Annales scientifiques de l'É.N.S.

René Lagrange

Sur les oscillations d'ordre supérieur d'une fonction numérique

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 82, no 2 (1965), p. 101-130
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1965_3_82_2_101_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
3e série, t. 82, 1965, p. 101 à 130.

SUR LES OSCILLATIONS D'ORDRE SUPÉRIEUR D'UNE FONCTION NUMÉRIQUE

PAR M. RENÉ LAGRANGE.

INTRODUCTION.

La variation totale d'une fonction numérique réelle $f(x)$, définie et bornée sur un segment $[a, b]$, est définie à l'aide d'une partition finie et générale de $[a, b]$ en segments dont on fait tendre uniformément la longueur vers zéro.

Nous nous proposons d'étudier ce que donne l'ensemble des partitions dont le nombre n des segments est donné. Chaque subdivision fournit ce qu'on peut appeler une oscillation d'ordre n de $f(x)$ sur $[a, b]$, qui est la somme des oscillations de la fonction dans ces n segments, et la borne supérieure de ces oscillations d'ordre n est ce que nous nommons la variation d'ordre n de $f(x)$ sur $[a, b]$. Cet article est consacré à l'étude de cette variation $V_n[a, b]$. On montre qu'elle est elle-même une oscillation d'ordre n, à condition de généraliser la nature des partitions, en utilisant les intervalles dont les extrémités sont représentées par un symbole x, $x+$, $x-$, x étant un point de $[a, b]$. ε désignant l'un des trois signes affectant x, l'un de ces signes étant, comme le symbole $\emptyset$, l'absence de signe, un intervalle $[\alpha\varepsilon, \beta\varepsilon']$ est considéré comme la limite d'un intervalle $[x, x']$ dont les extrémités x, x' tendent respectivement vers $\alpha\varepsilon$, $\beta\varepsilon'$; et si, par exemple, $\varepsilon = \emptyset$, le point x est considéré comme fixe en α. L'oscillation $\omega[\alpha\varepsilon, \beta\varepsilon']$ de $f(x)$ sur un « segment généralisé » $[\alpha\varepsilon, \beta\varepsilon']$ est aussi la limite de $\omega[x, x']$ dans cette opération, et l'on obtient une expression de la forme

$$V_n[a, b] = \sum_{i=1}^{n} \omega[x_{i-1}\varepsilon_{i-1}, x_i\varepsilon_i],$$

où $x_0\varepsilon_0 = a$, $x_n\varepsilon_n = b$, pour la variation d'ordre n.

Cette variation est une fonction sous-additive d'intervalle sur $[a, b]$, et l'additivité stricte caractérise la monotonie par n intervalles de $f(x)$ sur $[a, b]$.

On étudie également la suite des $V_n[a, b]$ d'indices n consécutifs, et l'on montre que ce genre de monotonie de $f(x)$ est également caractérisé par la constance de cette suite à partir du rang n.

Cette notion de variation d'ordre n s'étend aux segments généralisés et à un point, ainsi que certaines de ses propriétés.

Il est naturel de former le quotient de $V_n[a, b]$ par n, qu'on peut appeler l'oscillation moyenne d'ordre n, ainsi que sa limite, qui existe, lorsque n augmente indéfiniment, que nous nommons l'oscillation moyenne. Les fonctions à oscillation moyenne nulle généralisent les fonctions à variation bornée, sont intégrables (R) sur $[a, b]$, et leur famille se conserve par les opérations rationnelles, ainsi que par l'élévation à toute puissance positive.

Les premiers paragraphes sont consacrés à des généralités de caractère classique, dont le rappel, avec quelques observations qui m'ont semblé intéressantes, constitue une introduction au corps même du sujet.

CHAPITRE I.

Généralités sur les limites et l'oscillation.

1. Nous aurons affaire à des ensembles $E(\delta)$ de valeurs numériques réelles y, bornés dans leur ensemble, et définis pour les sous-intervalles δ d'un intervalle D. Soit $\delta_0 \subset \overline{D}$. Nous considérons les δ qui tendent vers δ_0, c'est-à-dire tels que leurs extrémités tendent vers celles de δ_0. Un voisinage $\nu(\delta_0)$ de δ_0 est tout ensemble d'intervalles δ dont les deux bornes constituent deux voisinages des bornes correspondantes de δ_0. On peut être conduit à n'utiliser que des demi-voisinages de celles-ci (voisinage d'un côté déterminé), ce qui restreint la famille des δ dont on considère le passage à la limite vers δ_0.

Un point y est une valeur d'adhérence ([1]) de $E(\delta)$ quand δ tend vers δ_0 si, à tout $\varepsilon > 0$ et à tout $\nu(\delta_0)$, correspond un δ de $\nu(\delta_0)$ tel que

$$(y - \varepsilon, y + \varepsilon) \cap E(\delta) \neq \emptyset. \tag{1}$$

L'ensemble e de ces points d'adhérence y est l'ensemble d'adhérence de $E(\delta)$ lorsque δ tend vers δ_0 sur D.

([1]) y est valeur d'accumulation si elle n'appartient pas à $E(\delta)$ dès que $\nu(\delta_0)$ est assez petit.

On peut définir e autrement. Soit F un ensemble de points de la droite R_y des y. A chaque ε positif, nous lui associons un voisinage de Cantor-Minkowski

$$\mathcal{M}(F;\varepsilon) = \bigcup_{y\in F} (y-\varepsilon, y+\varepsilon).$$

Nous dirons que F est un « contenant limite » de $E(\delta)$ lorsque δ tend vers δ_0 sur D si, à tout $\varepsilon > 0$, correspond un voisinage $v(\delta_0; F; \varepsilon)$ de δ_0 tel que

$$(2) \qquad \delta \in v(\delta_0; F; \varepsilon) \quad \Rightarrow \quad E(\delta) \subset \mathcal{M}(F; \varepsilon).$$

Il est clair que la fermeture $\overline{F}$ de F est également un contenant limite, et réciproquement, car $\mathcal{M}\left(\overline{F}; \frac{\varepsilon}{2}\right) \subset \mathcal{M}(F;\varepsilon)$. On peut donc admettre que les contenants limites désignés par F sont fermés, ce que nous ferons dorénavant.

e est l'intersection des contenants limites fermés de $E(\delta)$.

En effet, si e n'appartenait pas à cette intersection f, qui est fermée, il existerait un point d'adhérence y_1 extérieur à un certain F_1. Sa distance l à F_1 est positive. Alors, quel que soit $\varepsilon < \frac{l}{2}$, l'inclusion

$$E(\delta) \subset \mathcal{M}(F_1; \varepsilon) \qquad \text{pour} \quad \delta \in v(\delta_0; F_1; \varepsilon)$$

contredit (1), puisque

$$(y_1 - \varepsilon, y_1 + \varepsilon) \cap \mathcal{M}(F_1; \varepsilon) = \emptyset.$$

D'autre part, si $f \not\subset e$, soit z un point de $f \cap e^c$, où e^c représente le complémentaire de e relativement à R_y. Ceci signifie d'abord qu'il existe deux voisinages $(z-\varepsilon_1, z+\varepsilon_1)$ et $v_1(\delta_0)$ tels que

$$(z-\varepsilon_1, z+\varepsilon_1) \cap E(\delta) = \emptyset \quad \text{pour tout } \delta \in v_1(\delta_0).$$

En outre, tout contenant limite F contient z, donc, quels que soient $\varepsilon < \varepsilon_1$ et $\delta \in v_1(\delta_0) \cap v(\delta_0; F; \varepsilon)$, on a

$$E(\delta) = \mathcal{M}(F;\varepsilon) \cap E(\delta) = \mathcal{M}(F-z;\varepsilon) \cap E(\delta),$$

donc $F - z$ est également un contenant limite, contrairement à l'inclusion $z \in f$. Cette démonstration, volontairement sans rigueur, met en évidence la raison profonde du résultat. On peut en effet objecter que $F - z$ n'est pas nécessairement fermé; mais il suffit, dans le raisonnement, de faire $\varepsilon < \frac{\varepsilon_1}{2}$ et de remplacer $F - z$ par $F - F \cap (z-\varepsilon, z+\varepsilon)$, dont la fermeture ne contient pas z.

2. Un cas particulier essentiel pour ce qui suit est celui où l'inclusion $\delta \subset \delta_1$ entraîne $E(\delta) \subset E(\delta_1)$, et où les δ tendent vers δ_0 de manière que δ_0 soit ou l'intersection de tous ces δ, ou leur union.

Dans le premier cas, si a, b sont les bornes inférieure et supérieure de δ_0, les demi-voisinages considérés sont les intervalles mixtes $(a-\varepsilon, a]$ et $[b, b+\varepsilon)$, que nous appelons les voisinages de $a-$ et de $b+$. Alors, chaque δ de $v(\delta_0)$, d'extrémités distinctes de a, b, contient tous les δ' d'un certain voisinage $v_\delta(\delta_0)$. Chaque $E(\delta)$ est lui-même un contenant limite, avec ([2]), quel que soit $\varepsilon > 0$,

$$v(\delta_0; \overline{E(\delta)}; \varepsilon) = v_\delta(\delta_0)$$

et

$$e = \bigcap_{\{\delta\}} \overline{E(\delta)}, \tag{3}$$

où $\{\delta\}$ est l'ensemble des δ considérés dans cette hypothèse. Nous venons de voir, en effet, que e appartient au second membre de (3); d'autre part, F désignant un contenant limite quelconque, (2) entraîne

$$\overline{E(\delta)} \subset \mathfrak{M}(F; 2\varepsilon) \qquad \text{pour} \quad \delta \in v(\delta_0; F; \varepsilon),$$

donc le second membre de (3) appartient à $\mathfrak{M}(F; 2\varepsilon)$, quel que soit $\varepsilon > 0$, donc à F lui-même, puisque celui-ci est fermé, donc à l'intersection e de tous les F.

Dans le second cas, δ_0 étant toujours l'intervalle général (a, b), les demi-voisinages de a, b considérés sont les voisinages de $a+$ et de $b-$. Chaque intervalle δ de $v(\delta_0)$ est contenu dans tous les δ' d'un certain voisinage $v_\delta(\delta_0)$, de sorte que $E(\delta) \subset E(\delta')$. (3) est alors remplacé par

$$e = \overline{\bigcup_{\{\delta\}}} E(\delta). \tag{4}$$

En effet, toutes les valeurs d'adhérence y, donc e lui-même, appartiennent au second membre de (4). D'autre part, tout contenant limite F est tel que chaque $\mathfrak{M}(F; \varepsilon)$ contienne les $E(\delta)$ relatifs aux δ d'un voisinage $v(\delta_0; F; \varepsilon)$, donc aussi tous les $E(\delta)$ d'après l'hypothèse. Par suite, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathfrak{M}(F; \varepsilon) \supset \bigcup_{\{\delta\}} E(\delta),$$

donc

$$\overline{\mathfrak{M}(F; \varepsilon)} \supset \overline{\bigcup_{\{\delta\}}} F(\delta).$$

([2]) Rappelons que nous n'utilisons que des contenants limites fermés.

F étant fermé, il en résulte l'inclusion

$$F \supset \overline{\bigcup_{\{\delta\}} E(\delta)},$$

donc enfin $e \supset \overline{\bigcup_{\{\delta\}}} E(\delta)$, ce qui démontre (4).

Remarque. — Dans les deux cas, les bornes de $E(\delta)$ tendent vers les bornes de même nom de e quand δ tend vers δ_0. Par exemple, dans le premier cas, $\sup E(\delta) = \sup \overline{E(\delta)}$ tend vers $\lambda = \inf \{\sup \overline{E(\delta)}\}$, et $\lambda \in e$ puisque c'est une valeur d'adhérence; d'autre part, (3) entraîne $\sup e \leqq \sup \overline{E(\delta)}$, donc $\sup e \leqq \lambda$, ce qui établit la proposition pour la borne supérieure. Dans la deuxième hypothèse, $\sup E(\delta)$ tend vers $\lambda = \sup \{\sup E(\delta)\}$, qui appartient encore à e, tandis que (4) donne encore $\sup e \leqq \lambda$. Le résultat s'étend comme d'habitude aux bornes inférieures.

