ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

PIERRE SAPHAR

Sur les applications linéaires dans un espace de Banach. II

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 82, nº 2 (1965), p. 205-240
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1965_3_82_2_205_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
3e série, t. 82, 1965, p. 205 à 240.

SUR LES APPLICATIONS LINÉAIRES DANS UN ESPACE DE BANACH. II

PAR M. PIERRE SAPHAR.

INTRODUCTION.

Ce travail est la suite naturelle d'un précédent article [13] : Soient E un espace de Banach complexe, T une application linéaire continue de E dans E. Désignons par $\overline{N}$ l'ensemble des entiers positifs N, augmenté de $+\infty$. Soit (n, p) un couple d'éléments de $\overline{N}$. Dans [13] nous avons introduit le sous-ensemble ouvert de C, RP(n, p, T), formé des z pour lesquels,

$$\dim \ker (T - z) = n, \qquad \operatorname{codim} (T - z)(E) = p, \qquad \ker (T - z) \subset \operatorname{co}(T - z),$$

[co$(T - z)$ est le plus grand sous-espace vectoriel de E, invariant par $T - z$]. Nous avons montré que RP$(n, p; T)$ est étroitement lié à l'ensemble de Noether de T formé des z pour lesquels l'indice de $T - z$ est constant.

L'objet du chapitre I de ce travail est la construction d'une application holomorphe R de RP$(n, p; T)$ dans $\mathcal{L}(E)$, jouant un rôle analogue à la « fonction résolvante » dans le domaine résolvant de T, RP(o, o; T). On étudie les propriétés de R. La fonction R que nous construisons satisfait aussi à l'équation fonctionnelle de la résolvante :

$$R(z) - R(z') = (z - z')\, R(z)\, R(z').$$

Cela permet d'élaborer un calcul fonctionnel analogue à celui de N. Dunford [4].

Dans le chapitre II, on étudie les propriétés du calcul fonctionnel précédent en liaison avec l'ensemble des z pour lesquels $T - z$ est inversible à gauche. On introduit des projecteurs dont les noyaux sont stables par T et sont liés à des propriétés topologiques du spectre de T.

Dans le chapitre III, on fait une étude analogue liée à l'ensemble des z pour lesquels $T - z$ est inversible à droite. Enfin, en Appendice, on étudie l'équation $(T - z)x = y$, pour y donné et z appartenant à $RP(n, p; T)$.

Les principaux résultats de ce travail ont fait l'objet de deux Notes aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* ([14], [15]).

Pour conclure, je tiens à adresser mes remerciements chaleureux à M. J. Dixmier pour tous les conseils et encouragements qu'il m'a donnés.

Par ailleurs, M. L. Schwartz a relu le manuscrit et m'a fait d'utiles remarques. Ses conseils ont entraîné des développements nouveaux. Je voudrais lui exprimer ici toute ma gratitude.

CHAPITRE I.

L'APPLICATION R. CALCUL FONCTIONNEL ASSOCIÉ.

Soient E un espace de Banach complexe, $\mathcal{L}(E)$ l'algèbre des applications linéaires continues de E dans E. Dans toute la suite $\mathcal{L}(E)$ sera munie de la topologie de la norme. $\overline{N}$ désignera l'ensemble des entiers positifs N augmenté de $+\infty$. Soient $T \in \mathcal{L}(E)$, n et p deux éléments de $\overline{N}$. D'après ([13], théor. 1), au voisinage de chaque point de $RP(n, p; T)$, il existe une fonction holomorphe $z \to R(z)$, définie dans ce voisinage, à valeurs dans $\mathcal{L}(E)$, telle que $R(z)$ soit pour chaque z un inverse relatif de $T - z$.

Il est naturel de se poser la question suivante : Peut-on déterminer une fonction holomorphe $z \to R(z)$ définie dans $RP(n, p; T)$ à valeurs dans $\mathcal{L}(E)$ telle que $R(z)$ soit un inverse relatif de $T - z$?

Nous avons obtenu une réponse partielle à cette question.

1. CONSTRUCTION DE L'APPLICATION R. — Dans toute la suite, n et p sont deux éléments de N; D est une composante connexe de $RP(n, p; T)$. Soient $z_0 \in D$, X un inverse relatif de $T - z_0$. On sait, d'après ([13], théor. 1), que la fonction $z \to R(z) = [1 - (z - z_0)X]^{-1}X$, définie et holomorphe pour les z tels que $|z - z_0| < |X|^{-1}$, est un inverse relatif de $T - z$. Nous allons étudier si cette fonction peut être prolongée analytiquement.

LEMME 1. — *Pour tout* $z \in D$, $1 - (z - z_0)X$ *est un morphisme strict de* E *dans* E *d'indice nul.*

Démonstration. — On peut écrire, pour tout z de D,

$$(1)\quad \begin{cases} X(T-z)X = X[T-z_0-(z-z_0)]X, \\ X(T-z)X = X-(z-z_0)X^2, \\ X(T-z)X = X[1-(z-z_0)X]. \end{cases}$$

Rappelons que l'indice de T, $\chi(T)$, est défini par

$$\chi(T) = \dim\ker(T) - \operatorname{codim} T(E),$$

lorsque $\dim\ker(T)$ et $\operatorname{codim} T(E)$ ne sont pas simultanément infinis. Les principales propriétés de l'indice ont été rappelées dans ([13], § 3, n° 5).

D'après ([13], propos. 21), $\chi(X) = -\chi(T-z_0)$. Puisque $\chi(X)$ et $\chi(T-z)$ existent, on déduit que $\chi(1-(z-z_0)X)$ existe. Cela implique que $1-(z-z_0)X$ est un morphisme strict. De plus, l'égalité (1) entraîne

$$\begin{aligned}\chi(1-(z-z_0)X) &= \chi(X)+\chi(T-z)\\ &= -\chi(T-z_0)+\chi(T-z)\\ &= 0.\end{aligned}$$

Le lemme est démontré.

Lemme 2. — *Soit* $z \in$ D. *Pour que* $1-(z-z_0)X$ *soit un isomorphisme de* E *sur* E, *il faut et suffit que les deux conditions suivantes soient vérifiées :*

$$(1)\quad \ker(T-z)\oplus \operatorname{Im} X = E,$$
$$(2)\quad \operatorname{Im}(T-z)\oplus \ker X = E.$$

Démonstration. — Les conditions sont suffisantes :

Supposons (1) et (2) vérifiées. Soient $x \in$ E et $z \in$ D,

$$[1-(z-z_0)X]x = 0 \qquad \text{entraîne} \qquad X[1-(z-z_0)X]x = 0$$

ou

$$X(T-z)Xx = 0,$$

donc, d'après (2),

$$(T-z)Xx = 0$$

donc, d'après (1),

$$Xx = 0,$$

donc, d'après la relation initiale,

$$x = 0.$$

Ainsi $\ker(1-(z-z_0)X) = (0)$. D'après le lemme 1, on déduit que $1-(z-z_0)X$ est un isomorphisme.

Les conditions sont nécessaires :

Supposons que $1-(z-z_0)X$ soit un isomorphisme de sur E. Alors,

$$\ker(1-(z-z_0)X)X = \ker X.$$

Puisque $(1-(z-z_0)X)X = X(T-z)X$, on déduit que

$$\ker(T-z) \cap X(E) = 0.$$

Pour des raisons de dimension, il est clair que $\ker(T-z)$ et $X(E)$ sont supplémentaires algébriques, donc topologiques. La relation (1) est vérifiée.

Montrons qu'il en est de même de (2).

Puisque $X(T-z)X = (1-(z-z_0)X)X$, on a

$$[X(T-z)X](E) = X(E).$$

Or,

$$[X(T-z)X](E) \subset [X(T-z)](E) \subset X(E).$$

Donc,

$$[X(T-z)](E) = X(E).$$

Donc

$$\operatorname{codim}[X(T-z)](E) = \operatorname{codim} X(E) = n.$$

Puisque $\chi(X(T-z)) = \chi(X) + \chi(T-z) = 0$, on déduit

$$\dim \ker X(T-z) = n.$$

Or

$$\dim \ker(T-z) = n.$$

Donc

$$\ker X \cap (T-z)(E) = (0).$$

Il résulte de la dernière égalité que la relation (2) est vérifiée. Le lemme est démontré.

Introduisons les notations suivantes :

$\mathcal{S}_1(T)$,
ensemble des sous-espaces vectoriels de E qui sont pour un z de D supplémentaires topologiques de $\ker(T-z)$;

$\mathcal{S}_2(T)$,
ensemble des sous-espaces vectoriels de E qui sont pour un z de D supplémentaires topologiques de $\operatorname{Im}(T-z)$.

On a alors le

Lemme 3. — *Soient* $H_1 \in \mathcal{S}_1(T)$, $H_2 \in \mathcal{S}_2(T)$. *Alors il existe un sous-ensemble discret* δ *de* D *tel que, pour tout* z *de* $D-\delta$, *on ait les deux relations*

$$(1) \qquad \ker(T-z) \oplus H_1 = E,$$

$$(2) \qquad \operatorname{Im}(T-z) \oplus H_2 = E.$$

Démonstration. — Montrons que pour tout z de D, sauf sur un ensemble discret, la relation (1) est vérifiée :

H_1 est de codimension n. Donc, il existe $\Gamma \in \mathcal{L}(E, C^n)$, avec $H_1 = \ker \Gamma$. Par ailleurs, $\ker(T - z)$ a, d'après ([13], théor. 4), une base holomorphe dans D : $(f_1(z), f_2(z), \ldots, f_n(z))$. Pour tout z de D, désignons par $S(z)$ l'élément de $\mathcal{L}(C^n, E)$ défini par

$$(\lambda_i) \to \sum_i \lambda_i f_i(z).$$

Pour tout z de D, $\Gamma S(z)$ est un élément de $\mathcal{L}(C^n)$, c'est-à-dire une matrice à n lignes et n colonnes. L'égalité

$$\ker \Gamma S(z) = (0)$$

est équivalente à

$$\ker \Gamma \cap \operatorname{Im} S(z) = (0) \qquad \text{ou} \qquad H_1 \cap \ker(T - z) = (0).$$

Donc, pour que la relation (1) ne soit pas vérifiée, il faut et suffit que $\det \Gamma S(z) = 0$. Or $\Gamma S(z)$ est à coefficients holomorphes; par ailleurs, l'hypothèse sur H_1 implique que $\det \Gamma S(z)$ est différent de zéro en un point de D. On conclut que la relation (1) est vérifiée, sauf sur un ensemble discret. Montrons qu'il en est de même de la relation (2). On sait, d'après ([13], théor. 6), que D est une composante connexe de $RP(p, n; {}^tT)$.

Par ailleurs, (2) est équivalente à

$$\ker {}^t(T - z) \oplus H_2^0 = E' \quad (^1).$$

Le résultat concernant la relation (1) permet alors de conclure pour la relation (2). Le lemme est démontré.

DÉFINITION 1. — L'ensemble discret associé à H_1 et H_2 sera noté $\delta(H_1, H_2; T)$, ou bien δ s'il n'y a pas ambiguïté.

THÉORÈME 1. — *Soient* $H_1 \in \mathcal{S}_1(T)$, $H_2 \in \mathcal{S}_2(T)$, δ *l'ensemble discret associé à* H_1 *et* H_2. *Alors, il existe une application unique* R *de* $D - \delta$ *dans* $\mathcal{L}(E)$, *holomorphe, possédant les trois propriétés suivantes :*

(1) *Pour tout* z *de* $D - \delta$, $R(z)$ *est un inverse relatif de* $T - z$;

(2) *Pour tout couple* (z, z') *de points de* $D - \delta$, *on a*

$$R(z) - R(z') = (z - z') R(z) R(z');$$

(3) *Pour tout* z *de* $D - \delta$, $\operatorname{Im} R(z) = H_1$, $\ker R(z) = H_2$.

---

(1) E′ est le dual topologique de E; H_2^0 est l'orthogonal de H_2 dans E′. Sauf indication contraire, E′ est muni de la topologie forte.

En outre, quels que soient $z, z_0 \in D - \delta$, *on a*

$$R(z) = (1 - (z - z_0) R(z_0))^{-1} R(z_0).$$

Démonstration. — Soit $z_0 \in D - \delta$. D'après ([13], propos. 12), il existe un inverse relatif unique X de $T - z_0$ tel que $\operatorname{Im} X = H_1$ et $\ker X = H_2$. D'après les lemmes 2 et 3, pour tout z de $D - \delta$, $1 - (z - z_0) X$ est un isomorphisme. La fonction

$$z \to R(z) = [1 - (z - z_0) X]^{-1} X = X[1 - (z - z_0) X]^{-1}$$

est donc définie pour tout z de $D - \delta$. Il est clair qu'elle est holomorphe. D'après ([13], théor. 1), $R(z)$ est un inverse relatif de $T - z$ dans un voisinage de z_0. On déduit, par prolongement analytique, que c'est un inverse relatif de $T - z$ pour tout z de $D - \delta$. D'après ([7], p. 188, lemme 5.8.1), $R(z) = [1 - (z - z_0) X]^{-1} X$ a aussi la propriété (2). Enfin,

$$\ker R(z) = \ker (1 - (z - z_0) X)^{-1} X = \ker X = H_2$$

et

$$[R(z)](E) = X(1 - (z - z_0) X)^{-1} (E) = X(E) = H_1.$$

Donc $R(z)$ a la propriété (3).

