Annales scientifiques de l'É.N.S.

P. Bernat

Sur les représentations unitaires des groupes de Lie résolubles

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 82, nº 1 (1965), p. 37-99
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1965_3_82_1_37_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
3e série, t. 82, 1965, p. 37 à 99.

SUR LES REPRÉSENTATIONS UNITAIRES DES GROUPES DE LIE RÉSOLUBLES (1)

PAR M. P. BERNAT.

INTRODUCTION.

L'étude des représentations unitaires des groupes de Lie résolubles soulève encore de nombreux problèmes. En particulier, on ne sait toujours pas caractériser les groupes de Lie résolubles réels de type I. O. Takenouchi [13], puis J. Dixmier [6] ont déterminé de larges classes de tels groupes, et F. I. Mautner [10] a donné l'exemple d'un groupe de Lie résoluble réel de dimension 5 qui n'est pas de type I. Ces travaux mettent toutefois en évidence le rôle important pour ce genre de question, du concept de racine [2]. En outre, la théorie des représentations induites, due, dans le cas de dimension infinie, à G. W. Mackey [8], semble bien constituer l'outil essentiel dans cet ordre de recherches.

Les représentations unitaires des groupes de Lie nilpotents réels simplement connexes, par contre, on fait l'objet d'études assez complètes. Ces groupes sont de type I [13]. En 1957, J. Dixmier obtint pour tous ces groupes une formule de Plancherel « concrète » [3], formule qu'il explicita dans de nombreux cas particuliers [5].

Ces résultats furent complétés par A. A. Kirillov dans sa thèse [7] dont nous allons énoncer sommairement quelques résultats.

Soient :

G un groupe de Lie nilpotent réel simplement connexe;

$\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie;

$\mathfrak{g}^\star$ l'espace vectoriel dual de $\mathfrak{g}$;

$\hat{G}$ le dual de G, i. e. l'ensemble des classes d'équivalence unitaire de représentations unitaires irréductibles de G.

(1) *Thèse Sc. math.*, Paris, 1964.

Le groupe G opère dans $\mathfrak{g}$ par la représentation adjointe Ad et dans $\mathfrak{g}^\star$ par la représentation contragrédiente de Ad. Notons Ω l'ensemble des orbites de $\mathfrak{g}^\star$ sous l'action de G.

Un élément f de $\mathfrak{g}^\star$ étant donné, convenons de dire avec Kirillov qu'une sous-algèbre $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ est subordonnée à f si $f \mid [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] = 0$. A tout couple $(f, \mathfrak{h})$ formé d'un élément f de $\mathfrak{g}^\star$ et d'une sous-algèbre $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ subordonnée à f est associée une représentation unitaire $\rho(f, \mathfrak{h})$ de G construite comme suit; la restriction à $\mathfrak{h}$ de la forme linéaire f définit un caractère $\chi(f, \mathfrak{h})$ du sous-groupe $H = \exp \mathfrak{h}$, caractère qui s'identifie à une représentation unitaire de dimension 1 de H : pour tout $x \in \mathfrak{h}$, on a

$$\chi(f, \mathfrak{h})\,(\exp x) = \exp\left(\sqrt{-1}\, f(x)\right);$$

la représentation $\rho(f, \mathfrak{h})$ est alors par définition la représentation unitaire de G induite par $\chi(f, \mathfrak{h})$. Nous dirons que de telles représentations sont obtenues à partir de f.

Dans ces conditions, Kirillov montre d'abord que les sous-algèbres $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ subordonnées à un élément donné f de $\mathfrak{g}^\star$ telles que $\rho(f, \mathfrak{h})$ soit irréductible sont caractérisées par la propriété d'être de dimension maximale parmi les algèbres subordonnées à f. Il établit ensuite que si $\mathfrak{h}_1$ et $\mathfrak{h}_2$ sont deux telles sous-algèbres, alors $\rho(f, \mathfrak{h}_1) \simeq \rho(f, \mathfrak{h}_2)$. On en déduit facilement que si f_1 et f_2 sont deux éléments d'une même orbite ω de Ω, et si $\mathfrak{h}_1$ (resp. $\mathfrak{h}_2$) est une sous-algèbre subordonnée à f_1 (resp. f_2) de dimension maximale, alors $\rho(f_1, \mathfrak{h}_1) \simeq \rho(f_2, \mathfrak{h}_2)$. Cela permet de définir canoniquement une application Ψ de Ω dans $\hat{G}$: l'image $\Psi(\omega)$ d'un élément ω de Ω est la classe d'équivalence des représentations unitaires irréductibles obtenues à partir des éléments de ω. Kirillov montre ensuite que Ψ est bijectif. Ces résultats lui permettent d'analyser les relations entre les représentations unitaires de G et celles de ses sous-groupes fermés.

Kirillov conjecture en terminant qu'un certain nombre de ses résultats, et en particulier ceux que nous venons d'énoncer, restent valables pour une large classe de groupes de Lie résolubles. C'est l'étude de quelques-unes des généralisations ainsi proposées qui fait l'objet du présent travail.

Soient G un groupe de Lie réel connexe, $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie. Disons que G est *exponentiel* si l'application exponentielle $\mathfrak{g} \to G$ est surjective. Disons que G *est complètement résoluble* si G est résoluble et si $\mathfrak{g}$ admet, pour sa structure de $\mathfrak{g}$-module, une suite de composition à quotients de dimension 1. On a les implications : G nilpotent $\Rightarrow$ G complètement résoluble $\Rightarrow$ G exponentiel, mais les réciproques sont loin d'être exactes [2].

Soient G un groupe exponentiel résoluble simplement connexe; $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}^\star$, Ω, $\hat{G}$ définis comme plus haut. Pour tout $f \in \mathfrak{g}^\star$ nous pouvons comme Kirillov définir les sous-algèbres de $\mathfrak{g}$ subordonnées à f, et si $\mathfrak{h}$ est une telle sous-algèbre, lui associer une représentation $\rho(f, \mathfrak{h})$ de G. On peut alors définir de manière canonique une correspondance Ψ entre Ω et $\hat{G}$: pour tout $\omega \in \Omega$, $\Psi(\omega)$ est l'ensemble des classes d'équivalence des représentations unitaires irréductibles de la forme $\rho(f, \mathfrak{h})$, avec $f \in \omega$ et $\mathfrak{h}$ subordonnée à f. Soient alors (A) et (B) les conjectures suivantes :

(A) Étant donnés un élément f de $\mathfrak{g}$ et une sous-algèbre $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ subordonnée à f, pour que $\rho(f, \mathfrak{h})$ soit irréductible, il faut et il suffit que $\mathfrak{h}$ soit de dimension maximale parmi les sous-algèbres subordonnées à f.

(B) La correspondance Ψ est une application bijective de Ω sur $\hat{G}$.

Nous montrons que (B) est vraie quel que soit le groupe exponentiel résoluble simplement connexe G; par contre, nous donnons une réponse négative à la conjecture (A). Plus précisément, nous montrons ce qui suit :

1. Un élément f de $\mathfrak{g}^*$ et une sous-algèbre $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ étant donnés, il ne suffit pas en général que $\mathfrak{h}$ soit de dimension maximale parmi les sous-algèbres subordonnées à f pour que $\rho(f, \mathfrak{h})$ soit irréductible; et ceci — contrairement à ce que semblait penser Kirillov — même si G est complètement résoluble. On a même un résultat curieux (chap. IV, prop. 3.3) qui peut s'interpréter, de manière imagée, comme suit : parmi les groupes exponentiels résolubles simplement connexes, ce sont les groupes complètement résolubles non nilpotents qui mettent le plus facilement en défaut le critère de maximalité obtenu par Kirillov dans le cas nilpotent.

2. Un élément f de $\mathfrak{g}^*$ et une sous-algèbre $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ subordonnée à f étant donnés, pour que $\rho(f, \mathfrak{h})$ soit irréductible, il faut que $\mathfrak{h}$ possède une certaine propriété (P), beaucoup plus forte en général que la propriété de maximalité considérée par Kirillov.

Essentiellement orienté vers la démonstration de ces résultats, notre exposé s'ordonne comme suit.

Le rappel des éléments de la théorie des représentations induites dont nous aurons besoin fait l'objet du paragraphe 1 du chapitre I. Le reste du chapitre est consacré à une classification des groupes exponentiels résolubles simplement connexes. Cette classification, esquissée déjà par Takenouchi [13], est d'ailleurs d'un intérêt purement technique. Le chapitre II groupe quelques lemmes; nous y étudions les propriétés de réductibilité ou d'équivalence de certaines représentations induites. Au chapitre III est établie l'existence pour tout groupe exponentiel résoluble simplement connexe G, d'une bijection canonique de Ω sur $\hat{G}$. Le chapitre IV est consacré à l'étude de la conjecture (A) énoncée plus haut et y apporte, comme il a été dit, une réponse essentiellement négative. Les principaux résultats de ce travail ont été résumés dans deux notes aux *Compte-rendus de l'Académie des Sciences* (256, 1963, p. 5035 ; 258, 1964, p. 5311).

NOTATIONS ET TERMINOLOGIE.

La lettre $\mathbf{C}$ (resp. $\mathbf{R}$, $\mathbf{N}$) désigne le corps des nombres complexes (resp. le corps des nombres réels, l'ensemble des entiers naturels); sauf spécification contraire, i désigne une racine carrée de -1 dans $\mathbf{C}$.

Soient E un ensemble, F une partie de E, φ une application de E; la restriction de φ à F est notée $\varphi \mid F$. Si E est un espace vectoriel et si φ est une forme linéaire sur E, on note $\operatorname{Ker}\varphi$ le sous-espace $\varphi^{-1}(\{0\})$. Si E est une famille de sous-espaces d'un espace vectoriel de dimension finie, on note $\mathcal{M}(E)$ l'ensemble des éléments de E de dimension maximum.

Soient :

$\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie réelle de dimension finie;

$\mathfrak{p}$ un idéal de $\mathfrak{g}$;

f une forme linéaire sur $\mathfrak{g}$.

On note :

$\mathfrak{g}^*$ l'espace vectoriel dual de $\mathfrak{g}$;

$\mathfrak{c}(\mathfrak{g})$ ou, si aucune confusion n'est à craindre, $\mathfrak{c}$ le centre de $\mathfrak{g}$;

$\mathfrak{z}(\mathfrak{p})$ le centralisateur de $\mathfrak{p}$ dans $\mathfrak{g}$, i. e. l'idéal de $\mathfrak{g}$ formé des $x \in \mathfrak{g}$ tels que $[x, \mathfrak{p}] = \{0\}$;

$\mathfrak{g}(f, \mathfrak{p})$ le transporteur de $\mathfrak{p} \cap \operatorname{Ker} f$ dans lui-même, i. e. la sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ formée des $x \in \mathfrak{g}$ tels que

$$[x, \mathfrak{p} \cap \operatorname{Ker} f] \subset \mathfrak{p} \cap \operatorname{Ker} f.$$

Si I est une famille d'idéaux de $\mathfrak{g}$, un élément de I sera dit *minimal* s'il est minimal parmi les idéaux $\neq \{0\}$ de I.

Enfin, l'équivalence unitaire de représentations sera notée $\simeq$.

Une référence telle que (3.1) renvoie au paragraphe 3.1 du chapitre où elle figure; une référence telle que (I, 2.1) renvoie au paragraphe 2.1 du chapitre I.

CHAPITRE I.

1. Représentations induites.

1.1. Soit G_0 un groupe localement compact séparable; il agit dans lui-même et dans ses sous-groupes distingués par les automorphismes intérieurs. Soient E une partie de G_0, g, h, ... des éléments de G_0; nous noterons h^g l'élément ghg^{-1} de G_0 transformé de h par g et nous noterons E^g l'ensemble des transformés par g des éléments de E. Si E est un sous-groupe commutatif distingué fermé de G_0, alors G_0 agit dans le dual $\hat{E}$ de E : si $\chi \in \hat{E}$, le transformé de χ par g, que nous noterons χ^g, est défini par l'égalité $\chi^g(h) = \chi(h^g)$ pour tout $h \in E$. Le *stabilisateur* de χ est l'ensemble des éléments g de G_0 tels que $\chi^g = \chi$; c'est un sous-groupe fermé de G_0. S'il existe en outre une famille dénombrable $(\hat{E}_i)$ de parties boréliennes de $\hat{E}$ stables par G_0 qui séparent les orbites de $\hat{E}$ sous l'action de G_0, nous dirons avec Mackey [9] que E est *régulièrement plongé* dans G_0.

1.2. A tout couple (G', ρ) formé d'un sous-groupe fermé G' de G_0 et d'une représentation unitaire ρ de G', Mackey associe une représentation unitaire de G_0 qu'il appelle la représentation de G_0 *induite* par ρ. Nous noterons $\operatorname{Ind}(\rho, G_0)$ cette représentation. Si ρ' est une représentation de G' équivalente à ρ, alors les représentations $\operatorname{Ind}(\rho', G_0)$ et $\operatorname{Ind}(\rho, G_0)$ sont équivalentes [8].

1.3. Nous utiliserons les propriétés suivantes des représentations induites. Soient :

G_0 un groupe localement compact séparable;

g un élément de G_0;

A un sous-groupe commutatif distingué fermé régulièrement plongé dans G_0;

χ un élément du dual $\hat{A}$ de A;

G_χ le stabilisateur de χ;

G_1 et G_2 deux sous-groupes fermés de G_0;

ρ une représentation unitaire de G_2.

Alors :

a. Si $G_2 \subset G_1$, les représentations $\operatorname{Ind}(\rho, G_0)$ et $\operatorname{Ind}(\operatorname{Ind}(\rho, G_1), G_0)$ sont équivalentes ([8], th. 4.1).

b. Si ρ est réductible, alors $\operatorname{Ind}(\rho, G_0)$ est également réductible ([8], th. 10.1).

c. Si $G_0 = G_1 \times G_2$ et si G_1 n'est pas réduit à l'élément neutre, $\mathrm{Ind}(\rho, G_0)$ est alors réductible.

d. Si $G_1 = (G_2)^g$, on peut définir une représentation ρ^g de G_1 par l'égalité

$$(\rho^g)_{kg} = \rho_k \quad \text{pour tout } k \in G_2.$$

Les représentations $\mathrm{Ind}(\rho, G_0)$ et $\mathrm{Ind}(\rho^g, G_0)$ sont alors équivalentes.

e. Soit ρ' une représentation irréductible de G_χ dont la restriction à A soit un multiple de χ. Alors la représentation $\mathrm{Ind}(\rho', G_0)$ est irréductible et toute représentation irréductible de G_0 est équivalente à une représentation obtenue de la sorte. En outre $G_{\chi^{g^{-1}}} = (G_\chi)^g$ et (cela résulte de *d*), la représentation de G_0 induite par la représentation $(\rho')^g$ de $G_{\chi^{g^{-1}}}$ est équivalente à $\mathrm{Ind}(\rho', G_0)$. Par ailleurs si ρ'' est une représentation irréductible de G_χ dont la restriction à A est un multiple de χ, et si $\mathrm{Ind}(\rho', G_0) \simeq \mathrm{Ind}(\rho'', G_0)$, alors $\rho' \simeq \rho''$ [9].

2. GROUPES EXPONENTIELS ET GROUPES COMPLÈTEMENT RÉSOLUBLES. — Soient G_0 un groupe de Lie réel connexe et $\mathfrak{g}_0$ son algèbre de Lie. Nous dirons que G_0 est *exponentiel* si l'application exponentielle $\mathfrak{g}_0 \to G_0$ est surjective. Nous dirons qu'une algèbre de Lie est *exponentielle* si c'est l'algèbre de Lie d'un groupe exponentiel.

Nous dirons qu'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}_0$ est *complètement résoluble* si elle est réelle et si elle admet pour sa structure de $\mathfrak{g}_0$-module une suite de composition à quotients de dimension 1. Nous dirons qu'un groupe de Lie réel connexe est *complètement résoluble* si son algèbre de Lie est complètement résoluble.

La classe des groupes exponentiels contient celle des groupes complètement résolubles et donc en particulier celle des groupes de Lie nilpotents réels connexes [2].

3. GROUPES EXPONENTIELS RÉSOLUBLES SIMPLEMENT CONNEXES.

3.1. *Propriétés élémentaires. Notations.* — Désormais nous désignerons par :

G un groupe exponentiel résoluble simplement connexe;
$\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G;
exp l'application exponentielle $\mathfrak{g} \to G$.

Il résulte de [11] que tout sous-groupe fermé connexe (et donc simplement connexe [1]) de G est exponentiel; et que exp est un isomorphisme de variété de $\mathfrak{g}$ sur G qui met en correspondance bijective l'ensemble des sous-algèbres de $\mathfrak{g}$ et celui des sous-groupes fermés connexes de G.

Soient en outre g, $h \in G$, $x \in \mathfrak{g}$, $f \in \mathfrak{g}^\star$; $\mathfrak{h}$ un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}$; A un sous-groupe commutatif distingué fermé de G, a un élément de A; $\hat{A}$ l'ensemble des caractères de A et χ un élément de $\hat{A}$. Le groupe G agit dans lui-même et dans A par les automorphismes intérieurs, dans $\mathfrak{g}$ par la représentation adjointe Ad, dans $\mathfrak{g}^\star$ par la représentation contragrédiente de Ad, et dans $\hat{A}$. On notera h^g (resp. x^g, f^g, χ^g) le transformé de h (resp. x, f, χ) par g. Par conséquent $h^g = ghg^{-1}$; f^g est l'application $x \to f(x^{g^{-1}})$; χ^g est l'application $a \to \chi(a^g)$. Si u est l'élément de $\mathfrak{g}$ tel que $g = \exp u$, alors $x^g = \exp \operatorname{ad} u . x$. On notera $\mathfrak{h}^g$ le sous-espace formé des x^g pour $x \in \mathfrak{h}$. Si $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre (resp. un idéal), alors $\mathfrak{h}^g$ est une sous-algèbre (resp. $\mathfrak{h}^g = \mathfrak{h}$).

L'ensemble des transformés par les éléments de G d'un point quelconque, fixé, de l'un des ensembles G, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}^\star$, $\hat{A}$, sera dit l'*orbite* de ce point. L'orbite de f sera notée ω_f, et l'ensemble des ω_f lorsque f parcourt $\mathfrak{g}^\star$, sera noté Ω.

3.2. *Représentations unitaires de* G *associées à un élément de* $\mathfrak{g}^\star$. — Conformément à l'usage, nous appellerons *dual* de G et noterons $\hat{G}$ l'ensemble des classes d'équivalence unitaire de représentations unitaires irréductibles de G. *Toutes les représentations que nous introduirons seront unitaires.*

Soit $f \in \mathfrak{g}^\star$. Une sous-algèbre $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ sera dite *subordonnée* à f si $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset \operatorname{Ker} f$, ou encore : $f \mid [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] = 0$; alors $f \mid \mathfrak{h}$ définit un caractère de $\exp \mathfrak{h}$, qu'on notera $\chi(f, \mathfrak{h})$: pour $u \in \mathfrak{h}$, on a $\chi(f, \mathfrak{h})(\exp u) = \exp i . f(u)$. Le caractère $\chi(f, \mathfrak{h})$ s'identifie à une représentation unitaire de dimension 1 de $\exp \mathfrak{h}$. Nous noterons $\rho(f, \mathfrak{h})$ la représentation unitaire de G induite par $\chi(f, \mathfrak{h})$. Nous noterons en outre :

S(f) l'ensemble des sous-algèbres subordonnées à f;
I(f) l'ensemble des $\mathfrak{h} \in S(f)$ telles que $\rho(f, \mathfrak{h})$ soit irréductible.