3. d et δ étant deux intervalles généraux de R_x, nous convenons d'écrire $\delta \subset d-$ l'inclusion stricte dans laquelle d et δ n'ont pas de borne commune. $\delta \subset d-$ équivaut à $\bar{\delta} \subset d-$ et à $\delta \subset \bar{d}-$. a et b étant les bornes inférieure et supérieure de d, on peut représenter $d-$ par $[a+, b-]$, et $\delta \subset [a+, b-]$ signifie l'inclusion de δ dans l'ouvert (a, b). $[a+, b-]$ aura également la signification d'un passage à la limite où les bornes de δ, inclus dans $d-$, tendent vers celles de d. Dans le même ordre d'idées, on peut considérer $[a, b-]$ comme la limite des intervalles mixtes $[a, \beta)$ dont l'extrémité β tend vers b à gauche; on définit $[a+, b]$ de manière analogue. Statiquement, $[a+, b-]$ représente l'ouvert (a, b).

Avec des intervalles δ contenant d, on définit de manière semblable $d+$, et, par exemple, $[a-, b+]$, $[a, b+]$, $[a-, b]$. Enfin, avec des δ dont une seule borne appartient à (a, b), on définit $[a+, b+]$ et $[a-, b-]$.

Il sera commode d'introduire un symbole ε représentant le signe $+$, ou le signe $-$, ou l'absence de signe ($\varepsilon = \emptyset$), de sorte que chaque point x de la droite fournit trois points $x\varepsilon$, considérés dans l'ordre de croissance $x-$, x, $x+$. $x\varepsilon = x'\varepsilon'$ signifie $x = x'$, $\varepsilon = \varepsilon'$, et la relation d'ordre stricte $x\varepsilon < x'\varepsilon'$ exprime, soit $x < x'$, soit $x = x'$ avec $\varepsilon < \varepsilon'$, qui signifie que ε est avant ε' dans la suite $-$, $\emptyset$, $+$. Les intervalles du type $[x\varepsilon, x'\varepsilon']$ seront appelés « segments généralisés »; par exemple, $[a\varepsilon_0, b\varepsilon_1]$ est l'ensemble des $x\varepsilon$ tels que $a\varepsilon_0 \leqq x\varepsilon \leqq b\varepsilon_1$. Pour chacun de ces $x\varepsilon$, on a

$$[a\varepsilon_0, b\varepsilon_1] = [a\varepsilon_0, x\varepsilon] \cup [x\varepsilon, b\varepsilon_1].$$

Un segment δ_ε est de même un intervalle du type $[x-, x'+]$ si $\varepsilon = +$, $[x+, x'-]$ si $\varepsilon = -$, $[x, x']$ si $\varepsilon = \emptyset$, en supposant $x < x'$.

$x = x'$ fournit des segments point : $[x-, x+]$ est ainsi la limite d'un intervalle ouvert contenant x et tendant vers x; $[x+, x+]$ est la limite d'un ouvert situé à droite de x et tendant ver s x.

4. Ces notations naturelles étant précisées, considérons une fonction numérique réelle $y = f(x)$, définie et bornée sur un segment $[a, b]$ de R_x. Pour tout intervalle $\delta \subset [a, b]$, $f(\delta)$ est l'application qu'elle en réalise dans R_y.

Lorsque δ tend vers $[a+, b-]$, $f(\delta)$ est un ensemble variable auquel s'appliquent les considérations des deux premiers paragraphes, et dont la limite a la forme (4); nous la désignons par $f[a+, b-]$, de sorte que

$$f[a+, b-] = \overline{\bigcup_{\delta \subset [a+, b-]}} f(\delta) = \overline{\bigcup_{\delta \subset (a,b)}} f(\delta) = \overline{f(a, b)}, \tag{5}$$

où (a, b) est ouvert.

Nous écrivons de même

$$\left\{\begin{aligned} f[a, b-] &= \overline{\bigcup_{\delta \subset [a,b)}} f(\delta) = \overline{f[a, b)}, \\ f[a+, b] &= \overline{\bigcup_{\delta \subset (a,b]}} f(\delta) = \overline{f(a, b]}, \end{aligned}\right. \tag{6}$$

où l'emploi des crochets et parenthèses s'explique naturellement.

Avec des δ contenant d et tendant vers lui, la limite de $f(\delta)$ relève de (3). Si $f(x)$ est définie et uniforme au-delà de $[a, b]$ autant qu'il est nécessaire, on a ainsi

$$f[a-, b+] = \bigcap_{\delta \supset [a-, b+]} \overline{f(\delta)}, \tag{7}$$

et

$$\left\{\begin{aligned} f[a, b+] &= \bigcap_{\delta \supset [a, b+]} \overline{f(\delta)} = \bigcap_{\beta > b} \overline{f[a, \beta]} = \bigcap_{\beta > b} \overline{f[a, \beta)}, \\ f[a-, b] &= \bigcap_{\delta \supset [a-, b]} \overline{f(\delta)} = \bigcap_{\alpha < a} \overline{f[\alpha, b]} = \bigcap_{\alpha < a} \overline{f(\alpha, b]}. \end{aligned}\right. \tag{8}$$

Dans ces formules, a et b peuvent être confondus, ce qui nous conduit, pour un point x intérieur à l'intervalle $[a, b]$ où $f(x)$ est défini, aux ensembles

$$f[x-, x+] = \bigcap_{\alpha < x < \beta} \overline{f(\alpha, \beta)} = \bigcap_{\alpha < x < \beta} \overline{f[\alpha, \beta]}, \tag{9}$$

$$\left\{\begin{aligned} f[x, x+] &= \bigcap_{\beta > x} \overline{f[x, \beta)} = \bigcap_{\beta > x} \overline{f[x, \beta]}, \\ f[x-, x] &= \bigcap_{\alpha < x} \overline{f(\alpha, x]} = \bigcap_{\alpha < x} \overline{f[\alpha, x]}; \end{aligned}\right. \tag{10}$$

$$(11)\quad \begin{cases} f(x+) = f[x+, x+] = f(x, x+] = \bigcap\limits_{\beta>x} \overline{f(x, \beta)} = \bigcap\limits_{\beta>x} \overline{f(x, \beta]}, \\ f(x-) = f[x-, x-] = f[x-, x) = \bigcap\limits_{\alpha<x} \overline{f(\alpha, x)} = \bigcap\limits_{\alpha<x} \overline{f[\alpha, x)}. \end{cases}$$

(10) et (11) peuvent naturellement s'appliquer aux bornes a, b.

5. Pour tout ensemble $\delta \subset [a, b]$, nous posons

$$(12)\qquad \mathrm{M}(\delta) = \sup f(\delta), \qquad m(\delta) = \inf f(\delta), \qquad \omega(\delta) = \operatorname{diam} f(\delta) = \mathrm{M}(\delta) - m(\delta).$$

Ces trois quantités sont les mêmes pour $\overline{f(\delta)}$. Ces définitions fournissent *ipso facto* la signification des quantités $\mathrm{M}(d\varepsilon)$, $\mathrm{M}[a, b-]$, $\mathrm{M}[a+, b]$, $\mathrm{M}[x-, x+]$, $\mathrm{M}[x, x+]$, $\mathrm{M}[x+]$, ... et des quantités analogues avec m et l'oscillation ω. C'est ainsi que

$$\mathrm{M}(d+) = \sup f(d+) = \sup \bigcap_{\delta \supset d+} \overline{f(\delta)},$$

$$m(d-) = \inf f(d-) = \inf \overline{\bigcup_{\delta \subset d-} f(\delta)}.$$

La remarque qui clôt le paragraphe 2 conduit au

THÉORÈME. — *Lorsque* δ *tend vers* $d\pm$, *les quantités* $\mathrm{M}(\delta)$, $m(\delta)$ *et* $\omega(\delta)$ *tendent vers* $\mathrm{M}(d\pm)$, $m(d\pm)$, $\omega(d\pm)$ *respectivement.*

Plus généralement, $f(x)$ étant définie au besoin hors de $[a, b]$, on a encore, par exemple, avec $\varepsilon' \neq \emptyset$,

$$\mathrm{M}[a\varepsilon, b\varepsilon'] = \lim_{x \to b\varepsilon'} \mathrm{M}[a\varepsilon, x],$$
$$m[a\varepsilon, b\varepsilon'] = \lim_{x \to b\varepsilon'} m[a\varepsilon, x],$$
$$\omega\,[a\varepsilon, b\varepsilon'] = \lim_{x \to b\varepsilon'} \omega\,[a\varepsilon, x];$$

au second membre, on peut remplacer $[a\varepsilon, x]$ par l'intervalle mixte $[a\varepsilon, x)$.

Ces résultats subsistent avec un segment généralisé variable $[a\varepsilon, x\varepsilon'']$, où $x\varepsilon''$ tend vers $b\varepsilon'$, $\varepsilon' \neq \emptyset$, c'est-à-dire que x tend vers $b\varepsilon'$, si x diffère de b, tandis que $\varepsilon'' = \varepsilon'$ pour $x = b$; ainsi, ce théorème est encore valable avec un segment variable $\delta+$ ou $\delta-$ tendant vers $d\pm$.

Enfin, d'une manière encore plus générale, on a le

THÉORÈME I. — $\mathrm{M}(\delta)$, $m(\delta)$ *et* $\omega(\delta)$ *tendent respectivement vers* $\mathrm{M}(d)$, $m(d)$, $\omega(d)$, *lorsque* $\delta = [x\varepsilon_1, x'\varepsilon'_1]$ *tend vers* $d = [a\varepsilon, b\varepsilon']$, *si* $a < b$.

Lorsqu'un symbole tel que ε est $\emptyset$, on suppose que l'extrémité correspondante $x\varepsilon_1 = a$.

Il suffit de démontrer ce théorème lorsque $\varepsilon = \varepsilon' \neq \emptyset$. Pour cela, on observe que chacune des quantités M, m, ω, satisfait une double inégalité de la forme

$$\begin{aligned} &M[a\varepsilon, x'\varepsilon'_1] \lesseqgtr M[x\varepsilon_1, x'\varepsilon'_1] \lesseqgtr M[x\varepsilon_1, b\varepsilon], \\ &m[a\varepsilon, x'\varepsilon'_1] \gtreqless m[x\varepsilon_1, x'\varepsilon'_1] \gtreqless m[x\varepsilon_1, b\varepsilon], \\ &\omega\,[a\varepsilon, x'\varepsilon'_1] \lesseqgtr \omega\,[x\varepsilon_1, x'\varepsilon'_1] \lesseqgtr \omega\,[x\varepsilon_1, b\varepsilon], \end{aligned}$$

où les membres extrêmes de chaque ligne tendent respectivement vers $M(d)$, $m(d)$, $\omega(d)$, d'après les limites précédentes.

Remarque. — Ceci n'est plus valable lorsque $a\varepsilon = b\varepsilon'$, $\varepsilon \neq \emptyset$. Par exemple, si $\{\delta_n\}$, $n = 1, 2, \dots$ est une suite d'intervalles de (a, b) tendant vers $a+$, c'est-à-dire vers $[a+, a+]$, l'ensemble variable $f(\delta_n)$ est inclus dans tout voisinage de Minkowski $\mathfrak{M}(f(a+); \varepsilon)$ dès que n est assez grand, et l'on peut seulement affirmer que

$$\varliminf_{n\to\infty} m(\delta_n) \in f(a+), \qquad \varlimsup_{n\to\infty} M(\delta_n) \in f(a+),$$

ce qui donne

$$\varlimsup_{n\to\infty} \omega(\delta_n) \leqq \operatorname{diam} f(a+) = \omega(a+).$$

6. La fonction d'intervalle $\omega[\alpha, \beta]$ est définie sur $[a, b]$ et est sous-additive. Les fonctions $f(x)$ pour lesquelles elle est additive sont les fonctions monotones. D'une manière précise, on a le

Théorème II. — *Les fonctions monotones sur le segment $[a, b]$ sont les seules pour lesquelles $\omega[\alpha, \beta]$ est une fonction additive d'intervalle sur $[a, b]$, et, pour qu'il en soit ainsi, il suffit de l'additivité restreinte*

$$\omega[a, b] = \omega[a, c] + \omega[c, b] \tag{13}$$

pour tout $c \in [a, b]$.