Par ailleurs, d'après ([13], propos. 12), pour tout z de $D - \delta$ il existe un inverse relatif et un seul de $T - z$ ayant H_1 pour image et H_2 pour noyau. L'unicité de l'application R découle alors des propriétés 1 et 3.

L'application que nous venons de définir sera notée : $z \to R(z)$ ou $z \to R(z, H_1, H_2, T)$ s'il est besoin de préciser.

2. Étude de $\delta(H_1, H_2; T)$ et propriétés de l'application R. — 1° *Étude de* $\delta(H_1, H_2; T)$. — Soient $H_1 \in \mathcal{S}_1(T)$, $H_2 \in \mathcal{S}_2(T)$. Au couple (H_1, H_2) on peut associer la fonction R du théorème 1. Cette fonction est holomorphe dans $D - \delta(H_1, H_2; T)$. Nous allons étudier l'application

$$(H_1, H_2) \to \delta(H_1, H_2; T).$$

Introduisons les notations suivantes :

Δ, partie de D;

$\mathcal{F}_1(\Delta, T)$,

ensemble des sous-espaces vectoriels de E qui sont supplémentaires topologiques de $\ker(T - z)$, pour tout z de Δ;

$\mathcal{F}_2(\Delta, T)$,

ensemble des sous-espaces vectoriels de E qui sont supplémentaires topologiques de $\operatorname{Im}(T - z)$, pour tout z de Δ.

Il est clair que, pour tout $\Delta \neq \emptyset$,

$$\mathcal{F}_1(\Delta, T) \subset \mathcal{S}_1(T), \qquad \mathcal{F}_2(\Delta, T) \subset \mathcal{S}_2(T).$$

Soient r un entier tel que $0 \leq r \leq p$ et K un compact de D. Désignons par P_r la propriété :

P_r : Il existe un sous-espace vectoriel M_r de dimension r tel que pour tout z de K,

$$\operatorname{Im}(T-z) \cap M_r = (0).$$

Dans les lemmes 4 et 5 qui suivent on suppose que P_r est vérifiée pour un entier r tel que $0 \leq r < p$.

Lemme 4. — *Il existe une famille de fonctions holomorphes* $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{p-r})$ *définies dans un voisinage de* K *à valeurs dans* E', *telles que la famille* $(\gamma_1(z), \ldots, \gamma_{p-r}(z))$ *soit une base* $(\operatorname{Im}(T-z) \oplus M_r)^0$ *pour tout* z *de ce voisinage.*

Démonstration. — M_r^0 est de codimension r dans E'. Il existe donc $\Gamma \in \mathcal{L}(E', C^r)$ tel que $M_r^0 = \ker \Gamma$. Par ailleurs, soit $(f_1(z), \ldots, f_p(z))$ une base holomorphe dans D de $\ker'(T-z)$; pour tout z de D, désignons par $S(z)$ l'élément de $\mathcal{L}(C^p, E')$ défini par

$$(\lambda_i) \to \sum_i \lambda_i f_i(z).$$

Pour tout z de D, $\Gamma S(z)$ est une application linéaire de C^p dans C^r. D'après P_r, il existe un voisinage D_1 de K dans lequel on a

$$\begin{aligned}\dim \ker(\Gamma S(z)) &= \dim \ker \Gamma \cap \operatorname{Im} S(z)\\ &= \dim M_r^0 \cap \ker'(T-z)\\ &= \dim (M_r \oplus \operatorname{Im}(T-z))^0\\ &= \operatorname{codim}(M_r \oplus \operatorname{Im}(T-z))\\ &= p-r.\end{aligned}$$

On déduit que pour tout z de D_1, $\Gamma S(z)$ est surjective. D'après ([13], § 3, n° 3). Application 1, $\ker \Gamma S(z)$ a une base holomorphe dans D : $(\varphi_1(z), \varphi_2(z), \ldots, \varphi_{p-r}(z))$. Posons, pour tout i,

$$\gamma_i(z) = [S(z)](\varphi_i(z)).$$

On vérifie immédiatement que $(\gamma_1(z), \ldots, \gamma_{p-r}(z))$ est une base de

$$M_r^0 \cap \ker'(T-z) \qquad \text{ou} \qquad (\operatorname{Im}(T-z) \oplus M_r)^0,$$

pour tout z de D_1.

Lemme 5. — *Il existe* $y \in E$, *tel que pour tout* z *de* K, $y \notin \operatorname{Im}(T-z) \oplus M_r$.

Démonstration. — Il est clair qu'il existe $x \in E$, tel que les fonctions $\langle x, \gamma_i(z) \rangle$ ne soient pas toutes identiquement nulles. Soit $z_0 \in K$. Pour que x appartienne à $\operatorname{Im}(T-z_0) \oplus M_r$, il faut et suffit que, pour tout i, $\langle x, \gamma_i(z_0)\rangle = 0$. On conclut que les z de K tels que $x \in \mathrm{Im}(\mathrm{T}-z) \oplus \mathrm{M}_r$ forment un ensemble fini : $z_1, z_2, \ldots, z_q$. On peut écrire

$$x = (\mathrm{T} - z_1)x_1 + y_1, \qquad \text{avec} \quad y_1 \in \mathrm{M}_r.$$

Donc

$$\begin{aligned} \langle x, \gamma_i(z)\rangle &= \langle (\mathrm{T}-z_1)x_1, \gamma_i(z)\rangle \\ &= \langle x_1, {}^t(\mathrm{T}-z_1)\,\gamma_i(z)\rangle \\ &= (z-z_1)\langle x_1, \gamma_i(z)\rangle. \end{aligned}$$

Par ailleurs, il existe un entier h tel que

$$\langle x, \gamma_i(z)\rangle = (z-z_1)^h g_i(z),$$

les $g_i(z)$ ne s'annulant pas toutes en z_1. Recommençant le procédé qui fait passer de x à x_1, on détermine successivement $x_2, x_3, \ldots, x_h$ avec

$$\begin{aligned} &\langle x_1, \gamma_i(z)\rangle = (z-z_1)\langle x_2, \gamma_i(z)\rangle, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &\langle x_h, \gamma_i(z)\rangle = (z-z_1)\langle x_h, \gamma_i(z)\rangle, \\ &\langle x\ , \gamma_i(z)\rangle = (z-z_1)^h\langle x_h, \gamma_i(z)\rangle. \end{aligned}$$

Donc, l'ensemble des z de K tels que $x_h \in \mathrm{Im}(\mathrm{T}-z) \oplus \mathrm{M}_r$ est $z_2, z_3, \ldots, z_q$. En recommençant un nombre suffisant de fois le procédé qui fait passer de x à x_h, on épuise l'ensemble $z_2, z_3, \ldots, z_q$ et l'on détermine $y \in \mathrm{E}$ tel que les fonctions $\langle y, \gamma_i(z)\rangle$ n'aient pas de zéro commun sur K. Le vecteur y a la propriété désirée.

Proposition 1. — *Pour tout compact* $\mathrm{K} \subset \mathrm{D}$, $\mathcal{F}_2(\mathrm{K}, \mathrm{T})$ *est non vide.*

Démonstration. — Il suffit de montrer que la propriété P_p est vraie. Il est facile d'obtenir ce résultat par récurrence : en effet, la propriété P_0 est vraie trivialement. Soit r un entier tel que $0 \leq r < p$. Supposons que la propriété P_r soit vraie. Soit y un vecteur ayant la propriété du lemme 5. Alors, on conclut que la propriété P_{r+1} est vraie en prenant pour M_{r+1} le sous-espace engendré par M_r et y.

Proposition 2. — *Pour tout compact* $\mathrm{K} \subset \mathrm{D}$, $\mathcal{F}_1(\mathrm{K}, \mathrm{T})$ *est non vide.*

Démonstration. — D'après ([13], théor. 6), D est une composante connexe de $\mathrm{RP}(p, n, {}^t\mathrm{T})$. D'après la proposition 1, on déduit que $\mathcal{F}_2(\mathrm{K}, {}^t\mathrm{T})$ est non vide. Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{F}_2(\mathrm{K}, {}^t\mathrm{T})$. Pour tout z de K, on a

$$\mathrm{Im}\,{}^t(\mathrm{T}-z) \oplus \mathrm{M} = \mathrm{E}'.$$

Puisque $\mathrm{Im}\,{}^t(\mathrm{T}-z)$ est faiblement fermé, on déduit

$$\ker(\mathrm{T}-z) \oplus \mathrm{M}^0 = \mathrm{E}, \qquad \text{donc} \quad \mathrm{M}^0 \in \mathcal{F}_1(\mathrm{K}, \mathrm{T}).$$

La proposition est démontrée.

PROPOSITION 3. — *Pour tout compact* K *de* D, *il existe* $H_1 \in \mathfrak{S}_1(T)$, $H_2 \in \mathfrak{S}_2(T)$ *tel que* $\partial(H_1, H_2, T) \subset D - K$.

Démonstration. — Il suffit en effet de prendre

$$H_1 \in \mathcal{F}_1(K, T) \quad \text{et} \quad H_2 \in \mathcal{F}_2(K, T).$$

Il est alors naturel de se poser la question :

Existe-t-il un couple (H_1, H_2) tel que $\partial(H_1, H_2; T)$ soit vide ?

Cette question est ouverte.

Examinons-la dans un cas particulier.

Supposons que $p = 0$ et $n = 1$. Dans ce cas, $\mathcal{F}_2(D, T)$ est réduit au sous-espace (0). Les éléments de $\mathfrak{S}_1(T)$ sont des hyperplans de E. Soient $(f(z))$ une base holomorphe dans D de $\ker(T - z)$, et $H \in \mathfrak{S}_1(T)$; alors il existe $x' \in E'$ tel que H soit le noyau de x'. L'ensemble $\partial(H, 0; T)$ est ici formé des zéros de la fonction $\langle f(z), x' \rangle$. D'après la proposition 2, la fonction f a la propriété suivante : pour tout compact K de D, il existe $x' \in E'$ tel que la fonction $\langle f(z), x' \rangle$ soit sans zéro sur K. On se pose la question : existe-t-il $x' \in E'$ tel que $\langle f(z), x' \rangle$ soit sans zéro dans D ? Montrons par un contre-exemple que la propriété de la fonction f qui vient d'être mise en évidence ne suffit pas pour conclure.

Contre-exemple (2). — Désignons par E l'espace de Hilbert des suites de nombres complexes $(u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots)$ telle que $\sum_i |u_i|^2 < +\infty$. Si $v \in E$ et $v = (v_1, v_2, \ldots)$, le produit scalaire dans E est défini par $\langle u, v \rangle = \sum_i u_i \bar{v}_i$.

On a alors le résultat suivant :

PROPOSITION 4. — *Il existe une application holomorphe* h *de* C *dans* E *telle que :*

— *pour tout compact* K *de* C, *il existe* $x \in E$, *tel que* $\langle h(z), x \rangle$ *soit sans zéro sur* K;

— *pour tout* $y \in E$, $\langle h(z), y \rangle$ *ait un zéro dans* C.

Démonstration. — Posons

$$h_n(z) = \frac{\left(\frac{z}{n}\right)^n - 1}{(n!)}, \qquad n \text{ entier positif.}$$

Prenons pour h la fonction définie par

$$h(z) = (h_1(z), h_2(z), \ldots).$$

---

(2) Ce contre-exemple nous a été fourni par A. Douady.

Soit n un entier positif. Puisque pour tout z, tel que $|z| < n$, on a $h_n(z) \neq 0$, il est clair que pour tout compact K de C, il existe $x \in E$, tel que $\langle h(z), x \rangle$ ne s'annule pas sur K.

Soit y un élément non nul de E. On a

$$y = (y_1, y_2, \ldots), \qquad \text{avec} \quad \sum_i |y_i|^2 < +\infty.$$

Alors

$$F(z) = \langle h(z), y \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k,$$

avec

$$a_0 = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overline{y}_n}{n!}, \qquad a_k = \frac{\overline{y}_k}{k^k (k!)}.$$

Il est clair que pour k assez grand, on a

$$|a_k| \leq \frac{1}{(k!)^2}.$$

On déduit que $F(z)$ est une fonction entière d'ordre $\frac{1}{2}$ au plus. Puisque y est non nul, un des y_i est non nul : $F(z)$ n'est pas une constante. D'après un résultat classique sur les fonctions entières d'ordre plus petit que 1, on conclut que $F(z)$ a un zéro dans C. La proposition est démontrée.