Donc $I(f) \subset S(f)$. Remarquons enfin que, pour tout $g \in G$, $\mathfrak{h} \in S(f)$ implique $\mathfrak{h}^g \in S(f^g)$ et par conséquent (1.3, *d*), $\rho(f, \mathfrak{h}) \simeq \rho(f^g, \mathfrak{h}^g)$.

3.3. *Structure de* $\mathfrak{g}$.

3.3.1. *Racines de* $\mathfrak{g}$. — Soit $(S) = (\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \supset \mathfrak{g}_2 \supset \ldots \supset \mathfrak{g}_k \supset \mathfrak{g}_{k+1} = \{0\})$ une suite de Jordan-Hölder du $\mathfrak{g}$-module $\mathfrak{g}$ (les $\mathfrak{g}_j$ sont donc des idéaux de $\mathfrak{g}$).

Comme G est résoluble, il résulte du théorème de Lie que, pour $j = 1, \ldots, k$:

1. $\dim \mathfrak{g}_j / \mathfrak{g}_{j+1} \leqq 2$;
2. si $\dim \mathfrak{g}_j / \mathfrak{g}_{j+1} = 1$, alors, pour tout supplémentaire $\mathfrak{g}'_j$ de $\mathfrak{g}_{j+1}$ dans $\mathfrak{g}_j$, il existe un élément non nul a_j de $\mathfrak{g}'_j$, un élément ψ_j de $\mathfrak{g}^\star$ et une application linéaire $u_j : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}_{j+1}$ tels qu'on ait pour tout $x \in \mathfrak{g}$:

$$[x, a_j] = \psi_j(x)\, a_j + u_j(x);$$

3. si $\dim \mathfrak{g}_j / \mathfrak{g}_{j+1} = 2$, alors, pour tout supplémentaire $\mathfrak{g}'_j$ de $\mathfrak{g}_{j+1}$ dans $\mathfrak{g}_j$ il existe :

— une base (a_j, a'_j) de $\mathfrak{g}'_j$;
— deux éléments ψ_j, ψ'_j de $\mathfrak{g}^\star$, ψ'_j étant non nul;

— deux applications linéaires u_j, u'_j de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g}_{j+1}$ telles qu'on ait, pour tout $x \in \mathfrak{g}$:

$$[x, a_j] = \psi_j(x)\, a_j - \psi'_j(x)\, a'_j + u_j(x),$$
$$[x, a'_j] = \psi'_j(x)\, a_j + \psi_j(x)\, a'_j + u'_j(x).$$

A la suite (S) correspond de manière évidente des suites de Jordan-Hölder du $\tilde{\mathfrak{g}}$-module $\tilde{\mathfrak{g}}$, $\tilde{\mathfrak{g}}$ désignant l'algèbre de Lie complexifiée de $\mathfrak{g}$. Soit $(\tilde{S})$ l'une d'entre elles. Les quotients successifs de $(\tilde{S})$ sont de dimension 1 et l'action de $\tilde{\mathfrak{g}}$ sur ces quotients est définie par des formes linéaires sur $\tilde{\mathfrak{g}}$ indépendantes, à l'ordre près, du choix de (S) et de $(\tilde{S})$, ainsi qu'il résulte du théorème de Jordan-Hölder. Avec J. Dixmier [2], nous appellerons *racines* de $\mathfrak{g}$ ces formes linéaires. Identifiant $\mathfrak{g}^*$ à une partie de l'espace vectoriel dual de $\tilde{\mathfrak{g}}$, et posant $\psi'_j = 0$ pour les indices j tels que $\dim \mathfrak{g}_j/\mathfrak{g}_{j+1} = 1$ on voit que les racines de $\mathfrak{g}$ sont les formes linéaires $\psi_j \pm i\psi'_j$. On peut donc dire, en un sens évident, que les racines sont ou réelles ou deux à deux imaginaires conjuguées.

Par ailleurs, comme G est exponentiel, il résulte de [12] (th. 1) que, pour $j = 1, \ldots, k$, ψ'_j est proportionnel à ψ_j. Cette propriété des racines caractérise les algèbres de Lie exponentielles [*ibid.*]. En particulier, si j est un indice tel que $\dim \mathfrak{g}_j/\mathfrak{g}_{j+1} = 2$, on a $\psi_j \neq 0$ et il existe un nombre réel non nul α_j tel que $\psi'_j = \alpha_j \psi_j$.

3.3.2. *Idéaux de* $\mathfrak{g}$. — Nous noterons $\mathfrak{c}$ le centre $\mathfrak{c}(\mathfrak{g})$ de $\mathfrak{g}$ et nous dirons qu'un idéal $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{g}$ est *disjoint* de $\mathfrak{c}$ si $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{c} = \{0\}$.

Soit $\mathfrak{p}$ un idéal minimal de $\mathfrak{g}$. Il existe alors une suite de Jordan-Hölder du $\mathfrak{g}$-module $\mathfrak{g}$ dont $\mathfrak{p}$ est l'avant-dernier terme. Il résulte dans ces conditions du paragraphe précédent que $\mathfrak{p}$ est commutatif, $\dim \mathfrak{p} \leq 2$ et qu'en outre deux éventualités seulement sont possibles : ou bien $\mathfrak{p}$ est disjoint de $\mathfrak{c}$, ou bien $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{c}$ et alors $\dim \mathfrak{p} = 1$.

Par ailleurs, il est clair qu'un idéal disjoint de $\mathfrak{c}$ est minimal (parmi les idéaux de $\mathfrak{g}$) si et seulement si il est minimal parmi les idéaux disjoints de $\mathfrak{c}$: on peut donc sans ambiguïté parler des idéaux disjoints de $\mathfrak{c}$ minimaux. Nous noterons $D(\mathfrak{g})$ l'ensemble des idéaux disjoints de $\mathfrak{c}$ minimaux et désignerons par $\mathfrak{a}_0(\mathfrak{g})$, ou simplement $\mathfrak{a}_0$, l'idéal égal à :

— $\{0\}$ si $D(\mathfrak{g}) = \emptyset$;
— la somme des idéaux de $D(\mathfrak{g})$ si $D(\mathfrak{g}) \neq \emptyset$.

En outre, par analogie avec le cas associatif, nous appellerons *socle* de $\mathfrak{g}$ la somme des idéaux minimaux de $\mathfrak{g}$. Le socle sera noté $\mathfrak{s}(\mathfrak{g})$, ou simplement $\mathfrak{s}$. Il résulte de ce qu'on vient de voir que $\mathfrak{s} = \mathfrak{a}_0 + \mathfrak{c}$.

L'idéal $\mathfrak{s}$ *est commutatif*. Il suffit, pour le voir, de vérifier que si $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$ sont deux idéaux minimaux de $\mathfrak{g}$, alors $[\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2] = \{0\}$. C'est clair si $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}_2$, car on a vu que tout idéal minimal est commutatif; si $\mathfrak{p}_1 \neq \mathfrak{p}_2$, alors $[\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2] \subset \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2$ est la minimalité de $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$ implique alors $\mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2 = \{0\}$.

Il s'ensuit en particulier que $\mathfrak{a}_0$ est commutatif.

4. Classification des groupes exponentiels résolubles simplement connexes. — Nous noterons C le centre de G. Il résulte de [11] (th. 2) que C est connexe et donc $C = \exp \mathfrak{c}$. Cela étant, nous établirons comme suit une classification des groupes exponentiels résolubles simplement connexes.

4.1. Nous dirons que G est de *genre A* si $D(\mathfrak{g}) \neq \emptyset$. Soit alors $\mathfrak{a} \in D(\mathfrak{g})$. On sait que $\mathfrak{a}$ est commutatif et que $\dim \mathfrak{a} \leq 2$. Il résulte en outre du paragraphe 3.3.1 que :

— si $\dim \mathfrak{a} = 1$, alors il existe un élément non nul a de $\mathfrak{a}$ et un élément non nul ψ de $\mathfrak{g}^\star$ tels qu'on ait, pour tout $x \in \mathfrak{g}$:

$$[x, a] = \psi(x) a;$$

— si $\dim \mathfrak{a} = 2$, alors il existe une base (a, a') de $\mathfrak{a}$, un élément non nul ψ de $\mathfrak{g}^\star$, et un nombre réel non nul α tels qu'on ait, pour tout $x \in \mathfrak{g}$:

$$[x, a] = \psi(x)\,(a - \alpha a'),$$
$$[x, a'] = \psi(x)\,(\alpha a + a').$$

Donc, dans les deux cas, on a $\operatorname{codim}_{\mathfrak{g}} \mathfrak{z}(\mathfrak{a}) = 1$.

Pour tout $f \in \mathfrak{g}^\star$, notons G_f le stabilisateur du caractère $\chi(f, \mathfrak{a})$ de $\exp \mathfrak{a}$. Il résulte alors de [13] (p. 156), que :

— $\exp \mathfrak{a}$ est régulièrement plongé dans G;

— l'orbite de $\chi(f, \mathfrak{a})$ est simplement connexe;

— si $f | \mathfrak{a} \neq 0$, alors $\mathfrak{z}(\mathfrak{a})$ est l'algèbre de Lie de G_f.

Il s'ensuit que G_f est connexe et que si $f | \mathfrak{a} \neq 0$, alors $G_f = \exp \mathfrak{z}(\mathfrak{a})$.

4.2. Nous dirons que G est de *genre B* si $D(\mathfrak{g}) = \emptyset$ et si $\dim \mathfrak{c} > 1$. Pour tout $f \in \mathfrak{g}^\star$, il existe alors un idéal central non nul $\mathfrak{c}'$ tel que le caractère $\chi(f, \mathfrak{c}')$ du groupe $\exp \mathfrak{c}' \subset C$ soit égal à 1.

4.3. Nous dirons que G est de *genre C* si $D(\mathfrak{g}) = \emptyset$ et si $\dim \mathfrak{c} = 1$. Tout idéal non nul de $\mathfrak{g}$ contient alors $\mathfrak{c}$, car $\mathfrak{c}$ est l'unique idéal de dimension 1 de $\mathfrak{g}$. Soient :

— b un élément non nul de $\mathfrak{c}$;

— $\mathfrak{a}$ un idéal de $\mathfrak{g}$ minimal parmi les idéaux distincts de $\{0\}$ et de $\mathfrak{c}$;

— f un élément de $\mathfrak{g}^\star$.

4.3.1. Nous dirons que $\mathfrak{a}$ est un *idéal de première espèce* si $[\mathfrak{g}, \mathfrak{a}] = \mathfrak{c}$.

Soit alors a un élément de $\mathfrak{a} - \mathfrak{c}$. Comme $a \notin \mathfrak{c}$, on a $\{0\} \neq [\mathfrak{g}, \mathbf{R}a \oplus \mathfrak{c}] \subset \mathfrak{c}$ et donc $[\mathfrak{g}, \mathbf{R}a \oplus \mathfrak{c}] = \mathfrak{c}$. La minimalité de $\mathfrak{a}$ implique alors que $\mathfrak{a} = \mathbf{R}a \oplus \mathfrak{c}$

et par suite que $\mathfrak{a}$ est commutatif. Il existe dans ces conditions un élément non nul λ de $\mathfrak{g}^\star$ tel qu'on ait, pour tout $x \in \mathfrak{g}$:

$$[x, a] = \lambda(x) b$$

et par conséquent :

$$\mathfrak{z}(\mathfrak{a}) = \operatorname{Ker}\lambda, \qquad \operatorname{codim}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{z}(\mathfrak{a})) = 1.$$

Notons G_f le stabilisateur du caractère $\chi(f, \mathfrak{a})$ de $\exp \mathfrak{a}$. Il résulte alors de [13] (p. 156-157), que :

— $\exp \mathfrak{a}$ est régulièrement plongé dans G;
— l'orbite de $\chi(f, \mathfrak{a})$ est simplement connexe;
— si $f \mid \mathfrak{c}$ est $\neq 0$, alors $\mathfrak{z}(\mathfrak{a})$ est l'algèbre de Lie de G_f.

Il s'ensuit que G_f est connexe et que, si $f \mid \mathfrak{c} \neq 0$, alors $G_f = \exp \mathfrak{z}(\mathfrak{a})$.

4.3.2. Nous dirons que $\mathfrak{a}$ est un *idéal de deuxième espèce* si $\dim \mathfrak{a} = 2$ et $[\mathfrak{g}, \mathfrak{a}] \neq \mathfrak{c}$.

Soit alors a un élément de $\mathfrak{a} - \mathfrak{c}$. Il existe dans ces conditions deux éléments λ, ψ de $\mathfrak{g}^\star$ tels qu'on ait, pour tout $x \in \mathfrak{g}$:

$$[x, a] = \psi(x) a + \lambda(x) b.$$

Il est clair que $\psi \neq 0$: sinon on aurait $[\mathfrak{g}, \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{c}$ et par suite $[\mathfrak{g}, \mathfrak{a}] = \mathfrak{c}$. Si par ailleurs il existait un nombre réel α tel que $\lambda = \alpha\psi$, alors on aurait

$$[x, a + \alpha b] = [x, a] = \psi(x)\ (a + \alpha b)$$

et par suite $\mathbf{R}(a + \alpha b) \in D(\mathfrak{g})$, ce qui est exclu. Donc λ et ψ *sont linéairement indépendants.*

Notons que $\mathfrak{a}$ est commutatif. Soit G_f le stabilisateur du caractère $\chi(f, \mathfrak{a})$ de $\exp \mathfrak{a}$. Il résulte alors de [13] (p. 157), que :

— $\exp \mathfrak{a}$ est régulièrement plongé dans G;
— l'orbite de $\chi(f, \mathfrak{a})$ est simplement connexe;
— si $f \mid \mathfrak{c} \neq 0$, alors $G_f \neq G$.

Il s'ensuit en particulier que le groupe G_f est connexe.

4.3.3. Nous dirons que $\mathfrak{a}$ est un idéal de *troisième espèce* si $\dim \mathfrak{a} = 3$. Il résulte alors du paragraphe 3.3.1 que, pour tout supplémentaire $\mathfrak{k}$ de $\mathfrak{c}$ dans $\mathfrak{a}$, il existe une base (a, a') de $\mathfrak{k}$, un élément non nul ψ de $\mathfrak{g}^\star$, deux éléments λ, μ de $\mathfrak{g}^\star$, et un nombre réel non nul α tels qu'on ait pour tout $x \in \mathfrak{g}$:

$$\text{(1)} \qquad \begin{cases} [x, a] = \psi(x)\ (a - \alpha a') + \lambda(x) b, \\ [x, a'] = \psi(x)\ (\alpha a + a') + \mu(x) b. \end{cases}$$

Je dis que ψ, λ, μ sont linéairement indépendants.

Pour le voir, nous ferons d'abord les remarques suivantes.

R_1. La donnée de quatre nombres réels β, γ, δ, ε tels que $\beta^2+\gamma^2\neq 0$ définit un automorphisme $\sigma=\sigma(\beta, \gamma, \delta, \varepsilon)$ de l'espace vectoriel $\mathfrak{a}$ si l'on pose

$$(2)\qquad \begin{cases} \sigma(a) = a_\sigma = \beta a - \gamma a' + \delta b, \\ \sigma(a') = a'_\sigma = \gamma a + \beta a' + \varepsilon b, \\ \sigma(b) = b_\sigma = b. \end{cases}$$

Par rapport à la base $(a_\sigma, a'_\sigma, b_\sigma)$, l'action de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{a}$ s'exprime alors par les formules

$$\begin{aligned} [x, a_\sigma] &= \beta[x, a] - \gamma[x, a'] \\ &= \psi(x)\,((\beta a - \gamma a') - \alpha(\gamma a + \beta a')) + (\beta\lambda(x) - \gamma\mu(x))\,b, \\ [x, a'_\sigma] &= \gamma[x, a] + \beta[x, a'] \\ &= \psi(x)\,(\alpha(\beta a - \gamma a') + (\gamma a + \beta a')) + (\gamma\lambda(x) + \beta\mu(x))\,b. \end{aligned}$$

Soit

$$(3)\qquad \begin{cases} [x, a_\sigma] = \psi(x)\,(a_\sigma - \alpha a'_\sigma) + \lambda_\sigma(x)\,b, \\ [x, a'_\sigma] = \psi(x)\,(\alpha a_\sigma + a'_\sigma) + \mu_\sigma(x)\,b, \end{cases}$$

avec

$$(4)\qquad \begin{cases} \lambda_\sigma = \beta\lambda - \gamma\mu - (\delta - \alpha\varepsilon)\,\psi, \\ \mu_\sigma = \gamma\lambda + \beta\mu - (\alpha\,\delta + \varepsilon)\,\psi. \end{cases}$$

Soient par ailleurs β', γ', δ', ε' quatre nombres réels tels que $\beta'^2+\gamma'^2\neq 0$. On vérifie aussitôt que

$$\sigma(\beta, \gamma, \delta, \varepsilon).\sigma(\beta', \gamma', \delta', \varepsilon') = \sigma(\beta\beta' - \gamma\gamma', \beta\gamma' + \beta'\gamma, \delta + \beta\,\delta' - \gamma\varepsilon', \varepsilon + \gamma\,\delta' + \beta\varepsilon').$$

Posant en outre $\Delta = \beta^2+\gamma^2$, $\Delta' = \beta'^2+\gamma'^2$, on obtient facilement que

$$(\beta\beta' - \gamma\gamma')^2 + (\beta\gamma' + \beta'\gamma)^2 = \Delta\Delta' \neq 0$$

et

$$\sigma(\beta, \gamma, \delta, \varepsilon)^{-1} = \sigma(\beta\,\Delta^{-1}, -\gamma\,\Delta^{-1}, -(\beta\,\delta + \gamma\varepsilon)\,\Delta^{-1}, -(\beta\varepsilon - \gamma\delta)\,\Delta^{-1}),$$

ce qui montre que les automorphismes σ considérés forment un groupe $\mathcal{G}$.

R_2. Les formes linéaires λ, μ ne peuvent être toutes deux proportionnelles à ψ.

Supposons en effet qu'il existe deux nombres réels δ_1, ε_1 tels que $\lambda = \delta_1\psi$ et $\mu = \varepsilon_1\psi$. Posant $\sigma_1 = \sigma(1, \alpha, \delta_1, \varepsilon_1)$, on déduit alors de (4) que $\lambda_{\sigma_1} = \mu_{\sigma_1} = 0$ et donc, eu égard à (3), $\mathbf{R}a_1 \oplus \mathbf{R}a'_1 \in \mathrm{D}(\mathfrak{g})$, ce qui contredit l'hypothèse que G est de genre *C*.

R_3. Si $\lambda = 0$, alors μ est proportionnel à ψ.

Supposons en effet que $\lambda = 0$ et que μ et ψ soient linéairement indépendants. Il existe alors des éléments x, $y \in \mathfrak{g}$ tels que

$$\psi(x) = \mu(y) = 1 \qquad \text{et} \qquad \mu(x) = \psi(y) = 0.$$

Par ailleurs, la forme linéaire ψ, étant proportionnelle à une racine de $\mathfrak{g}$, s'annule sur l'idéal dérivé $\mathcal{D}\mathfrak{g}$ de $\mathfrak{g}$, et donc $\psi([x, y]) = 0$. Appliquant alors l'identité de Jacobi au triplet (x, y, a), on obtient

$$0 = [[x, y], a] + [[y, a], x] + [[a, x], y] = 0 + 0 + [-(a - \alpha a'), y] = \alpha b,$$

ce qui est absurde.

Cela étant, il résulte aussitôt de R_1 que les assertions R_2 et R_3 restent vraies si l'on remplace λ, μ par λ_σ, μ_σ, σ étant un élément quelconque de $\mathcal{G}$. Nous sommes donc ramenés à montrer que si λ, μ, ψ étaient linéairement dépendants, alors il existerait un élément σ de $\mathcal{G}$ tel que $\lambda_\sigma = 0$.