En voici une démonstration. Soit $a < c < b$, et posons

$$M_1 = M[a, c], \qquad m_1 = m[a, c], \qquad M_2 = M[c, b], \qquad m_2 = m[c, b].$$

On a

$$M = M[a, b] = \sup\{M_1, M_2\}, \qquad m = m[a, b] = \inf\{m_1, m_2\}.$$

Si c est tel que $M_1 = M$, $m_1 = m$, (13) suppose $M_2 = m_2$, donc $f(x) = f(b)$ sur $[c, b]$. De même, $M - M_2 = m - m_2 = 0$ exige $f(x) = f(a)$ sur $[a, c]$. Soit donc α la borne supérieure des nombres c tels que $f(x) =$ Cte sur $[a, c]$, et β la borne inférieure des nombres c tels que $f(x) =$ Cte sur $[c, b]$.

Si $\beta < \alpha$, $f(x) =$ Cte sur $[a, b]$. Si $\alpha = \beta$, on a

$$\omega[a, \alpha] = |f(\alpha) - f(a)|, \qquad \omega[\alpha, b] = |f(b) - f(\alpha)|,$$

tandis que

$$\omega[a, b] = \sup\{|f(\alpha) - f(a)|, |f(b) - f(\alpha)|, |f(b) - f(a)|\}.$$

(13) entraîne donc $f(\alpha) = f(a)$, ou $f(\beta) = f(b)$, ou

$$|f(b) - f(a)| = |f(b) - f(\alpha)| + |f(\alpha) - f(a)|,$$

ce qui suppose toujours $f(a) \lesseqgtr f(\alpha) \lesseqgtr f(b)$, donc la monotonie.

Supposons, en dernier lieu, $\alpha < \beta$ et $\alpha < c < \beta$. Ces inégalités strictes ne laissent place qu'à l'une ou l'autre des circonstances $M - M_2 = m - m_1 = 0$ ou $M - M_1 = m - m_2 = 0$. Par exemple, la première entraîne, d'après (13), $M_1 = m_2$, donc, pour tout couple de nombres x, x' vérifiant $a \leqq x \leqq c \leqq x' \leqq b$,

$$f(x) \leqq M_1 = m_2 \leqq f(x').$$

En particulier, $f(x)$ est croissante sur $[\alpha, \beta]$, et l'on a également $f(a) \leqq f(c) \leqq f(b)$. Les signes de $f(\alpha) - f(a)$ et $f(b) - f(\beta)$ restent douteux. Si $f(\alpha) \neq f(a)$, on peut raisonner sur α comme sur c avec la même alternative, et celle-ci exige le même choix que pour c afin d'éviter une contradiction. De même pour β. Ainsi la croissance est établie sur $[a, b]$ dans la première circonstance. L'autre hypothèse entraîne la décroissance.

La monotonie de $f(x)$ assurant l'additivité de $\omega[\alpha, \beta]$, le théorème est démontré.

7. En décomposant $[a, b]$ en $[a, c\varepsilon] \cup [c\varepsilon, b]$, avec $\varepsilon = +$ ou $-$, la sous-additivité

$$\omega[a, b] \leqq \omega[a, c\varepsilon] + \omega[c\varepsilon, b]$$

subsiste, et l'on a encore

$$M[a, b] = \sup\{M[a, c\varepsilon], M[c\varepsilon, b]\},$$
$$m[a, b] = \inf\{m[a, c\varepsilon], m[c\varepsilon, b]\}.$$

A partir de là, le raisonnement démontrant le théorème II reste valable, mais conduit à un résultat légèrement différent, dont l'énoncé est :

THÉORÈME III. — *Les fonctions $f(x)$ telles qu'on ait, avec un certain $\varepsilon \neq \emptyset$,*

(14) $$\omega[a, b] = \omega[a, c\varepsilon] + \omega[c\varepsilon, b]$$

pour tous les $c\varepsilon$ de $[a, b]$, sont les fonctions monotones sur $[a, b]$, à deux valeurs près au plus.

Le raisonnement fait au paragraphe 6 subsiste jusqu'à la formation de α et β, et $f(x)$ est constante si $\beta < \alpha$. Si [3] $\alpha = \beta$, $f(x) = f(a)$ sur $[a, \alpha -]$,

---

[3] On suppose $a < \alpha < b$.

et $f(x)=f(b)$ sur $[\alpha+, b]$. Par exemple, avec $\varepsilon=+$, $\omega[\alpha+, b]=0$, tandis que $\omega[a, \alpha+]=\omega[a, b]$, quel que soit $f(\alpha)$. $f(x)$ n'est donc monotone qu'après modification de $f(\alpha)$ si cette valeur n'appartient pas à $[f(a), f(b)]$, ce qui se traduit par un « saut extérieur » de $f(x)$ en α.

Soit $\alpha<\beta$ et $\alpha<c<\beta$. Comme au paragraphe 6, (14) entraîne la monotonie de $f(x)$ sur $[\alpha, \beta]$, et, si elle y est croissante, on a

$$f(a)\leqq f(\alpha+)\leqq f(c)\leqq f(\beta-)\leqq f(b).$$

On voit de même que $f(x)$ est croissante sur $[a, b]$, aux valeurs $f(\alpha)$ et $f(\beta)$ près, qui vérifient cependant les inégalités

$$f(\alpha)\leqq f(\alpha+)\leqq f(\beta-)\leqq f(\beta).$$

Cela suffit pour que (14) ait lieu partout. Soit, en effet,

$$\lambda=\inf\{f(a), f(\alpha)\}, \qquad \mu=\sup\{f(b), f(\beta)\};$$

il vient $\omega[a, b]=\mu-\lambda$, et la vérification de (14) est immédiate avec $c<\alpha$ ou $c>\beta$; c'est également immédiat sur (α, β), car, quel que soit le signe ε, on a alors

$$\omega[a, c\varepsilon]=f(c\varepsilon)-\lambda \qquad \text{et} \qquad \omega[c\varepsilon, b]=\mu-f(c\varepsilon).$$

En α et β, on distingue les deux valeurs de ε, ce qui donne

$$\begin{array}{ll}
\omega[a, \alpha+]=f(\alpha+)-\lambda, & \omega[\alpha+, b]=\mu-f(\alpha+),\\
\omega[a, \alpha-]=0, & \omega[\alpha-, b]=\mu-\lambda,\\
\omega[a, \beta+]=\mu-\lambda, & \omega[\beta+, b]=0,\\
\omega[a, \beta-]=f(\beta-)-\lambda, & \omega[\beta-, b]=\mu-f(\beta-),
\end{array}$$

et (14) est satisfait. Par contre, (13) n'est pas vrai en $c=\alpha$ si $f(\alpha)<f(a)$, et en $c=\beta$ si $f(\beta)<f(b)$, c'est-à-dire dans le cas d'un saut extérieur. Bien entendu, la conclusion subsiste pour la décroissance.

Enfin, la discussion met en évidence la conservation de l'hypothèse (14) lorsqu'on remplace ε par son opposé, même en α et β, et l'on peut énoncer le

Corollaire. — *L'additivité restreinte* (14), *vérifiée pour tous les* $c+$, *l'est aussi pour tous les* $c-$, *mais* (13) *peut présenter deux points exceptionnels* α, β *au plus, qui sont tels cependant que* $f(x)$ *soit constante sur* $[a, \alpha)$ *et* $(\beta, b]$, *en supposant* $\alpha<\beta$.

8. La croissance d'une fonction $f(x)$ sur un segment $[a, b]$ assure l'uniformité des valeurs $f(x\varepsilon)$, et la croissance subsiste sur l'ensemble des $x\varepsilon$, en ce sens que $a\leqq x\varepsilon\leqq x'\varepsilon'\leqq b$ entraînent $f(x\varepsilon)\leqq f(x'\varepsilon')$.

Réciproquement, une fonction $f(x)$ est dite croissante sur un segment généralisé $[a\varepsilon_0, b\varepsilon_1]$ si les inégalités $a\varepsilon_0\leqq x\varepsilon\leqq x'\varepsilon'\leqq b\varepsilon_1$ entraînent $\sup f(x\varepsilon)\leqq\inf f(x'\varepsilon')$. Avec $x\varepsilon=x'\varepsilon'$, on voit que $f(x\varepsilon)$ est unique; $f(x)$ n'a que des discontinuités de première espèce, et ceci vaut aussi en $a\varepsilon_0$ et $b\varepsilon_1$, même si $\varepsilon_0 = -$ et si $\varepsilon_1 = +$. $f(x)$ est, dans tous les cas, une fonction croissante de x sur (a, b).

Les raisonnements des deux derniers paragraphes subsistent et permettent d'étendre les énoncés des théorèmes II et III aux segments généralisés sous les formes :

Théorème II'. — *Les fonctions monotones sur* $[a\varepsilon_0, b\varepsilon_1]$ *sont caractérisées par l'additivité*

$$\omega[a\varepsilon_0, b\varepsilon_1] = \omega[a\varepsilon_0, c] + \omega[c, b\varepsilon_1]$$

pour tout point généralisé c *de* $[a\varepsilon_0, b\varepsilon_1]$.

Avec $c = a\varepsilon_0$ ou $c = b\varepsilon_1$, on voit en particulier que $f(a\varepsilon_0)$ et $f(b\varepsilon_1)$ sont nécessairement des points.

Théorème III'. — *Les fonctions* $f(x)$ *telles que, avec un* $\varepsilon \neq \emptyset$ *donné, on ait*

$$\omega[a\varepsilon_0, b\varepsilon_1] = \omega[a\varepsilon_0, c\varepsilon] + \omega[c\varepsilon, b\varepsilon_1]$$

pour tous les $c\varepsilon$ *de* $[a\varepsilon_0, b\varepsilon_1]$, *sont les fonctions monotones sur* $[a\varepsilon_0, b\varepsilon_1]$, *à deux valeurs près au plus, limitant un intervalle hors duquel elle est constante.*

CHAPITRE II.

Oscillations et variations d'ordre n.

9. Nous considérons maintenant l'ensemble des partitions du segment $[a, b]$ en n segments $\delta_i = [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, avec $x_0 = a$, $x_n = b$. Nous désignons par

$$\Delta_n[a, b] = [a, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, b]$$

une telle subdivision, et par

$$(1) \qquad \omega(\Delta_n[a, b]) = \sum_{i=1}^{n} \omega[x_{i-1}, x_i]$$

la somme des oscillations de la fonction étudiée $f(x)$ sur ces δ_i. C'est une « oscillation d'ordre n » de $f(x)$ sur $[a, b]$.

n étant fixé, nous appelons « variation d'ordre n » de $f(x)$ sur $[a, b]$ la quantité

$$(2) \qquad V_n[a, b] = \sup\{\omega(\Delta_n[a, b])\}$$

relative à l'ensemble de tous les Δ_n. Cette borne supérieure demeure la même si l'on permet l'égalité de plusieurs x_i d'indices consécutifs, ce qui consiste à utiliser l'ensemble de toutes les partitions d'ordre inférieur ou égal à n.

Plus généralement, on peut former les partitions en n segments généralisés de la forme $[x_{i-1}\,\varepsilon_{i-1},\, x_i\,\varepsilon_i]$, que nous notons

$$\Delta_n^{\varepsilon}[a,\, b] = [a,\, x_1\,\varepsilon_1,\, x_2\,\varepsilon_2,\, \ldots,\, x_{n-1}\,\varepsilon_{n-1},\, b],$$

et qui fournissent les oscillations générales d'ordre n

$$(3)\qquad \omega(\Delta_n^{\varepsilon}[a,\, b]) = \sum_{i=1}^{n} \omega[x_{i-1}\,\varepsilon_{i-1},\, x_i\,\varepsilon_i],$$

où $x_0\,\varepsilon_0 = a$, $x_n\,\varepsilon_n = b$. Par exemple, l'un des intervalles peut être $[a,\, a+]$, avec $x_{k-1}\,\varepsilon_{k-1} = a$, $x_k\,\varepsilon_k = a+$, de sorte que $x_i\,\varepsilon_i = a$ pour $i \leqq k-1$.