COROLLAIRE. — *Soit* $D = \{z \mid z \in C$ et $|z| < 1\}$. *Alors il existe une application holomorphe* h_1 *de* D *dans* E *telle que :*

— *pour tout compact* $K \subset D$, *il existe* $x \in E$, *telle* $\langle h_1(z), x \rangle$ *soit sans zéro sur* K;

— *pour tout* $y \in E$, $\langle h_1(z), y \rangle$ *ait un zéro dans* D.

Démonstration. — Cela résulte aussitôt de la proposition 4 puisqu'il existe une application holomorphe surjective de D sur C.

2° *Propriétés de la fonction* R. — Dans le théorème 1 on a déterminé une fonction R satisfaisant à trois conditions. La proposition suivante examine la relation entre les conditions 2 et 3.

PROPOSITION 5. — *Soit* D_1 *un ouvert contenu dans* D *et* R_1 *une application holomorphe de* D_1 *dans* $\mathcal{L}(E)$ *telle que pour tout* z *de* D_1, $R_1(z)$ *soit un inverse relatif de* $T - z$.

Alors, pour que pour tout couple (z, z') *d'éléments de* D_1 *on ait la relation*

$$R_1(z) - R_1(z') = (z - z') R_1(z) R_1(z'),$$

il faut et suffit que les applications $z \to \ker R_1(z)$ *et* $z \to \operatorname{Im} R_1(z)$ *soient constantes dans* D_1.

Démonstration. — Supposons que les applications $z \to \ker R_1(z)$ et $z \to \operatorname{Im} R_1(z)$ soient constantes dans D_1. Posons $\ker R_1(z) = H_1$, $\operatorname{Im} R_1(z) = H_2$. Il est clair que $H_1 \in \mathfrak{S}_1(T)$, $H_2 \in \mathfrak{S}_2(T)$. Soit R la fonction unique qu'on peut leur associer d'après le théorème 1. D'après ([13], propos. 12) et les propriétés 1 et 3 de R, on a

$$R(z) = R_1(z) \quad \text{pour tout } z \text{ de } D_1.$$

On déduit que R_1 a la propriété voulue (propriété 2 de R).

Réciproquement, supposons que pour tout couple (z, z') d'éléments de D_1, on ait

$$R_1(z) - R_1(z') = (z - z')\, R_1(z)\, R_1(z').$$

On déduit

$$R_1(z)\,(1 - (z - z')\, R_1(z')) = (1 - (z - z')\, R_1(z')\, R_1(z)) = R_1(z').$$

Il en découle que

$$\ker R_1(z) \subset \ker R_1(z') \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Im} R_1(z') \subset \operatorname{Im} R_1(z).$$

On conclut que les applications $z \to \ker R_1(z)$ et $z \to \operatorname{Im} R_1(z)$ sont constantes dans D_1.

Examinons maintenant la relation entre les conditions 1 et 2 :

PROPOSITION 6. — *Soit* D_1 *un ouvert contenu dans* D. *Pour que toute application holomorphe* R *de* D_1 *dans* $\mathcal{L}(E)$, *telle que pour tout* z *de* D_1, $R(z)$ *soit un inverse relatif de* $T - z$ *satisfasse à la relation*

$$R(z) - R(z') = (z - z')\, R(z)\, R(z'),$$

il faut et suffit que $n = p = 0$.

Démonstration. — Il est classique que la condition est suffisante. Montrons qu'elle est nécessaire.

a. Supposons que $p = 0$. Soit R une application holomorphe de D_1 dans $\mathcal{L}(E)$ telle que $R(z)$ soit un inverse relatif de $T - z$ et qui satisfasse à la relation (2). Puisque $p = 0$, $R(z)$ est même un inverse à droite de $T - z$. On vérifie que

$$H(z) = R(z) + 1 - R(z)\,(T - z)$$

est encore un inverse à droite (donc un inverse relatif) de $T - z$.

Supposons que H vérifie la relation (2). On déduit que

$$H'(z) = (H(z))^2.$$

Or

$$H'(z) = R'(z) - R'(z)\,(T - z) + R(z),$$
$$(H(z))^2 = (R(z))^2 + 1 - R(z)\,(T - z) + R(z) - (R(z))^2\,(T - z).$$

Puisque $R'(z) = (R(z))^2$, on conclut que

$$o = H'(z) - (H(z))^2 = -(1 - R(z)(T - z)).$$

Donc $T - z$ est injective et $n = 0$. Le résultat voulu est démontré dans ce cas.

b. On montre d'une manière analogue que, dans l'hypothèse $n = 0$, la condition nécessaire cherchée est $p = 0$.

c. Supposons $np \neq 0$. On sait ([13], théor. 4) que l'application $z \to \mathrm{co}(T - z)$ est constante dans D_1. Soit M la valeur de cette constante. Puisque $n \neq 0$, il est clair que $M \neq (0)$. Soit R une application holomorphe de D dans $\mathcal{L}(E)$ telle que $R(z)$ soit un inverse relatif de $T - z$ et satisfasse à la relation (2). Posons

$$G(z) = R(z) + (1 - R(z)(T - z))(T - z)R(z).$$

On vérifie que $G(z)$ est un inverse relatif de $T - z$. Supposons que $G(z)$ satisfasse à la relation (2). D'après ([13], propos. 9), M est stable par $R(z)$ et $G(z)$. Désignons par $R_1(z)$ et $G_1(z)$ les restrictions de $R(z)$ et $G_1(z)$ à M. Il est clair que $R_1(z)$ et $G_1(z)$ sont des inverses à droite de $(T - z)\,|\,M$. Donc

$$G_1(z) = R_1(z) + 1_M - R_1(z)(T - z)\,|\,M.$$

Par ailleurs, R_1 et G_1 satisfont encore à la relation (2). On déduit, d'après *a*, que $n = 0$. C'est contradictoire. La démonstration est terminée.

On peut se demander si la fonction R du théorème 1 peut être prolongée analytiquement à l'extérieur de $D - \partial$. Le résultat suivant répond négativement à cette question :

Théorème 2. — *La fonction* $z \to R(z)$ *définie dans le théorème* 1, *admet* $D - \partial$ *pour domaine d'holomorphie. De plus, tout point de* ∂ *est un pôle de* R.

Démonstration. — Soit $z_0 \in \mathrm{Fr}(D - \partial)$ et $(z_1, z_2, \ldots)$ une suite de points de $D - \partial$ qui tend vers z_0. Nous allons montrer que $R(z_k)$ n'a pas de limite si z_k tend vers z_0. Supposons le contraire et soit A la limite de $R(z_k)$. On déduit que A est un inverse relatif de $T - z_0$. De plus, $(T - z_k)R(z_k)$ et $R(z_k)(T - z_k)$ tendent vers $(T - z_0)A$ et $A(T - z_0)$. Donc, pour k assez grand, les inégalités

$$|R(z_k)(T - z_k) - A(T - z_0)| < 1 \quad \text{et} \quad |(T - z_k)R(z_k) - (T - z_0)A| < 1$$

sont vérifiées. D'après [12], on conclut que

$$\dim \ker(T - z_0) = \dim \ker(T - z_k) = n$$

et

$$\mathrm{codim}(T - z_0)(E) = \mathrm{codim}(T - z_k)(E) = p.$$

Puisque les $R(z_k)(T - z_k)$ ont une image fixe H_1, on déduit que

$$A(E) = A(T - z_0)(E) = H_1.$$

De même,

$$\ker A = \ker(T - z_k)R(z_k) = H_2.$$

Ceci entraîne que z_0 appartient à l'ensemble de Noether de T. Mais puisque,

$$\dim \ker(T - z_0) = n \quad \text{et} \quad \operatorname{codim}(T - z_0)(E) = p,$$

on peut même affirmer que $z_0 \in D$, (*cf.* [13], propos. 22). Donc nécessairement $z_0 \in \partial$. Mais c'est contradictoire, puisque les propriétés de A établies plus haut impliquent que

$$\ker(T - z_0) \oplus H_1 = \operatorname{Im}(T - z_0) \oplus H_2 = E.$$

Il reste à montrer que tout point de ∂ est un pôle de R. Nous aurons besoin pour cela du résultat préliminaire suivant :

LEMME. — *Soit z_0 un point de la frontière de* RP(o, o; T) *tel que l'indice de* $T - z_0$ *soit nul. Alors, z_0 est un point isolé du spectre de* T. *De plus, la fonction* $z \to (T - z)^{-1}$ *définie dans* RP(o, o; T) *admet z_0 pour pôle.*

Démonstration. — D'après ([13], corollaire du théorème 6), tout point de $\ker(T - z_0)$ est origine d'une $(T - z_0)$-chaîne finie. Puisque $\ker(T - z_0)$ est de dimension finie, on conclut que la suite $\ker(T - z_0)^k$ stationne pour un entier n. Or, pour tout entier k,

$$\chi(T - z_0)^k = k\chi(T - z_0).$$

On en conclut que la suite $\operatorname{Im}(T - z_0)^k$ stationne pour le même entier n. De plus, on sait que $\operatorname{Im}(T - z_0)^n$ est fermé dans E. D'après Audin [1], on sait que E est somme directe de $\operatorname{Im}(T - z_0)^n$ et $\ker(T - z_0)^n$. D'après Taylor ([16], théor. 5.8 D), on conclut que la fonction $z \to (T - z)^{-1}$ a un pôle d'ordre n en z_0.

Revenons maintenant au théorème 2 :

Soit $z_0 \in D - \partial$, $X = R(z_0)$. Alors,

$$R(z) = [1 - (z - z_0)X]^{-1}X.$$

Soient D_1 et ∂_1 les transformés de D et ∂ dans l'inversion complexe de pôle z_0 et puissance 1. On sait (lemme 1) que $1 - (z - z_0)X$ est d'indice nul pour tout z de D. On déduit que, pour tout λ de D_1, $X - \lambda$ est d'indice nul. Par ailleurs, pour tout λ de $D - \partial_1$, $X - \lambda$ est un isomorphisme. D'après le lemme précédent, la fonction $\lambda \to (X - \lambda)^{-1}$ admet tout point de ∂_1 pour pôle. On en déduit immédiatement le résultat.

Pour terminer, donnons le résultat suivant qui nous sera utile dans la suite :

PROPOSITION 7. — *Soient* $H_1 \in \mathfrak{S}_1(T)$, $H_2 \in \mathfrak{S}_2(T)$, R *la fonction qu'on peut leur associer d'après le théorème* 1. *Alors l'application* $z \to \mathrm{co}\,R(z)$ *est constante dans* $D - \delta$.

Démonstration. — Soit $z_0 \in D - \delta$. On sait que

$$R(z) = (1 - (z - z_0)\,R(z_0))^{-1}R(z_0).$$

Par ailleurs, puisque $\dim \ker R(z) = p$ dans $D - \delta$, on déduit de ([13], propos. 6) que

$$\mathrm{co}\,R(z) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathrm{Im}(R(z))^k.$$

Puisque $\mathrm{Im}(R(z))^k = \mathrm{Im}(R(z_0))^k$, le résultat est obtenu.

3. UN CALCUL FONCTIONNEL.

1° Soient $H_1 \in \mathfrak{S}_1(T)$, $H_2 \in \mathfrak{S}_2(T)$, R la fonction qu'on peut leur faire correspondre d'après le théorème 1. Les sous-espaces H_1 et H_2 sont fixés dans tout ce paragraphe. Désignons par $\mathfrak{T}$ le complémentaire dans C de $D - \delta$ et par σ_0 une partie ouverte et compacte de $\mathfrak{T}$. On peut trouver un ouvert de Ω de C avec les propriétés :

(1) $\Omega \cap \mathfrak{T} = \sigma_0$;

(2) Ω a un nombre fini de composantes connexes;

(3) La frontière de chaque composante connexe de Ω est une courbe fermée simple, rectifiable, orientée positivement, contenue dans $D - \delta$.

On dit que Ω est un domaine admissible pour σ_0. La frontière γ de Ω est une enveloppe orientée de σ_0. L'ensemble des enveloppes orientées sera désigné par $B(\sigma_0)$.

Soit Δ un voisinage ouvert de σ_0, $H(\Delta)$ l'algèbre des fonctions holomorphes dans Δ, munie de la topologie de la convergence compacte. L'ensemble des enveloppes orientées de σ_0 situées dans Δ, sera désigné par $B(\Delta)$. Employant la même méthode que N. Dunford [4], Lorch [9], dans le domaine résolvant RP(o, o; T), on peut démontrer le résultat suivant :

LEMME 6. — *L'application*

$$f \to L_\Delta(f) = L_\Delta(f, H_1, H_2, T) = -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(\lambda)\,R(\lambda)\,d\lambda$$

est une représentation continue de l'algèbre $H(\Delta)$ *dans l'algèbre* $\mathcal{L}(E)$ *qui ne dépend pas du choix de* γ *dans* $B(\Delta)$.