Si en effet il existait des nombres réels β_2, γ_2, ε_2 non tous nuls tels que

$$(5) \qquad \beta_2 \lambda - \gamma_2 \mu = \delta_2 \psi,$$

on aurait alors, puisque ψ n'est pas nul,

$$\beta_2^2 + \gamma_2^2 \neq 0.$$

Posant $\sigma_2 = \sigma(\beta_2, \gamma_2, \delta_2, 0)$, on obtiendrait, eu égard à (4),

$$\lambda_{\sigma_2} = 0.$$

Donc ψ, λ, μ sont linéairement indépendants.

Il s'ensuit en particulier qu'il existe des éléments x_0, x_1 de $\mathfrak{g}$ tels que

$$\psi(x_0) = 1, \qquad \lambda(x_0) = \mu(x_0) = \psi(x_1) = 0, \qquad \lambda(x_1) = 1$$

et par suite les éléments

$$a - \alpha a' = [x_0, a], \qquad \alpha a + \alpha' = [x_0, a'], \qquad b = [x_1, a]$$

appartiennent à $\mathcal{D}\mathfrak{g}$ et donc $\mathfrak{a} \subset \mathcal{D}\mathfrak{g} \subset \operatorname{Ker}\psi$, ce qui implique $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{c}$ (ce point était d'ailleurs évident). Par conséquent :

$$\begin{aligned} 0 &= [x_0, [a, a']] + [a, [a', x_0]] + [a', [x_0, a]], \\ &= 0 - [a, a'] + [a', a] = 2[a', a], \end{aligned}$$

ce qui montre que $\mathfrak{a}$ est commutatif.

(Signalons que ces résultats sont établis de manière plus ou moins explicite dans [13].)

Soit par ailleurs G_f le stabilisateur du caractère $\chi(f, \mathfrak{a})$ de $\exp \mathfrak{a}$. Il résulte alors de [13] (p. 158) que :

— $\exp \mathfrak{a}$ est régulièrement plongé dans G;
— l'orbite de $\chi(f, \mathfrak{a})$ est simplement connexe;
— si $f \mid \mathfrak{c} \neq 0$, alors $G_f \neq G$.

Il s'ensuit en particulier que le groupe G_f est connexe.

4.3.4. Notons enfin que, G étant toujours supposé de genre C, il résulte, d'une part de la discussion précédente, d'autre part du paragraphe 3.3.1, que :

— tout idéal de $\mathfrak{g}$ minimal parmi les idéaux distincts de $\{0\}$ et de $\mathfrak{c}$ est un idéal d'une, et d'une seule, des trois « espèces » que nous venons d'étudier;

— en particulier, $\mathfrak{g}$ possède toujours au moins un idéal de première, ou de deuxième, ou de troisième espèce.

CHAPITRE II.

Dans ce chapitre, nous dégageons un certain nombre de résultats, pour la plupart assez techniques, qui nous seront utiles aux chapitres III et IV.

LEMME 1. — *Soient* G *un groupe exponentiel résoluble simplement connexe et* $\mathfrak{g}$ *son algèbre de Lie. S'il existe un idéal* $\mathfrak{a} \in \mathrm{D}(\mathfrak{g})$ *de dimension* 2 *tel que* $\mathfrak{z}(\mathfrak{a})$ *soit le produit de* $\mathfrak{a}$ *et d'une sous-algèbre de* $\mathfrak{g}$, *alors on peut trouver une base* (a, a') *de* $\mathfrak{a}$, *un nombre réel non nul* α, *un élément* x *de* $\mathfrak{g}$ *et un sous-groupe fermé connexe* K *de* G *ayant les propriétés suivantes :*

(i) $\exp \mathfrak{z}(\mathfrak{a})$ *est le produit de* K *et de* $\exp \mathfrak{a}$;

(ii) *pour tout* $g \in \mathrm{G}$, *il existe des nombres réels* β, β', γ *et un élément* k *de* K, *déterminés de manière unique par* g, *tels que*

$$g = \exp(\beta a + \beta' a').k.\exp\gamma x;$$

(iii) *quels que soient les nombres réels* β, β', γ, *on a*

$$\begin{aligned}&\exp\gamma x.\exp(\beta a + \beta' a')\\ &\quad = \exp(e^{\gamma}(\beta\cos\alpha\gamma + \beta'\sin\alpha\gamma)\,a + e^{\gamma}(-\beta\sin\alpha\gamma + \beta'\cos\alpha\gamma)\,a').\exp\gamma x.\end{aligned}$$

Démonstration. — On sait (I, 4.1) qu'il existe une base (a, a') de $\mathfrak{a}$ et un élément x de $\mathfrak{g} - \mathfrak{z}(\mathfrak{a})$ tels qu'on ait

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{l}[x, a] = a - \alpha a' \\ [x, a'] = \alpha a + a'\end{array}\right\} \quad \text{et} \quad \mathfrak{g} = \mathfrak{z}(\mathfrak{a}) \oplus \mathbf{R}x.$$

Par hypothèse il existe une sous-algèbre $\mathfrak{k}$ de $\mathfrak{g}$ telle que $\mathfrak{z}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a}$. Posant alors $\mathrm{K} = \exp\mathfrak{k}$, on voit que G est le produit semi-direct de $\exp\mathbf{R}x$ par $\exp\mathfrak{z}(\mathfrak{a})$, et que $\exp\mathfrak{z}(\mathfrak{a})$ est le produit direct de K et de $\exp\mathfrak{a}$, ce qui montre (i) et (ii).

Se plaçant alors dans l'algèbre de Lie complexifiée $\tilde{\mathfrak{g}}$ de $\mathfrak{g}$, et identifiant $\mathfrak{g}$ à son image canonique dans $\tilde{\mathfrak{g}}$, on déduit des formules (1) que, pour $\gamma \in \mathbf{R}$:

$$\mathrm{ad}\,\gamma x\,(a + ia') = \gamma(1 + i\alpha)\,(a + ia')$$

et par suite, pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$(\operatorname{ad} \gamma x)^n (a + ia') = (\gamma(1 + i\alpha))^n (a + ia').$$

Il en résulte que

$$\exp(\operatorname{ad} \gamma x) . (a + ia') = e^{(1+i\alpha)\gamma} (a + ia').$$

Soit, séparant parties réelles et parties imaginaires :

$$\exp(\operatorname{ad} \gamma x) . a = e^{\gamma} (\cos \alpha\gamma . a - \sin \alpha\gamma . a'),$$
$$\exp(\operatorname{ad} \gamma x) . a' = e^{\gamma} (\sin \alpha\gamma . a + \cos \alpha\gamma . a')$$

et par conséquent on a, pour $\beta, \beta' \in \mathbf{R}$:

$$\exp(\operatorname{ad} \gamma x) (\beta a + \beta' a') = e^{\gamma} (\beta \cos \alpha\gamma + \beta' \sin \alpha\gamma) a + e^{\gamma} (-\beta \sin \alpha\gamma + \beta' \cos \alpha\gamma) \alpha'.$$

Par suite :

$$\begin{aligned} \exp \gamma x . \exp(\beta a + \beta' a') . \exp(-\gamma x) &= \exp(\beta a + \beta' a')^{\exp \gamma x} \\ &= \exp(\exp(\operatorname{ad} \gamma x) (\beta a + \beta' a')) \\ &= \exp(e^{\gamma} (\beta \cos \alpha\gamma + \beta' \sin \alpha\gamma) a + e^{\gamma} (-\beta \sin \alpha\gamma + \beta' \cos \alpha\gamma) a'), \end{aligned}$$

ce qui établit (iii).

LEMME 2. — *Soient :*

$\mathfrak{g}$ *une algèbre exponentielle résoluble;*
$\mathfrak{a}$ *un idéal minimal de* $\mathfrak{g}$;
$\mathfrak{h}$ *une sous-algèbre de* $\mathfrak{g}$.

Si $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{a} \neq \{0\}$ *et si* $[\mathfrak{h}, \mathfrak{a}] \neq \{0\}$, *alors*

$$\mathfrak{h} \supset [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \supset \mathfrak{a}.$$

Démonstration. — On sait (I, 3.3.2) que $\mathfrak{a}$ est commutatif et que $\dim \mathfrak{a} \leq 2$. Le résultat est trivial si $\dim \mathfrak{a} = 1$, car alors, a désignant un élément non nul de $\mathfrak{a}$, on a $a \in \mathfrak{h}$ et il existe un élément x de $\mathfrak{h}$ tel que $[x, a] = a$. Si $\dim \mathfrak{a} = 2$, alors $\mathfrak{a}$ est disjoint du centre (I, 3.3.2) et il existe (I, 4.1) une base (a, a') de $\mathfrak{a}$, un nombre réel non nul α, et une forme linéaire non nulle ψ sur $\mathfrak{g}$ tels qu'on ait, pour tout $u \in \mathfrak{g}$:

$$[u, a] = \psi(u) (a - \alpha a'),$$
$$[u, a'] = \psi(u) (\alpha a + a').$$

Il résulte alors de l'hypothèse qu'il existe des éléments a_1, x de $\mathfrak{h}$ et deux nombres réels β, β' tels que

$$a_1 = \beta a + \beta' a', \qquad \beta^2 + \beta'^2 \neq 0 \qquad \text{et} \qquad \psi(x) = 1.$$

Dans ces conditions :

$$[x, a_1] = \beta(a - \alpha a') + \beta'(\alpha a + a') = (\beta + \alpha\beta') a + (-\alpha\beta + \beta') a'$$

et par suite, comme

$$\begin{vmatrix} \beta & \beta' \\ \beta + \alpha\beta' & -\alpha\beta + \beta' \end{vmatrix} = -\alpha(\beta^2 + \beta'^2) \neq 0,$$

a_1 et $[x, a_1]$ forment une base de $\mathfrak{a}$. On montre de même que $[x, a_1]$ et $[x, [x, a_1]]$ forment une base de $\mathfrak{a}$, ce qui entraîne le résultat.

LEMME 3. — *Soient :*

G *un groupe exponentiel résoluble simplement connexe;*

$\mathfrak{g}$ *l'algèbre de Lie de* G;

$\mathfrak{a}$ *un idéal minimal de* $\mathfrak{g}$;

f *une forme linéaire sur* $\mathfrak{g}$;

$\mathfrak{h}$ *un élément de* $S(f)$ (*cf.* I, 3.2).

Si $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{a} = \{0\}$ *et si* $[\mathfrak{h}, \mathfrak{a}] \neq \{0\}$, *alors la représentation* $\rho(f, \mathfrak{h})$ *de* G (*cf.* I, 3.2) *est réductible.*

Démonstration. — Notons d'abord que $\mathfrak{a} \in D(\mathfrak{g})$: cela résulte par exemple de la démonstration du lemme précédent. Posons

$$H = \exp \mathfrak{h}, \qquad \overline{H} = \exp(\mathfrak{h} + \mathfrak{a}), \qquad A = \exp \mathfrak{a}, \qquad \rho = \operatorname{Ind}(\chi(f, \mathfrak{h}), \overline{H}).$$

Il suffit de montrer que ρ est réductible (*cf.* I, 1.3, *a* et *b*).

Nous distinguerons deux cas :

a. $\dim \mathfrak{a} = 1$: Soit a un élément non nul de $\mathfrak{a}$. Il existe alors $x \in \mathfrak{h}$ tel que $[x, a] = a$. Les sous-espaces $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{z}(\mathfrak{a})$ *et* $\mathfrak{a} + (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{z}(\mathfrak{a}))$ sont des idéaux de $\mathfrak{h} + \mathfrak{a}$. Posons, pour tout $\alpha \in \mathbf{R}$:

$$g_a(\alpha) = \exp \alpha a, \qquad g_x(\alpha) = \exp \alpha x.$$

Soient en outre $H_1 = \exp(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{z}(\mathfrak{a}))$, $X = \exp \mathbf{R}x$. Alors $\overline{H}$ est produit semi-direct des sous-groupes X et $\exp(\mathfrak{a} + (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{z}(\mathfrak{a})))$ et le sous-groupe $\exp(\mathfrak{a} + (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{z}(\mathfrak{a})))$ est produit direct de H_1 et A. Si $h \in \overline{H}$, il existe donc des nombres réels α, β et un élément h_1 de H_1 tels que

$$h = g_a(\alpha) . h_1 . g_x(\beta)$$

et l'on a par suite, pour $t \in \mathbf{R}$:

$$\begin{aligned} g_a(t)\, h &= g_a(\alpha + t) . h_1 . g_x(\beta) \\ &= h_1 . g_x(\beta) \left[(h_1 . g_x(\beta))^{-1} . g_a(\alpha + t) . h_1 . g_x(\beta) \right] \\ &= h_1 . g_x(\beta) . \left[g_x(-\beta) . g_a(\alpha + t) . g_x(\beta) \right] \\ &= h_1 . g_x(\beta) . \exp(\exp(\operatorname{ad}(-\beta x) . (\alpha + t) a)) \\ &= h_1 . g_x(\beta) . g_a(e^{-\beta}(\alpha + t)). \end{aligned}$$

On peut alors identifier l'espace de ρ à $L^2_{\mathbf{C}}(\mathbf{R})$: la mesure de Lebesgue est quasi invariante par $\overline{H}$. (Il en sera de même dans les cas que nous envisagerons plus bas, au lemme 7 notamment.)

Si donc $\varphi \in L^2_{\mathbf{C}}(\mathbf{R})$, on a

$$(\rho_h \varphi)(t) = \chi(f, h)(h_1 . g_x(\beta)) . \varphi((\alpha + t) e^{-\beta}) e^{-\frac{\beta}{2}}.$$

Effectuant la transformation de Fourier, on obtient la représentation équivalente $\tilde{\rho}$ définie par

$$(\tilde{\rho}_h \varphi)(t) = \chi(f, h)(h_1 . g_x(\beta)) \exp\left(i\alpha t + \frac{\beta}{2}\right) \varphi(e^{\beta} t),$$

qui est réductible : le sous-espace formé des $\varphi \in L^2_{\mathbf{C}}(\mathbf{R})$ tels que $\varphi(t) = 0$ presque partout pour $t \geq 0$ (par exemple), est invariant. Donc ρ est réductible.

b. $\dim \mathfrak{a} = 2$: Il existe alors (I, 4.1) une base (a, a') de $\mathfrak{a}$. un nombre réel non nul α, et une forme linéaire non nulle ψ sur $\mathfrak{g}$ tels qu'on ait, pour tout $u \in \mathfrak{g}$:

$$[u, a] = \psi(u)(a - \alpha a'),$$
$$[u, a'] = \psi(u)(\alpha a + a').$$

On peut en outre choisir x dans $\mathfrak{h}$ tel que $\psi(x) = 1$. Définissons H_1, X, $g_x(\ )$, comme au paragraphe *a*; le sous-espace $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{z}(\mathfrak{a})$ est une sous-algèbre, $\mathfrak{a}$ est un idéal central de l'algèbre $(\mathfrak{h} + \mathfrak{a}) \cap \mathfrak{z}(\mathfrak{a}) = (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{z}(\mathfrak{a})) \oplus \mathfrak{a}$. Donc $(\mathfrak{h} + \mathfrak{a}) \cap \mathfrak{z}(\mathfrak{a})$ est le produit des algèbres $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{z}(\mathfrak{a})$ et $\mathfrak{a}$; on est dans la situation du lemme 1, $\overline{H}$ (resp. H_1) jouant le rôle du groupe G (resp. K) de ce lemme. Posons, pour $\beta, \beta' \in \mathbf{R}$:

$$g_a(\beta, \beta') = \exp(\beta a + \beta' a').$$

Dans ces conditions, pour tout $h \in \overline{H}$, il existe $h_1 \in H_1$ et des nombres réels β, β', γ tels que

$$h = g_a(\beta, \beta') . h_1 . g_x(\gamma)$$

ainsi qu'il résulte du (ii) du lemme 1, et l'on a, pour $t_1, t_2 \in \mathbf{R}$, compte tenu du (iii) de ce même lemme :

$$\begin{aligned} g_a(t_1, t_2) . h = h_1 . g_x(\gamma) . [g_x(-\gamma) . g_a(\beta + t_1, \beta' + t_2) . g_x(\gamma)] = h_1 . g_x(\gamma) \\ \times g_a(e^{-\gamma}((\beta + t_1)\cos\alpha\gamma - (\beta' + t_2)\sin\alpha\gamma), e^{-\gamma}((\beta + t_1)\sin\alpha\gamma + (\beta' + t_2)\cos\alpha\gamma)). \end{aligned}$$

Identifiant alors l'espace de ρ à $L^2_{\mathbf{C}}(\mathbf{R}^2)$, on a, pour $\varphi \in L^2_{\mathbf{C}}(\mathbf{R}^2)$:

$$\begin{aligned} (\rho_h \varphi)(t_1, t_2) = e^{-\gamma} \chi(f, h)(h_1 g_x(\gamma)) \\ \times \varphi(e^{-\gamma}((\beta + t_1)\cos\alpha\gamma - (\beta' + t_2)\sin\alpha\gamma), e^{-\gamma}((\beta + t_1)\sin\alpha\gamma + (\beta' + t_2)\cos\alpha\gamma)). \end{aligned}$$

Effectuant la transformation de Fourier, on obtient la représentation équivalente $\tilde{\rho}$ définie par

$$\begin{aligned} (\tilde{\rho}_h \varphi)(t_1, t_2) = \exp(i(\beta t_1 + \beta' t_2) + \gamma) \chi(f, h)(h_1 . g_x(\gamma)) \\ \times \varphi(e^{\gamma}(t_1 \cos\alpha\gamma - t_2 \sin\alpha\gamma), e^{\gamma}(t_1 \sin\alpha\gamma + t_2 \cos\alpha\gamma)). \end{aligned}$$

Soient alors (r, θ) les coordonnées polaires de $\mathbf{R}^2$ associées aux coordonnées cartésiennes (t_1, t_2), et, pour $\delta \in [0, 2\pi[$, soit C_δ la spirale d'équation

$$r = \exp\left(\frac{\theta + \delta}{\alpha}\right).$$

Les courbes C_δ sont les orbites du groupe à un paramètre de transformations de $\mathbf{R}^2$, $\mathcal{G} = \{ g_\gamma, \gamma \in \mathbf{R} \}$ défini par

$$g_\gamma(t_1, t_2) = (t_1(\gamma), t_2(\gamma)) \quad \begin{cases} t_1(\gamma) = e^\gamma(t_1 \cos\alpha\gamma - t_2 \sin\alpha\gamma), \\ t_2(\gamma) = e^\gamma(t_1 \sin\alpha\gamma + t_2 \cos\alpha\gamma). \end{cases}$$

Soient alors :

I un intervalle fermé $\subset [0, 2\pi[$ non réduit à un point;

$E_I = \bigcup_{\delta \in I} C_\delta$;

V_I l'ensemble des $\varphi \in L^2_{\mathbf{C}}(\mathbf{R}^2)$ nulles presque partout sur le complémentaire de E_I.

Alors V_I est un sous-espace fermé non nul de $L^2_{\mathbf{C}}(\mathbf{R}^2)$, distinct de $L^2_{\mathbf{C}}(\mathbf{R}^2)$ et invariant par $\tilde{\rho}$. Donc $\tilde{\rho}$ et ρ sont réductibles.

Lemme 4. — *Soient :*

G *un groupe exponentiel résoluble simplement connexe;*

$\mathfrak{g}$ *l'algèbre de Lie de* G;

f *une forme linéaire sur* $\mathfrak{g}$;

$\mathfrak{h}$ *un élément de* $I(f)$ (*cf.* I, 3.2);

$\mathfrak{a}$ *un idéal minimal de* $\mathfrak{g}$;

$\mathfrak{s}(\mathfrak{g})$ *le socle de* $\mathfrak{g}$ (*cf.* I, 3.3.2).