Nous allons voir que cette extension des partitions ne modifie pas la borne supérieure des oscillations d'ordre n, et permet, par contre, de l'atteindre. La borne supérieure V_n^{ε} des oscillations (3) formées avec tous les choix possibles des x_i et des ε_i est au moins égale à (2), soit

$$(4)\qquad V_n[a,\, b] \leqq V_n^{\varepsilon}[a,\, b],$$

et l'on peut extraire de l'ensemble des $\Delta_n^{\varepsilon}[a,\, b]$ une suite

$$\Delta_{n,\,p}^{\varepsilon}[a,\, b] = [a,\, x_{1,\,p}\,\varepsilon_{1,\,p},\, \ldots,\, x_{n-1,\,p}\,\varepsilon_{n-1,\,p},\, b] \qquad (p = 1,\, 2,\, \ldots)$$

telle que $\omega(\Delta_{n,p}^{\varepsilon}[a,\, b])$ tende vers $V_n^{\varepsilon}[a,\, b]$ lorsque p tend vers l'infini. On peut extraire de cette suite une suite partielle dans laquelle chaque $\varepsilon_{i,\,p}$ soit indépendant de p, et $x_{i,\,p}$, lorsqu'il varie, tende de manière monotone vers une limite $c_i \in [a,\, b]$, donc d'un côté déterminé de c_i, que nous notons $c_i\,\varepsilon'_i$. Le théorème I nous apprend que

$$\omega[x_{i-1,\,p}\,\varepsilon_{i-1,\,p},\, x_{i,\,p}\,\varepsilon_{i,\,p}] = \omega[x_{i-1,\,p}\,\varepsilon_{i-1},\, x_{i,\,p}\,\varepsilon_i]$$

tend vers $\omega[c_{i-1}\,\varepsilon'_{i-1},\, c_i\,\varepsilon'_i]$ lorsque $c_{i-1} < c_i$. Ceci subsiste si, par exemple, $x_{i,\,p}$ reste fixe en c_i, à condition de faire $\varepsilon_i = \varepsilon'_i$.

Plusieurs limites c_i d'indices consécutifs peuvent coïncider. Si $c_{i-1} = c_i$, avec $\varepsilon'_{i-1} = -$, $\varepsilon'_i = +$, $\omega[x_{i-1,\,p}\,\varepsilon_{i-1},\, x_{i,\,p}\,\varepsilon_i]$ tend vers $\omega[c_{i-1}-,\, c_i+]$ comme précédemment. Par contre, lorsque $c_{i-1}\,\varepsilon'_{i-1} = c_i\,\varepsilon'_i$, on sait que $\omega[x_{i-1,\,p}\,\varepsilon_{i-1},\, x_{i,p}\,\varepsilon_i]$ n'a pas nécessairement une limite, mais sa limite supérieure est majorée par le diamètre de $f(c_i\,\varepsilon'_i)$, qui est l'oscillation $\omega[c_{i-1}\,\varepsilon'_{i-1},\, c_i\,\varepsilon'_i]$. D'une manière générale, admettons que $x_{k,\,p}, x_{k+1,\,p}, \ldots, x_{h,\,p}$ tendent vers $c_i\,\varepsilon'_i$. (3) contient la somme

$$(5)\qquad \omega[x_{k,\,p}\,\varepsilon_k,\, x_{k+1,\,p}\,\varepsilon_{k+1}] + \ldots + \omega[x_{h-1,\,p}\,\varepsilon_{h-1},\, x_{h,\,p}\,\varepsilon_h],$$

dont la limite supérieure vaut au plus $(h-k)\,\omega[c_{i-1}\,\varepsilon'_{i-1},\, c_i\,\varepsilon'_i]$. Or, on peut former deux suites de nombres x'_q, x''_q tendant vers $c_i\,\varepsilon'_i = c_{i-1}\,\varepsilon'_{i-1}$ lorsque q augmente indéfiniment, et telles que $f(x'_q)$ tende vers [1] $M[c_i\,\varepsilon'_i]$, tandis

[1] *Cf.* les notations du paragraphe 5. On suppose, par commodité, que les indices q de chacune des deux suites sont paires dans l'une, et impaires dans l'autre.

que $f(x''_q)$ tend vers $m[c_i \varepsilon'_i]$; on peut même admettre que leur réunion $x'_1, x''_2, x'_3, x''_4, \ldots$ forme une suite monotone. Si donc on substitue aux points $x_{k,p}, x_{k+1,p}, \ldots, x_{h,p}$ $(h-k+1)$ points $x'_r, x''_{r+1}, x'_{r+2}, \ldots$ de manière que leurs indices $r, r+1, \ldots, r+h-k$, qui sont fonctions de p, augmentent indéfiniment avec lui, (5) est remplacé dans la nouvelle partition par

$$\omega[x'_r, x''_{r+1}] + \omega[x''_{r+1}, x'_{r+2}] + \omega[x'_{r+2}, x''_{r+3}] + \ldots, \tag{6}$$

qui tend effectivement vers $(h-k)\,\omega[c_{i-1}\varepsilon'_{i-1}, c_i\varepsilon_i]$. Et ceci ne modifie pas les limites des deux termes qui encadrent (5),

$$\omega[x_{k-1,p}\varepsilon_{k-1}, x_{k,p}\varepsilon_k] \quad \text{et} \quad \omega[x_{h,p}\varepsilon_h, x_{h+1,p}\varepsilon_{h+1}],$$

puisque les limites $c_{k-1}\varepsilon'_{k-1}$ et $c_{h+1}\varepsilon'_{h+1}$ diffèrent de $c_i\varepsilon'_i$, et l'encadrent. Ainsi, on atteint la limite supérieure des sommes du type (5), et, pour que (3) tende vers $V_n^\varepsilon[a, b]$, il faut qu'il en soit effectivement ainsi pour chaque somme analogue. Si l'on observe enfin que (6), qui fournit une pareille limite, est formé d'éléments d'un $\Delta_n[a, b]$, l'inégalité contraire de (4) s'ensuit, d'où l'égalité, et l'on peut rassembler ce double résultat dans le

THÉORÈME IV. — *La variation d'ordre n de $f(x)$ sur $[a, b]$ est la borne supérieure des oscillations générales $\omega(\Delta_n^\varepsilon[a, b])$, et est l'une d'elles*

$$V_n[a, b] = \sum_{i=1}^{n} \omega[c_{i-1}\varepsilon_{i-1}, c_i\varepsilon_i], \qquad \varepsilon_0 = \varepsilon_n = \emptyset. \tag{7}$$

Ceci vaut naturellement pour un segment généralisé $[a\varepsilon, b\varepsilon']$, avec $\varepsilon_0 = \varepsilon$, $\varepsilon_n = \varepsilon'$.

Si $f(x)$ est continue sur $[a, b]$, $f(x\varepsilon) = f(x)$ en chaque point, et les indices ε_i ne modifient pas les oscillations. On a donc simplement

$$V_n[a, b] = \sup\{\omega(\Delta_n[a, b])\} = \sum_{i=1}^{n} \omega[c_{i-1}, c_i], \tag{8}$$

pour un choix convenable des c_i.

10. Il est aisé d'étendre à $V_n[a, b]$ les propriétés limites énoncées pour $\omega(\delta)$ au théorème I. Tout d'abord, la croissance de $\omega(\delta)$ avec δ entraîne celle de $V_n(\delta)$, pour tout δ de l'intervalle (a, b) considéré. En particulier, $a \leq c < b$ entraîne $V_n[a, c] \leq V_n[a, b-]$, et, lorsque c tend vers $b-$, $V_n[a, c]$ a une limite au plus égale à $V_n[a, b-] = V_n[a, b)$. Démontrons le

THÉORÈME V. — $\lim\limits_{c \to b-} V_n[a, c] = V_n[a, b-]$.

En effet, cette dernière variation est une somme du type (7) avec $c_n \varepsilon_n = b-$. Plusieurs des $c_i \varepsilon_i$ de cette expression peuvent valoir $b-$, et, si k désigne le plus grand des indices i tels que $c_i < b$, on a

$$(9) \qquad V_n[a, b-] = \sum_{i=1}^{k} \omega[c_{i-1}\varepsilon_{i-1}, c_i\varepsilon_i] + \omega[c_k\varepsilon_k, b-] + (n-k-1)\,\omega[b-, b-].$$

On peut former une suite strictement croissante $\{x'_q\}$, $q = 1, 2, \ldots$, tendant vers b, et telle que $f(x'_{2q+1})$ tende vers $M[b-]$, tandis que $f(x'_{2q})$ tend vers $m[b-]$. Dans ces conditions, $\omega[c_k\varepsilon_k, x'_q]$ tend vers $\omega[c_k\varepsilon_k, b-]$ lorsque q augmente indéfiniment, tandis que les $\omega[x'_q, x'_{q+1}]$ tendent vers $\omega[b-, b-]$. Quelque petit que soit $\varepsilon > 0$, une inégalité du type $q > \lambda(\varepsilon)$ permet d'écrire les inégalités simultanées

$$\omega[c_k\varepsilon_k, b-] < \omega[c_k\varepsilon_k, x'_q] + \varepsilon,$$
$$(n-k-1)\,\omega[b-, b-] < \omega[x'_q, x'_{q+1}, \ldots, x'_r] + \varepsilon,$$

où $r - q = n - k - 1$. Il vient alors

$$V_n[a, b-] < \sum_{i=1}^{k} \omega[c_{i-1}\varepsilon_{i-1}, c_i\varepsilon_i] + \omega[c_k\varepsilon_k, x'_q, x'_{q+1}, \ldots, x'_r] + 2\varepsilon.$$

Pour tout $c \in [x'_r, b)$, on a *a fortiori*

$$V_n[a, b-] < \sum_{i=1}^{k} \omega[c_{i-1}\varepsilon_{i-1}, c_i\varepsilon_i] + \omega[c_k\varepsilon_k, x'_q, \ldots, x'_{r-1}, c] + 2\varepsilon$$
$$\leqq V_n[a, c] + 2\varepsilon \leqq \lim_{c \to b-} V_n[a, c] + 2\varepsilon.$$

ε étant arbitraire, l'inégalité

$$\lim_{c \to b-} V_n[a, c] \geqq V_n[a, b-]$$

en résulte, ce qui établit l'égalité annoncée.

11. On a également le

Théorème VI. — $\operatorname*{Lim}_{c \to b+} V_n[a, c] = V_n[a, b+]$.

Il est clair que cette limite existe, et n'est pas inférieure au second membre. D'autre part,

$$V_n[a, c] = \sum_{i=1}^{n} \omega[c_{i-1}\varepsilon_{i-1}, c_i\varepsilon_i],$$

où $c_0\varepsilon_0 = a$, $c_n\varepsilon_n = c > b$. Lorsque c tend vers b, les segments $[c_{i-1}\varepsilon_{i-1}, c_i\varepsilon_i]$ qui demeurent sur la demi-droite $x > b$ fournissent une oscillation dont la limite supérieure est $\omega[b+, b+]$, donc à tout nombre $\varepsilon > 0$ correspond une condition $c - b < \lambda(\varepsilon)$ qui entraîne une inégalité de la forme

$$\begin{aligned} V_n[a, c] &\leqq \omega[a, c_1\varepsilon_1, \ldots, c_r\varepsilon_r] + \omega[c_r\varepsilon_r, b+] + (n-r-1)\,\omega[b+, b+] + \varepsilon \\ &\leqq V_{r+1}[a, b+] + (n-r-1)\,\omega[b+, b+] + \varepsilon \leqq V_n[a, b+] + \varepsilon; \end{aligned}$$

il en résulte

$$\lim_{c \to b+} V_n[a, c] \leqq V_n[a, b+] + \varepsilon,$$

puis tout de suite la proposition énoncée.

Dans ces deux théorèmes, on peut remplacer a par $a\varepsilon$.

12. Corollaire. — *$V_n[c, d]$ tend vers $V_n[a\varepsilon, b\varepsilon']$ lorsque le segment $[c, d]$ tend vers $[a\varepsilon, b\varepsilon']$, sous la seule réserve $a\varepsilon < b\varepsilon'$.*

Cela vient d'être établi lorsqu'une des deux extrémités c, d reste fixe en $a\varepsilon$ ou $b\varepsilon'$. Pour $[a+, b-]$, et c, d variables, la croissance de $V_n(\delta)$ avec le segment δ montre que $V_n[c, d]$ tend vers la borne supérieure de l'ensemble de ces variations, et celle-ci est $V_n[a+, b-]$ en vertu des inégalités de la forme

$$\begin{aligned} 0 &\leqq V_n[a+, b-] - V_n[a+, d] < \varepsilon \qquad \text{pour} \quad 0 < b - d < \lambda(\varepsilon), \\ 0 &\leqq V_n[a+, d] \quad - V_n[c, d] \quad < \varepsilon \qquad \text{pour} \quad 0 < c - a < \mu(\varepsilon; d), \end{aligned}$$

que fournissent les théorèmes précédents.