Démonstration. — Il est clair que l'application $f \to L_\Delta(f)$ est linéaire et continue. Montrons que L_Δ respecte la multiplication. Soit f et g deux éléments de $H(\Delta)$, γ et γ' deux éléments de $B(\Delta)$ tels que γ' soit contenu dans le domaine admissible Ω qui admet γ pour frontière

$$L_\Delta(f) = -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(\lambda)\,R(\lambda)\,d\lambda;$$

$$L_\Delta(g) = -\int_\gamma \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma'} g(\mu)\,R(\mu)\,d\mu;$$

$$L_\Delta(f)\,L_\Delta(g) = -\frac{1}{4\pi^2}\int_\gamma\int_{\gamma'} f(\lambda)\,g(\mu)\,R(\lambda)\,R(\mu)\,d\lambda\,d\mu,$$

$$= -\frac{1}{4\pi^2}\int_\gamma\int_{\gamma'} f(\lambda)\,g(\mu)\,\frac{R(\lambda)-R(\mu)}{\lambda-\mu}\,d\lambda\,d\mu;$$

$$L_\Delta(f)\,L_\Delta(g) = +\frac{1}{4\pi^2}\int_\gamma f(\lambda)\,R(\lambda)\,d\lambda\int_{\gamma'}\frac{g(\mu)}{\mu-\lambda}\,d\mu + \frac{1}{4\mu^2}\int_{\gamma'} g(\mu)\,R(\mu)\,d\mu\int_\gamma\frac{f(\lambda)}{\lambda-\mu}\,d\lambda$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma'} f(\mu)\,g(\mu)\,R(\mu)\,d\mu$$

$$= L_\Delta(f.g).$$

Le lemme est démontré.

Corollaire : $L_\Delta(f)\,L_\Delta(g) = L_\Delta(g)\,L_\Delta(f)$.

Désignons par $\mathcal{H}(\sigma_0)$ l'ensemble des fonctions holomorphes, à valeurs complexes, définies dans un voisinage de σ_0 qui peut dépendre de la fonction et par $H(\sigma_0)$ l'algèbre des classes d'équivalence des fonctions de $\mathcal{H}(\sigma_0)$, deux fonctions appartenant à la même classe si et seulement s'il existe un voisinage de σ_0 sur lequel elles coïncident. Nous munirons $H(\sigma_0)$ de la topologie de limite inductive des algèbres $H(\Delta)$. Soit $f \in \mathcal{H}(\sigma_0)$, Δ_f le domaine de définition de f, $\hat{f}$ la classe de f dans $H(\sigma_0)$; on vérifie immédiatement que si $g \in \hat{f}$, $L_{\Delta_f}(f) = L_{\Delta_g}(g)$. Soit $\gamma \in B(\Delta_f)$. On déduit alors du lemme 6 le résultat suivant :

Théorème 3. — *L'application*

$$\hat{f} \to L_{\sigma_0}(\hat{f}) = L_{\sigma_0}(\hat{f}, H_1, H_2; T) = -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(\lambda)\,R(\lambda)\,d\lambda$$

est une représentation continue de l'algèbre $H(\sigma_0)$ *dans l'algèbre* $\mathcal{L}(E)$.

Proposition 8. — *Pour tout* $\hat{f} \in H(\sigma_0)$ *et* $z \in D - \delta$, *on a*

$$R(z)\,(T-z)\,L_{\sigma_0}(\hat{f}) = L_{\sigma_0}(\hat{f})\,(T-z)\,R(z) = L_{\sigma_0}(\hat{f}).$$

Démonstration. — Soit $z_0 \in D - \delta$. Posons $R(z_0) = X$. On a

$$X(E) = H_1,\ \ker(X) = H_2;$$
$$R(z) = (1 - (z - z_0)X)^{-1}X;$$
$$L_{\sigma_0}(\hat{f}) = -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(\lambda)\,(1 - (\lambda - z_0)X)^{-1}X\,d\lambda.$$

Posons

$$A(\hat{f}) = -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(\lambda)\,(1 - (\lambda - \lambda_0)X)^{-1}\,d\lambda.$$

Alors

$$L_{\sigma_0}(\hat{f}) = A(\hat{f})X = XA(\hat{f}).$$

On peut écrire

$$\begin{aligned} X(T - z_0)\,L_{\sigma_0}(\hat{f}) &= X(T - z_0)\,XA(\hat{f}) \\ &= XA(\hat{f}) = L_{\sigma_0}(\hat{f}). \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} L_{\sigma_0}(\hat{f})\,(T - z_0)\,X &= A(\hat{f})\,X(T - z_0)\,X \\ &= A(\hat{f})X \\ &= L_{\sigma_0}(\hat{f}). \end{aligned}$$

On a bien

$$R(z_0)\,(T - z_0)\,L_{\sigma_0}(\hat{f}) = L_{\sigma_0}(\hat{f})\,(T - z_0)\,R(z_0) = L_{\sigma_0}(\hat{f}).$$

La proposition est démontrée.

Corollaire 1 : $\operatorname{Im} L_{\sigma_0}(\hat{f}) \subset H_1$.

Corollaire 2 : $\ker L_{\sigma_0}(\hat{f}) \supset H_2$.

2° *Le projecteur* P_{σ_0}. — Notons $\hat{1}$ l'élément de $H(\sigma_0)$ qui contient la fonction $z \to 1$. Posons $P_{\sigma_0} = L_{\sigma_0}(\hat{1})$. Puisque $[\hat{1}]^2 = \hat{1}$, P_{σ_0} est un projecteur. De plus, pour tout $\hat{f} \in H(\sigma_0)$,

$$\hat{1}.\hat{f} = \hat{f}.\hat{1} = \hat{f} \quad \text{entraîne} \quad P_{\sigma_0}L_{\sigma_0}(\hat{f}) = L_{\sigma_0}(\hat{f})\,P_{\sigma_0} = L_{\sigma_0}(\hat{f}).$$

Notons $\hat{z}$ la classe de fonctions de $H(\sigma_0)$ qui contient la fonction $z \to z$. On a alors la

Proposition 9. — P_{σ_0} *vérifie la relation*

$$P_{\sigma_0}TP_{\sigma_0} = L_{\sigma_0}(\hat{z}).$$

Démonstration. — D'après la proposition 8, pour tout z de $D - \delta$ on a

$$R(z)\,TP_{\sigma_0} = P_{\sigma_0} + zR(z)\,P_{\sigma_0}.$$

Soit $\gamma \in B(\sigma_0)$. On déduit de l'égalité précédente

$$\left[-\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma R(\lambda)\,d\lambda\right] TP_{\sigma_0} = \left[-\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \lambda\, R(\lambda)\,d\lambda\right] P_{\sigma_0};$$

$$\begin{aligned} P_{\sigma_0} TP_{\sigma_0} &= L_{\sigma_0}(\hat{z})\, P_{\sigma_0} \\ &= L_{\sigma_0}(z). \end{aligned}$$

La proposition est démontrée.

Soit $\gamma \in B(\sigma_0)$. Désignons par $i(z, \gamma)$ l'indice topologique de z par rapport à γ. On a alors le résultat suivant :

LEMME 7. — *Pour tout* $z \in C - \gamma$, *posons*

$$G(z) = +\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{R(\lambda)}{\lambda - z}\,d\lambda.$$

Alors pour tout z *de* $(D - \hat{\delta}) - C$, *on a*

$$G(z) = (i(z, \gamma) - P_{\sigma_0})\, R(z).$$

Démonstration. — Soit $z \in [D - \hat{\delta}] - \gamma$. On peut écrire

$$\begin{aligned} R(z)\, P_{\sigma_0} &= -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma R(z)\, R(\lambda)\,d\lambda; \\ &= -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{R(\lambda) - R(z)}{\lambda - z}\,d\lambda \\ &= -G(z) + i(z, \gamma)\, R(z). \end{aligned}$$

Donc

$$G(z) = R(z)\,[i(z, \gamma) - P_{\sigma_0}].$$

PROPOSITION 10. — *Pour que* $P_{\sigma_0} = 1$, *il faut et suffit que* σ_0 *contienne* $\sigma(T)$.

Démonstration. — Supposons que $P\sigma_0 = 1$. D'après la proposition 1, on a pour tout z de $D - \hat{\delta}$

$$R(z)\,(T - z) = (T - z)\, R(z) = 1.$$

Donc D est une composante connexe du domaine résolvant de T. D'autre part, il est clair que si $\sigma_0 \supset \sigma(T)$, D est une composante connexe du domaine résolvant de T. On déduit alors la proposition d'un résultat classique de Lorch [9].

PROPOSITION 11. — *Pour que* $P_{\sigma_0} = 0$, *il faut et suffit que* σ_0 *soit vide.*

Démonstration. — Si σ_0 est vide, il est clair que $P_{\sigma_0} = 0$.

Supposons que $P_{\sigma_0} = 0$. Soit $\gamma \in B(\sigma_0)$, Ω le domaine admissible admettant γ pour frontière. Pour tout z de $C - \gamma$, on pose

$$G(z) = +\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{R(\lambda)}{\lambda - z}\,d\lambda.$$

D'après le lemme 7, pour tout z de $\Omega \cap [D - \delta]$, on a

$$G(z) = R(z)(1 - P_{\sigma_0}) = R(z).$$

Or $G(z)$ est définie dans Ω. Donc $R(z)$ est prolongeable analytiquement dans Ω. D'après le théorème 2, on déduit que σ_0 est vide.

Il ne semble pas qu'il y ait de relation simple entre P_{σ_0} et T si $np \neq 0$, (notamment $\ker P_{\sigma_0}$ et $\operatorname{Im} P_{\sigma_0}$ ne sont pas stables par T en général). Les cas $n = 0$ ou $p = 0$ feront l'objet des chapitres suivants.

CHAPITRE II.

Les ensembles RP (o, p; T)

On continue dans ce chapitre l'étude du calcul fonctionnel précédent dans le cas où $n = 0$. On garde les notations du chapitre I. $\mathcal{S}_1(T)$ est réduit à un élément, E. Soit $H \in \mathcal{S}_2(T)$. On lui associe la fonction R et l'ensemble discret δ. Soit alors σ_0 une partie ouverte et compacte du complémentaire dans C de $D - \delta$. On lui associe le projecteur P_{σ_0}.

1. Le projecteur P_{σ_0}.

Théorème 1. — *P_{σ_0} est un projecteur dont le noyau est stable par* T *et aussi, pour tout z de* $D - \delta$, *par* $R(z)$; *on a la relation :* $P_{\sigma_0} T P_{\sigma_0} = P_{\sigma_0} T$.

Démonstration. — Soit $\gamma \in B(\sigma_0)$. On peut écrire

$$P_{\sigma_0} T = -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma R(\lambda)\, T\, d\lambda$$

ou, puisque $R(\lambda)(T - \lambda) = 1$,

$$P_{\sigma_0} T = -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \lambda R(\lambda)\, d\lambda$$
$$= L_{\sigma_0}(\hat{z}).$$

D'après la proposition 9 du chapitre I, $P_{\sigma_0} T P_{\sigma_0} = L_{\sigma_0}(z)$. On a donc

$$P_{\sigma_0} T P_{\sigma_0} = P_{\sigma_0} T.$$

On en déduit que $\ker P_{\sigma_0}$ est stable par T. Par ailleurs, P_{σ_0} et $R(z)$ commutent. Donc $\ker P_{\sigma_0}$ est stable par $R(z)$.

Théorème 2. — $D \cup \sigma_0$ *est contenu dans* $RP(0, p; T \mid \ker P_{\sigma_0})$.

Démonstration. — Soit $z_0 \in D - \delta$. Posons $X = R(z_0)$, $X_1 = X \mid \ker P_{\sigma_0}$. $X(T - z_0) = 1$ entraîne

$$X_1[T - z_0] \mid \ker P_{\sigma_0} = 1 \mid \ker P_{\sigma_0}.$$

Donc $[T - z_0] | \ker P_{\sigma_0}$ est inversible à gauche. D'après le corollaire 2 de la proposition 8 du chapitre I, $\ker P_{\sigma_0} \supset \ker X$. Donc, $\ker X_1 (= \ker X)$ est de dimension p et

$$z_0 \in RP\,(o, p;\ T \,|\, \ker P_{\sigma_0}).$$

Soit $z_1 \in \partial$. Alors $[T - z_1] | \ker P_{\sigma_0}$ est un morphisme injectif. D'après ([5], théor. 9.1), il existe un voisinage V de z_1 dans C tel que pour tout z de V, $(T - z) | \ker P_{\sigma_0}$ soit un morphisme injectif, la codimension de $(T - z)(\ker P_{\sigma_0})$ dans $\ker P_{\sigma_0}$ étant constante dans V (finie ou non). Mais V coupe $D - \partial$. D'après le résultat démontré ci-dessus sur z_0, on déduit que cette codimension est p. Donc, $z_1 \in RP\,(o, p;\ T | \ker P_{\sigma_0})$. Ainsi D est contenue dans $RP(o, p;\ T | \ker P_{\sigma_0})$. Montrons qu'il en est de même de σ_0. Soit Ω un domaine admissible pour σ_0 de frontière γ. Pour tout z de Ω, posons

$$G(z) = + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{R(\lambda)}{\lambda - z}\, d\lambda.$$

Alors, d'après le lemme 6 du chapitre I,

$$G(z)\,(T - z) = (i(z, \gamma) - P_{\sigma_0})\, R(z)\,(T - z) = 1 - P_{\sigma_0}.$$

De plus, $\ker P_{\sigma_0}$ est stable par $G(z)$ puisque P_{σ_0} et $G(z)$ commutent. On déduit que $[T - z] | \ker P_{\sigma_0}$ est inversible à gauche. Or chaque composante connexe de Ω a une intersection non vide avec D. On conclut que Ω est contenu dans $RP\,(o, p;\ T | \ker P_{\sigma_0})$. Il en est donc de même de σ_0. Le théorème est démontré.