Dans ces conditions :

(i) $\mathfrak{h} \supset \mathfrak{s}(\mathfrak{g})$;

(ii) *si* $f \mid \mathfrak{a} \neq 0$, *alors* $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{z}(\mathfrak{a})$.

Démonstration. — *Montrons* (i) : Comme $\mathfrak{s}(\mathfrak{g})$ est engendré par la réunion des idéaux minimaux de $\mathfrak{g}$ et que $\mathfrak{a}$ est quelconque parmi ces idéaux, il suffit de vérifier que $\mathfrak{h} \supset \mathfrak{a}$.

Supposons en effet $\mathfrak{a} \not\subset \mathfrak{h}$, et notons $\mathfrak{p}$ un supplémentaire de $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{a}$: par hypothèse $\mathfrak{p} \neq \{0\}$. Comme $\mathfrak{h} + \mathfrak{a}$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$, $\exp(\mathfrak{h} + \mathfrak{a}))$ est un sous-groupe fermé connexe de G. Posons

$$H = \exp\mathfrak{h}, \qquad H = \exp(\mathfrak{h} + \mathfrak{a}), \qquad P = \exp\mathfrak{p}, \qquad \tilde{\rho} = \operatorname{Ind}(\chi(f, \mathfrak{h}), H),$$

$\chi(f, \mathfrak{h})$ étant le caractère de H défini par f (I, 3.2).

Nous distinguerons deux cas :

1. $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{z}(\mathfrak{p})$: Alors, $\mathfrak{a}$ étant commutatif, on a $[\mathfrak{h} + \mathfrak{a}, \mathfrak{p}] = \{0\}$, et P est un sous-groupe central de H. Comme par ailleurs $\mathfrak{h} + \mathfrak{a} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}$,

l'algèbre $\mathfrak{h} + \mathfrak{a}$ est le produit des sous-algèbres $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{p}$, et $H = H \times P$, ce qui implique (I, 1.3) que $\tilde{\rho}$ et par suite $\rho(f, \mathfrak{h})$ sont réductibles.

2. $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{z}(\mathfrak{p})$: Alors $\mathfrak{a} \in D(\mathfrak{g})$ et $\mathfrak{h} \not\subset \mathfrak{z}(\mathfrak{a})$. Donc (lemme 2), $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{a} = \{o\}$ et par suite (lemme 3), $\rho(f, \mathfrak{h})$ est réductible.

Notre hypothèse était donc absurde, ce qui établit (i).

Montrons (ii) : Si $\mathfrak{a}$ est un idéal central, alors $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g} = \mathfrak{z}(\mathfrak{a})$. Supposons donc $\mathfrak{a} \in D(\mathfrak{g})$. Si $\mathfrak{h}$ n'était pas contenue dans $\mathfrak{z}(\mathfrak{a})$, alors, compte tenu de (i) et du lemme 2, on aurait $\operatorname{Ker} f \supset [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \supset \mathfrak{a}$, ce qui contredirait l'hypothèse que $f | \mathfrak{a} \neq o$.

Rappelons que si ρ est une représentation irréductible d'un groupe G dans un espace de Hilbert, et si C est le centre de G, alors, pour tout $g \in C$, ρ_g est un opérateur scalaire; car il commute, pour tout $h \in G$, aux opérateurs ρ_h. Par suite la restriction de ρ à C s'identifie à un caractère du groupe C; ce caractère est appelé le *caractère central* de ρ. Si G est un groupe exponentiel résoluble simplement connexe, et si $\rho = \rho(f, \mathfrak{h})$, avec $f \in \mathfrak{g}^\star$ et $\mathfrak{h} \in I(f)$, alors $\mathfrak{h} \supset \mathfrak{c}$ (cela résulte par exemple de I, 1.3 *c*) et le caractère central de ρ est déterminé par $f | \mathfrak{c}$. Cela étant, énonçons le lemme 5.

LEMME 5. — *Soient :*

1. $\mathfrak{g}_1$ *l'algèbre de Lie réelle nilpotente de base* (x_1, x_2, x_3) *définie par le crochet non nul*

$$[x_1, x_2] = x_3;$$

$\mathfrak{k}_1$ *l'idéal de* $\mathfrak{g}_1$ *de base* (x_1, x_3);
$\mathfrak{k}'_1$ *l'idéal de* $\mathfrak{g}_1$ *de base* (x_2, x_3);
f_1 *une forme linéaire sur* $\mathfrak{g}_1$ *telle que* $f_1(x_3) \neq o$;
G_1 *le groupe nilpotent simplement connexe d'algèbre de Lie* $\mathfrak{g}_1$.

2. $\mathfrak{g}_2$ *l'algèbre de Lie réelle nilpotente de base* $(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)$ *définie par les crochets non nuls*

$$[y_1, y_3] = [y_2, y_4] = y_5;$$

$\mathfrak{k}_2$ *l'idéal de* $\mathfrak{g}_2$ *de base* (y_1, y_2, y_5);
$\mathfrak{k}'_2$ *l'idéal de* $\mathfrak{g}_2$ *de base* (y_3, y_4, y_5);
f_2 *une forme linéaire sur* $\mathfrak{g}_2$ *telle que* $f_2(y_5) \neq o$;
G_2 *le groupe nilpotent simplement connexe d'algèbre de Lie* $\mathfrak{g}_2$.

3. j *l'un des entiers* 1 *ou* 2.

Alors :

(i) $\mathfrak{k}_j \in I(f_j)$ *et* $\mathfrak{k}'_j \in I(f_j)$;

(ii) *les représentations* $\rho(f_j, \mathfrak{k}_j)$ *et* $\rho(f_j, \mathfrak{k}'_j)$ *de* G_j *sont équivalentes.*

Démonstration. — Il est clair que x_3 (resp. y_5) engendre le centre de $\mathfrak{g}_1$ (resp. $\mathfrak{g}_2$). Par ailleurs, il résulte des propositions 3(i) et 5 (i) de [4] qu'une représentation unitaire irréductible de G_j dont le caractère central diffère de 1 est déterminée à l'équivalence près par ce caractère. Par suite (i) $\Rightarrow$ (ii). Il suffit donc de vérifier (i). Pour ce faire, établissons d'abord le résultat suivant :

(R) Soient :

G un groupe exponentiel résoluble simplement connexe de genre C;
$\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G, $\mathfrak{c}$ le centre de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{a}$ un idéal de première espèce de $\mathfrak{g}$(*cf.* I, 4.3.1);
f une forme linéaire sur $\mathfrak{g}$ telle que $f|\mathfrak{c} \neq 0$;
$\mathfrak{h}$ un élément de $S(f)$ tel que $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{h} \subset \mathfrak{z}(\mathfrak{a})$;
$\rho = \operatorname{Ind}(\chi(f, \mathfrak{h}), \exp \mathfrak{z}(\mathfrak{a}))$.

Si ρ est irréductible, alors $\mathfrak{h} \in I(f)$.

En effet $\rho(f, \mathfrak{h}) \simeq \operatorname{Ind}(\rho, G)$ (*cf.* I, 1.3, *a*) et $\operatorname{Ind}(\rho, G)$ est irréductible d'après les paragraphes 1.3, *e* et 4.3.1 du chapitre I.

Cela étant, notons d'abord que les algèbres $\mathfrak{k}_j$, $\mathfrak{k}'_j$ étant commutatives, sont subordonnées à f_j. Distinguons alors deux cas :

1. $j = 1$: Alors, d'une part, G_1 est de genre C; $\mathfrak{k}_1$ (resp. $\mathfrak{k}'_1$) est un idéal de première espèce de $\mathfrak{g}_1$, et $\mathfrak{z}(\mathfrak{k}_1) = \mathfrak{k}_1$ [resp. $\mathfrak{z}(\mathfrak{k}'_1) = \mathfrak{k}'_1$].

Par ailleurs $\chi(f_1, \mathfrak{k}_1) = \chi(f_1, \mathfrak{z}(\mathfrak{k}_1))$ [resp. $\chi(f_1, \mathfrak{k}'_1) = \chi(f_1, \mathfrak{z}(\mathfrak{k}'_1))$] est une représentation irréductible de $\exp \mathfrak{z}(\mathfrak{k}_1)$ [resp. $\exp \mathfrak{z}(\mathfrak{k}'_1)$]. Il résulte dans ces conditions de (R) que $\mathfrak{k}_1 \in I(f_1)$ et $\mathfrak{k}'_1 \in I(f_1)$.

2. $j = 2$: Posons $\mathfrak{a} = \mathbf{R}y_2 \oplus \mathbf{R}y_5$, $\mathfrak{b} = \mathfrak{a} \cap \operatorname{Ker} f_2$; alors $\mathfrak{b}$ est un idéal central de $\mathfrak{z}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a} \oplus \mathbf{R}y_1 \oplus \mathrm{R}y_3$. Notons σ l'homomorphisme canonique $\mathfrak{z}(\mathfrak{a}) \to \mathfrak{z}(\mathfrak{a})/\mathfrak{b}$, et $\bar{f}_2$ l'image canonique de $f_2|\mathfrak{z}(\mathfrak{a})$ dans $(\mathfrak{z}(\mathfrak{a})/\mathfrak{b})^*$; on a donc $\bar{f}_2(\sigma y_5) = f_2(y_5) \neq 0$, et $\sigma(\mathfrak{z}(\mathfrak{a}))$ est une algèbre de Lie nilpotente non commutative de dimension 3, donc isomorphe à $\mathfrak{g}_1$; le raisonnement précédent montre alors que la représentation $\rho(\bar{f}_2, \sigma\mathfrak{k}_2)$ de $\exp \sigma(\mathfrak{z}(\mathfrak{a}))$ est irréductible; or $\rho(\bar{f}_2, \sigma\mathfrak{k}_2)$ s'identifie à la représentation $\rho(f|\mathfrak{z}(\mathfrak{a}), \mathfrak{k}_2)$ de $\exp \mathfrak{z}(\mathfrak{a})$; comme G_2 est de genre C, que $\mathfrak{a}$ est un idéal de première espèce de $\mathfrak{g}_2$, et que $\mathfrak{z}(\mathfrak{a}) \supset \mathfrak{k}_2 \supset \mathfrak{a}$, il résulte alors de (R) que $\mathfrak{k}_2 \in I(f_2)$.

On montre de même que $\mathfrak{k}'_2 \in I(f_2)$. Il suffit pour cela de remplacer dans le raisonnement précédent $\mathfrak{a}$ par $\mathfrak{a}' = \mathbf{R}y_3 \oplus \mathbf{R}y_5$, $\mathfrak{b}$ par $\mathfrak{b}' = \mathfrak{a}' \cap \operatorname{Ker} f_2$, $\mathfrak{z}(\mathfrak{a})$ par $\mathfrak{z}(\mathfrak{a}') = \mathfrak{a}' \oplus \mathbf{R}y_2 \oplus \mathbf{R}y_4$, σ par l'homomorphisme canonique σ' de $\mathfrak{z}(\mathfrak{a}')$ sur $\mathfrak{z}(\mathfrak{a}')/\mathfrak{b}'$, $\bar{f}_2$ par l'image canonique $\bar{f}'_2$ de $f_2|\mathfrak{z}(\mathfrak{a}')$ dans $(\mathfrak{z}(\mathfrak{a}')/\mathfrak{b}')^*$.

LEMME 6. — *Soient :*

$\mathcal{V}$ *un espace vectoriel réel;*
$\mathfrak{X}$, $\mathcal{B}$ *deux sous-espaces de* $\mathcal{V}$ *distincts de dimension* 1;
x_0 (resp. b) *un élément non nul de* $\mathfrak{X}$ (resp. $\mathcal{B}$);

$\mathcal{V}$ *un supplémentaire de* $\mathcal{X} + \mathcal{B}$ *dans* $\mathcal{W}$, *somme directe de deux sous-espaces* $\mathcal{V}_1$, $\mathcal{V}_2$ *de même dimension* $d = 1$ *ou* 2;

φ *une forme bilinéaire alternée non dégénérée sur* $\mathcal{V}$ *telle que* $\varphi(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2) \neq \{0\}$;

σ *un automorphisme de* $\mathcal{V}$ *ayant les propriétés suivantes :*

a. aucune valeur propre de σ *n'est imaginaire pure;*

b. $\mathcal{V}_1$ *et* $\mathcal{V}_2$ *sont minimaux parmi les sous-espaces non nuls de* $\mathcal{V}$ *stables par* σ;

c. pour tout couple $(v, v') \in \mathcal{V} \times \mathcal{V}$, *on a*

$$\varphi(\sigma(v), v') + \varphi(v, \sigma(v')) = 0. \tag{1}$$

Alors :

(i) *l'application bilinéaire* $\mathcal{W} \times \mathcal{W} \to \mathcal{W}$ *définie, pour* ξ, ξ', β, $\beta' \in \mathbf{R}$ *et* v, $v' \in \mathcal{V}$ *par l'égalité*

$$[\xi x_0 + v + \beta b, \xi' x_0 + v' + \beta' b] = \xi\sigma(v') - \xi'\sigma(v) + \varphi(v, v')\, b \tag{2}$$

munit $\mathcal{W}$ *d'une structure d'algèbre de Lie exponentielle résoluble* $\mathfrak{g}$; *le sous-espace* $\mathcal{B}$ (resp. $\mathcal{V} + \mathcal{B}$) *est le centre* (resp. *l'idéal dérivé*) *de* $\mathfrak{g}$. *En outre :*

Si $d = 1$, *il existe une base* (x, v_1, v_2, b) *de* $\mathfrak{g}$, *avec* $v_1 \in \mathcal{V}_1$, $v_2 \in \mathcal{V}_2$, $x \in \mathcal{X}$ *telle que* $\mathfrak{g}$ *soit définie par les crochets non nuls*

$$[x, v_1] = -v_1, \qquad [x, v_2] = v_2, \qquad [v_1, v_2] = b.$$

Si $d = 2$, *il existe un nombre réel non nul* α *et une base* $(x, v_1, v'_1, v_2, v'_2, b)$ *de* $\mathfrak{g}$, *avec* $x \in \mathcal{X}$ *et* v_j, $v'_j \in \mathcal{V}_j (j = 1, 2)$ *tels que* $\mathfrak{g}$ *soit définie par les crochets non nuls*

$$\begin{aligned} &[x, v_1] = -v_1 - \alpha v'_1, \qquad [x, v_2] = v_2 - \alpha v'_2,\\ &[x, v'_1] = \alpha v_1 - v'_1, \qquad [x, v'_2] = \alpha v_2 + v'_2,\\ &\qquad [v_1, v_2] = [v'_1, v'_2] = b. \end{aligned}$$

(ii) *La structure du groupe nilpotent simplement connexe d'algèbre de Lie* $\mathcal{V} + \mathcal{B}$ *est déterminée par l'égalité*

$$\exp v . \exp v' = \exp v' . \exp v . \exp \varphi(v, v')\, b \quad \textit{pour tout } v, v' \in \mathcal{V}. \tag{3}$$

Démonstration. — Comme φ est une forme alternée, l'opération sur $\mathcal{W}$ définie par (2) est anticommutative; il est clair par ailleurs que

$$[\mathcal{V}, \mathcal{V}] = \mathcal{B} \quad \text{et} \quad [\mathcal{W}, \mathcal{W}] \subset \mathcal{V} + \mathcal{B} \quad \text{et} \quad [\mathcal{W}, \mathcal{B}] = 0. \tag{4}$$

Il s'ensuit en particulier que, quels que soient y_1, y_2, $y_3 \in \mathcal{V} + \mathcal{B}$, on a $[y_1, [y_2, y_3]] = 0$: le crochet défini par (2) munit donc $\mathcal{V} + \mathcal{B}$ d'une structure d'algèbre de Lie nilpotente. Notons $\mathfrak{g}_0$ cette algèbre de Lie, et notons G_0 le groupe nilpotent simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_0$.

Soient v, $v' \in \mathcal{V}$. Il résulte de (4) que $\exp \mathcal{B}$ [resp. $\exp(\mathbf{R}v' + \mathcal{B})$] est un sous-groupe central (resp. un sous-groupe commutatif) de G_0. La formule (2) implique par ailleurs que

$$\operatorname{ad} v . v' = \varphi(v, v')\, b \quad \text{et, pour } k \geq 2, \quad (\operatorname{ad} v)^k = 0.$$

Donc $\exp(\mathrm{ad}\, v).v' = v' + \varphi(v, v')\, b$ et par conséquent :

$$\begin{aligned}\exp v . \exp v' &= \exp(\exp(\mathrm{ad}\, v).v').\exp v\\ &= \exp(v' + \varphi(v, v')\, b).\exp v\\ &= \exp v'.\exp v.\exp \varphi(v, v')\, b,\end{aligned}$$

ce qui montre (ii).

Posons, pour $\beta, \gamma \in \mathbf{R}$, $v \in \mathcal{V}$:

$$\mathrm{D}(\beta)(v + \gamma b) = \beta\sigma(v).$$

Eu égard à (1) et (2), on a alors, pour $\beta, \gamma, \gamma' \in \mathbf{R}$, $v, v' \in \mathcal{V}$:

$$\begin{aligned}&[\mathrm{D}(\beta)(v + \gamma b), v' + \gamma' b] + [v + \gamma b, \mathrm{D}(\beta)(v' + \gamma' b)]\\ &\quad = \beta(\varphi(\sigma(v), v') + \varphi(v, \sigma(v')))\, b = 0 = \mathrm{D}(\beta)(\varphi(v, v')\, b)\\ &\quad = \mathrm{D}(\beta)([v + \gamma b, v' + \gamma' b]).\end{aligned}$$

Donc l'application $\beta x_0 \to \mathrm{D}(\beta)$ est un homomorphisme de $\mathfrak{X}$ dans l'algèbre de Lie des dérivations de $\mathfrak{g}_0$, ce qui montre que le crochet défini par (2) munit $\mathcal{W}$ d'une structure d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Comme $\sigma(\mathcal{V}) = \mathcal{V}$ et que φ n'est pas dégénérée, on a $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}_0$ et $\mathcal{B}$ est le centre de $\mathfrak{g}$.

Il ne nous reste plus qu'à expliciter la structure de $\mathfrak{g}$. Dans ce qui suit, notons j l'un des entiers 1, 2.