Pour $[a-, b+]$, la limite est la borne inférieure de l'ensemble des $V_n[c, d]$ avec $(c, d) \supset [a, b]$, tandis qu'on peut écrire

$$\begin{aligned} 0 &\leqq V_n[a-, d] - V_n[a-, b+] < \varepsilon \qquad \text{pour} \quad 0 < d - b < \lambda(\varepsilon), \\ 0 &\leqq V_n[c, d] \quad - V_n[a-, d] \quad < \varepsilon \qquad \text{pour} \quad 0 < a - c < \mu(\varepsilon; d). \end{aligned}$$

Ici, $a \leqq b$ suffit.

Enfin, pour $\varepsilon = \varepsilon' \neq \emptyset$, par exemple $[a+, b+]$, avec $a < b$, on utilise la double inégalité

$$V_n[c, b+] \leqq V_n[c, d] \leqq V_n[a+, d],$$

valable dès que $a < c < b < d$, et où les membres extrêmes tendent vers $V_n[a+, b+]$ dans le passage à la limite.

13. Le second membre de (7) est une somme d'un certain nombre d'oscillations $\omega(\Delta_r[c_i\varepsilon_i, c_j\varepsilon_j])$, avec $r = j - i$, et $\sum r = n$; chacune de ces oscillations d'ordre r est la variation $V_r[c_i\varepsilon_i, c_j\varepsilon_j]$, d'après le caractère de maximum du premier membre. En particulier, on peut écrire, pour chaque indice k,

$$V_n[a, b] = V_k[a, c_k\varepsilon_k] + V_{n-k}[c_k\varepsilon_k, b]. \tag{10}$$

Avec un point $c\varepsilon$ quelconque, on aurait seulement l'inégalité

$$(11) \qquad V_n[a, b] \geqq V_k[a, c\varepsilon] + V_{n-k}[c\varepsilon, b] \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1),$$

et tout point $c\varepsilon$ qui réalise l'égalité pour une certaine valeur de k peut remplacer $c_k\varepsilon_k$ dans (7), d'après les expressions des deux variations au second membre de (11) à l'aide du théorème IV.

Dans le cas général, si $c_{k-1}\varepsilon_{k-1} \leqq c\varepsilon \leqq c_k\varepsilon_k$, l'inégalité

$$\omega[c_{k-1}\varepsilon_{k-1}, c_k\varepsilon_k] \leqq \omega[c_{k-1}\varepsilon_{k-1}, c\varepsilon] + \omega[c\varepsilon, c_k\varepsilon_k]$$

donne

$$V_n[a, b] \leqq \omega[a, c_1\varepsilon_1, \ldots, c_{k-1}\varepsilon_{k-1}, c\varepsilon] + \omega[c\varepsilon, c_k\varepsilon_k, \ldots, c_n\varepsilon_n],$$

d'où résulte

$$(12) \qquad V_n[a, b] \leqq V_k[a, c\varepsilon] + V_{n-k+1}[c\varepsilon, b].$$

Si l'on ne se donne que $c\varepsilon$, on peut seulement écrire

$$(13) \qquad V_n[a, b] \leqq \sup_{k=1, 2, \ldots, n} \{ V_k[a, c\varepsilon] + V_{n-k+1}[c\varepsilon, b] \}.$$

En particulier, la croissance de V_k avec l'indice k fournit l'inégalité générale

$$(14) \qquad V_n[a, b] \leqq V_n[a, c\varepsilon] + V_n[c\varepsilon, b], \qquad c\varepsilon \in [a, b],$$

qui exprime, en particulier, que $V_n(\delta)$ *est une fonction sous-additive d'intervalle sur* $[a, b]$.

Bien entendu, ces résultats s'étendent aux segments généralisés $[a\varepsilon, b\varepsilon']$.

14. *Suite des* $V_n[a, b]$. — Lorsque n croît indéfiniment, la variation d'ordre n de $f(x)$ sur $[a, b]$ croît au sens large, et a une limite, finie ou non, qui est sa variation totale. Nous allons voir que les suites qui atteignent leur limite caractérisent les fonctions monotones par intervalles. Démontrons tout d'abord le ([1])

Théorème VII. — *Si* $f(x)$ *est monotone par* q *segments sur* $[a, b]$, $V_n[a, b]$ *est constante pour* $n \geqq q$.

Soient $[c_{j-1}, c_j]$, $j = 1, 2, \ldots, q$, ces q intervalles. $f(x)$ n'a que des discontinuités de première espèce, et chaque $f(c_j\varepsilon)$ est un point. Pour $c_{j-1} < x < c_j$, il vient

$$f(c_{j-1}) \lesseqgtr f(c_{j-1}+) \lesseqgtr f(x) \lesseqgtr f(c_j-) \lesseqgtr f(c_j),$$
$$\omega[c_{j-1}, c_j] = |f(c_j) - f(c_{j-1})|,$$

tandis que $c_{j-1} \leqq c\varepsilon \leqq c_j$ donne

$$\omega[c_{j-1}, c_j] = \omega[c_{j-1}, c\varepsilon] + \omega[c\varepsilon, c_j].$$

([1]) Tout ce qui suit s'étend immédiatement à un segment généralisé $[a\varepsilon, b\varepsilon']$, sans qu'il soit nécessaire de le répéter chaque fois.

Quelle que soit la partition $\Delta_n[a, b]$, l'union de ses points de subdivision x_i et des c_j détermine un $\Delta_{n'}[a, b]$, qui est une réunion

$$\Delta_{n'}[a, b] = \bigcup_{j=1}^{q} \Delta_{n_j}[c_{j-1}, c_j], \qquad \text{avec} \qquad \sum_{j=1}^{q} n_j = n' \geqq n, \qquad n_j \geqq 1.$$

On peut écrire

$$\omega(\Delta_n[a, b]) \leqq \omega(\Delta_{n'}[a, b]) = \sum_{j=1}^{q} \omega(\Delta_{n_j}[c_{j-1}, c_j]) = \sum_{j=1}^{q} \omega[c_{j-1}, c_j].$$

Le dernier membre est une oscillation d'ordre q, donc

$$\omega(\Delta_n[a, b]) \leqq V_q[a, b],$$

quel que soit n. Cette inégalité vaut pour $V_n[a, b]$, d'où résulte l'égalité pour $n \geqq q$. Bien entendu, la variation totale est

$$V[a, b] = V_q[a, b] = \sum_{j=1}^{q} \omega[c_{j-1}, c_j].$$

15. Ce théorème s'étend aux fonctions monotones par q segments généralisés $[c_{j-1}\varepsilon_{j-1}, c_j\varepsilon_j]$. Certains d'entre eux peuvent être de la forme $[c\varepsilon, c\varepsilon']$, avec $\varepsilon < \varepsilon'$. Mais, quel que soit $c = c_i \in (a, b)$, il suit un certain c_h et précède un certain c_l parmi les c_j, et l'un des segments de la partition est ainsi $[c_h\varepsilon_h, c_i\varepsilon_i]$, un autre étant $[c_k\varepsilon_k, c_l\varepsilon_l]$, avec $c_h < c = c_i = c_k < c_l$, $i \leqq k$, $\varepsilon_i \leqq \varepsilon < \varepsilon' \leqq \varepsilon_k$. La monotonie de $f(x)$ sur ces deux derniers segments fait que $f(c-)$ et $f(c+)$ sont des points, et $f(x)$ n'a que des singularités de première espèce ([6]) sur $[a, b]$, comme dans l'énoncé du théorème VII. A partir de là, la démonstration précédente se répète, avec des $x_i\varepsilon_i$ et les segments $[c_{j-1}\varepsilon_{j-1}, c_j\varepsilon_j]$ au lieu des x_i et des $[c_{j-1}, c_j]$, et avec des partitions généralisées $\Delta_n^{\varepsilon}[a, b]$. On peut même énoncer le

THÉORÈME VIII. — Si $f(x)$ *est monotone par* q *segments généralisés sur* $[a\varepsilon, b\varepsilon']$, $V_n[a\varepsilon, b\varepsilon']$ *est constante pour* $n \geqq q$.

16. Réciproquement, supposons que $V_{q+1}[a, b] = V_q[a, b]$ pour un certain indice q, et soit

$$V_q[a, b] = \sum_{i=1}^{q} \omega[c_{i-1}\varepsilon_{i-1}, c_i\varepsilon_i] \tag{15}$$

l'expression (7) de cette variation d'ordre q. Considérons deux extrémités consécutives et distinctes dans cette partition, $c_{k-1}\varepsilon_{k-1}$, $c_k\varepsilon_k$ avec $c_{k-1} < c_k$,

([6]) *Cf.* le paragraphe 8.

et soit x un point généralisé [7] quelconque du segment qu'elles bornent. L'adjonction de x aux $c_i\varepsilon_i$ fournit une partition $\Delta^{\varepsilon}_{q+1}[a, b]$, avec

$$\omega(\Delta^{\varepsilon}_{q+1}[a, b]) - V_q[a, b] = \omega[c_{k-1}\varepsilon_{k-1}, x] + \omega[x, c_k\varepsilon_k] - \omega[c_{k-1}\varepsilon_{k-1}, c_k\varepsilon_k].$$

La valeur commune est zéro, car le second membre n'est pas négatif, alors que le premier membre est majoré par $V_{q+1}[a, b] - V_q[a, b] = 0$. Cette nullité du second membre pour tous les x du segment $[c_{k-1}\varepsilon_{k-1}, c_k\varepsilon_k]$ entraîne la monotonie de $f(x)$ sur ce segment grâce au théorème II du paragraphe 8. Ainsi $f(x)$ est monotone sur chacun des segments de la partition (15), et n'a, en particulier, que des discontinuités de première espèce. Ceci vaut également pour $c_{k-1} = c_k$, $\varepsilon_{k-1} \leqq \varepsilon_k$, l'oscillation étant nulle si $c_{k-1}\varepsilon_{k-1} = c_k\varepsilon_k$, car le raisonnement suivi convient encore. S'il existe des segments d'extrémités égales, (15) est une variation d'ordre inférieur à q, puisque, si $q - m$ est le nombre de ces segments, (15) donne

$$V_m[a, b] \geqq \omega(\Delta^{\varepsilon}_m[a, b]) = V_q[a, b] \geqq V_m[a, b],$$

d'où s'ensuit l'égalité des deux variations. Nous pouvons rassembler ces résultats dans le

Théorème IX. — *Les fonctions $f(x)$ telles qu'on ait*

$$V_{q-1}[a, b] < V_q[a, b] = V_{q+1}[a, b]$$

sont les fonctions monotones par q segments généralisés, et q seulement, et la suite des V_n est constante à partir de $V_q[a, b] = V[a, b]$.

Les q oscillations au second membre de (15) sont alors strictement positives, et cette partition en les q segments de monotonie fournit une expression (7) de toutes les variations d'ordre supérieur ou égal à q.

17. La sous-additivité de $V_n[a, b]$ établie en (14) conduit à examiner les cas d'additivité, comme on l'a fait pour l'oscillation $\omega = V_1$. Voici un premier résultat :

Théorème X. — *Si $f(x)$ est monotone par n segments généralisés sur $[a, b]$,*

$$V_n[a, b] = V_n[a, c] + V_n[c, b] \tag{16}$$

pour tout point c de $[a, b]$.

Nous savons que la variation d'ordre n d'une telle fonction est de la forme (7), où les $[c_{i-1}\varepsilon_{i-1}, c_i\varepsilon_i]$ sont les segments de monotonie. Si

---

[7] x est un point $c\varepsilon$ avec $c_{k-1}\varepsilon_{k-1} \leqq c\varepsilon \leqq c_k\varepsilon_k$.