Nous venons de voir que $\ker P_{\sigma_0}$ est stable par T. On peut se demander si P_{σ_0} réduit T, c'est-à-dire si $\operatorname{Im} P_{\sigma_0}$ est stable par T. Pour cela, il faut et suffit que P_{σ_0} et T commutent. Nous allons voir que cette propriété n'est pas toujours vérifiée.

PROPOSITION 1. — *Supposons* $P_{\sigma_0} \neq o$. *Alors pour que* T *et* P_{σ_0} *commutent il est nécessaire que la valeur constante dans* D *de* $\mathrm{co}(T - z)$ *soit différente de* (o).

Démonstration. — Supposons que T et P_{σ_0} commutent avec $P_{\sigma_0} \neq o$. Soit $z_0 \in D - \partial$. D'après la proposition 8 du chapitre I, on a

$$R(z_0)\,(T - z_0)\,P_{\sigma_0} = P_{\sigma_0}\,(T - z_0)\,R(z_0) = P_{\sigma_0}.$$

On en déduit que $[T - z_0] | P_{\sigma_0}(E)$ est un isomorphisme qui admet pour isomorphisme inverse $R(z_0) | P_{\sigma_0}(E)$. Donc $P_{\sigma_0}(E)$ est contenu dans $\mathrm{co}(T - z_0)$. On conclut que $\mathrm{co}(T - z_0) \neq (o)$. La proposition est démontrée.

Il est alors facile d'exhiber un exemple où P_{σ_0} et T ne commutent pas.

Exemple :

$$D = \left\{ z \mid z \in C \quad \text{et} \quad \frac{1}{2} < |z| < 1 \right\}.$$

E = espace de Banach des fonctions continues sur $\overline{D}$ homolorphes dans D.

Si $f \in E$,

$$|f| = \operatorname*{Max}_{z \in \overline{D}} |f(z)|.$$

T est définie par

$$[Tf](z) = zf(z).$$

Alors

$$\sigma(T) = \overline{D} \qquad \text{et} \qquad D = RP(0, 1; T).$$

On prend

$$\sigma_0 = \left\{ z \mid z \in C \quad \text{et} \quad |z| \leq \frac{1}{2} \right\}.$$

La valeur constante dans D de co$(T - z)$ est ici (o). Donc pour tout $H \in \mathfrak{S}_2(T)$, le projecteur P_{σ_0} associé à H, qui n'est pas réduit à o puisque σ_0 est non vide, ne commute pas avec T.

2. Le sous-espace M(H). — Soit $H \in \mathfrak{S}_2(T)$. Désignons par M(H, T), ou M(H) s'il n'y a pas ambiguïté, le plus petit sous-espace vectoriel fermé de E stable par T et contenant H. A l'ensemble σ_0 on a fait correspondre $\ker P_{\sigma_0}$, stable par T, avec la propriété

$$D \cup \sigma_0 \subset RH(0, p; T \mid \ker P_{\sigma_0}).$$

Or $H \subset \ker P_{\sigma_0}$. Donc $M(H) \subset \ker P_{\sigma_0}$. Nous allons maintenant étudier les propriétés de M(H).

Proposition 2. — D *est contenu dans* RP(o, p; T | M(H)).

Démonstration. — Soit $z_0 \in D - \delta$, X l'inverse à gauche de $T - z_0$ avec ker X = H. Puisque

$$X(H) = (0) \qquad \text{et} \qquad X(T - z_0)^k(H) = (T - z_0)^{k-1}(H) \qquad (k \geq 1,$$

M(H) est stable par X. Posons $X_1 = X \mid M(H)$. On a

$$X_1(T - z_0) \mid M(H) = 1 \mid M(H).$$

Or

$$\ker X_1 = \ker X = H.$$

On déduit que

$$z_0 \in RP(0, p; T \mid M(H)).$$

Soit $z_1 \in \delta$. On montre, comme dans la démonstration du théorème 2, que

$$z_1 \in RP(0, p; T \mid M(H)).$$

La proposition est démontrée.

Dans la démonstration de la proposition 3 nous avons mis en évidence le résultat suivant qui nous sera utile dans la suite :

Remarque. — Soit $z_0 \in D - \delta$. Alors, il existe un inverse à gauche, X_1 de $(T - z_0) | M(H)$, avec $\ker X_1 = H$.

Soit alors D_1 la composante connexe de $RP(o, p; T | M(H)$ qui contient D. D'après le théorème 1 du chapitre I, il existe une partie discrète δ_1 de D_1 telle que pour tout z de $D_1 - \delta_1$, $R_1(z) = (1 - (z - z_0)X)^{-1}X$ soit un inverse à gauche de $T - z$.

Nous avons pu obtenir le résultat suivant :

THÉORÈME 3. — D_1 *est simplement connexe.* δ_1 *est vide.*

Démonstration. — Soit σ_1 une partie ouverte et compacte du complémentaire dans C de $D_1 - \delta_1$ et γ une enveloppe orientée de σ_1 contenue dans $D_1 - \delta_1$. Posons

$$P_{\sigma_1} = -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma R_1(\lambda)\, d\lambda.$$

Alors, on a $\ker X \subset \ker P_{\sigma_1}$ ou $H \subset \ker P_{\sigma_1}$. On déduit que $M(H) \subset \ker P_{\sigma_1}$. Donc $P_{\sigma_1} = o$. D'après la proposition 11 du chapitre I, on déduit que σ_1 est vide. On conclut, d'une part que D_1 est simplement connexe, d'autre part que δ_1 est vide.

CHAPITRE III.

LES ENSEMBLES $RP(n, o; T)$.

On continue dans ce chapitre l'étude du calcul fonctionnel du chapitre I, dans le cas $p = o$. Ici $\mathfrak{S}_2(T)$ est réduit à un seul élément (o). Soit $H \in \mathfrak{S}_1(T)$. Au sous-espace H, on associe l'application R et l'ensemble discret δ. Soit alors σ_0 une partie ouverte et compacte du complémentaire dans C de $D - \delta$. On lui fait correspondre le projecteur P_{σ_0}.

1. LE PROJECTEUR P_{σ_0}.

THÉORÈME 1. — P_{σ_0} *est un projecteur dont l'image est stable par* T, *et aussi par* $R(z)$ *pour tout* z *de* $D - \delta$. *On a la relation*

$$P_{\sigma_0} T P_{\sigma_0} = T P_{\sigma_0}.$$

Démonstration. — Soit $\gamma \in B(\sigma_0)$. On peut écrire

$$TP_{\sigma_0} = -\frac{1}{2\pi i}\int T R(\lambda)\, d\lambda$$

ou, puisque $[T-\lambda]R(\lambda)=1$,

$$\begin{aligned} TP_{\sigma_0} &= -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \lambda R(\lambda)\,d\lambda \\ &= L_{\sigma_0}(\hat{z}). \end{aligned}$$

D'après la proposition 9 du chapitre I (§ 2), on a alors

$$P_{\sigma_0}TP_{\sigma_0}=TP_{\sigma_0}.$$

On déduit que l'image de P_{σ_0} est stable par T. La propriété de $R(z)$ est évidente puisque P_{σ_0} et $R(z)$ commutent.

Théorème 2. — *Le spectre de* $T\,|\,P_{\sigma_0}(E)$ *est contenu dans* σ_0.

Démonstration. — Pour tout z de $D-\delta$, on a

$$[T-z]R(z)P_{\sigma_0}=P_{\sigma_0}.$$

Soit $z_1\in C-\sigma_0$. Il existe $\gamma\in B(\sigma_0)$ tel que l'indice topologique $i(z_1,\gamma)$ soit nul. Soit Ω le domaine admissible ayant γ pour frontière. Pour tout z de $C-\overline{\Omega}$, posons

$$G(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{R(\lambda)}{\lambda-z}\,d\lambda.$$

D'après le lemme 6 du chapitre I, pour tout z de $[D-\delta]\cap[C-\overline{\Omega}]$, on a $R(z)P_{\sigma_0}=-G(z)$. Donc, $R(z)P_{\sigma_0}$ est prolongeable analytiquement dans $C-\overline{\Omega}$. On déduit que $C-\overline{\Omega}$ est une partie connexe formée de z pour lesquels $[T-z]\,|\,P_{\sigma_0}(E)$ est inversible à droite. La dimension de $\ker([T-z]\,|\,P_{\sigma_0}(E))$ est donc constante dans $C-\overline{\Omega}$. Puisque $C-\overline{\Omega}$ contient le point à l'infini, on conclut que cette dimension est nulle. $C-\overline{\Omega}$ est ainsi contenu dans le domaine résolvant de $T\,|\,P_{\sigma_0}(E)$. Puisque $z_1\in C-\overline{\Omega}$, le résultat est démontré.

Remarque. — Pour tout z de $C-\sigma_0$, la restriction de $R(z)$ à $P_{\sigma_0}(E)$ est l'inverse de $[T-z]\,|\,P_{\sigma_0}(E)$.

2. Le sous-espace $c(H)$. — D'après la proposition 7 du chapitre I, l'application $z\to \mathrm{co}\,R(z)$ est constante dans $D-\delta$. Désignons par $c(H, T)$, ou $c(H)$ s'il n'y a pas ambiguïté, la valeur de cette constante.

Proposition 1. — $P_{\sigma_0}(E)$ *est contenu dans* $c(H)$.

Démonstration. — D'après le corollaire du théorème 2, pour tout z de $D-\delta$,

$$R(z)\,(P_{\sigma_0}(E))=P_{\sigma_0}(E).$$

On déduit que

$$P_{\sigma_0}(E)\subset \mathrm{co}\,R(z) \qquad \text{ou} \qquad P_{\sigma_0}(E)\subset c(H).$$

PROPOSITION 2. — *Le sous-espace* $c(\mathrm{H})$ *est stable par* T. *L'ensemble* $\mathrm{D}-\delta$ *est contenu dans le domaine résolvant de* $\mathrm{T}\,|\,c(\mathrm{H})$. *L'ensemble* δ *est une partie du spectre de* $\mathrm{T}\,|\,c(\mathrm{H})$. *Pour* $z_0 \in \delta$, $\ker(\mathrm{T}-z_0)\cap \mathrm{H}$ *n'est pas réduit à* o *et*

$$\ker((\mathrm{T}-z_0)\,|\,c(\mathrm{H})) = \ker(\mathrm{T}-z_0)\cap \mathrm{H}.$$

Pour $z_1 \in \mathrm{D}-\delta$, $c(\mathrm{H})$ *est le plus grand sous-espace invariant par* $\mathrm{T}-z_1$ *et contenu dans* H.

Démonstration. — Pour tout z de $\mathrm{D}-\delta$, on a

$$[\mathrm{R}(z)](c(\mathrm{H})) = c(\mathrm{H}).$$

Donc

$$[\mathrm{T}-z](c(\mathrm{H})) = [\mathrm{T}-z]\mathrm{R}(z)\,(c(\mathrm{H})) = c(\mathrm{H}).$$

Ainsi $c(\mathrm{H})$ est invariant par $\mathrm{T}-z$. Mais

$$\ker(\mathrm{T}-z)\cap \mathrm{H} = (0).$$

Puisque $c(\mathrm{H}) \subset \mathrm{H}$, on conclut que

$$\ker(\mathrm{T}-z)\cap c(\mathrm{H}) = (0).$$

Donc la restriction de $\mathrm{T}-z$ à $c(\mathrm{H})$ est un isomorphisme : z appartient au domaine résolvant de $\mathrm{T}\,|\,c(\mathrm{H})$.

Soient $z_0 \in \delta$, $z_1 \in \mathrm{D}-\delta$, $\mathrm{X} = \mathrm{R}(z_1)$. On sait que

$$\ker(\mathrm{T}-z_0)\cap \mathrm{H} \neq (0).$$

Il est clair que

$$\ker((\mathrm{T}-z_0)\,|\,c(\mathrm{H})) \subset \ker(\mathrm{T}-z_0)\cap \mathrm{H}.$$

Montrons qu'on a l'égalité.