Si $d = \dim \mathrm{V}_j = 1$, il existe un élément non nul w_j de $\mathcal{V}_j$ et un nombre réel $\beta_j \neq 0$ tels que $[x_0, w_j] = \sigma(w_j) = \beta_j w_j$. Or

$$0 = \varphi(\sigma(w_1), w_2) + \varphi(w_1, \sigma(w_2)) = (\beta_1 + \beta_2)\, \varphi(w_1, w_2).$$

Comme $\varphi(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2) = \mathbf{R}\varphi(w_1, w_2) \neq 0$, il s'ensuit que $[w_1, w_2] \neq 0$ et $\beta_1 + \beta_2 = 0$. On peut dans ces conditions trouver $x \in \mathfrak{X}$, et $v_j \in \mathcal{V}_j$ tels que $\mathfrak{g}$ soit définie par les crochets non nuls :

$$[x, v_1] = -v_1 \qquad [x, v_2] = v_2, \qquad [v_1, v_2] = b.$$

Si $d = 2$, il résulte alors de nos hypothèses qu'il existe une base (w_j, w'_j) de $\mathcal{V}_j$ et deux nombres réels non nuls α_j, β_j tels que

$$(5) \qquad \left\{\begin{aligned}&[x_0, w_j] = \sigma(w_j) = \beta_j(w_j - \alpha_j w'_j),\\ &[x_0, w'_j] = \sigma(w'_j) = \beta_j(\alpha_j w_j + w'_j).\end{aligned}\right.$$

Par suite :

$$0 = (\varphi(\sigma(w_j), w'_j) + \varphi(w_j, \sigma(w'_j)))\, b = 2\beta_j(w_j, w'_j)\, b = 2\beta_j[w_j, w'_j].$$

et donc

$$(6) \qquad [\mathcal{V}_j, \mathcal{V}_j] = 0.$$

Posant alors

$$\xi_1 = \varphi(w_1, w_2), \qquad \xi_2 = \varphi(w_1, w'_2), \qquad \xi_3 = \varphi(w'_1, w_2), \qquad \xi_4 = \varphi(w'_1, w'_2),$$
$$\beta = \beta_1 + \beta_2, \qquad \gamma_1 = \alpha_1\beta_1, \qquad \gamma_2 = \alpha_2\beta_2$$

et écrivant l'identité (1) pour $(v, v') \in \{w_1, w'_1\} \times \{w_2, w'_2\}$, on obtient le système

$$(S)\quad \begin{cases} \beta\xi_1 - \gamma_2\xi_2 - \gamma_1\xi_3 = 0, \\ \gamma_2\xi_1 + \beta\xi_2 - \gamma_1\xi_4 = 0, \\ \gamma_1\xi_1 + \beta\xi_3 - \gamma_2\xi_4 = 0, \\ \gamma_1\xi_2 + \gamma_2\xi_3 + \beta\xi_4 = 0. \end{cases}$$

Or $\varphi(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2) \neq 0$, et donc $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) \neq (0, 0, 0, 0)$. Écrivons que (S) a une solution non triviale, en égalant à zéro le déterminant de (S) développé suivant les éléments de la première ligne :

$$\begin{aligned} 0 &= \beta^2(\beta^2 + \gamma_1^2 + \gamma_2^2) + \gamma_2^2(\beta^2 + \gamma_2^2 - \gamma_1^2) + \gamma_1^2(\beta^2 + \gamma_1^2 - \gamma_2^2) \\ &= (\beta^2 + (\gamma_1 + \gamma_2)^2) \cdot (\beta^2 + (\gamma_1 + \gamma_2)^2). \end{aligned}$$

Donc $\beta = \gamma_1^2 - \gamma_2^2 = 0$ et par suite :

$$(7)\qquad \beta_2 = -\beta_1, \qquad \alpha_2 = -\varepsilon\alpha_1 \qquad \text{avec} \quad \varepsilon = \pm 1$$

et le système (S) se réduit dans ces conditions à

$$(8)\qquad \xi_4 = \varepsilon\xi_1, \qquad \xi_3 = -\varepsilon\xi_2, \qquad \text{avec} \quad \xi_1^2 + \xi_2^2 \neq 0.$$

Si l'on pose $x = -(\beta_1)^{-1}x_0$ et $\alpha = -\alpha_1$, on obtient alors

$$(9)\quad \begin{cases} [x, w_1] = -w_1 - \alpha w'_1, \qquad [x, w_2] = w_2 - \varepsilon\alpha w'_2, \\ [x, w'_1] = \alpha w_1 - w'_1, \qquad [x, w'_2] = \varepsilon\alpha w_2 + w'_2, \\ [w_1, w_2] = \varepsilon[w'_1, w'_2] = \xi_1 b, \qquad [w_1, w'_2] = -\varepsilon[w'_1, w_2] = \xi_2 b. \end{cases}$$

Compte tenu de (8), il existe deux nombres réels non tous deux nuls δ_1, δ_2 tels que

$$(10)\qquad \delta_1\xi_1 - \delta_2\xi_2 = 1 \qquad \text{et} \qquad \delta_2\xi_1 + \delta_1\xi_2 = 0.$$

Posons alors

$$(11)\qquad v_1 = w_1, \qquad v'_1 = w'_1, \qquad v_2 = \delta_1 w_2 - \delta_2 w'_2, \qquad v'_2 = \varepsilon(\delta_2 w_2 + \delta_1 w'_2).$$

Les éléments x, v_1, v'_1, v_2, v'_2, b forment dans ces conditions une base de $\mathfrak{g}$, et l'on a, compte tenu de (6), (8), (9), (10) et (11) :

$$\begin{aligned} &[x, v_1] = -v_1 - \alpha v'_1, \qquad [x, v'_1] = \alpha v_1 - v'_1, \\ &[x, v_2] = \delta_1(w_2 - \varepsilon\alpha w'_2) - \delta_2(\varepsilon\alpha w_2 + w'_2)\, v_2 = \alpha v'_2, \\ &[x, v'_2] = \varepsilon\delta_2(w_2 - \varepsilon\alpha w'_2) + \varepsilon\delta_1(\varepsilon\alpha w_2 + w'_2) = \alpha v_2 + v'_2, \\ &[v_1, v'_1] = [v_2, v'_2] = 0, \\ &[v_1, v_2] = (\delta_1\xi_1 - \delta_2\xi_2)\, b = b = \varepsilon(\delta_1\xi_4 + \delta_2\xi_3)\, b = \quad [v'_1, v'_2], \\ &[v_1, v'_2] = \varepsilon(\delta_2\xi_1 + \delta_1\xi_2)\, b = 0 = (\delta_2\xi_4 - \delta_1\xi_3)\, b = -[v'_1, v_2]. \end{aligned}$$

Les algèbres de Lie que nous venons d'expliciter admettent pour leur structure de $\mathfrak{g}$-module la suite de composition

$$(\Sigma) = (\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0, \mathcal{V}_1 + \mathcal{B}, \mathcal{B}).$$

Examinant l'action de $\mathfrak{g}$ sur les quotients successifs de (Σ), on en déduit aussitôt (*cf.* I, 3.3.1) que $\mathfrak{g}$ est exponentielle résoluble.

LEMME 7. — *Les notations étant celles du lemme précédent, soient en outre :* G *le groupe exponentiel résoluble simplement connexe d'algèbre de Lie* $\mathfrak{g}$; f *une forme linéaire sur* $\mathfrak{g}$ *telle que* $f(b)=1$ *et* $f|\mathcal{X}+\mathcal{V}=0$;
$\mathfrak{h}_j$ le sous espace $\mathcal{X}+\mathcal{V}_j+\mathcal{B}$ $(j=1, 2)$.

Alors $\mathfrak{h}_j\in S(f)$ *et* $\rho(f, \mathfrak{h}_1)\simeq\rho(f, \mathfrak{h}_2)$.

Démonstration. — Comme dans la démonstration du lemme précédent, nous noterons j l'un des indices 1, 2, et $\mathfrak{g}_0$ (resp. G_0) l'idéal dérivé $\mathcal{V}+\mathcal{B}$ de $\mathfrak{g}$ (resp. le groupe nilpotent simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_0$).

Il résulte du lemme précédent que

$$[\mathcal{V}_j, \mathcal{V}_j]=[\mathfrak{g}, \mathcal{B}]=0 \qquad \text{et} \qquad [\mathcal{X}, \mathcal{V}_j]=\mathcal{V}_j.$$

Donc

$$[\mathfrak{h}_j, \mathfrak{h}_j]=[\mathcal{X}+\mathcal{V}_j+\mathcal{B}, \mathcal{X}+\mathcal{V}_j+\mathcal{B}]=[\mathcal{X}, \mathcal{V}_j]=\mathcal{V}_j\subset\mathfrak{h}_j\cap\operatorname{Ker} f.$$

ce qui établit la première assertion.

Pour vérifier la seconde, notons d'abord que G est le produit semi-direct de $\exp\mathcal{X}$ par $G_0=\exp\mathfrak{g}_0$; G_0 le produit semi-direct de $\exp\mathcal{V}_1$ (resp. $\exp\mathcal{V}_2$) par $\exp(\mathcal{V}_2+\mathcal{B})$ [resp. $\exp(\mathcal{V}_1+\mathcal{B})$]; $\exp(\mathcal{V}_j+\mathcal{B})$ le produit direct de $\exp\mathcal{V}_j$ par $\exp\mathcal{B}$. Nous poserons pour $\beta, \beta'\in\mathbf{R}$:

$$g_x(\beta)=\exp\beta x, \qquad g_b(\beta)=\exp\beta b$$

et, lorsque $d=1$,

$$g_j(\beta)=\exp\beta v_j;$$

lorsque $d=2$,

$$g_j(\beta, \beta')=\exp(\beta v_j+\beta' v'_j).$$

Distinguons alors deux cas :

a. $d=\dim V_j=1$: Il existe alors, pour tout $g\in G$, des nombres réels $\beta, \gamma_1, \gamma_2, \xi, \beta', \gamma'_1, \gamma'_2, \xi'$, déterminés de manière unique par g tels que

$$g=g_1(\gamma_1).g_2(\gamma_2).g_b(\beta).g_x(\xi)=g_2(\gamma'_2).g_1(\gamma'_1).g_b(\beta').g_x(\xi').$$

La formule (3) du lemme 6 implique alors

$$g_1(\gamma_1).g_2(\gamma_2)=g_2(\gamma_2).g_1(\gamma_1).g_b(\gamma_1\gamma_2)$$

et donc

$$\xi'=\xi, \qquad \gamma'_j=\gamma_j, \qquad \beta'=\beta+\gamma_1\gamma_2. \tag{1}$$

La même formule implique en outre, pour $t\in\mathbf{R}$ quelconque :

$$\begin{aligned}
g_1(t).g&=g_1(t+\gamma_1).g_2(\gamma_2).g_b(\beta).g_x(\xi)\\
&=g_2(\gamma_2).g_b(\beta).g_x(\xi).[(g_2(\gamma_2).g_x(\xi))^{-1}.g_1(t+\gamma_1).g_2(\gamma_2).g_x(\xi)]\\
&=g_2(\gamma_2).g_b(\beta).g_x(\xi).[g_x(-\xi).g_1(t+\gamma_1).g_b(\gamma_2(t+\gamma_1)).g_x(\xi)]\\
&=g_2(\gamma_2).g_b(\beta+\gamma_2(t+\gamma_1)).g_x(\xi).g_1(e^{\xi}(t+\gamma_1)),
\end{aligned}$$

et de même, compte tenu de (1) :

$$\begin{aligned} g_2(t).g &= g_2(t+\gamma_2).g_1(\gamma_1).g_b(\beta+\gamma_1\gamma_2).g_x(\xi) \\ &= g_1(\gamma_1).g_b(\beta+\gamma_1\gamma_2).g_x(\xi).[(g_1(\gamma_1).g_x(\xi))^{-1}.g_2(t+\gamma_2).g_1(\gamma_1).g_x(\xi)] \\ &= g_1(\gamma_1).g_b(\beta+\gamma_1\gamma_2).g_x(\xi).[(g_x(-\xi)).g_2(t+\gamma_2).g_b(-\gamma_1(t+\gamma_2)).g_x(\xi)] \\ &= g_1(\gamma_1).g_b(\beta-\gamma_1 t).g_x(\xi).g_2(e^{-\xi}(t+\gamma_2)). \end{aligned}$$

L'espace de $\rho(f, \mathfrak{h}_j)$ s'identifie à $L^2_{\mathbf{C}}(\mathbf{R})$, et l'on a pour $\Phi \in L^2_{\mathbf{C}}(\mathbf{R})$:

$$\begin{aligned} &(\rho(f, \mathfrak{h}_1)_g\Phi)(t) \\ &\quad = \chi(f, \mathfrak{h}_1)\,(g_1(\gamma_1).g_b(\beta-\gamma_1 t).g_x(\xi))\,\Phi(e^{-\xi}(t+\gamma_2))\exp\left(-\frac{\xi}{2}\right) \\ &\quad = \exp\left(i(\beta-\gamma_1 t)-\frac{\xi}{2}\right)\Phi(e^{-\xi}(t+\gamma_2)). \\ &(\rho(f, \mathfrak{h}_2)_g\Phi)(t) \\ &\quad = \chi(f, \mathfrak{h}_2)\,(g_2(\gamma_2).g_b(\beta+\gamma_2(t+\gamma_1)).g_x(\xi))\,\Phi(e^{\xi}(t+\gamma_1))\exp\frac{\xi}{2} \\ &\quad = \exp\left(i\left(\beta+\gamma_2(t+\gamma_1)+\frac{\xi}{2}\right)\right)\Phi(e^{\xi}(t+\gamma_1)). \end{aligned}$$

Soit alors $\mathcal{F}$ l'isomorphisme de Fourier de $L^2_{\mathbf{C}}(\mathbf{R})$ sur lui-même. On a pour les éléments Φ d'un sous-espace dense de $L^2_{\mathbf{C}}(\mathbf{R})$:

$$\begin{aligned} &(\mathcal{F}^{-1}(\rho(f, \mathfrak{h}_2)_g\Phi))(t) \\ &\quad = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[i\tau t+i(\beta+\gamma_2(\tau+\gamma_1))+\frac{\xi}{2}\right]\Phi(e^{\xi}(\tau+\gamma_1))\,d\tau \end{aligned}$$

soit, en effectuant le changement de variable $\tau \to \tau' = e^{\xi}(\tau+\gamma_1)$:

$$\begin{aligned} &(\mathcal{F}^{-1}(\rho(f, \mathfrak{h}_2)_g\Phi))(t) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[it(\tau' e^{-\xi}-\gamma_1)+i(\beta+\gamma_2\tau' e^{-\xi})+\frac{\xi}{2}-\xi\right]\Phi(\tau')\,d\tau' \\ &= \exp\left[i(\beta-\gamma_1 t)-\frac{\xi}{2}\right](\mathcal{F}^{-1}\Phi)(e^{-\xi}(t+\gamma_2)) \\ &= (\rho(f, \mathfrak{h}_1)_g(\mathcal{F}^{-1}\Phi))(t). \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{F}^{-1}\circ\rho(f, \mathfrak{h}_1)_g = \rho(f, \mathfrak{h}_1)_g\circ\mathcal{F}^{-1}$ pour tout $g \in G$, et par suite, $\rho(f, \mathfrak{h}_1) \simeq \rho(f, \mathfrak{h}_2)$.

b. $d = \dim V_j = 2$: Pour tout $g \in G$, il existe alors des nombres réels β, β', ξ, ξ', γ_j, γ'_j, δ_j, δ'_j $(j = 1, 2)$ déterminés de manière unique par g tels que

$$\begin{aligned} g &= g_2(\gamma_1, \gamma_2).g_1(\delta_1, \delta_2).g_b(\beta).g_x(\xi) \\ &= g_1(\delta'_1, \delta'_2).g_2(\gamma'_1, \gamma'_2).g_b(\beta').g_x(\xi'). \end{aligned}$$

La formule (3) du lemme 6 implique alors

$$
\begin{aligned}
& g_2(\gamma_1, \gamma_2).g_1(\delta_1, \delta_2) \\
& \quad = g_1(\delta_1, \delta_2).g_2(\gamma_1, \gamma_2).g_b(\varphi(\gamma_1 v_2 + \gamma_2 v'_2, \delta_1 v_1 + \delta_2 v'_1)) \\
& \quad = g_1(\delta_1, \delta_2).g_2(\gamma_1, \gamma_2).g_b(-\delta_1\gamma_1 - \delta_2\gamma_2)
\end{aligned}
$$

et par suite :

$$
(2) \qquad \xi' = \xi, \qquad \gamma'_j = \gamma_j, \qquad \delta'_j = \delta_j, \qquad \beta' = \beta - \delta_1\gamma_1 - \delta_2\gamma_2.
$$

La même formule donne en outre, pour $t_1, t_2 \in \mathbf{R}$, compte tenu du lemme 1 :

$$
\begin{aligned}
g_2(t_1, t_2)\, g &= g_2(\gamma_1 + t_1, \gamma_2 + t_2).g_1(\delta_1, \delta_2).g_b(\beta).g_x(\xi) \\
&= g_1(\delta_1, \delta_2).g_b(\beta).g_x(\xi).[(g_1(\delta_1, \delta_2).g_x(\xi))^{-1}.g_2(\gamma_1 + t_1, \gamma_2 + t_2).g_1(\delta_1, \delta_2).g_x(\xi)] \\
&= g_1(\delta_1, \delta_2).g_x(\xi).g_b(\beta - \delta_1(\gamma_1 + t_1) \\
&\quad - \delta_2(\gamma_2 + t_2)).[g_x(-\xi).g_2(\gamma_1 + t_1, \gamma_2 + t_2).g_x(\xi)] \\
&= g_1(\delta_1, \delta_2).g_x(\xi).g_b(\beta - \delta_1(\gamma_1 + t_1) \\
&\quad - \delta_2(\gamma_2 + t_2)).g_2(e^{-\xi}[(\gamma_1 + t_1)\cos\xi\alpha - (\gamma_2 + t_2)\sin\xi\alpha], \\
&\qquad\qquad e^{-\xi}[(\gamma_1 + t_1)\sin\xi\alpha + (\gamma_2 + t_2)\cos\xi\alpha])
\end{aligned}
$$

et de même, compte tenu de (2)

$$
\begin{aligned}
g_1(t_1, t_2).g &= g_1(\delta_1 + t_1, \delta_2 + t_2).g_2(\gamma_1, \gamma_2).g_b(\beta - \delta_1\gamma_1 - \delta_2\gamma_2).g_x(\xi) \\
&= g_2(\gamma_1, \gamma_2).g_b(\beta - \delta_1\gamma_1 - \delta_2\gamma_2).g_x(\xi).[(g_2(\gamma_1, \gamma_2).g_x(\xi))^{-1} \\
&\qquad\qquad g_1(\delta_1 + t_1, \delta_2 + t_2).g_2(\gamma_1, \gamma_2).g_x(\xi)] \\
&= g_2(\gamma_1, \gamma_2).g_b(\beta - \delta_1\gamma_1 - \delta_2\gamma_2).g_x(\xi).g_b(\gamma_1(\delta_1 + t_1) \\
&\quad + \gamma_2(\delta_2 + t_2)).[g_x(-\xi).g_1(\delta_1 + t_1, \delta_2 + t_2).g_x(\xi)] \\
&= g_2(\gamma_1, \gamma_2).g_x(\xi).g_b(\beta + \gamma_1 t_1 + \gamma_2 t_2).g_1(e^{\xi}[(\delta_1 + t_1)\cos\xi\alpha - (\delta_2 + t_2)\sin\xi\alpha], \\
&\qquad\qquad e^{\xi}[(\delta_1 + t_1)\sin\xi\alpha + (\delta_2 + t_2)\cos\xi\alpha]).
\end{aligned}
$$