$c \in [c_{k-1}\varepsilon_{k-1}, c_k\varepsilon_k]$, $f(x)$ est monotone par k segments sur $[a, c]$ et par $n-k+1$ segments sur $[c, b]$, avec $1 \leqq k \leqq n$, et l'on a

$$V_n[a, c] = V_k[a, c] = \sum_{i=1}^{k-1} \omega[c_{i-1}\varepsilon_{i-1}, c_i\varepsilon_i] + \omega[c_{k-1}\varepsilon_{k-1}, c],$$

$$V_n[c, b] = V_{n-k+1}[c, b] = \sum_{i=k+1}^{n} \omega[c_{i-1}\varepsilon_{i-1}, c_i\varepsilon_i] + \omega[c, c_k\varepsilon_k].$$

L'addition donne

$$V_n[a, c] + V_n[c, b] = \sum_{i=1}^{n} \omega[c_{i-1}\varepsilon_{i-1}, c_i\varepsilon_i] + \{\omega[c_{k-1}\varepsilon_{k-1}, c] + \omega[c, c_k\varepsilon_k] - \omega[c_{k-1}\varepsilon_{k-1}, c_k\varepsilon_k]\},$$

où l'accolade est nulle puisque $f(x)$ est monotone sur $[c_{k-1}\varepsilon_{k-1}, c_k\varepsilon_k]$, et où la somme restant au second membre est $V_n[a, b]$.

(16) s'étend à toutes les variations de $f(x)$ d'ordre supérieur ou égal à n, et également, pour cette même fonction, à tout segment $[\alpha, \beta]$ inclus dans $[a, b]$. On peut également observer que $V_n[\alpha, \beta]$ est aussi la variation totale de cette fonction $f(x)$ sur $[\alpha, \beta]$, de sorte que (16) résulte aussi de l'additivité de cette variation totale.

18. Réciproquement, on peut démontrer le

Théorème XI. — *$f(x)$ est monotone par n segments généralisés au plus sur $[a, b]$ si sa variation d'ordre n satisfait la loi d'additivité restreinte* (16). *C'est également vrai pour $[a\varepsilon, b\varepsilon']$, en remplaçant les points a, b de* (16) *par $a\varepsilon$, $b\varepsilon'$.*

Pour $n = 1$, c'est le théorème II'. Il suffit donc de supposer $n \geqq 2$. $V_n[a\varepsilon, b\varepsilon']$ a une expression de la forme (7); la relation (16), écrite pour un point $c \in [c_{k-1}\varepsilon_{k-1}, c_k\varepsilon_k]$, où $1 \leqq k \leqq n$, donne

$$\begin{aligned} V_n[a\varepsilon, c] + V_n[c, b\varepsilon'] &= \sum_{i=1}^{k-1} \omega[c_{i-1}\varepsilon_{i-1}, c_i\varepsilon_i] \\ &\quad + \sum_{i=k+1}^{n} \omega[c_{i-1}\varepsilon_{i-1}, c_i\varepsilon_i] + \omega[c_{k-1}\varepsilon_{k-1}, c_k\varepsilon_k] \\ &\leqq \left\{ \sum_{i=1}^{k-1} \omega[c_{i-1}\varepsilon_{i-1}, c_i\varepsilon_i] + \omega[c_{k-1}\varepsilon_{k-1}, c] \right\} \\ &\quad + \left\{ \omega[c, c_k\varepsilon_k] + \sum_{i=k+1}^{n} \omega[c_{i-1}\varepsilon_{i-1}, c_i\varepsilon_i] \right\}. \end{aligned}$$

Les deux accolades sont majorées par $V_k[a\varepsilon, c]$ et $V_{n-k+1}[c, b\varepsilon']$ respectivement. On en déduit

$$\{V_n[a\varepsilon, c] - V_k[a\varepsilon, c]\} + \{V_n[c, b\varepsilon'] - V_{n-k+1}[c, b\varepsilon']\} \leqq 0.$$

Aucune de ces deux accolades n'étant négative, toutes les deux sont nulles, ce qui donne les égalités

$$V_k[a\varepsilon, c] = V_n[a\varepsilon, c], \qquad V_{n-k+1}[c, b\varepsilon'] = V_n[c, b\varepsilon'],$$

avec $1 \leqq k \leqq n$, $c_{k-1}\varepsilon_{k-1} \leqq c \leqq c_k\varepsilon_k$. Si $k < n$, la première égalité où l'on fait $c = c_k\varepsilon_k$, entraîne la monotonie de $f(x)$ par k segments généralisés au plus sur $[a\varepsilon, c_k\varepsilon_k]$, tandis que la deuxième relation, où $k > 1$ et $c = c_{k-1}\varepsilon_{k-1}$, montre que $f(x)$ est monotone par $n-k+1$ segments généralisés au plus sur $[c_{k-1}\varepsilon_{k-1}, b\varepsilon']$. Avec $1 \leqq k \leqq n-1$, on en conclut que $f(x)$ est monotone par k segments généralisés au plus sur $[a\varepsilon, c_k\varepsilon_k]$ et par $n-k$ segments généralisés au plus sur $[c_k\varepsilon_k, b\varepsilon']$, donc par n segments généralisés au plus sur $[a\varepsilon, b\varepsilon']$. La seule condition imposée par ce raisonnement est justement $n \geqq 2$.

19. Théorème XII. — *$n = n_1 + n_2 + \ldots + n_p$ étant une partition arithmétique quelconque de n, donnée,*

$$V_n[a, b] = \sup\left\{\sum_{i=1}^{p} V_{n_i}[x_{i-1}, x_i]\right\} \tag{17}$$

pour l'ensemble des partitions de $[a, b]$ en p segments $[x_{i-1}, x_i]$.

Quelle que soit la partition $\Delta_p[a, b]$ considérée, de points de subdivision x_{r_h} $(h = 1, 2, \ldots, p-1)$, $x_{r_0} = a$, $x_{r_p} = b$, et quelles que soient les partitions $\Delta_{n_h}[x_{r_{h-1}}, x_{r_h}]$ de ses p segments, on a

$$V_n[a, b] \geqq \sum_{n=1}^{p} \omega(\Delta_{n_h}[x_{r_{h-1}}, x_{r_h}]), \tag{18}$$

et, par suite,

$$V_n[a, b] \geqq \sum_{n=1}^{p} V_{n_h}[x_{r_{h-1}}, x_{r_h}]. \tag{19}$$

D'autre part, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe une partition $\Delta_n[a, b]$ pour laquelle

$$0 \leqq V_n[a, b] - \omega(\Delta_n[a, b]) < \varepsilon. \tag{20}$$

Cette partition est du type de celles intervenant dans (18), avec $r_h = n_1 + n_2 + \ldots + n_h$, pour $h = 1, 2, \ldots, p$, et la majoration du second terme de la différence (20), où les x_{r_h} restent fixes, par la somme des variations $V_{n_h}[x_{r_{h-1}}, x_{r_h}]$, fournit, pour la subdivision $\Delta_p[a, b]$ correspondante, la double inégalité

$$(21) \qquad 0 \leqq V_n[a, b] - \sum_{n=1}^{p} V_{n_h}[x_{r_{h-1}}, x_{r_h}] < \varepsilon;$$

c'est justement l'ensemble (19), (21) que traduit la proposition énoncée.

20. *Variation d'ordre n en un point.* — c appartenant à l'ouvert (a, b), la variation d'ordre n en ce point est, par définition,

$$(22) \qquad V_n(c) = \inf\{V_n(\nu(c))\}$$

pour l'ensemble des voisinages $\nu(c)$ de c. Il est clair qu'on a aussi

$$(23) \qquad V_n(c) = \lim_{\nu(c) \succ c} V_n(\nu(c)),$$

puisque $V_n(\delta)$ décroît avec l'intervalle δ. On peut également noter cette variation $V_n[c-, c+]$. Nous nous proposons d'exprimer $V_n(c)$ à l'aide d'oscillations dans les segments généralisés $[c\varepsilon, c\varepsilon']$.

(α, β) étant un tel voisinage $\nu(c)$, toute partition $\Delta_n[\alpha, \beta]$ donne

$$\omega(\Delta_n[\alpha, \beta]) = \omega[\alpha, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, \beta] \leqq V_n[\alpha, \beta],$$

et la différence entre les deux membres est arbitrairement petite pour un choix convenable des x_i. Lorsque $[\alpha, \beta]$ tend vers c, le dernier membre tend vers $V_n(c)$, donc le premier membre a une limite supérieure au plus égale à $V_n(c)$, et qui lui est même égale en vertu du caractère infinitésimal qu'on peut imposer à la différence entre les deux membres. Ainsi, on peut encore définir $V_n(c)$ par

$$(24) \qquad V_n(c) = \limsup_{\nu(c) \succ c} \{\omega(\Delta_n(\nu(c)))\}.$$

Bien entendu, cette limite ne dépend pas de la nature, ouverte ou fermée, du voisinage $\nu(c)$.

Dans le passage à la limite, les segments $[x_{i-1}, x_i] \subset [\alpha, c)$ sont tels que $\omega[x_{i-1}, x_i]$ ait pour limite supérieure le diamètre de $f(c-)$, représenté par $\omega[c-, c-]$, et l'on peut choisir les x_i de manière que chacune de ces oscillations tende vers cette limite; de même les $[x_{i-1}, x_i] \subset (c, \beta]$ fournissent une oscillation dont la limite supérieure est $\omega[c+, c+]$, et peuvent tous tendre vers elle. Si aucun des $n-1$ points de subdivision n'est en c, l'une des oscillations $\omega[x_{i-1}, x_i]$ tend vers $\omega[c-, c+]$, mais, dans le cas contraire, une somme $\omega[x_{i-1}, c] + \omega[c, x_{i+1}]$ tend vers $\omega[c-, c] + \omega[c, c+]$. Le nombre r des segments inclus dans $[\alpha, c)$ est inférieur à n, donc (24) conduit à la valeur

$$V_n(c) = \sup_{0 \leqq r \leqq n-1} \left\{ \begin{array}{l} r\,\omega[c-, c-] + \omega[c-, c+] + (n-r-1)\,\omega[c+, c+], \\ r\,\omega[c-, c-] + \omega[c-, c] + \omega[c, c+] + (n-r-2)\,\omega[c+, c+] \end{array} \right\},$$

où la deuxième somme de l'accolade suppose $r \leqq n-2$. Cette borne supérieure est déterminée par les valeurs relatives des cinq types d'oscillation en c.

Si $\omega[c-, c-] \leqq \omega[c+, c+]$ les deux sommes dans l'accolade sont maximales pour $r=0$, et

$$\begin{aligned} V_n(c) = &(n-2)\,\omega[c+, c+] \\ &+ \sup\{\omega[c-, c+] + \omega[c+, c+],\ \omega[c-, c] + \omega[c, c+]\}. \end{aligned}$$

L'autre inégalité $\omega[c+, c+] \leqq \omega[c-, c-]$ donne symétriquement

$$\begin{aligned} V_n(c) = &(n-2)\,\omega[c-, c-] \\ &+ \sup\{\omega[c-, c-] + \omega[c-, c+],\ \omega[c-, c] + \omega[c, c+]\}. \end{aligned}$$

Dans tous les cas, on a

$$(25) \qquad V_n(c) = (n-2)\sup\{\omega[c\varepsilon, c\varepsilon]\} + \sup\{\omega[c-, c\varepsilon] + \omega[c\varepsilon, c+]\}$$

relativement à l'ensemble des trois symboles ε pour chaque borne supérieure ([8]).

Lorsque n augmente indéfiniment, $V_n(c)$ fait de même, sauf si $\omega[c-, c-] = \omega[c+, c+] = 0$, c'est-à-dire lorsque c est au plus une singularité de première espèce pour $f(x)$. Dans ce cas, on a d'ailleurs

$$(26) \qquad V_n(c) = V_2(c) = \omega[c-, c] + \omega[c, c+],$$

quel que soit $n \geqq 2$. En un tel point, on peut dire que $f(x)$ est à variation bornée, et c'est caractéristique, de sorte que *les points où $f(x)$ est à variation bornée sont les points de continuité ou de discontinuité de première espèce, et la variation totale y est égale à* (26).

