgruppen. Bestimmung der Čechschen Homologie-Moduln eines Raumes X durch einer Funktionenring über X* (Bonner Math. Schr., t. 12, 1960, p. 47-73).
- [9] R. GODEMENT, *Théorie des faisceaux*. Hermann, Paris, 1958.
- [10] A. GROTHENDIECK, *Séminaire de Géométrie Algébrique de l'Institut des Hautes Études Scientifiques*, 1962, exp. 1.
- [11] S. T. HU, *Algebraic local invariants of topological spaces* (Composit. Math., t. 13, 1958, p. 173-218).
- [12] JOHN JOHNSON, *On a non-functorial subcomplex of the singular complex inducing isomorphismes in homology* (Matematisk Seminar, Universitetet i Oslo, n° 7, 1964).
- [13] Y. KAWADA, *Theory of cosheaves*. J. Fac. Sc. Univ. Tokyo, Sect. I, t. 8, 1960, p. 439-506).
- [14] O. A. LAUDAL, *Sur la limite projective et la théorie de la dimension I et II*, Séminaire C. Ehresmann, Paris, 1961.

- [15] O. A. LAUDAL, *Cohomologie et homologie pour les ensembles ordonnés*, Séminaire C. Ehresmann, Paris, 1962.
- [16] O. A. LAUDAL, *Cohomologie locale. Applications* (Math. Scand., t. 12, 1963, p. 147-162).
- [17] O. A. LAUDAL, *Quelques remarques sur la cohomologie et l'homologie d'un espace topologique* (Matematisk Seminar, Universitetet i Oslo, n° 12, 1963).
- [18] O. A. LAUDAL, *Produits dans la théorie des limites projectives et inductives* (Matematisk Seminar, Universitetet i Oslo, n° 3, 1964).
- [19] E. LUFT, *Eine Verallgemeinerung der Čechsen Homologie-theorie* (Bonner Math. Schr., t. 8, 1959).
- [20] J. MILNOR, *On the Steenrod homology theory* (non publié).
- [21] G. NOEBELING, *Cohomologie-Moduln über abelschen Halbgruppen* (Bonner Math. Schr., t. 12, 1960, p. 1-32).
- [22] G. NOEBELING, *Über die Derivierten des inversen und des direkten Limes einer Modulfamilie* (Topology, t. 1, 1962, p. 47-63).
- [23] F. RAYMOND, *Local cohomology groups with closed supports* (Math. Zeitschr., t. 76, 1961, p. 31-41).
- [24] J. E. ROOS, *Sur les dérivés de \varprojlim . Applications* (C. R. Acad. Fr., t. 252, 1961, p. 3702-3704).
- [25] J. E. ROOS, *Bidualité et structure des foncteurs dérivés de \varprojlim dans la catégorie des modules sur un anneau régulier* (C. R. Acad. Sc., t. 254, 1962, p. 1556-1558).
- [26] J. E. ROOS, *Ibid.*, (C. R. Acad. Sc., t. 254, 1962, p. 1720-1722).
- [27] J. P. SERRE, *Un théorème de dualité* (Commentarii Math. Helv., t. 29, 1955, p. 9-26).
- [28] SPANIER, *Cohomology theory for general spaces* (Ann. Math., t. 49, 1948, p. 407-427).
- [29] N. STEENROD, *Regular cycles of compact metric spaces* (Ann. Math., t. 41, 1940, p. 833-851).
- [30] Z. Z. YEH, *Higher inverse limits and homology theories*. Thèse, Princeton, 1959.
- [31] E. C. ZEEMAN, *Dihomology I. Relations between homology theories* (Proc. London Math. Soc., (3), t. 12, 1962, p. 609-638).
- [32] E. C. ZEEMAN, *Dihomology II. The spectral theories of a map* (Proc. London Math. Soc., (3), t. 12, 1962, p. 639-689).
- [33] E. C. ZEEMAN, *Dihomology III. A generalization of the Poincaré duality for manifolds* (Proc. London Math. Soc., t. 13, 1963, p. 155-183).
- [34] M. ZISMAN, *Travaux de Borel-Haefliger-Moore* (Séminaire Bourbaki, t. 240, 1961-1962, p. 1-9).