Identifiant à $L^2_{\mathbf{C}}(\mathbf{R}^2)$ l'espace de $\rho(f, \mathfrak{h}_j)$, on obtient alors, pour $\Phi \in L^2_{\mathbf{C}}(\mathbf{R}^2)$:

$$
\begin{aligned}
& (\rho(f, \mathfrak{h}_1)_g \Phi)(t_1, t_2) \\
& \quad = \chi(f, \mathfrak{h}_1)\,(g_1(\delta_1, \delta_2).g_x(\xi).g_b(\beta - \delta_1(\gamma_1 + t_1) - \delta_2(\gamma_2 + t_2))) \\
& \qquad \times \exp(-\xi).\Phi(e^{-\xi}[(\gamma_1 + t_1)\cos\xi\alpha - (\gamma_2 + t_2)\sin\xi\alpha], \\
& \qquad\qquad e^{-\xi}[(\gamma_1 + t_1)\sin\xi\alpha + (\gamma_2 + t_2)\cos\xi\alpha]) \\
& \quad = \exp[i(\beta - \delta_1(\gamma_1 + t_1) - \delta_2(\gamma_2 + t_2)) - \xi] \\
& \qquad \times \Phi(e^{-\xi}[(\gamma_1 + t_1)\cos\xi\alpha - (\gamma_2 + t_2)\sin\xi\alpha], \\
& \qquad\qquad e^{-\xi}](\gamma_1 + t_1)\sin\xi\alpha + (\gamma_2 + t_2)\cos\xi\alpha])
\end{aligned}
$$

et de même :

$$
\begin{aligned}
& (\rho(f, \mathfrak{h}_2)_g \Phi)(t_1, t_2) \\
& \quad = \chi(f, \mathfrak{h}_2)\,(g_2(\gamma_1, \gamma_2).g_x(\xi).g_b(\beta + \gamma_1 t_1 + \gamma_2 t_2)).\exp\xi \\
& \qquad \times \Phi(e^{\xi}[(\delta_1 + t_1)\cos\xi\alpha - (\delta_2 + t_2)\sin\xi\alpha], e^{\xi}[(\delta_1 + t_1)\sin\xi\alpha + (\delta_2 + t_2)\cos\xi\alpha]) \\
& \quad = \exp[i(\beta + \gamma_1 t_1 + \gamma_2 t_2) + \xi].\Phi(e^{\xi}[(\delta_1 + t_1)\cos\xi\alpha - (\delta_2 + \xi_2)\sin\xi\alpha], \\
& \qquad\qquad e^{\xi}[(\delta_1 + t_1)\sin\xi\alpha + (\delta_2 + t_2)\cos\xi\alpha]).
\end{aligned}
$$

Notant alors $\mathcal{F}$ la transformation de Fourier de $L^2_{\mathbf{C}}(\mathbf{R}^2)$ sur lui-même, on a, pour les éléments Φ d'un sous-espace dense de $L^2_{\mathbf{C}}(\mathbf{R}^2)$:

$$\begin{aligned}
&(\mathcal{F}(\rho(f, \mathfrak{h}_1)_g \Phi))(t_1, t_2) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-i(\tau_1 t_1 + \tau_2 t_2) + i(\beta - \delta_1(\gamma_1 + \tau_1) - \delta_2(\gamma_2 + \tau_2)) - \xi) \\
&\quad \times \Phi(e^{-\xi}[(\gamma_1 + \tau_1)\cos\xi\alpha - (\gamma_2 + \tau_2)\sin\xi\alpha], \\
&\qquad e^{-\xi}[(\gamma_1 + \tau_1)\sin\xi\alpha + (\gamma_2 + \tau_2)\cos\xi\alpha])\, d\tau_1\, d\tau_2.
\end{aligned}$$

Effectuant le changement de variables $T : (\tau_1, \tau_2) \to (\tau'_1, \tau'_2)$ défini par

$$\begin{aligned}
\tau'_1 &= e^{-\xi}[(\gamma_1 + \tau_1)\cos\xi\alpha - (\gamma_2 + \tau_2)\sin\xi\alpha], \\
\tau'_2 &= e^{-\xi}[(\gamma_1 + \tau_1)\sin\xi\alpha + (\gamma_2 + \tau_2)\cos\xi\alpha]
\end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned}
\gamma_1 + \tau_1 &= e^{\xi}(\tau'_1\cos\xi\alpha + \tau'_2\sin\xi\alpha) \\
\gamma_2 + \tau_2 &= e^{\xi}(-\tau'_1\sin\xi\alpha + \tau'_2\cos\xi\alpha)
\end{aligned}$$

on obtient, le jacobien de T étant égal à $\dfrac{\partial(\tau'_1, \tau'_2)}{\partial(\tau_1, \tau_2)} = e^{-2\xi}$:

$$\begin{aligned}
&(\mathcal{F}(\rho(f, \mathfrak{h}_1)_g \Phi))(t_1, t_2) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(i[\beta - \delta_1 e^{\xi}(\tau'_1\cos\xi\alpha + \tau'_2\sin\xi\alpha) - \delta_2 e^{\xi}(-\tau'_1\sin\xi\alpha + \tau'_2\cos\xi\alpha)]) \\
&\quad \times \exp(-it_1[e^{\xi}(\tau'_1\cos\xi\alpha + \tau'_2\sin\xi\alpha) - \gamma_1] \\
&\qquad - it_2[e^{\xi}(-\tau'_1\sin\xi\alpha + \tau'_2\cos\xi\alpha) - \gamma_2] - \xi + 2\xi).\Phi(\tau'_1, \tau'_2)\, d\tau'_1\, d\tau'_2 \\
&= \exp(i(\beta + t_1\gamma_1 + t_2\gamma_2) + \xi) \\
&\quad \times \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\tau'_1, \tau'_2).\exp(-i\tau'_1 e^{\xi}[(\delta_1 + t_1)\cos\xi\alpha - (\delta_2 + t_2)\sin\xi\alpha] \\
&\qquad - i\tau'_2 e^{\xi}[(\delta_1 + t_1)\sin\xi\alpha + (\delta_2 + t_2)\cos\xi\alpha].d\tau'_1\, d\tau'_2 \\
&= \exp(i(\beta + t_1\gamma_1 + t_2\gamma_2) + \xi).(\mathcal{F}\Phi)(e^{\xi}[(\delta_1 + t_1)\cos\xi\alpha - (\delta_2 + t_2)\sin\xi\alpha], \\
&\qquad e^{\xi}[(\delta_1 + t_1)\sin\xi\alpha + (\delta_2 + t_2)\cos\xi\alpha]) \\
&= (\rho(f, \mathfrak{h}_2)_g(\mathcal{F}\Phi))(t_1, t_2).
\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{F} \circ \rho(f, \mathfrak{h}_1) = \rho(f, \mathfrak{h}_2) \circ \mathcal{F}$, et par suite $\rho(f, \mathfrak{h}_1) \simeq \rho(f, \mathfrak{h}_2)$.

Lemme 8. — *Soient :*

G *un groupe exponentiel résoluble simplement connexe;*
$\mathfrak{g}$ *l'algèbre de Lie de* G;
$\mathfrak{c}$ *le centre de* $\mathfrak{g}$;
$\mathfrak{a}$ *un idéal de* $\mathfrak{g}$, *minimal parmi les idéaux distincts de* $\{0\}$ *et de* $\mathfrak{c}$;
$\mathfrak{g}^*$ *l'espace vectoriel dual de* $\mathfrak{g}$;
f *un élément de* $\mathfrak{g}^*$;
$\mathfrak{g}(f, \mathfrak{a})$ *le transporteur de* $\mathfrak{a} \cap \operatorname{Ker} f$ *dans lui-même.*

Dans ces conditions :

(i) *Si* $\mathfrak{a} \in D(\mathfrak{g})$ (*cf.* I, 3.3.2) *et si* $f|\mathfrak{a} \neq 0$, *alors l'orbite de* f *contient tous les éléments de* $\mathfrak{g}^*$ *qui coïncident avec* f *sur* $\mathfrak{z}(\mathfrak{a})$.

(ii) *Si* G *est de genre* C (*cf.* I, 4.3) *et si* $f|\mathfrak{c} \neq 0$, *alors :*

— $\exp \mathfrak{g}(f, \mathfrak{a})$ *est le stabilisateur de* $\chi(f, \mathfrak{a})$;

— *l'orbite de f contient tous les éléments de* $\mathfrak{g}^*$ *qui coïncident avec f sur* $\mathfrak{g}(f, \mathfrak{a})$.

Démonstration. — *Vérifions* (i) : Soit donc $\mathfrak{a} \in D(\mathfrak{g})$. On sait (I, 4.1) que $\operatorname{codim}_{\mathfrak{g}} \mathfrak{z}(\mathfrak{a}) = 1$. Si donc $x \in \mathfrak{g} - \mathfrak{z}(\mathfrak{a})$, il suffit de montrer qu'il existe $g \in G$ tel que $f^g(x) = 0$ et $f^g|\mathfrak{z}(\mathfrak{a}) = f|\mathfrak{z}(\mathfrak{a})$. La deuxième égalité sera vérifiée si $g \in \exp \mathfrak{a}$. Distinguons alors deux cas :

a. $\dim \mathfrak{a} = 1$: Soit a un élément non nul de $\mathfrak{a}$. Choisissions $x \in \mathfrak{g} - \mathfrak{z}(\mathfrak{a})$ de sorte que $[x, a] = a$. On a alors, pour $\alpha \in \mathbf{R}$, $x^{\exp \alpha a} = x - \alpha a$, et donc $f^{\exp \alpha a}(x) = f(x) - \alpha f(a)$. Comme $f(a) \neq 0$, on peut déterminer α par la condition que $f(x) = \alpha f(a)$, et il suffira alors de prendre $g = \exp \alpha a$.

b. $\dim \mathfrak{a} = 2$: On peut alors choisir $x \in \mathfrak{g} - \mathfrak{z}(\mathfrak{a})$ et trouver une base (a, a') de $\mathfrak{a}$ et un nombre réel $\alpha \neq 0$ tels que

$$[x, a] = a - \alpha a' \qquad \text{et} \qquad [x, a'] = \alpha a + a'.$$

On a donc, pour $\beta, \beta' \in \mathbf{R}$:

$$x^{\exp(\beta a + \beta' a')} = \exp \operatorname{ad}(\beta a + \beta' a')\, x = x - \beta(a - \alpha a') - \beta'(\alpha a + a')$$

et par suite :

$$f^{\exp(\beta a + \beta' a')}(x) = f(x) - \beta(f(a) - \alpha f(a')) - \beta'(\alpha f(a) + f(a')).$$

Comme $f|\mathfrak{a} \neq 0$ par hypothèse, l'une au moins des deux quantités $f(a) - \alpha f(a')$, $\alpha f(a) + f(a')$ n'est pas nulle. On peut donc choisir β, β' de telle sorte que

$$f(x) = \beta(f(a) - \alpha f(a')) + \beta'(\alpha f(a) + f(a'))$$

et il suffit alors de prendre $g = \exp(\beta a + \beta' a')$.

Vérifions (ii) : Supposons donc que G est de genre C et que $f|\mathfrak{c} \neq 0$. On sait alors (I, 4.3) que $\mathfrak{a}$ est un idéal commutatif de dimension 2 ou 3 contenant $\mathfrak{c}$; il s'ensuit en particulier que $\mathfrak{a} \cap \operatorname{Ker} f$ est un supplémentaire de $\mathfrak{c}$ dans $\mathfrak{a}$. Notons b un élément non nul de $\mathfrak{c}$ et distinguons deux cas :

1. $\dim \mathfrak{a} = 2$: Il existe dans ces conditions (I, 4.3) une base (a, b) de $\mathfrak{a}$ et deux formes linéaires ψ, λ sur $\mathfrak{g}$ tels que :

a. $\lambda \neq 0$ et $a \in \operatorname{Ker} f$;

b. pour tout $u \in \mathfrak{g}$, on a $[u, a] = \psi(u)\, a + \lambda(u)\, b$;

c. ou bien $\psi = 0$, ou bien ψ et λ sont linéairement indépendants.

Il résulte aussitôt de a et b que $\mathfrak{g}(f, \mathfrak{a}) = \operatorname{Ker} \lambda$, que $\mathfrak{g}(f, \mathfrak{a})$ est de codimension 1 dans $\mathfrak{g}$ et que le stabilisateur de $\chi(f, \mathfrak{a})$ contient $\exp \mathfrak{g}(f, \mathfrak{a})$;

or, comme $f|\mathfrak{c} \neq 0$, l'orbite de $\chi(f, \mathfrak{a})$ sous l'action de G est une droite (*cf.* [13], p. 157); ce stabilisateur est donc connexe, de codimension 1 dans G, et coïncide par suite avec $\exp \mathfrak{g}(f, \mathfrak{a})$.

Pour vérifier la deuxième assertion de (ii), il suffit dès lors, notant x un élément de $\mathfrak{g} - \mathfrak{g}(f, \mathfrak{a})$ et raisonnant comme plus haut, de trouver un élément g de G tel que

$$f^g(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad f^g|\mathfrak{g}(f, \mathfrak{a}) = f|\mathfrak{g}(f, \mathfrak{a}).$$

Supposons $\lambda = 0$: Alors $\mathfrak{g}(f, \mathfrak{a}) = \mathfrak{z}(\mathfrak{a})$. Soit $x_0 \in \mathfrak{g} - \mathfrak{z}(\mathfrak{a})$ tel que $[x_0, a] = b$. Nous avons dans ces conditions, pour $\alpha \in \mathbf{R}$:

$$x_0{}^{\exp \alpha a} \exp(\operatorname{ad} \alpha a)\, x_0 = x_0 - \alpha b$$

et donc

$$f^{\exp \alpha a}(x) = f(x) - \alpha f(b).$$

Il suffit alors de prendre $g = \exp \alpha a$, α étant choisi tel que $f(x) = \alpha f(b)$, ce qui est possible puisque $f(b) \neq 0$ par hypothèse.

Supposons ψ, λ *linéairement indépendants* : Soit alors (x_1, x_2) une base d'un supplémentaire de $\mathfrak{z}(\mathfrak{a})$ dans $\mathfrak{g}$ telle que

$$\lambda(x_1) = \psi(x_2) = 0 \qquad \text{et} \qquad \lambda(x_2) = \psi(x_1) = 1.$$

Dans ces conditions :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(f, \mathfrak{a}) \oplus \mathbf{R} x_2 \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{g}(f, \mathfrak{a}) = \mathfrak{z}(\mathfrak{a}) \oplus \mathbf{R} x_1.$$

Il suffit donc de trouver un nombre réel α tel que

$$(1) \qquad f^{\exp \alpha a}(x_2) = 0 \qquad \text{et} \qquad f^{\exp \alpha a}(x_1) = f(x_1).$$

Or il résulte des égalités $[x_1, a] = a$ et $[x_2, a] = b$ que

$$x_1{}^{\exp \alpha a} = \exp(\operatorname{ad} \alpha a)\, x_1 = x_1 - \alpha a,$$
$$x_2{}^{\exp \alpha a} = \exp(\operatorname{ad} \alpha a)\, x_2 = x_2 - \alpha b$$

et par suite, compte tenu de ce que $f(a) = 0$,

$$f^{\exp \alpha a}(x_1) = f(x_1) - \alpha f(a) = f(x_1), \qquad f^{\exp \alpha a}(x_2) = f(x_2) - \alpha f(b).$$

Comme $f(b) \neq 0$ par hypothèse, on peut toujours choisir α de manière à vérifier les égalités (1).

2. $\dim \mathfrak{a} = 3$: On peut alors trouver une base (a, a') de $\mathfrak{a} \cap \operatorname{Ker} f$, des éléments ψ, λ, μ de $\mathfrak{g}^*$ linéairement indépendants (*cf.* I, 4.3.3) et un nombre réel non nul α tels qu'on ait, pour tout $u \in \mathfrak{g}$:

$$[u, a] = \psi(u)(a - \alpha a') + \lambda(u) b,$$
$$[u, a'] = \psi(u)(\alpha a + a') + \mu(u) b.$$

Il résulte aussitôt de ces formules que $\mathfrak{g}(f, \mathfrak{a}) = \operatorname{Ker}\lambda \cap \operatorname{Ker}\mu$. Comme par ailleurs $f(a) = f(a') = 0$, il est clair que le stabilisateur de $\chi(f, \mathfrak{a})$ contient $\exp(\operatorname{Ker}\lambda \cap \operatorname{Ker}\mu) = \exp(\mathfrak{g}(f, \mathfrak{a}))$; or il est connexe et de codimension 2 dans G car l'orbite de $\chi(f, \mathfrak{a})$ est un plan (*cf.* [13], p. 158); le sous-groupe $\exp \mathfrak{g}(f, \mathfrak{a})$ est donc le stabilisateur de $\chi(f, \mathfrak{a})$.

Par ailleurs, comme ψ, λ, μ sont linéairement indépendants, on peut trouver une base (x, y, z) d'un supplémentaire de $\mathfrak{z}(\mathfrak{a})$ dans $\mathfrak{g}$ telle que

$$\psi(x) = \lambda(y) = \mu(z) = 1 \qquad \text{et} \qquad \psi(y) = \psi(z) = \lambda(x) = \lambda(z) = \mu(x) = \mu(y) = 0.$$

Comme dans ces conditions $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(f, \mathfrak{a}) \oplus \mathbf{R}y \oplus \mathbf{R}z$ et que $\mathfrak{g}(f, \mathfrak{a}) = \mathfrak{z}(\mathfrak{a}) \oplus \mathbf{R}x$, on voit, raisonnant comme plus haut, qu'il suffit pour achever la démonstration de vérifier l'existence deux nombres réels β, β' tels que

$$f^{\exp(\beta a + \beta' a')}(x) = f(x) \qquad \text{et} \qquad f^{\exp(\beta a + \beta' a')}(y) = f^{\exp(\beta a + \beta' a')}(z) = 0.$$

Or on a, pour $\gamma, \gamma' \in \mathbf{R}$:

$$[x, \gamma a + \gamma' a'] = \gamma(a - \alpha a') + \gamma'(\alpha a + a'),$$
$$[y, \gamma a + \gamma' a'] = \gamma b, \qquad [z, \gamma a + \gamma' a'] = \gamma' b$$

et par suite, $\mathfrak{a}$ étant un idéal commutatif,

$$x^{\exp(\gamma a + \gamma' a')} = \exp(\operatorname{ad}(\gamma a + \gamma' a'))\, x = x - \gamma(a - \alpha a') - \gamma'(\alpha a + a'),$$
$$y^{\exp(\gamma a + \gamma' a')} = \exp(\operatorname{ad}(\gamma a + \gamma' a'))\, y = y - \gamma b,$$
$$z^{\exp(\gamma a + \gamma' a')} = \exp(\operatorname{ad}(\gamma a + \gamma' a'))\, z = z - \gamma' b.$$

Et donc, puisque $f(a) = f(a') = 0$,

$$f^{\exp(\gamma a + \gamma' a')}(x) = f(x)$$

et, en outre :

$$f^{\exp(\gamma a + \gamma' a')}(y) = f(y) - \gamma f(b),$$
$$f^{\exp(\gamma a + \gamma' a')}(z) = f(z) - \gamma' f(b).$$

Il suffit donc, pour vérifier (2), de choisir β, β' tels que

$$f(y) = \beta f(b) \qquad \text{et} \qquad f(z) = \beta' f(b).$$

ce qui est possible puisque $f(b) \neq 0$.

LEMME 9. — *Soient :*

G *un groupe exponentiel résoluble simplement connexe de genre C;*
$\mathfrak{g}$ *l'algèbre de Lie de* G;
$\mathfrak{c}$ *le centre de* $\mathfrak{g}$;
$\mathfrak{a}$ *un idéal minimal parmi les idéaux distincts de* $\{0\}$ *et de* $\mathfrak{c}$;
$\mathfrak{g}^\star$ *l'espace vectoriel dual de* $\mathfrak{g}$;
f *un élément de* $\mathfrak{g}^\star$ *tel que* $f|\mathfrak{c} \neq 0$;
$\mathfrak{g}(f, \mathfrak{a})$ *le transporteur de* $\mathfrak{a} \cap \operatorname{Ker} f$ *dans lui-même;*
$\mathfrak{h}$ *un élément de* $S(f)$ *contenant* $\mathfrak{c}$.