Soit $x \in \ker(\mathrm{T}-z_0)\cap \mathrm{H}$. Puisque $\mathrm{H} = \mathrm{X}(\mathrm{E})$, il existe $v \in \mathrm{E}$ avec $x = \mathrm{X}v$. Donc,

$$0 = (\mathrm{T}-z_0)\,x = (\mathrm{T}-z_0)\,\mathrm{X}v = [1-(z_0-z_1)\,\mathrm{X}]\,v.$$

L'égalité $\mathrm{X}v = \dfrac{v}{z_0-z_1}$ entraîne $v \in \mathrm{co}(\mathrm{X})$ ou $v \in c(\mathrm{H})$. Alors, $x = \mathrm{X}v$ est aussi un élément de $c(\mathrm{H})$. On a bien

$$\ker(\mathrm{T}-z_0)\,|\,c(\mathrm{H}) = \ker(\mathrm{T}-z_0)\cap \mathrm{H}.$$

Enfin, montrons que $c(\mathrm{H})$ est le plus grand sous-espace vectoriel fermé invariant par $\mathrm{T}-z_1$ et contenu dans H. Soit M un sous-espace vectoriel fermé invariant par $\mathrm{T}-z_1$ et contenu dans H. $\mathrm{R}(z_1)[\mathrm{T}-z_1]$ est un projecteur de E sur H, parallèlement à $\ker(\mathrm{T}-z_1)$. On a donc

$$\mathrm{R}(z_1)\,(\mathrm{T}-z_1)\,(\mathrm{M}) = \mathrm{M}.$$

Mais, puisque $(T - z_1)(M) = M$,

$$[R(z_1)](M) = M.$$

$c(H)$ est le cœur de $R(z_1)$. On conclut : $M \subset c(H)$.

La proposition est démontrée.

COROLLAIRE. — *La résolvante de* $T \mid c(H)$ *dans* $D - \delta$ *est la restriction de* $R(z)$ *à* $c(H)$.

Posons $R_1(z) = R(z) \mid c(H)$, et, pour $\gamma \in B(\sigma_0)$,

$$P'_{\sigma_0} = -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma R_1(\lambda)\, d\lambda.$$

D'après Dunford [4] (ou les résultats précédents), P'_{σ_0} est un projecteur dont le domaine de valeur est stable par T.

PROPOSITION 3 : $P_{\sigma_0}(E) = P'_{\sigma_0}(c(H))$.

Démonstration. — Puisque P_{σ_0} est un projecteur et que $P_{\sigma_0}(E) \subset c(H)$ (propos. 1), on a

$$P_{\sigma_0}(E) = P_{\sigma_0}(c(H)).$$

De plus, pour tout $x \in c(H)$,

$$R(z)\, x = R_1(z)\, x.$$

Donc, par intégration,

$$P_{\sigma_0} x = P'_{\sigma_0} x \qquad \text{et} \qquad P_{\sigma_0}(c(H)) = P'_{\sigma_0}(c(H)).$$

On conclut

$$P_{\sigma_0}(E) = P'_{\sigma_0}(c(H)).$$

La proposition est démontrée.

Les $P_{\sigma_0}(E)$ sont ainsi les sous-espaces stables qu'on aurait obtenus en appliquant la théorie de la décomposition spectrale de Dunford dans $D - \delta$, partie du domaine résolvant de $T \mid c(H)$.

Le résultat suivant précise le théorème 2 :

THÉORÈME 3. — *On a l'égalité*

$$\sigma(T \mid P_{\sigma_0}(E)) = \sigma(T \mid c(H)) \cap \sigma_0.$$

Démonstration. — D'après Dunford [4], on sait que

$$\begin{aligned}\sigma(T \mid c(H)) \cap \sigma_0 &= \sigma(T \mid P'_{\sigma_0}(c(H)))\\ &= \sigma(T \mid P_{\sigma_0}(E)),\end{aligned}$$

d'après la proposition 3.

3. Relation entre les résultats des chapitres II et III. — On sait que D est une composante connexe de $\mathrm{RP}(n, o; \mathrm{T})$ et aussi de $\mathrm{RP}(o, n; {}^t\mathrm{T})$, (*cf.* [13], théor. 6).

Soit $\mathrm{H} \in \mathcal{S}_1(\mathrm{T})$. Cela signifie qu'il existe $z_0 \in \mathrm{D}$ avec

$$\ker(\mathrm{T} - z_0) \oplus \mathrm{H} = \mathrm{E}.$$

On déduit

$$\mathrm{Im}^t(\mathrm{T} - z_0) \oplus \mathrm{H}^0 = \mathrm{E}', \qquad \text{donc} \quad \mathrm{H}^0 \in \mathcal{S}_2({}^t\mathrm{T}).$$

On a alors le résultat suivant :

Proposition 4 : $\delta(\mathrm{H}, o; \mathrm{T}) = \delta(\mathrm{E}, \mathrm{H}^0, {}^t\mathrm{T})$.

$[c(\mathrm{H}, \mathrm{T})]^0$ *est l'adhérence faible dans* E' *de* $\mathrm{M}(\mathrm{H}^0, {}^t\mathrm{T})$. *Si* σ_0 *est une partie ouverte et compacte de* $\mathrm{D} - \delta(\mathrm{H}, o; \mathrm{T})$, *on a*

$$[\mathrm{Im}\, \mathrm{L}_{\sigma_0}(\hat{1}, \mathrm{H}, o; \mathrm{T})]^0 = \ker \mathrm{L}_{\sigma_0}(\hat{1}, \mathrm{E}, \mathrm{H}^0; {}^t\mathrm{T}).$$

Démonstration. — Les z de $\mathrm{D} - \delta(\mathrm{H}, o; \mathrm{T})$ sont caractérisés par

$$\ker(\mathrm{T} - z) \oplus \mathrm{H} = \mathrm{E}.$$

Cette relation est équivalente à

$$(1) \qquad \mathrm{Im}^t(\mathrm{T} - z) \oplus \mathrm{H}^0 = \mathrm{E}.$$

Or, par définition, les z qui vérifient (1) sont les éléments de $\mathrm{D} - \delta(\mathrm{E}, \mathrm{H}^0, {}^t\mathrm{T})$. Donc

$$\delta(\mathrm{H}, o; \mathrm{T}) = \delta(\mathrm{E}, \mathrm{H}^0; {}^t\mathrm{T}).$$

Montrons que

$$(\mathrm{Im}\, \mathrm{L}_{\sigma_0}(\hat{1}, \mathrm{H}, o; \mathrm{T}))^0 = \ker \mathrm{L}_{\sigma_0}(\hat{1}, \mathrm{E}, \mathrm{H}^0, {}^t\mathrm{T}).$$

D'après la relation (1), il est clair que

$${}^t(\mathrm{R}(z, \mathrm{H}, o; \mathrm{T})) = \mathrm{R}(z, \mathrm{E}, \mathrm{H}^0, {}^t\mathrm{T}),$$

pour tout z de $\mathrm{D} - \delta(\mathrm{H}, o; \mathrm{T})$. On déduit par intégration que

$${}^t\mathrm{L}_{\sigma_0}(\hat{1}, \mathrm{H}, o; \mathrm{T}) = \mathrm{L}_{\sigma_0}(\hat{1}, \mathrm{E}, \mathrm{H}^0; {}^t\mathrm{T}).$$

On a donc bien

$$(\mathrm{Im}\, \mathrm{L}_{\sigma_0}(\hat{1}, \mathrm{H}, o; \mathrm{T}))^0 = \ker \mathrm{L}_{\sigma_0}(\hat{1}, \mathrm{E}, \mathrm{H}^0, {}^t\mathrm{T}).$$

Soient $z_0 \in \mathrm{D} - \delta$ et X l'inverse à droite de $\mathrm{T} - z_0$ tel que $\ker \mathrm{X} = \mathrm{H}$

$$(c(\mathrm{H}, \mathrm{T}))^0 = \left(\bigcap_k \mathrm{X}^k(\mathrm{E}) \right)^0.$$

Or.

$$(\mathrm{X}^k(\mathrm{E}))^0 = \ker({}^t\mathrm{X})^k.$$

Donc $(c(\mathrm{H}, \mathrm{T}))^0$ est l'adhérence dans E' de $\bigcup_k \ker({}^t\mathrm{X})^k$ pour la topologie faible $\sigma(\mathrm{E}', \mathrm{E})$.

Soit r un entier positif. Montrons que le sous-espace vectoriel de E' engendré par H^0, ${}^t(T-z_0)(H^0)$, ..., ${}^t(T-z_0)^r(H^0)$ est $\ker({}^tS)^{r+1}$.

Soit $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ une base de H^0. On sait que $H^0 = \ker {}^tX$. On vérifie sans difficulté que pour tout i $(1 \leqq i \leqq n)$, la famille $(x_i, {}^t(T-z_0)x_i, \ldots, {}^t(T-z_0)^r x_i)$ forme les r premiers éléments d'une ${}^tX$ chaîne d'origine x_i. On conclut d'après Audin [1], que la réunion de ces éléments, pour tout i, est une base de $\ker({}^tX)^{r+1}$. Donc, le sous-espace engendré par H^0, ${}^t(T-z_0)(H^0)$, ..., ${}^t(T-z_0)^r(H^0)$, est $\ker({}^tX)^{r+1}$. On conclut que $M(H^0, {}^tT)$ est l'adhérence dans E', muni de la topologie forte de $\bigcup_k \ker({}^tX)^k$. Il est alors clair que $(c(H, T))^0$ est l'adhérence, dans E' muni de la topologie faible $\sigma(E', E)$, de $M(H^0, {}^tT)$.

Corollaire. — *Si* E *est réflexif,* $(c(H, T))^0 = M(H^0, {}^tT)$.

4. Application a l'adjoint du Shift operator. — Soit D l'ensemble des z complexes tels que $|z| < 1$. Désignons par H^2 l'espace de Hilbert complexe des fonctions $f(z)$ holomorphes dans D avec

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < +\infty.$$

Si $g \in H^2$, avec $g(z) = \sum b_n z^n$, $(f, g) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \overline{b}_n$.

Le « shift » est l'élément S de $\mathcal{L}(H^2)$ défini par

$$[Sf](z) = zf(z).$$

On a

$$[S^\star f](z) = \frac{f(z) - f(0)}{z} \qquad (S^\star \text{ désigne l'adjoint de } S).$$

Il est connu que $RP(0, 1; S) = D$ et $\sigma(S) = \overline{D}$. On déduit

$$RP(1, 0; S^\star) = D \quad \text{et} \quad \sigma(S^\star) = \overline{D}.$$

Beurling [2] a décrit tous les sous-espaces vectoriels fermés stables par S de la façon suivante :

Soit $\mathcal{M}$ un sous-espace vectoriel fermé stable par S. Alors, il existe une fonction $f \in H^2$, intérieure, telle que $\mathcal{M}$ soit le plus petit sous-espace fermé stable par S contenant f. La fonction f est déterminée par $\mathcal{M}$ à une constante multiplicative de module 1 près.

Proposition 5. — *Soit* $\mathcal{N}$ *un sous-espace stable par* $S^\star$. *Alors il existe une partie discrète* δ_1 *de* D *telle que :*

— *tout point de* $D - \delta_1$ *appartient au domaine résolvant de* $S^\star | \mathcal{N}$;

— *tout point de* δ_1 *appartient au spectre ponctuel de* $S^* \mid \mathfrak{N}$;

— *pour tout* z *de* $D - \delta_1$, *il existe un inverse à droite* X *de* $S^* - z$ *avec* $\mathfrak{N} = \mathrm{co}(X)$.

Démonstration. — On sait que $\mathfrak{N}^\perp$ est stable par S. Soit f la fonction intérieure associée à $\mathfrak{N}^\perp$. Désignons par $\{f\}$ le sous-espace engendré par f. D'après le corollaire de la proposition 4, $\mathfrak{N} = c(\{f\}^\perp, S^*)$. Par ailleurs, il est clair que pour tout z_0 de D tel que $f(z_0) \neq 0$, on a

$$\mathrm{Im}(S - z_0) \oplus \{f\} = H^2.$$

On déduit

$$\ker(S^* - \bar{z}_0) \oplus \{f\}^\perp = H^2.$$

Désignant par δ_1 l'ensemble des nombres complexes conjugués des zéros de f, on obtient la proposition à partir des propositions 2 et 4.

Les deux premiers résultats de la proposition 5 ont été obtenus par Moeller ([10], théor. 2.1).

APPENDICE I.

ÉTUDE DE L'ÉQUATION $(T - z)x = y$ DANS $RP(n, p; T)$.

1. Soient n et p deux entiers positifs, D une composante connexe de $RP(n, p; T)$. Étant donnés un élément y de E et un point z de D, on se propose d'étudier l'équation $[T - z]x = y$.

Désignons par M la valeur constante dans D de $\mathrm{co}(T - z)$ (*cf.* [13], théor. 4). On a alors le résultat suivant :

PROPOSITION. — *Si* $y \notin M$, *l'équation n'a de solution que pour des* z *isolés de* D. *Si* $y \in M$, *l'équation a une solution pour tout* z *de* D. *De plus, il existe une fonction holomorphe* f *définie dans* D, *à valeurs dans* E, *telle que* $(T - z)f(z) = y$.

Enfin, rappelons (pour l'étude du cas $y = 0$), *qu'il existe une base holomorphe dans* D *de* $\ker(T - z)$.