21. Avec des voisinages de c à droite (ou à gauche), soit des intervalles $[c, \beta]$ (ou $[\alpha, c]$), on définit de manière semblable

$$V_n[c, c+] = \inf_{\beta > c}\{V_n[c, \beta]\} = \lim_{\beta \succ c+} V_n[c, \beta] = \limsup_{\beta \succ c+}\{\omega(\Delta_n[c, \beta])\}.$$

Le raisonnement précédent donne tout de suite

$$(27) \qquad V_n[c, c+] = \omega[c, c+] + (n-1)\,\omega[c+, c+],$$

et de même

$$(27') \qquad V_n[c-, c] = \omega[c-, c] + (n-1)\,\omega[c-, c-].$$

On définit enfin $V_n[c\varepsilon, c\varepsilon]$, où $\varepsilon \neq \emptyset$, avec des intervalles $\nu(c\varepsilon)$ ne contenant pas c et tendant vers $c\varepsilon$. Par exemple,

$$V_n[c+, c+] = \inf_{\beta > c}\{V_n[c+, \beta]\} = \lim_{\beta \succ c+} V_n[c+, \beta] = \limsup_{\nu(c+) \succ c+}\{\omega(\Delta_n(\nu(c+)))\};$$

([8]) Rappelons que $\omega[c, c] = \operatorname{diam} f(c) = 0$, puisque $f(x)$ est uniforme. On suppose naturellement $n \geqq 2$.

le raisonnement habituel donne ainsi, dans les deux cas,

$$V_n[c\varepsilon, c\varepsilon] = n\omega[c\varepsilon, c\varepsilon]. \tag{28}$$

Bien entendu, cette valeur est majorée par (27) ou (27′). Pour que ces variations restent bornées quand n tend vers l'infini, il faut et il suffit que le point $c\varepsilon$ considéré soit au plus un point de discontinuité de première espèce pour $f(x)$, et l'on a alors

$$V_n[c, c\varepsilon] = \omega[c, c\varepsilon],$$
$$V_n[c\varepsilon, c\varepsilon] = 0$$

quel que soit n. Ces résultats s'appliquent à $a+$ et $b-$. En particulier, *une fonction à variation bornée sur* $[a, b]$ *l'est en tous les points de l'ouvert* (a, b), *en* $a+$ *et en* $b-$, de sorte qu'elle ne peut avoir que des discontinuités de première espèce, comme il est bien connu.

CHAPITRE III.

Oscillations moyennes sur un segment.

22. Nous appelons « oscillation moyenne d'ordre n » de $f(x)$ sur $[a, b]$ le quotient

$$\omega_n[a, b] = \frac{1}{n} V_n[a, b]. \tag{1}$$

L'inégalité

$$V_n[a, b] \leqq n\omega[a, b],$$

qui résulte immédiatement de la définition de V_n, montre que l'ensemble des $\omega_n[a, b]$ pour les diverses valeurs de n est majoré par $\omega_1[a, b] = \omega[a, b]$.

Plus précisément, si λ est la borne inférieure des $n+1$ oscillations $\omega[x_{i-1}\varepsilon_{i-1}, x_i\varepsilon_i]$ dont la somme vaut $V_{n+1}[a, b]$, et si $\omega[x_{k-1}\varepsilon_{k-1}, x_k\varepsilon_k] = \lambda$, on peut écrire

$$V_{n+1} = \sum_{i=1}^{k-2} \omega[x_{i-1}\varepsilon_{i-1}, x_i\varepsilon_i] + \omega[x_{k-2}\varepsilon_{k-2}, x_{k-1}\varepsilon_{k-1}] + \lambda + \sum_{i=k+1}^{n+1} \omega[x_{i-1}\varepsilon_{i-1}, x_i\varepsilon_i],$$

avec des modifications d'écriture évidentes pour $k \leqq 2$. En remplaçant $[x_{k-2}\varepsilon_{k-2}, x_{k-1}\varepsilon_{k-1}]$ par $[x_{k-2}\varepsilon_{k-2}, x_k\varepsilon_k]$, et en observant que, par définition $V_{n+1}[a, b] \geqq (n+1)\lambda$, il vient

$$V_{n+1}[a, b] \leqq \frac{V_{n+1}[a, b]}{n+1} + \omega[a, x_1\varepsilon_1, \ldots, x_{k-2}\varepsilon_{k-2}, x_k\varepsilon_k, x_{k+1}\varepsilon_{k+1}, \ldots, b].$$

La dernière oscillation, relative à une partition $\Delta_n^{\varepsilon}[a, b]$, est au plus égale à $V_n[a, b]$, ce qui donne l'inégalité

$$\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) V_{n+1}[a, b] \leqq V_n[a, b],$$

donc

$$\omega_{n+1}[a, b] \leqq \omega_n[a, b]. \tag{2}$$

Ainsi, la suite des $\omega_n[a, b]$, $n = 1, 2, \ldots$ est décroissante et a une limite

$$\omega_\infty[a, b] = \lim_{n \to \infty} \omega_n[a, b] = \inf\{\omega_n[a, b]\}; \tag{3}$$

c'est ce que nous appelons « l'oscillation moyenne » de $f(x)$ sur $[a, b]$. Ces résultats s'étendent naturellement aux intervalles ouverts et mixtes.

En un point c, l'expression [(25), chap. II], et les analogues du paragraphe 21 donnent les oscillations moyennes

$$\begin{cases} \omega_\infty(c) = \omega_\infty[c-, c+] = \sup\{\omega[c-, c-], \omega[c+, c+]\}, \\ \omega_\infty[c, c\varepsilon] = \omega_\infty[c\varepsilon, c\varepsilon] = \omega[c\varepsilon, c\varepsilon]. \end{cases} \tag{4}$$

Elles sont liées par les inégalités

$$\omega_\infty[c, c\varepsilon] \leqq \omega_\infty(c) \leqq \omega_\infty[c-, c-] + \omega_\infty[c+, c+]. \tag{5}$$

Les points d'oscillation moyenne nulle sont au plus des points de discontinuité de première espèce; pour un point $c\varepsilon \neq c$, où $\omega_\infty[c, c\varepsilon] = 0$, la discontinuité possible ne concerne que le côté correspondant.

Remarque. — L'oscillation moyenne considérée ici diffère de l'oscillation moyenne riemannienne définie comme étant le quotient, par $b - a$, de la différence des deux intégrales riemanniennes par excès et par défaut de $f(x)$ sur $[a, b]$. Ainsi, $f(x)$, supposée bornée et continue sur ce segment, sauf au point intérieur c, est intégrable (R); son oscillation riemannienne est nulle, tandis que l'inégalité $V_n[a, b] \geqq V_n(c)$ entraîne $\omega_\infty[a, b] \geqq \omega_\infty(c)$, qui n'est pas forcément nul.

23. Si $c \in [a, b]$, l'inégalité $\omega_n[a, c] \leqq \omega_n[a, b]$ entraîne

$$\omega_\infty[a, c] \leqq \omega_\infty[a, b]. \tag{6}$$

$\omega_\infty[a, c]$ est une fonction croissante de c sur $[a, b]$. Ceci vaut aussi pour l'intervalle mixte $[a, b)$, avec $a \leqq c < b$. $\omega_\infty[a, c]$ tend vers une limite quand c tend vers $b-$, qu'on écrira $\omega_\infty[a, b-]$, et qui vérifie l'inégalité

$$\omega_\infty[a, b-] \leqq \omega_\infty[a, b). \tag{7}$$

Cette relation peut être stricte. Pour le voir, il suffit de considérer une fonction monotone par une infinité d'intervalles sur $[a, b)$, qui le soit par un nombre fini d'intervalles sur tout segment $[a, c] \subset [a, b)$. Soit, par exemple, $f(x) = \sin \frac{1}{b-x}$. Cette fonction est à variation bornée sur tout segment $[a, c]$ de ce type, donc $\omega_\infty[a, c] = 0$, et, par suite, $\omega_\infty[a, b-] = 0$. Par contre, $V_n[a, b)$ vaut évidemment $2n$, donc $\omega_n[a, b) = 2$, et $\omega_\infty[a, b) = 2$.

Il est aisé d'en déduire un exemple illustrant les deux possibilités de (7). Considérons la fonction plus générale

$$f(x) = \begin{cases} h \sin \dfrac{1}{c-x} + k \sin \dfrac{1}{b-x}, & x \in [a, b),\ x \neq c; \\ k \sin \dfrac{1}{b-c}, & x = c, \end{cases}$$

où $a < c < b$, et où h, k sont des constantes positives.

Pour cette fonction,

$$V_n[a, b) = 2n \sup\{h, k\} + R_n,$$

où R_n reste borné quand n tend vers l'infini ([9]). Par conséquent,

$$\omega_n[a, b) = 2 \sup\{h, k\} + \frac{R_n}{n}$$

tend vers

$$\omega_\infty[a, b) = 2 \sup\{h, k\}.$$

β étant un point quelconque de l'ouvert (c, b), on a de même,

$$V_n[a, \beta] = 2nh + R'_n,$$

où R'_n est borné, donc

$$\omega_n[a, \beta] = 2h + \frac{R'_n}{n},$$

puis

$$\omega_\infty[a, b-] = 2h.$$

L'inégalité (7) est donc stricte si $h < k$, tandis que c'est l'égalité qui s'impose si $h \geq k$. Ce fait est d'ailleurs naturel, si l'on observe que, lorsque k surpasse h, c'est le point b, qui est exclu de $[a, \beta]$, qui fournit dans son voisinage les oscillations maximales, tandis que, pour $k < h$, c'est le point c qui a ce rôle, et s'inclut dans $[a, \beta]$ quand β s'approche de b.

24. L'inégalité $\omega_n(c) \leq \omega_n[a, b]$, valable en tout point c de (a, b), entraîne la relation $\omega_\infty(c) \leq \omega_\infty[a, b]$; celle-ci subsiste en $a+$ et $b-$, en remplaçant

---

([9]) $[\alpha, \beta]$ étant au voisinage suffisamment petit de c, et $[\gamma, b)$ un voisinage analogue de $b-$, on voit aisément que $|R_n|$ est majoré par

$$\frac{2k(\beta-\alpha) + 2h(b-\gamma)}{(b-c)^2} + V[a, \alpha] + V[\beta, \gamma] + 6(h+k),$$

où le dernier terme est mis pour tenir compte des chevauchements possibles sur α, β, γ des segments de la partition qui fournit $V_n[a, b)$.

le premier membre par $\omega_\infty[a, a+]$ et $\omega_\infty[b-, b]$. Il résulte de là qu'une fonction dont l'oscillation moyenne sur $[a, b]$ est nulle a son oscillation moyenne nulle en tout point de $[a, b]$, et ne peut avoir que des points de discontinuité de première espèce. On sait que l'ensemble de ces points est fini ou dénombrable, et que la fonction est alors intégrable (R) sur $[a, b]$. Elle a aussi une intégrale de Stieltjes avec une base ([10]) $\Phi(\delta) = O(\text{mes}\ \delta)$. Vérifions-le avec une base positive, vérifiant une inégalité

$$\Phi(\delta) < K \,\text{mes}\, \delta \qquad (K = \text{Cte} > 0),$$

pour tout intervalle δ de $[a, b]$. La condition d'intégrabilité de $f(x)$ s'écrit

$$\inf \left\{ \sum_{i=1}^{n} \omega(\delta_i)\, \Phi(\delta_i) \right\} = 0$$

pour l'ensemble des partitions $\bigcup_{i=1}^{n} \delta_i = [a, b]$, de tous les ordres n. Avec des δ_i fermés, de même longueur $\frac{b-a}{n}$, la somme de l'accolade est majorée par

$$K \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} \omega(\delta_i) \leq K \frac{b-a}{n} V_n[a, b] = K(b-a)\, \omega_n[a, b].$$

La borne inférieure en question, qui est en même temps la limite de ces sommes quand n tend vers l'infini, est donc nulle si $\omega_\infty[a, b] = 0$.

25. Cette propriété donne de l'intérêt aux fonctions d'oscillation moyenne nulle. Tout d'abord, il est clair qu'une fonction dont l'oscillation moyenne sur $[a, b]$ est nulle est d'oscillation moyenne nulle sur tout intervalle inclus dans $[a, b]$. Il résulte aussi des propriétés élémentaires de l'oscillation simple, relativement aux opérations rationnelles sur les fonctions, que la somme et le produit de deux fonctions d'oscillation moyenne nulle ont la même qualité. De même, $\frac{1}{f(x)}$ est d'oscillation moyenne nulle en même temps que $f(x)$, dès qu'elle est elle-même bornée sur $[a, b]$.

Il en est de même pour $|f(x)|$ et, d'une manière générale, pour toute puissance positive de celle-ci. La première partie de cette proposition est évidente. Pour la deuxième, il suffit de supposer $f(x) \geq 0$ sur $[a, b]$, et l'exposant p de la puissance inférieur à 1, et de suivre un raisonnement classique.

([10]) $\Phi(\delta)$, de signe constant, est une fonction additive de l'intervalle δ, et représente la variation d'une fonction monotone sur δ. Ce que nous établissons s'étend à l'intégrale de Stieltjes générale dont la base $\Phi(\delta)$ est la variation sur δ d'une fonction à variation bornée sur $[a, b]$, et telle que sa variation totale sur δ vérifie $V(\delta) = O(\text{mes}\ \delta)$.