Alors :

(i) $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}(f, \mathfrak{a}) + \mathfrak{a} \in S(f)$;

(ii) *l'une au moins des deux éventualités suivantes est réalisée :*

(A) $\dim \mathfrak{h} = \dim(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}(f, \mathfrak{a}) + \mathfrak{a})$ *et* $\rho(f, \mathfrak{h}) \simeq \rho(f, \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}(f, \mathfrak{a}) + \mathfrak{a})$;

(B) $\rho(f, \mathfrak{h})$ *est réductible et il existe un idéal* $\mathfrak{p}$ *de l'algèbre* $\mathfrak{h} + \mathfrak{a}$, *contenu dans* $\mathfrak{h}$, *tel que* $\mathfrak{s}((\mathfrak{h} + \mathfrak{a})/\mathfrak{p}) \not\subset \mathfrak{h}/\mathfrak{p}$ *et* $f|\mathfrak{p} = 0$.

Démonstration. — 1. Il résulte du paragraphe 4.3 du chapitre I que $\mathfrak{a}$ est commutatif et contient $\mathfrak{c}$. Comme $f|\mathfrak{c} \neq 0$ par hypothèse, il s'ensuit en particulier que $\mathfrak{a} = (\mathfrak{a} \cap \operatorname{Ker} f) \oplus \mathfrak{c}$ et par conséquent :

$$[\mathfrak{g}(f, \mathfrak{a}), \mathfrak{a}] = [\mathfrak{g}(f, \mathfrak{a}), \mathfrak{a} \cap \operatorname{Ker} f] \subset \mathfrak{a} \cap \operatorname{Ker} f.$$

Dans ces conditions :

$$\begin{aligned}[\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}(f, \mathfrak{a}) + \mathfrak{a}, \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}(f, \mathfrak{a}) + \mathfrak{a}] &\subset [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \cap \mathfrak{g}(f, \mathfrak{a}) + [\mathfrak{g}(f, \mathfrak{a}), \mathfrak{a}] \\ &\subset (\mathfrak{h} \cap \operatorname{Ker} f \cap \mathfrak{g}(f, \mathfrak{a})) + (\mathfrak{a} \cap \operatorname{Ker} f) \subset (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}(f, \mathfrak{a}) + \mathfrak{a}) \cap \operatorname{Ker} f,\end{aligned}$$

ce qui montre (i).

2. Pour vérifier (ii), nous commencerons par fixer nos notations et établir quelques résultats liminaires : ce fera l'objet des paragraphes 2 et 5; l'étude des divers cas particuliers qui se présentent fera l'objet des paragraphes 6 à 8.

Nous poserons

$$\begin{aligned}&\mathfrak{h}' = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}(f, \mathfrak{a}) + \mathfrak{a}, \qquad \mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h} \cap \operatorname{Ker} f, \qquad \mathfrak{b} = \mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{z}(\mathfrak{a}),\\ &H = \exp \mathfrak{h}, \qquad H' = \exp \mathfrak{h}', \qquad \tilde{H} = \exp(\mathfrak{h} + \mathfrak{a}),\\ &A = \exp \mathfrak{a}, \qquad Z(\mathfrak{a}) = \exp \mathfrak{z}(\mathfrak{a}), \qquad B = \exp \mathfrak{b},\\ &\tilde{\rho} = \operatorname{Ind}(\chi(f, \mathfrak{h}), \tilde{H}), \qquad \tilde{\rho}' = \operatorname{Ind}(\chi(f, \mathfrak{h}'), \tilde{H}).\end{aligned}$$

Par conséquent $\rho(f, \mathfrak{h}) \simeq \operatorname{Ind}(\tilde{\rho}, G)$ et $\rho(f, \mathfrak{h}') \simeq \operatorname{Ind}(\tilde{\rho}', G)$. Si donc $\tilde{\rho}$ et $\tilde{\rho}'$ sont équivalentes, il en est de même de $\rho(f, \mathfrak{h})$ et $\rho(f, \mathfrak{h}')$.

3. Comme $\mathfrak{h} \in S(f)$, nous avons

$$[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}_1] \subset [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h} \cap \operatorname{Ker} f = \mathfrak{h}_1$$

et par conséquent :

$$[\mathfrak{h} + \mathfrak{a}, \mathfrak{b}] = [\mathfrak{h}, \mathfrak{b}] \subset [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}_1] \cap \mathfrak{z}(\mathfrak{a}) \subset \mathfrak{b},$$

ce qui montre que $\mathfrak{h}_1$ (resp. $\mathfrak{b}$) est un idéal de $\mathfrak{h}$ (resp. $\mathfrak{h} + \mathfrak{a}$). Par suite B est un sous-groupe distingué fermé connexe de $\tilde{H}$, H et H'.

Comme $f|\mathfrak{b} = 0$, la restriction de f à $\mathfrak{h} + \mathfrak{a}$ s'identifie à un élément de $((\mathfrak{h} + \mathfrak{a})/\mathfrak{b})^*$ que nous noterons $\bar{f}$. Nous désignerons par p la surjection canonique de $\mathfrak{h} + \mathfrak{a}$ sur $(\mathfrak{h} + \mathfrak{a})/\mathfrak{b}$, et nous poserons

$$\bar{\mathfrak{h}} = p\mathfrak{h}, \qquad \bar{\mathfrak{h}}' = p\mathfrak{h}'.$$

D'une manière générale, nous noterons $\overline{u}$ l'image dans $(\mathfrak{h}+\mathfrak{a})/\mathfrak{b}$ d'un élément quelconque u de $\mathfrak{h}+\mathfrak{a}$.

Dans ces conditions, la représentation $\tilde{\rho}$ (resp. $\tilde{\rho}'$) de $\tilde{H}$ s'identifie à la représentation $\rho(\overline{f}, \bar{\mathfrak{h}})$ [resp. $\rho(\overline{f}, \bar{\mathfrak{h}}')$] de $\tilde{H}/B$: pour $u \in \mathfrak{h}+\mathfrak{a}$, on a

$$\tilde{\rho}_{\exp u} = \rho(\overline{f}, \bar{\mathfrak{h}})_{\exp \overline{u}} \qquad [\text{resp. } \tilde{\rho}'_{\exp u} = \rho(\overline{f}, \bar{\mathfrak{h}})_{\exp \overline{u}}].$$

Nous poserons

$$\rho_1 = \rho(\overline{f}, \bar{\mathfrak{h}}), \qquad \rho'_1 = \rho(\overline{f}, \bar{\mathfrak{h}}').$$

4. Par hypothèse, $f|\mathfrak{c} \neq 0$ et $\dim \mathfrak{c} = 1$. Il existe donc un élément de $\mathfrak{c}$, que nous noterons b, tel que

$$f(b) = 1 \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{c} = \mathbf{R}b.$$

Comme $\mathfrak{h} \supset \mathfrak{c}$, on a par ailleurs

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{c} = \mathfrak{h}_1 \oplus \mathbf{R}b$$

et $\mathfrak{h}$ est le produit des algèbres $\mathfrak{h}_1$ et $\mathfrak{c}$.

5. Avant de passer à l'étude des cas particuliers faisons encore deux remarques.

Si $\mathfrak{h} \supset \mathfrak{a}$, alors $[\mathfrak{h}, \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{a} \cap \operatorname{Ker} f$ et par conséquent, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}(f, \mathfrak{a})$; partant $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}'$: l'éventualité (A) est trivialement vérifiée.

Supposons maintenant qu'on ait

$$\mathfrak{h} \not\supset \mathfrak{a} \quad \text{et} \quad \mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}(f, \mathfrak{a}) \qquad \text{et} \qquad \dim(\mathfrak{a} \cap \operatorname{Ker} f) = 1.$$

Comme $\mathfrak{h} \supset \mathfrak{c}$ et que $\mathfrak{a} = (\mathfrak{a} \cap \operatorname{Ker} f) \oplus \mathfrak{c}$, il s'ensuit que $\mathfrak{h} \not\supset \mathfrak{a} \cap \operatorname{Ker} f$. Comme $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}(f, \mathfrak{a})$ et que $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}(f, \mathfrak{a})$, on a $\mathfrak{h}+\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}(f, \mathfrak{a})$. Comme $[\mathfrak{g}(f, \mathfrak{a}), \mathfrak{a} \cap \operatorname{Ker} f] \subset \mathfrak{a} \cap \operatorname{Ker} f$ et que $\dim(\mathfrak{a} \cap \operatorname{Ker} f) = 1$, il en résulte que $\mathfrak{a} \cap \operatorname{Ker} f \subset \mathfrak{s}(\mathfrak{h}+\mathfrak{a})$. Le lemme 4 implique alors que l'éventualité (B) est réalisée, avec $\mathfrak{p} = \{0\}$.

Nous pourrons par conséquent nous limiter désormais à la considération des cas suivants :

1° $\dim \mathfrak{a} = 2$ et $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{a} = c$ et $\mathfrak{h} \not\subset \mathfrak{g}(f, \mathfrak{a})$;
2° $\dim \mathfrak{a} = 3$ et $\mathfrak{h} \not\supset \mathfrak{a}$.

6. *Supposons que* $\mathfrak{a}$ *soit un idéal de première espèce* (*cf.* I, 4.3).

Il existe alors une base (a, b) de $\mathfrak{a}$ et un élément non nul λ de $\mathfrak{g}^*$ tels que $\mathbf{R}a = \mathfrak{a} \cap \operatorname{Ker} f$ et qu'on ait pour tout $u \in \mathfrak{g}$:

$$[u, a] = \lambda(x)\, b.$$

Par suite, $\mathfrak{g}(f, \mathfrak{a}) = \mathfrak{z}(\mathfrak{a}) = \operatorname{Ker} \lambda$. Nous pouvons supposer (§ 5) que

$$\mathfrak{h} \cap \mathfrak{a} = \mathfrak{c} \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{c} = \mathfrak{h} \not\subset \mathfrak{g}(f, \mathfrak{a}) = \operatorname{Ker} \lambda.$$

Il s'ensuit alors que $\mathfrak{h}_1 \not\subset \operatorname{Ker}\lambda$ et qu'il existe $x \in \mathfrak{h}_1$ tel que

$$\lambda(x) = 1 \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{h}_1 = \mathbf{R}x \oplus (\mathfrak{h}_1 \cap \operatorname{Ker}\lambda) = \mathbf{R}x \oplus \mathfrak{b}.$$

Par conséquent :

$$\mathfrak{h} = \mathbf{R}x \oplus \mathfrak{b} \oplus \mathbf{R}b, \qquad \mathfrak{h}' = \mathbf{R}a \oplus \mathfrak{b} \oplus \mathbf{R}b$$

et

$$\mathfrak{h} + \mathfrak{a} = \mathbf{R}x \oplus \mathfrak{b} \oplus \mathbf{R}a \oplus \mathbf{R}b.$$

Il en résulte que $\bar{x}$, $\bar{a}$, $\bar{b}$ forment une base de l'algèbre $(\mathfrak{h} + \mathfrak{a})/\mathfrak{b}$, laquelle est isomorphe par suite à l'algèbre $\mathfrak{g}_1$ du lemme 5; et que l'algèbre $\bar{\mathfrak{h}}$ (resp. $\bar{\mathfrak{h}}'$), qui a pour base $(\bar{x}, \bar{b})$ $[$resp. $(\bar{a}, \bar{b})]$, est isomorphe à l'algèbre $\mathfrak{k}_1$ (resp. $\mathfrak{k}'_1$) de ce même lemme. Par conséquent $\rho_1 \simeq \rho'_1$, et donc $\tilde{\rho} \simeq \tilde{\rho}'$, et $\rho(f, \mathfrak{h}) \simeq \rho(f, \mathfrak{h}')$. Comme $\dim \mathfrak{h} = \dim \mathfrak{h}' = \dim \mathfrak{b} + 2$, il s'ensuit que l'éventualité (A) se trouve réalisée.

7. *Supposons que* $\mathfrak{a}$ *soit un idéal de deuxième espèce.*

Il existe alors une base (a, b) de $\mathfrak{a}$ et deux éléments λ, ψ de $\mathfrak{g}^*$, linéairement indépendants (I, 4.3) tels qu'on ait, pour tout $u \in \mathfrak{g}$:

$$[u, a] = \psi(x)\, a + \lambda(x)\, b.$$

Par suite :

$$\mathfrak{g}(f, \mathfrak{a}) = \operatorname{Ker}\lambda, \qquad \mathfrak{z}(\mathfrak{a}) = \operatorname{Ker}\lambda \cap \operatorname{Ker}\psi. \tag{1}$$

Nous pouvons supposer (§ 5) que

$$\mathfrak{h} \cap \mathfrak{a} = \mathfrak{c} \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{c} = \mathfrak{h} \not\subset \mathfrak{g}(f, \mathfrak{a}) = \operatorname{Ker}\lambda. \tag{2}$$

Nous poserons

$$d = \dim (\mathfrak{h}/(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{z}(\mathfrak{a}))).$$

Comme $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{c}$, que $\mathfrak{b} = \mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{z}(\mathfrak{a})$ et que $\mathfrak{c} \subset \mathfrak{z}(\mathfrak{a})$, on a

$$\mathfrak{h} \cap \mathfrak{z}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{b} \oplus \mathfrak{c} \tag{3}$$

et par suite :

$$d = \dim ((\mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{c})/(\mathfrak{b} \oplus \mathfrak{c})) = \dim (\mathfrak{h}_1/\mathfrak{b}).$$

Il résulte par ailleurs de (1) et de (2) que $d = 1$ ou 2, ce qui nous amène à distinguer deux cas :

7.1. $d = 1$: *Supposons d'abord* $\mathfrak{h} \not\subset \operatorname{Ker}\psi$.

Comme $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{c}$ et que $\mathfrak{c} \subset \operatorname{Ker}\psi$, il s'ensuit que $\mathfrak{h}_1 \not\subset \operatorname{Ker}\psi$. Par ailleurs, la deuxième relation (2), et le fait que $\mathfrak{c} \subset \operatorname{Ker}\lambda$, impliquent que $\mathfrak{h}_1 \not\subset \operatorname{Ker}\lambda$. Il existe donc :

— un élément x de $\mathfrak{h}_1$;

— deux nombres réels α, β tous deux non nuls tels que

$$[x, a] = \alpha a + \beta b.$$

Comme $x \in \mathfrak{h}_1 - \mathfrak{b}$ et que $d = \dim(\mathfrak{h}_1/\mathfrak{b}) = 1$, il s'ensuit que $\mathfrak{h}_1 = \mathbf{R}x \oplus \mathfrak{b}$, et par conséquent, compte tenu de ce que $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{a} = \mathfrak{c}$:

$$\mathfrak{h} + \mathfrak{a} = (\mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{c}) + \mathfrak{a} = \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{a} = \mathbf{R}x \oplus \mathfrak{b} \oplus \mathbf{R}a \oplus \mathbf{R}b.$$

Donc $(\mathfrak{h} + \mathfrak{a})/\mathfrak{b}$ est l'algèbre de base $(\bar{x}, \bar{a}, \bar{b})$ définie par le crochet $[\bar{x}, \bar{a}] = \alpha\bar{a} + \beta\bar{b}$, ce qui montre que $\mathbf{R}(\alpha\bar{a} + \beta\bar{b}) \in \mathrm{D}((\mathfrak{h} + \mathfrak{a})/\mathfrak{b})$.

Par ailleurs :

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{c} = \mathbf{R}x \oplus \mathfrak{b} \oplus \mathbf{R}b$$

et par suite :

$$\bar{\mathfrak{h}}' = \mathbf{R}\bar{x} \oplus \mathbf{R}\bar{b} \not\supset \mathbf{R}(\alpha\bar{a} + \beta\bar{b}),$$

ce qui, compte tenu du lemme 4, implique que l'éventualité (B) est réalisée dans ce cas, avec $\mathfrak{p} = \mathfrak{b}$.

Supposons maintenant $\mathfrak{h} \subset \operatorname{Ker}\psi$.

Pour les mêmes raisons que ci-dessus, nous avons encore $\mathfrak{h}_1 \not\subset \operatorname{Ker}\lambda$ et il est clair que $\mathfrak{h}_1 \subset \operatorname{Ker}\psi$. Il existe donc $x \in \mathfrak{h}_1 - \mathfrak{b}$ tel que

$$[x, a] = b.$$

On a alors, compte tenu de ce que $\dim(\mathfrak{h}_1/\mathfrak{b}) = 1$ et $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{a} = \mathfrak{c}$:

$$\mathfrak{h}_1 = \mathbf{R}x \oplus b, \qquad \mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{c} = \mathbf{R}x \oplus \mathfrak{b} \oplus \mathbf{R}b,$$
$$\mathfrak{h} + \mathfrak{a} = \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{a} = \mathbf{R}x \oplus \mathfrak{b} \oplus \mathbf{R}a \oplus \mathbf{R}b.$$

Par ailleurs, comme $\mathfrak{h} \subset \operatorname{Ker}\psi$ et que $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{a} = \mathfrak{c}$, il résulte des formules (1) et (3) que

$$\begin{aligned}\mathfrak{h}' &= (\mathfrak{h} \cap \operatorname{Ker}\lambda) + \mathfrak{a} = ((\mathfrak{h} \cap \operatorname{Ker}\psi) \cap \operatorname{Ker}\lambda) + \mathfrak{a} \\ &= (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{z}(\mathfrak{a})) + \mathfrak{a} = (\mathfrak{b} \oplus \mathfrak{c}) + \mathfrak{a} = \mathfrak{b} \oplus \mathfrak{a} = \mathfrak{b} \oplus \mathbf{R}a \oplus \mathbf{R}b.\end{aligned}$$

Nous sommes donc dans la situation déjà rencontrée au paragraphe 6, et nous pouvons, de la même manière, en conclure que l'éventualité (A) se trouve réalisée.

7.2. $d = 2$: Il existe alors une base (x, y) d'un supplémentaire de $\mathfrak{b}$ dans $\mathfrak{h}_1$ telle que

$$\psi(x) = \lambda(y) = 1 \qquad \text{et} \qquad \psi(y) = \lambda(x) = 0$$

et par suite :

$$\begin{aligned}\mathfrak{h}_1 &= \mathbf{R}x \oplus \mathbf{R}y \oplus \mathfrak{b}, \\ \mathfrak{h} &= \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{c} = \mathbf{R}x \oplus \mathbf{R}y \oplus \mathfrak{b} \oplus \mathbf{R}b\end{aligned}$$

et donc, puisque $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{a} = \mathfrak{c}$:

$$\mathfrak{h} + \mathfrak{a} = \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{a} = \mathbf{R}x \oplus \mathbf{R}y \oplus \mathfrak{b} \oplus \mathbf{R}a \oplus \mathbf{R}b.$$

Il est clair par ailleurs que

$$\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{g}(f, \mathfrak{a}) = \mathfrak{h}_1 \cap \operatorname{Ker}\lambda = \mathbf{R}x \oplus \mathfrak{b}$$

et par conséquent :

$$\mathfrak{h}' = (\mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{c}) \cap \mathfrak{g}(f, \mathfrak{a}) + \mathfrak{a} = \mathbf{R}x \oplus \mathfrak{b} \oplus \mathbf{R}a \oplus \mathbf{R}b.$$

Dans ces conditions :

$$\bar{\mathfrak{h}} = \mathbf{R}\bar{x} \oplus \mathbf{R}\bar{y} \oplus \mathbf{R}\bar{b}, \qquad \bar{\mathfrak{h}}' = \mathbf{R}\bar{x} \oplus \mathbf{R}\bar{a} \oplus \mathbf{R}\bar{b},$$
$$p\mathfrak{h}_1 = \mathbf{R}\bar{x} \oplus \mathbf{R}\bar{y}, \qquad (\mathfrak{h} + \mathfrak{a})/\mathfrak{b} = \mathbf{R}\bar{x} \oplus \mathbf{R}\bar{y} \oplus \mathbf{R}\bar{a} \oplus \mathbf{R}\bar{b}.$$

Il s'ensuit d'une part que

$$\dim \mathfrak{h} = \dim \mathfrak{h}' = \dim \mathfrak{b} + 3$$

et d'autre part qu'il existe des nombres réels ξ, η tels que $[\bar{x}, \bar{y}] = \xi\bar{x} + \eta\bar{y}$. L'identité de Jacobi, appliquée au triplet $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{a})$, donne alors $\xi = 0$, $\eta = -1$. Par suite, l'algèbre $(\mathfrak{h} + \mathfrak{a})/\mathfrak{b}$, définie par les crochets non nuls

$$[\bar{x}, \bar{y}] = -\bar{y}, \qquad [\bar{x}, \bar{a}] = \bar{a}, \qquad [\bar{y}, \bar{a}] = \bar{b},$$

est isomorphe à l'algèbre $\mathfrak{g}$ du lemme 6, lorsque, avec les notations de ce lemme, $\dim \mathcal{V}_1 = \dim \mathcal{V}_2 = 1$. Il résulte alors du lemme 7 que $\rho_1 \simeq \rho'_1$, et donc $\rho(f, \mathfrak{h}) \simeq \rho(f, \mathfrak{h}')$: l'éventualité (A) se trouve bien réalisée.