Démonstration. — Soient $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p)$ une base holomorphe dans D de $\ker'(T - z)$ et $z_0 \in D$. Pour que $y \in \mathrm{Im}(T - z_0)$, il faut et suffit que pour tout i,

$$\langle y, \varphi_i(z_0) \rangle = 0.$$

Donc, si les fonctions $\langle y, \varphi_i(z) \rangle$ ne sont pas toutes identiquement nulles dans D, l'équation donnée n'a de solution que pour des z isolés de D. Par ailleurs, d'après ([13], propos. 20), l'ensemble des y tels que les fonctions $\langle y, \varphi_i(z) \rangle$ soient identiquement nulles est égal à la valeur constante de $\mathrm{co}(T - z)$ dans D, c'est-à-dire à M.

Soit $y \in M$ et $\lambda \in D$. Désignons par X un inverse relatif de $T - \lambda$. Alors $R_\lambda(z) = (1 - (z - \lambda) X)^{-1} X$ est un inverse relatif de $T - z$ dans un voisinage V_λ de λ. D'après ([13], propos. 9), M est stable par $R_\lambda(z)$. On en déduit que la restriction de $R_\lambda(z)$ à M est un inverse à droite de $(T - z) | M$. Posant $G_\lambda(z) = R_\lambda(z) y$, il découle que $(T - z) g_\lambda(z) = y$. Soient alors λ et μ deux éléments de D tels que $V_\lambda \cap V_\mu \neq \emptyset$. Pour tout z de $V_\lambda \cap V_\mu$,

$$g_\lambda(z) - g_\mu(z) \in \ker(T - z).$$

Soient $(f_1(z), f_2(z), \ldots, f_n(z))$ une base holomorphe dans D de $\ker(T - z)$ et $G_{\lambda,\mu}(z)$ la matrice à n lignes et une colonne qui représente $g_\lambda(z) - g_\mu(z)$ dans cette base. L'application $z \to G_{\lambda,\mu}(z)$ de $V_\lambda \cap V_\mu$ dans C^n est holomorphe et l'on vérifie immédiatement que si $V_\lambda \cap V_\mu \cap V_\nu \neq \emptyset$,

$$G_{\lambda\mu}(z) + G_{\mu\nu}(z) + G_{\nu\lambda}(z) = 0.$$

Le système des $G_{\lambda\mu}(z)$ définit donc un espace fibré analytique complexe ayant pour base D et pour fibre le groupe additif C^n (*cf.*—[3]). Puisque la base est de dimension 1 et la fibre connexe, on déduit d'après Grauert [6] et Rohrl [11], que ce fibré est analytiquement trivial. Il découle immédiatement qu'il existe une fonction holomorphe g, définie dans D, à valeurs dans E, telles que : $(T - z) g(z) = y$.

La proposition est démontrée.

2. Exemple. — Désignons par $E = L^1(0, +\infty)$ l'espace de Banach des classes de fonctions à valeurs complexes intégrables sur $[0, +\infty]$.

Soit $k \in L^1(-\infty, +\infty)$ et $T \in \mathcal{L}(E)$ défini par

$$[T(g)](t) = \int_0^\infty k(t - s) g(s) \, ds.$$

Désignons par $K(\xi)$ la transformée de Fourier de $k (-\infty \leqq \xi \leqq +\infty)$ et par γ la courbe dans C définie par

$$z = K(\xi) \qquad (-\infty \leqq \xi \leqq +\infty).$$

Soient $z_1 \notin \gamma$ et $i(z_1, \gamma)$ l'indice topologique de z_1 par rapport à γ.

M. G. Krein a montré [8] que :

$i(z_1, \gamma) \leqq 0$ est équivalent à $z_1 \in RP(-i(z_1, \gamma), 0; T)$;
$i(z_1, \gamma) \geqq 0$ est équivalent à $z_1 \in RP(0, i(z_1, \gamma); T)$.

Appelons boucle de γ toute composante connexe de $C - \gamma$. Dans une boucle, l'indice $i(z, \gamma)$ est constant.

Toute boucle est ainsi une partie connexe de $RP(n, 0; T)$ ou $RP(0, p; T)$.

On peut donc appliquer à l'équation intégrale

$$\int_0^{+\infty} k(t-s)\,g(s)\,ds - z\,g(t) = f(t),$$

f, élément donné de E; g, inconnue, $z \notin \gamma$, tous les résultats du numéro I :

— Si D est une boucle correspondant à un indice négatif $-n$, l'équation « sans second membre », possède un système de n solutions : $g_1(t, z)$, $g_2(t, z)$, ..., $g_n(t, z)$, holomorphes (par rapport à z) dans D et formant un système libre pour chaque z de D; l'équation « avec second membre » a une solution $g(t, z)$ holomorphe (par rapport à z) dans D;

— Si D est une boucle correspondant à un indice positif p, il existe un sous-espace M de E, tel que :

— si $f \notin M$, l'équation n'a de solution que pour des z isolés de D;

— si $f \in M$, l'équation a une solution $g(t, z)$ holomorphe (par rapport à z) dans D.

APPENDICE II.

Quelques propriétés des applications régulières.

1. Soient E_1 et E_2 deux espaces vectoriels topologiques. Rappelons (*voir* [13]) qu'une application linéaire continue T de E_1 dans E_2 est régulière si c'est un morphisme strict et si le noyau et l'image ont des supplémentaires topologiques. Soient $E_i = X_i \oplus Y_i$ des décompositions de E_1 et E_2 en sommes directes topologiques. Une application linéaire continue T de E_1 dans E_2 se représente alors par une matrice $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$. Par ailleurs, il existe une correspondance bijective entre les supplémentaires topologiques de X_1 et les applications linéaires continues u de Y_1 dans X_1; elle est obtenue en associant à u le sous-espace graphe de u.

Proposition 1. — *Soit* $T = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ *une application linéaire continue de* E_1 *dans* E_2. *Alors les conditions :*

a. $\ker T$ *contient un supplémentaire topologique* M *de* X_1;

b. Il existe $u \in \mathcal{L}(Y_1, X_1)$ *telle que* $B = Au$ *et* $D = Cu$, *sont équivalentes.*

Supposons, de plus, A *inversible. Considérons les conditions :*

a'. $\ker T$ *est un supplémentaire topologique de* X_1;

b'. $D = CA^{-1}B$.

Alors les conditions a, a', b, b' sont équivalentes et impliquent que T *est un morphisme strict.*

Démonstration. — Soit M un supplémentaire topologique de X_1, $(-u)$ l'application linéaire continue de Y_1 dans X_1 ayant M pour graphe. Pour que a soit réalisée, il faut et suffit que pour tout y de Y_1

$$A(-u(y)) + By = 0 \quad \text{et} \quad C(-u(y)) + Dy = 0,$$

ou $B = Au$ et $D = Cu$. Donc a est équivalente à b.

Supposons A inversible. Alors, il est immédiat que b et b' sont équivalentes. Par ailleurs, si a est réalisée, $\ker T$ contient M mais ne peut contenir d'élément non nul de X_1 puisque A est inversible. On déduit que $\ker T = M$ et que a implique a'. On en conclut facilement que les quatre conditions sont équivalentes. Soit alors T_1 la restriction de T à X_1 et $(x_i)_{i\in I}$ un ensemble de points de X_1, ordonné par un ensemble d'indices ordonné filtrant à droite, I. $T_1(x_i) = (Ax_i, Cx_i)$. Puisque A est inversible, si $T_1(x_i)$ tend vers zéro, il en est de même de x_i, on déduit que T_1 est un isomorphisme de X_1 sur $\operatorname{Im} T$. Donc T est un morphisme strict.

Proposition 2. — *Les conditions :*

a. $\operatorname{Im} T$ *est contenu dans un supplémentaire topologique* N *de* Y_2;

b. Il existe $\varphi \in \mathcal{L}(X_2, Y_2)$, *avec* $C = \varphi A$, $D = \varphi B$,

sont équivalentes.

Supposons, de plus, A *inversible. Considérons les conditions :*

a'. $\operatorname{Im} T$ *est un supplémentaire topologique de* Y_2;

b'. $D = CA^{-1}B$.

Alors les conditions a, a', b, b' sont équivalentes. De plus, T *est un morphisme strict.*

Démonstration. — Soient φ une application linéaire continue de X_2 dans Y_2 et N le graphe de φ. Pour que $\operatorname{Im} T$ soit contenu dans N, il faut et suffit que pour tout x de X_1 et y de Y_1, $Cx + Dy = \varphi(Ax + By)$ ou $C = \varphi A$ et $D = \varphi B$. Donc a est équivalent à b.

Supposons A inversible. Alors, il est clair que b est équivalente à b'. Par ailleurs, si a est réalisée, $T(X_1)$ est formé des éléments $(Ax, \varphi Ax)$ pour $x \in X_1$. Puisque A est inversible, $T(X_1)$ contient N. On déduit que a implique a'. On conclut facilement que les quatre conditions sont équivalentes. Enfin, T est un morphisme strict d'après la proposition 1.

Corollaire. — *Si* A *est inversible, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) $\ker T$ *est un supplémentaire topologique de* X_1;

(2) $\operatorname{Im} T$ *est un supplémentaire topologique de* Y_2;

(3) $D = CA^{-1}B$.

Si elles sont réalisées, T *est régulière.*

Généralisons la proposition 1 :

PROPOSITION 3. — *Soit k un entier positif ou nul. Les conditions :*

a. Il existe un supplémentaire toplogique M *de* X_1 *tel que* T(M) *soit de dimension k;*

b. Il existe $u \in \mathcal{L}(Y_1, X_1)$ *telle que l'application linéaire de* Y_1 *dans* E_2 :

$$y \rightarrow ((B - Au)y, (D - Cu)y) \quad \textit{soit de rang } k,$$

sont équivalentes.

Supposons A *inversible. Alors les conditions :*

a'. Il existe un supplémentaire topologique M *de* X_1 *qui contient* ker T *et dans lequel* ker T *est de codimension k;*

b'. $D - CA^{-1}B$ *est de rang k,*

sont équivalentes et impliquent que T *est un morphisme strict.*

Démonstration. — Soit u une application linéaire continue de Y_1 dans X_1, M le graphe de $(-u)$. T(M) est l'ensemble des éléments $((B - Au)y, (D - Cu)y)$ pour $y \in Y_1$. Donc a et b sont équivalentes. Supposons A inversible et b' réalisée. Prenons $u = A^{-1}B$; M sera le graphe de $(-u)$. Puisque $B - Au = 0$ et $D - Cu = D - CA^{-1}B$, u vérifie b. Donc, M vérifie a. Par ailleurs, si ker T n'était pas contenu dans M, $(M + \ker T) \cap X_1$ ne serait pas réduit à (o). Il existerait donc x non nul de X_1 et $y \in Y_1$ tels que :

$(B - Au)y = Ax$;

$(D - Cu)y = Cx$, c'est absurde puisque A est inversible et $B = Au$.

Donc ker T est contenu dans M. On conclut que a' est réalisée. Supposons A inversible et a' réalisée. Soit $u \in \mathcal{L}(Y_1, X_1)$ telle que M soit le graphe de $(-u)$. Alors a et b sont réalisées. Donc $B - Au$ et $D - Cu$ sont de rang fini. Il en est de même de

$$D - CA^{-1}B = D - Cu - CA^{-1}(B - Au).$$

Soit k' le rang de $D - CA^{-1}B$. On déduit, puisque b' implique a', qu'il existe un sous-espace M' supplémentaire topologique de X_1 contenant ker T et dans lequel ker T est de codimension k'. On conclut alors que $k' = k$ (ces deux nombres ont pour valeur la codimension dans E de $X_1 \oplus \ker T$). Ainsi b' est réalisée.

On démontre comme à la fin de la démonstration de la proposition 1 que la restriction T_1 de T à X_1 est un isomorphisme de X_1 sur $T(X_1)$. Puisque X_1 est de codimension finie dans un supplémentaire topologique de ker S, on déduit que T est un morphisme strict.

Généralisons la proposition 2.

Proposition 4. — *Soit k un entier positif ou nul. Les conditions :*

a. Il existe un supplémentaire topologique N *de* Y_2 *tel que* $T^{-1}(N)$ *soit de codimension k dans* E_1;

b. Il existe $\varphi \in \mathcal{L}(X_2, Y_2)$ *telle que l'application linéaire de* E_1 *dans* E_2 :

$$(x, y) \to ((C - \varphi A)x, (D - \varphi B)y)$$

soit de rang k, sont équivalentes.

Supposons A *inversible. Alors les conditions :*

a'. ImT *admet un sous-espace* N, *supplémentaire topologique de* Y_2, *de codimension k dans* ImT;

b'. $D - CA^{-1}B$ *est de rang k,*

sont équivalentes et impliquent que T *est un morphisme strict.*

Démonstration. — Soient φ une application linéaire continue de X_2 dans Y_2, N son graphe; $T^{-1}(N)$ est formé des éléments (x, y) de E_1 pour lesquels

$$\varphi(Ax + By) = Cx + Dy \quad \text{ou} \quad (C - \varphi A)x = 0 \quad \text{et} \quad (D - \varphi B)y = 0.$$

Il est donc clair que a est équivalente à b.