D'après [(7), chap. II], on a d'abord

$$\text{(8)} \qquad V_n[f^p;\, a,\, b] = \sum_{i=1}^{n} \omega[f^p;\, x_{i-1}\varepsilon_{i-1},\, x_i\varepsilon_i],$$

où la somme est relative à une certaine partition de $[a, b]$ en n intervalles généralisés $\delta_i = [x_{i-1}\varepsilon_{i-1}, x_i\varepsilon_i]$. α et β étant deux nombres positifs quelconques, avec $\alpha < \beta$, nous répartissons l'ensemble des δ_i en trois catégories.

La première est formée par ceux où $M(f; \delta_i) \leqq \beta$; soit j leur indice courant; pour eux, $\omega(f^p; \delta_j) \leqq \beta^p$, donc

$$\text{(9)} \qquad \sum \omega(f^p;\, \delta_j) \leqq n\beta^p.$$

La deuxième comprend les δ_i restants, et tels que $m(f; \delta_i) \geqq \alpha$; soit k leur indice courant. Si f_1 et f_2 sont deux éléments de $f(\delta_k)$, la formule des accroissements finis donne

$$f_1^p - f_2^p = p\lambda^{p-1}(f_1 - f_2),$$

où λ, compris entre f_1 et f_2, est au moins égal à α; il en résulte

$$|f_1^p - f_2^p| \leqq p\alpha^{p-1}|f_1 - f_2|,$$

puisque $p - 1$ est négatif, donc

$$\omega(f^p;\, \delta_k) \leqq p\alpha^{p-1}\omega(f;\, \delta_k),$$

et, par suite,

$$\text{(10)} \qquad \sum_k \omega(f^p;\, \delta_k) \leqq p\alpha^{p-1} \sum_k \omega(f;\, \delta_k) \leqq p\alpha^{p-1} V_n[f;\, a,\, b].$$

La dernière catégorie, dont les éléments sont notés δ_l, est caractérisée par les inégalités

$$m(f;\, \delta_l) < \alpha < \beta < M(f;\, \delta_l);$$

pour eux, nous nous contentons de la majoration

$$\omega(f^p;\, \delta_l) \leqq K^p,$$

où $K = M[f; a, b]$, de sorte que, si N est le nombre des δ_l,

$$\sum_l \omega(f^p;\, \delta_l) \leqq NK^p.$$

On peut majorer N à l'aide de $V_n[f; a, b]$, car

$$\omega(f;\, \delta_l) = M(f;\, \delta_l) - m(f;\, \delta_l) > \beta - \alpha$$

entraîne

$$V_n[f;\, a,\, b] \geqq \sum_l \omega(f;\, \delta_l) \geqq N(\beta - \alpha),$$

et l'on a ainsi

$$\sum_l \omega(f^p;\, \delta_l) \leqq \frac{K^p}{\beta - \alpha} V_n[f;\, a,\, b]. \tag{11}$$

L'addition membre à membre des inégalités (9), (10), (11) donne

$$V_n[f^p;\, a,\, b] \leqq n\beta^p + \left(p\,\alpha^{p-1} + \frac{K^p}{\beta-\alpha}\right) V_n[f;\, a,\, b],$$

donc, après division par n,

$$\omega_n[f^p;\, a,\, b] \leqq \beta^p + \left(p\,\alpha^{p-1} + \frac{K^p}{\beta-\alpha}\right) \omega_n[f;\, a,\, b]. \tag{13}$$

Quand n tend vers l'infini, le second membre tend vers β^p, donc

$$\omega_\infty[f^p;\, a,\, b] \leqq \beta^p,$$

où β est arbitraire, d'où résulte la nullité de $\omega_\infty[f^p;\, a,\, b]$.

26. Nous avons donné au paragraphe 23 un exemple de fonction d'oscillation moyenne positive. La fonction classique $f(x) = x \sin\frac{\pi}{x}$, monotone par une infinité d'intervalles sur $[0, 1]$, est un exemple de fonction non à variation bornée, mais de variation moyenne nulle. Elle est intégrable (R) sur ce segment, aussi bien grâce à cette dernière qualité qu'à sa continuité.

Ses valeurs extrémales décroissent en valeur absolue en même temps que leurs abscisses $\xi_k (k = 1, 2, \ldots)$, qui sont les racines de l'équation $\operatorname{tg}\frac{\pi}{x} = \frac{\pi}{x}$, comprises entre 0 et 1. Elles sont de la forme $\xi_k = \frac{\pi}{\varphi_k}$, où les φ_k sont les racines positives de l'équation $\operatorname{tg}\varphi = \varphi$. Celles-ci ont les expressions

$$\varphi_k = k\pi + \theta_k \frac{\pi}{2},$$

où θ_k est compris entre 0 et 1, et tend vers 1 en croissant lorsque k croît indéfiniment. Les ξ_k satisfont ainsi la double inégalité

$$\frac{1}{k + \frac{1}{2}} < \xi_k = \frac{1}{k + \frac{\theta_k}{2}} < \frac{1}{k},$$

et la courbe représentative de $f(x)$ s'en déduit, avec les relations

$$0 = f(1) > f(\xi_1) < 0 = f\left(\frac{1}{2}\right) < f(\xi_2) > 0 = f\left(\frac{1}{3}\right) > f(\xi_3) < \ldots.$$

Plus précisément on voit que

$$\frac{\sin\varphi_k}{\varphi_k} = \frac{\cos\varphi_k}{1} = \frac{(-1)^k}{\sqrt{\varphi_k^2 + 1}},$$

donc

$$f(\xi_k) = \xi_k \sin \varphi_k = \frac{(-1)^k \pi}{\sqrt{\left(k + \frac{\theta_k}{2}\right)^2 \pi^2 + 1}} = \frac{(-1)^k}{\sqrt{\left(k + \frac{\theta_k}{2}\right)^2 + \frac{1}{\pi^2}}}.$$

Cette expression confirme la décroissance de $|f(\xi_k)|$ lorsque k augmente. $f(x)$ étant continue sur $[0, 1]$, sa variation $V_n[0, 1]$ est fournie par une partition $\Delta_n[0, 1]$ en segments simples, qui sont naturellement du type $[\xi_{k+1}, \xi_k]$. On peut seulement hésiter entre les deux subdivisions $[0, \xi_n, \xi_{n-1}, \ldots, \xi_2, 1]$ et $[0, \xi_{n-1}, \xi_{n-2}, \ldots, \xi_2, \xi_1, 1]$; les deux sommes correspondantes ne diffèrent que par les termes $|f(\xi_{n+1}) - f(\xi_n)|$ et $[f(\xi_1)]$, qui n'apparaissent respectivement que dans la première et dans la seconde. Le premier vaut

$$\frac{1}{\sqrt{\left(n + \frac{\theta_n}{2}\right)^2 + \frac{1}{\pi^2}}} + \frac{1}{\sqrt{\left(n + 1 + \frac{\theta_{n+1}}{2}\right)^2 + \frac{1}{\pi^2}}} < \frac{2}{\sqrt{n^2 + \frac{1}{\pi^2}}};$$

l'autre est égal à

$$\frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{\theta_1}{2}\right)^2 + \frac{1}{\pi^2}}} > \frac{1}{\sqrt{\frac{9}{4} + \frac{1}{\pi^2}}} = \frac{2}{\sqrt{9 + \frac{4}{\pi^2}}},$$

et surpasse donc le précédent pour $n > 3$. n tendant vers l'infini, c'est la deuxième partition qui convient, soit

$$\begin{aligned} V_n[0, 1] &= \omega[0, \xi_{n-1}, \xi_{n-2}, \ldots, \xi_2, \xi_1, 1] \\ &= |f(\xi_1)| + |f(\xi_1) - f(\xi_2)| + \ldots + |f(\xi_{n-2}) - f(\xi_{n-1})| + |f(\xi_{n-1}) - f(\xi_n)| \\ &= 2\sum_{k=1}^{n-1} |f(\xi_k)| + |f(\xi_n) = 2\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{\left(k + \frac{\theta_k}{2}\right)^2 + \frac{1}{\pi^2}}} + \frac{1}{\sqrt{\left(n + \frac{\theta_n}{2}\right)^2 + \frac{1}{\pi^2}}}. \end{aligned}$$

Lorsque k croît indéfiniment, le terme général de la somme est équivalent à $\frac{1}{k}$, ce qui vérifie que $f(x)$ n'est pas à variation bornée. Par contre lorsque k tend vers l'infini,

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{\sqrt{\left(k + \frac{\theta_k}{2}\right)^2 + \frac{1}{\pi^2}}} \sim \frac{\theta_k}{2k^2} \sim \frac{1}{2k^2},$$

puisque θ_k tend vers 1; cette équivalence montre que $V_n[0, 1] - 2\,\mathrm{Log}\,n$ a une limite finie lorsque n augmente indéfiniment. Ainsi, $\omega_n[0, 1]$ est équivalent à $\frac{2}{n}\mathrm{Log}\,n$, et, comme annoncé, $\omega_\infty[0, 1] = 0$.

27. Pour $|f(x)|$, la partition qui fournit la variation d'ordre n doit utiliser les zéros ξ_k et $\frac{1}{k}$ de $f'(x)$ et de $f(x)$, de manière à faire l'addition du plus grand nombre possible de maximums $|f(\xi_k)|$ d'indice aussi petit

que possible; dans une telle somme, chaque $|f(\xi_k)|$ ne peut intervenir que deux fois au plus, et apparaît effectivement deux fois pour les premiers indices k utilisés. D'une manière précise, les partitions en question sont

$$\left[0,\ \xi_r,\ \frac{1}{r},\ \xi_{r-1},\ \frac{1}{r-1},\ \ldots,\ \xi_2,\ \frac{1}{2},\ \xi_1,\ 1\right] \quad \text{si} \quad n=2r,$$

et

$$\left[0,\ \frac{1}{r},\ \xi_{r-1},\ \frac{1}{r-1},\ \ldots,\ \xi_2,\ \frac{1}{2},\ \xi_1,\ 1\right] \quad \text{si} \quad n=2r-1.$$

Suivant le cas, on a ainsi

$$V_n[\,|f|;\ 0,\ 1\,]=\begin{cases} 2\displaystyle\sum_{k=1}^{r}|f(\xi_k)\,|, & n=2r,\\ 2\displaystyle\sum_{k=1}^{r-1}|f(\xi_k)\,|+|f(\xi_r)\,|, & n=2r-1.\end{cases}$$

Dans les deux cas, la somme obtenue est équivalente à $2\operatorname{Log}\frac{n}{2}$, et l'on a encore, comme prévu,

$$\omega_\infty[\,|f|;\ 0,\ 1\,]=0.$$

Ce sont les mêmes substitutions qui fournissent $V_n[\,|f|^p;\ 0,\ 1]$, quel que soit l'exposant positif p, donc

$$V_n[\,|f|^p;\ 0,\ 1\,]=\begin{cases} 2\displaystyle\sum_{k=1}^{r}|f(\xi_k)\,|^p, & n=2r,\\ 2\displaystyle\sum_{k=1}^{r-1}|f(\xi_k)\,|^p+|f(\xi_r)\,|^p, & n=2r-1.\end{cases}$$

Lorsque k tend vers l'infini, le terme général de ces sommes vérifie la relation d'équivalence

$$\frac{1}{k^p}-|f(\xi_k)\,|^p\sim\frac{p\,\theta_k}{2\,k^{p+1}}\sim\frac{p}{2\,k^{p+1}}.$$

Le dernier membre est le terme général d'une série convergente. Si donc $p>1$, $V_n[\,|f|^p;\ 0,\ 1]$ est borné et $|f(x)|^p$ est à variation bornée, tandis que pour $0<p<1$,

$$V_n[\,|f|^p;\ 0,\ 1\,]\sim 2\sum_{k=1}^{r}\frac{1}{k^p}\sim\frac{2\,r^{1-p}}{1-p}\sim\frac{2^p\,n^{1-p}}{1-p},$$

donc

$$\omega_n[\,|f|^p;\ 0,\ 1\,]\sim\frac{2^p}{(1-p)\,n^p}$$

tend bien vers zéro quand n tend vers l'infini.