Supposons A inversible et b' réalisée. Prenons pour N le graphe de $\varphi = CA^{-1}$. Puisque $C - \varphi A = 0$ et $D - \varphi B = D - CA^{-1}B$, on constate que φ réalise b et N réalise a. $T(X_1)$ est formé des éléments (Ax, Cx) pour $x \in X_1$. Puisque A est inversible, $T(X_1)$ est aussi formé des éléments $(y, CA^{-1}y)$ pour $y \in X_2$. Donc N est contenu dans ImT. On conclut que a' est réalisée. Supposons A inversible et a' réalisée. Soit φ l'application linéaire continue de X_2 dans Y_2 ayant N pour graphe. Alors N réalise a et φ réalise b. Donc $C - \varphi A$ et $D - \varphi B$ sont de rang fini. Il en est de même de

$$D - CA^{-1}B = D - \varphi B + (C - \varphi A)A^{-1}B.$$

Soit k' le rang de $D - Ca^{-1}B$. Puisque b' implique a', il existe un sous-espace N' de ImT supplémentaire topologique de Y_2 et de codimension k' dans ImT.

On conclut que N et N' sont isomorphes. Donc $k = k'$. b' est réalisée. Enfin, T est un morphisme strict d'après la proposition 3.

Corollaire 1. — *Supposons* A *inversible et soit k un entier positif ou nul. Alors les conditions :*

(1) kerT *est de dimension k dans un supplémentaire topologique de* X_1;

(2) ImT *admet un sous-espace, supplémentaire topologique de* Y_2, *de codimension k dans* ImT;

(3) $D - CA^{-1}B$ *est de rang k,*

sont équivalentes. Si elles sont vérifiées, T *est un morphisme strict.*

Les corollaires suivants retrouvent en les précisant des résultats de Gohberg (*Dokl. Akad. Nauk.*, t. 72, 1951, p. 629-632 et Atkinson (*Acta Scient. Math.*, t. 15, n° 1, 1953, p. 38-56). Dans toute la suite E_1 et E_2 sont des espaces de Banach réels ou complexes.

Corollaire 2 (invariance de l'indice). — *Soient* T *une application linéaire continue de* E_1 *dans* E_2 *d'indice fini,* $\chi(T)$ *et* $u \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$. *Alors si* $|U|$ *est assez petit* $\chi(T+U) = \chi(T)$.

Démonstration. — Posons $Y_1 = \ker T$ et $X_2 = \operatorname{Im} T$. On peut trouver des décompositions $E_i = X_i \oplus Y_i$. On a alors :

$$T = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad U = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix}, \qquad T+U = \begin{pmatrix} A+A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix};$$

A est inversible; si $|U|$ est assez petit $A + A_1$ est aussi inversible. Dans ce cas, $D_1 - C_1(A+A_1)^{-1}B_1$ est de rang fini k.

On déduit, d'après le corollaire 1, que

$$\dim \ker (T+U) = \dim \ker T - k \qquad \text{et} \qquad \operatorname{codim} \operatorname{Im} (T+U) = \operatorname{codim} \operatorname{Im} T - k.$$

Le résultat est obtenu.

Les corollaires 3 et 4 généralisent le corollaire 2.

Corollaire 3. — *Soient* T *une application régulière de* E_1 *dans* E_2 *avec* $\dim \ker T$ *fini et* $U \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$. *Alors si* $|U|$ *est assez petit,* $T+U$ *est un morphisme strict. De plus,*

$$\dim \ker (T+U) \leq \dim \ker T.$$

Si $\dim \ker(T+U) = \dim \ker T$, $\operatorname{Im} T$ *et* $\operatorname{Im}(T+U)$ *sont isomorphes et ont un supplémentaire topologique commun.*

Si $\dim \ker T = \dim \ker(T+U) + k$, $\operatorname{Im}(T+U)$ *admet un sous-espace isomorphe à* $\operatorname{Im} T$ *de codimension* k *dans* $\operatorname{Im}(T+U)$.

Démonstration. — Le principe de la démonstration est le même que celui du corollaire 2. $D_1 - C_1(A+A_1)^{-1}B_1$ est encore de rang fini k. On obtient immédiatement le résultat à partir du corollaire 1.

Corollaire 4. — *Soient* T *une application régulière de* E_1 *dans* E_2 *avec* $\operatorname{codim} \operatorname{Im} T$ *fini et* $U \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$. *Si* $|U|$ *est assez petit,* $T+U$ *est un morphisme strict. De plus :* $\operatorname{codim} \operatorname{Im}(T+U) \leq \operatorname{codim} \operatorname{Im} T$. *Si*

$$\operatorname{codim} \operatorname{Im} (T+U) = \operatorname{codim} \operatorname{Im} T,$$

$\ker T$ *et* $\ker(T+U)$ *sont isomorphes et ont un supplémentaire topologique commun. Si* $\operatorname{codim} \operatorname{Im} T = \operatorname{codim} \operatorname{Im}(T+U) + k$, *on peut trouver un sous-espace isomorphe à* $\ker T$ *contenant* $\ker(T+U)$ *et dans lequel* $\ker(T+U)$ *est de codimension* k.

Soient E_1 et E_2 deux espaces de Banach complexes, Δ un ouvert de C, $z \to T(z)$ une application holomorphe de Δ dans $\mathcal{L}(E_1, E_2)$, [$\mathcal{L}(E_1, E_2)$ est muni de la topologie de la norme]. On a alors le résultat suivant :

Corollaire 5. — *Supposons que pour* $z_0 \in \Delta$, $T(z_0)$ *soit régulière avec* $\dim \ker T(z_0)$ *fini. Alors, il existe un voisinage* V *de* z_0 *tel que pour tout* z *de* $V - \{z_0\}$, $T(z)$ *soit régulière avec un noyau de dimension constante* n *inférieure ou égale à* $\dim \ker T(z_0)$. *Si* $n = \dim \ker T(z_0)$, $\operatorname{Im} T(z)$ *est isomorphe à* $\operatorname{Im} T(z_0)$ *pour tout* z *de* V. *Si* $n = \dim \ker T(z_0) - k$, *il existe pour chaque* z *de* $V - \{z_0\}$ *une décomposition de* $\operatorname{Im} T(z)$ *en somme directe formée d'un sous-espace isomorphe à* $\operatorname{Im} T(z_0)$ *et d'un sous-espace de dimension* k.

Démonstration. — Soient $E_i = X_i \oplus Y_i$ des décompositions de E_1 et E_2 avec

$$Y_1 = \ker T(z_0) \qquad \text{et} \qquad X_2 = \operatorname{Im} T(z_0).$$

Alors

$$T(z) = \begin{pmatrix} A(z) & B(z) \\ C(z) & D(z) \end{pmatrix}, \qquad \text{avec} \quad B(z_0) = C(z_0) = D(z_0) = 0.$$

De plus, dans un voisinage de z_0, $A(z)$ est un isomorphisme. Par ailleurs, il existe un voisinage V de z_0 tel que pour tout z de $V - z_0$, $D(z) - C(z)(A(z))^{-1}B(z)$ soit de rang fini constant k. On obtient alors tous les résultats à partir du corollaire 3.

2. Dans ce numéro, E_1 et E_2 sont des espaces de Banach complexes. Soit T une application régulière de E_1 dans E_2 et X un inverse relatif de T, linéaire et continu. Supposons que $\dim \ker T = n$. On a alors le :

Lemme. — *Pour tout* $U \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$ *tel que* $|U| < |X|^{-1}$ *et* $\dim \ker(T + U) = n$

$$R(U) = (1 + XU)^{-1}X = X(1 + UX)^{-1}$$

est un inverse relatif de $T + U$.

Démonstration. — On vérifie sans difficulté que

$$(1 + XU)^{-1}X = X(1 + UX)^{-1}.$$

Posons

$$K(U) = 1 - R(U)(T + U).$$

Il est clair que $\operatorname{Im} K(U) \supset \ker(T+U)$.

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} K(U) &= (1 + XU)^{-1}[1 + XU - XT - XU] \\ &= (1 + XU)^{-1}(1 - XT). \end{aligned}$$

Donc,

$$\dim \operatorname{Im} K(U) = \dim \operatorname{Im}(1 - XT) = \dim \ker T = n$$

On conclut que $\operatorname{Im} K(U) = \ker(T + U)$.
Alors

$$(T + U) - (T + U) R(U) (T + U) = (T + U) K(U) = 0.$$

Par ailleurs,

$$R(U) (T + U) R(U) = (1 + XU)^{-1} X (T + U) X (1 + UX)^{-1} = R(U).$$

Le résultat est obtenu. Soient Δ un ouvert de C et $z \to T(z)$ une application holomorphe de Δ dans $\mathcal{L}(E_1, E_2)$. Supposons qu'en $z_0 \in \Delta$, $T(z_0)$ soit régulière et que $\dim \ker T(z_0)$ soit fini. D'après le corollaire 5, l'ensemble des z pour lesquels $T(z)$ est régulière et $\dim \ker T(z)$ fini est ouvert. Soit Δ_1 une composante connexe de cet ouvert. On sait (corollaire 5) qu'il existe un sous-ensemble discret δ_1 de Δ_1 tel que pour tout z de $\Delta_1 - \delta_1$, $\ker T(z)$ ait une dimension constante. On a alors la :

PROPOSITION 5. — *$\ker T(z)$ a une base holomorphe dans $\Delta_1 - \delta_1$.*

Démonstration. — D'après ([13], propos. 14), il suffit de montrer qu'il existe une base holomorphe de $\ker T(z)$ au voisinage de chaque point de $\Delta_1 - \delta_1$. Soit $z_0 \in \Delta_1 - \delta_1$ et X un inverse relatif linéaire et continu de $T(z_0)$. D'après le lemme précédent, il existe un voisinage V de z_0 tel que pour tout z de V, $R(z) = [1 + X(T(z) - T(z_0))]^{-1} X$ soit un inverse relatif de $T(z)$. Donc $K(z) = 1 - R(z) T(z)$ est un projecteur sur $\ker T(z)$. Puisque l'application $z \to K(z)$ est holomorphe, on en déduit l'existence d'une base holomorphe de $\ker T(z)$ dans un voisinage V_1 de z_0 et le résultat.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] AUDIN, *Thèse*, Paris, 1957.

[2] A. BEURLING, *On two problems concerning linear transformations in Hilbert space* (*Acta Mathematica*, t. 81, 1949, p. 239-255).

[3] H. CARTAN, *Espaces fibrés analytiques complexes*, Séminaire Bourbaki, 1950-1951

[4] N. DUNFORD et J. T. SCHWARTZ, *Linear Operators*, Interscience Publishers, 1958.

[5] I. C. GOHBERG et M. G. KREIN, *The Basic propositions on defect numbers, roots numbers and indices of linear operators* [*Uspehi Mat. Nauk*, nouv. série, t. 12, nº 2 (74), 1957, p. 43-118 (en russe); traduction américaine : *Amer. Mat. Soc. Trans.*, sér. 2, vol. 13, 1960].

[6] GRAUERT, *Analytische Faserungen über holomorph vollständigen Raumen* (*Mat. Annal.*, t. 135, 1958, p. 263-273).

[7] E. HILLE et R. PHILIPPS, *Functional Analysis and semigroups* (*Amer. Math. Soc.*, Coll. Pub. 31, 2e édition, 1957).

[8] M. G. KREIN, *Integral equations on a half line with kernels depending upon the difference of the arguments* [*Uspehi Mat. Nauk*, nouv. série, t. 13, nº 5 (83), 1958, p. 3-120 (en russe); traduction américaine : *Amer. Mat. Soc. Trans.*, sér. 2, vol. 22, 1962].

[9] E. R. LORCH, *The spectrum of linear transformations* (*Trans. Amer. Mat. Soc.*, t. 52, 1942, p. 238-248).

[10] J. W. Moeller, *On the spectra of some translation invariant spaces* (*J. Mat. Anal. appl.*, t. 4, n° 2, 1962, p. 276-296).

[11] Rohrl, *Einige bemerkungen über komplex Analytische Vektorraumbündel* (*Mat. Annal.*, t. 133, 1957, p. 360-367).

[12] Sz. Nagy, *Perturbations des transformations linéaires fermées* (*Acta Scient. Mat.*, t. 14, 1951, p. 125-137).

[13] P. Saphar, *Contribution à l'étude des applications linéaires dans un espace de Banach* (*Bull. Soc. Math. France*, t. 92, 1964).

[14] P. Saphar, *C. R. Acad. Sc.*, t. 255, 1962, p. 3107-3108.

[15] P. Saphar, *C. R. Acad. Sc.*, t. 258, 1964, p. 6055-6057.

[16] A. E. Taylor, *Introduction to Functional Analysis*, 1959.