8. *Supposons maintenant que* $\mathfrak{a}$ *soit un idéal de troisième espèce.*

8.1. Il existe alors (I, 4.3) :

— une base (a, a') de $\mathfrak{a} \cap \operatorname{Ker} f$;

— un nombre réel non nul α;

— $\psi, \lambda, \mu \in \mathfrak{g}^*$ linéairement indépendants;

tels qu'on ait, pour tout $u \in \mathfrak{g}$:

$$[u, a] = \psi(u)\,(a - \alpha a') + \lambda(u)\,b,$$
$$[u, a'] = \psi(u)\,(\alpha a + a') + \mu(u)\,b.$$

Il s'ensuit que

$$\mathfrak{g}(f, \mathfrak{a}) = \operatorname{Ker}\lambda \cap \operatorname{Ker}\mu \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{z}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{g}(f, \mathfrak{a}) \cap \operatorname{Ker}\psi.$$

Nous poserons

$$\mathfrak{k} = \mathfrak{a} \cap \operatorname{Ker} f.$$

Dans ces conditions :

— $\mathfrak{k} \in D(\mathfrak{g}(f, \mathfrak{a}))$ et $\mathfrak{k}$ est un idéal central de $\mathfrak{z}(\mathfrak{a})$; $\mathfrak{z}(\mathfrak{a})$ est le centralisateur de $\mathfrak{k}$ dans $\mathfrak{g}(f, \mathfrak{a})$;

— $\operatorname{Ker}\psi$, transporteur de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{c}$, est un idéal de $\mathfrak{g}$.

Nous supposerons (*cf.* § 5) *que*

$$\mathfrak{h} \not\supset \mathfrak{a}.$$

Comme $\mathfrak{h} \supset \mathfrak{c}$ et que $\mathfrak{a} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{c}$, il en résulte que

$$\mathfrak{h} \not\supset \mathfrak{k}.$$

Nous noterons $\mathfrak{l}$ un supplémentaire de $\mathfrak{h}\cap\mathfrak{k}$ dans $\mathfrak{k}$: donc $\mathfrak{l}\neq 0$.

Distinguons alors plusieurs cas :

8.2. $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{g}(f,\mathfrak{a})$: Si $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{z}(\mathfrak{a})$, alors $\mathfrak{h}+\mathfrak{a}\subset\mathfrak{z}(\mathfrak{a})$ et par suite $\mathfrak{l}$ est un idéal central de $\mathfrak{h}+\mathfrak{a}$. Si $\mathfrak{h}\not\subset\mathfrak{z}(\mathfrak{a})$, alors $\mathfrak{h}+\mathfrak{a}\not\subset\mathfrak{z}(\mathfrak{a})$, et $\mathfrak{k}\in \mathrm{D}(\mathfrak{h}+\mathfrak{a})$. Par conséquent (lemme 4), l'éventualité (B) se trouve réalisée dans les deux cas, avec $\mathfrak{p}=\{0\}$.

8.3. $\mathfrak{h}\not\subset\mathfrak{g}(f,\mathfrak{a})$ *et* $\mathfrak{h}\cap\mathfrak{a}\neq\mathfrak{c}$: Comme $\mathfrak{h}=\mathfrak{h}_1\oplus\mathfrak{c}$, nous avons alors : $\dim\mathfrak{h}\cap\mathfrak{a}=2$ et le sous-espace $\mathfrak{h}_1\cap\mathfrak{k}=\mathfrak{h}_1\cap\operatorname{Ker} f\cap\mathfrak{a}=\mathfrak{h}_1\cap\mathfrak{a}$ est un idéal de dimension 1 de $\mathfrak{h}_1$. Soient β, β' deux nombres réels non tous deux nuls et a_1 un élément de $\mathfrak{h}_1\cap\mathfrak{k}$ tels que $a_1=\beta a+\beta' a'$. Il existe alors $\nu\in\mathfrak{h}_1^*$ tel qu'on ait, pour tout $u\in\mathfrak{h}_1$:

$$\begin{aligned}[u, a_1] &= \beta(\psi(u)(a-\alpha a')+\lambda(u)b)+\beta'(\psi(u)(\alpha a+a')+\mu(u)b)\\ &= \nu(u)(\beta a+\beta' a'),\end{aligned}$$

ce qui implique

$$(4)\qquad \begin{cases}\psi(u)(\beta+\alpha\beta')=\beta\nu(u),\\ \psi(u)(-\alpha\beta+\beta')=\beta'\nu(u),\\ \beta\lambda(u)+\beta'\mu(u)=0 \quad \text{pour tout } u\in\mathfrak{h}_1.\end{cases}$$

Si $\psi\,|\,\mathfrak{h}_1\neq 0$, alors $(\beta+\alpha\beta')\beta'=(-\alpha\beta+\beta')\beta$, soit

$$\alpha(\beta^2+\beta'^2)=0,$$

ce qui est exclu. Donc $\mathfrak{h}_1\subset\operatorname{Ker}\psi$ et $\mathfrak{h}=\mathfrak{h}_1\oplus\mathfrak{c}\subset\operatorname{Ker}\psi$. La troisième égalité (4) implique en outre $\dim(\mathfrak{h}_1/\mathfrak{h}_1\cap\mathfrak{g}((f,\mathfrak{a})))\leq 1$. Or $\mathfrak{h}_1\not\subset\mathfrak{g}(f,\mathfrak{a})$: sinon on aurait $\mathfrak{h}=\mathfrak{h}_1\oplus\mathfrak{c}\subset\mathfrak{g}(f,\mathfrak{a})$, éventualité que nous avons écartée. Par suite :

$$\dim(\mathfrak{h}_1/(\mathfrak{h}_1\cap\mathfrak{g}(f,\mathfrak{a})))=1.$$

On peut alors trouver un élément x de $\mathfrak{h}_1$, engendrant un supplémentaire de $\mathfrak{h}_1\cap\mathfrak{g}(f,\mathfrak{a})$ dans $\mathfrak{h}_1$, et un élément a_2 de $\mathfrak{k}-\mathbf{R}a_1$ tels que

$$[x, a_2]=b.$$

Comme $\mathfrak{h}_1\subset\operatorname{Ker}\psi$, on a

$$\mathfrak{h}_1\cap\mathfrak{g}(f,\mathfrak{a})=\mathfrak{h}_1\cap\operatorname{Ker}\psi\cap\mathfrak{g}(f,\mathfrak{a})=\mathfrak{h}_1\cap\mathfrak{z}(\mathfrak{a})=\mathfrak{b}$$

et par conséquent :

$$\mathfrak{h}_1=\mathbf{R}x\oplus\mathfrak{b}\qquad\text{et}\qquad\mathfrak{h}=\mathfrak{h}_1\oplus\mathfrak{c}=\mathbf{R}x\oplus\mathfrak{b}\oplus\mathbf{R}b.$$

Comme par ailleurs $\mathfrak{h}_1\cap\mathfrak{k}=\mathbf{R}a_1$ et $\mathfrak{k}=\mathbf{R}a_1\oplus\mathbf{R}a_2$, et $\mathfrak{a}=\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{c}$, on a en outre :

$$\begin{aligned}\mathfrak{h}+\mathfrak{a} &= (\mathfrak{h}_1\oplus\mathfrak{c})+\mathfrak{k}=(\mathfrak{h}_1+\mathfrak{k})\oplus\mathfrak{c}=\mathfrak{h}_1\oplus\mathbf{R}a_2\oplus\mathfrak{c}\\ &= \mathbf{R}x\oplus\mathfrak{b}\oplus\mathbf{R}a_2\oplus\mathbf{R}b\\ \mathfrak{h}' &= (\mathfrak{h}_1\oplus\mathfrak{c})\cap\mathfrak{g}(f,\mathfrak{a})+\mathfrak{a}=\mathfrak{h}_1\cap\mathfrak{g}(f,\mathfrak{a})+\mathfrak{a}=\mathfrak{b}+\mathfrak{a}\\ &= \mathfrak{b}\oplus\mathbf{R}a_2\oplus\mathbf{R}b.\end{aligned}$$

Nous retrouvons la situation étudiée au paragraphe 6 : l'éventualité (A) se trouve donc réalisée.

8.4. $\mathfrak{h} \not\subset \mathfrak{g}(f, \mathfrak{a})$ *et* $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{a} = \mathfrak{c}$.

8.4.1. *Supposons d'abord* $\mathfrak{h} \subset \operatorname{Ker} \psi$.

Les hypothèses et l'égalité $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{c}$ impliquent alors les relations

$$(5) \qquad \begin{cases} \mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{a} = 0, \qquad \mathfrak{h}_1 \not\subset \mathfrak{z}(\mathfrak{a}), \qquad \mathfrak{h}_1 \subset \operatorname{Ker}\psi, \\ \mathfrak{h} \cap \mathfrak{z}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}(f, \mathfrak{a}) \cap \operatorname{Ker}\psi = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}(f, \mathfrak{a}) \neq \mathfrak{h}. \end{cases}$$

Comme par ailleurs $\mathfrak{c} \subset \mathfrak{h} \cap \mathfrak{z}(\mathfrak{a})$, on a en outre :

$$\dim(\mathfrak{h}/\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}(f, \mathfrak{a}))) = \dim(\mathfrak{h}/(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{z}(\mathfrak{a}))) = \dim(\mathfrak{h}_1/\mathfrak{b}).$$

Il résulte alors de (5) que la valeur commune de ces trois nombres est 1 ou 2, ce qui nous amène à distinguer deux cas :

8.4.1.1. $\dim(\mathfrak{h}_1/\mathfrak{b}) = 1$: Soit $\mathfrak{r}$ un supplémentaire de $\mathfrak{b}$ dans $\mathfrak{h}_1$; comme $\dim \mathfrak{r} = \dim \mathfrak{c} = 1$, que $\dim \mathfrak{k} = 2$ et que, compte tenu de (5), $[\mathfrak{r}, \mathfrak{k}] = [\mathfrak{r}, \mathfrak{a}] = \mathfrak{c}$, il existe un élément non nul a_1 de $\mathfrak{k}$ tel que $[\mathfrak{r}, \mathbf{R}a_1] = \{0\}$. Comme par ailleurs $\mathfrak{h} + \mathfrak{a} = \mathfrak{h}_1 + \mathfrak{a} = \mathfrak{r} + \mathfrak{b} + \mathfrak{a}$, il s'ensuit que $[\mathfrak{h} + \mathfrak{a}, \mathbf{R}a_1] = \{0\}$. Donc $\mathbf{R}a_1$ est un idéal central de $\mathfrak{h} + \mathfrak{a}$ non contenu dans $\mathfrak{h}$, ce qui montre (lemme 4) que l'éventualité (B) se trouve réalisée, avec $\mathfrak{p} = \{0\}$.

8.4.1.2. $\dim(\mathfrak{h}_1/\mathfrak{b}) = 2$: On peut alors trouver une base (x, y) d'un supplémentaire de $\mathfrak{b}$ dans $\mathfrak{h}_1$ telle que

$$(6) \qquad [x, a] = [y, a'] = b \quad \text{et} \quad [x, a'] = [y, a] = 0.$$

Dans ces conditions, nous avons, compte tenu de (5),

$$\begin{aligned} &\mathfrak{h}_1 = \mathbf{R}x \oplus \mathbf{R}y \oplus \mathfrak{b}, \qquad \mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{c} = \mathbf{R}x \oplus \mathbf{R}y \oplus \mathfrak{b} \oplus \mathbf{R}b, \\ &\mathfrak{h}' = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}(f, \mathfrak{a}) + \mathfrak{a} = \mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{g}(f, \mathfrak{a}) \oplus \mathfrak{a} = \mathfrak{b} \oplus \mathfrak{a} = \mathfrak{b} \oplus \mathbf{R}a \oplus \mathbf{R}a' \oplus \mathbf{R}b, \\ &\mathfrak{h} + \mathfrak{a} = \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{a} = \mathbf{R}x \oplus \mathbf{R}y \oplus \mathfrak{b} \oplus \mathbf{R}a \oplus \mathbf{R}a' \oplus \mathbf{R}b \end{aligned}$$

et par suite :

$$\bar{\mathfrak{h}} = \mathbf{R}\bar{x} \oplus \mathbf{R}\bar{y} \oplus \mathbf{R}\bar{b}, \qquad \bar{\mathfrak{h}}' = \mathbf{R}\bar{a} \oplus \mathbf{R}\bar{a}' \oplus \mathbf{R}\bar{b},$$
$$(\mathfrak{h} + \mathfrak{a})/\mathfrak{b} = \mathbf{R}\bar{x} \oplus \mathbf{R}\bar{y} \oplus \mathbf{R}\bar{a} \oplus \mathbf{R}\bar{a}' \oplus \mathbf{R}\bar{b}.$$

Par ailleurs, comme $x \in \operatorname{Ker}\psi$ et $y \in \operatorname{Ker}\psi$ et que $[\operatorname{Ker}\psi, \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{c}$, on a

$$[[x, y], \mathfrak{a}] \subset [\operatorname{Ker}\psi, [\operatorname{Ker}\psi, \mathfrak{a}]] \subset [\operatorname{Ker}\psi, \mathfrak{c}] = \{0\}$$

et donc $[x, y] \in \mathfrak{z}(\mathfrak{a}) \cap \mathfrak{h}_1 = \mathfrak{b}$, soit

$$(7) \qquad [\bar{x}, \bar{y}] = 0.$$

Il résulte alors des égalités (6) et (7) que l'algèbre $(\mathfrak{h} + \mathfrak{a})/\mathfrak{b}$ (resp. $\bar{\mathfrak{h}}, \bar{\mathfrak{h}}'$) est isomorphe à l'algèbre $\mathfrak{g}_2$ (resp. $\mathfrak{k}_2$, $\mathfrak{k}'_2$) du lemme 5. On en conclut que

$$\rho_1 \simeq \rho'_1 \quad \text{et} \quad \rho(f, \mathfrak{h}) \simeq \rho(f, \mathfrak{h}').$$

Comme par ailleurs $\dim \mathfrak{h} = \dim \mathfrak{h}' = \dim \mathfrak{b} + 3$, il s'ensuit que l'éventualité (A) est réalisée.

8.4.2. *Supposons maintenant* $\mathfrak{h} \not\subset \operatorname{Ker}\psi$.

Comme $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{c}$ et que $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{z}(\mathfrak{a}) \supset \mathfrak{c}$, nous avons alors

$$\mathfrak{h}_1 \not\subset \operatorname{Ker}\psi \qquad \text{et} \qquad \dim(\mathfrak{h}/(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{z}(\mathfrak{a}))) = \dim(\mathfrak{h}_1/\mathfrak{b}). \tag{8}$$

Donc $\mathfrak{b}$ est un idéal de codimension 1, 2 ou 3 de $\mathfrak{h}_1$, ce qui nous amène à distinguer trois cas :

8.4.2.1. $\dim(\mathfrak{h}_1/\mathfrak{b}) = 1$: Il existe alors deux nombres réels β, γ et un élément x de $\mathfrak{h}_1$ tels que

$$\mathfrak{h}_1 = \mathbf{R}x \oplus \mathfrak{b} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} [x, a] = a - \alpha a' + \beta b, \\ [x, a'] = \alpha a + a' + \gamma b \end{cases}$$

et dans ces conditions :

$$\mathfrak{h} + \mathfrak{a} = \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{a} = \mathbf{R}x \oplus \mathfrak{b} \oplus \mathbf{R}a \oplus \mathbf{R}a' \oplus \mathbf{R}b,$$
$$(\mathfrak{h} + \mathfrak{a})/\mathfrak{b} = \mathbf{R}\bar{x} \oplus \mathbf{R}\bar{a} \oplus \mathbf{R}\bar{a}' \oplus \mathbf{R}\bar{b}.$$

Posant alors

$$\bar{a}_1 = \bar{a} - \alpha\bar{a}' + \beta\bar{b}, \qquad \bar{a}'_1 = \alpha\bar{a} + \bar{a}' + \gamma\bar{b},$$

on obtient

$$[\bar{x}, \bar{a}_1] = \bar{a}_1 - \alpha\bar{a}'_1,$$
$$[\bar{x}, \bar{a}'_1] = \alpha\bar{a}_1 + \bar{a}'_1.$$

Par suite, $\mathbf{R}\bar{a}_1 \oplus \mathbf{R}\bar{a}'_1 \in \mathrm{D}((\mathfrak{h} + \mathfrak{a})/\mathfrak{b})$. Or, $\bar{\mathfrak{h}}$ ne contient pas $\mathbf{R}\bar{a}_1 \oplus \mathbf{R}\bar{a}'_1$ (puisque $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{a} = \mathfrak{c}$). On en déduit, compte tenu du lemme 4, que l'éventualité (B) est réalisée dans ce cas, avec $\mathfrak{p} = \mathfrak{b}$.

8.4.2.2. $\dim(\mathfrak{h}_1/\mathfrak{b}) = 2$: On peut alors trouver une base (x_1, x_2) d'un supplémentaire de $\mathfrak{b}$ dans $\mathfrak{h}_1$ telle que

$$\psi(x_1) = 1 \qquad \text{et} \qquad \psi(x_2) = 0.$$

Si l'on pose $\lambda_j = \lambda(x_j)$, $\mu_j = \mu(x_j)$, $j = 1, 2$, l'identité de Jacobi, appliquée aux triplets (x_1, x_2, a), (x_1, x_2, a') donne alors

$$\begin{aligned}
[[x_1, x_2], a] &= [x_1, [x_2, a]] + [x_2, [a, x_1]] = [x_2, [a, x_1]] \\
&= -[x_2, a - \alpha a' + \lambda_1 b] = -(\lambda_2 - \alpha\mu_2)\, b, \\
[[x_1, x_2], a'] &= [x_1, [x_2, a']] + [x_2, [a', x_1]] = [x_2, [a', x_1]] \\
&= -[x_2, \alpha a + a' + \mu_1 b] = -(\alpha\lambda_2 + \mu_2)\, b.
\end{aligned}$$

Or x_2 engendre un supplémentaire de $\mathfrak{b}$ dans l'idéal $\mathfrak{h}_1 \cap \operatorname{Ker}\psi$ de $\mathfrak{h}_1$. Il existe donc un nombre réel β tel que

$$[\bar{x}_1, \bar{x}_2] = \beta\bar{x}_2$$

et β vérifie donc le système d'égalités

$$\beta\lambda_2 = -(\lambda_2 - \alpha\mu_2),$$
$$\beta\mu_2 = -(\alpha\lambda_2 + \mu_2),$$

ce qui implique $\lambda_2 = \mu_2 = 0$, soit $x_2 \in \mathfrak{z}(\mathfrak{a})$, *ce qui est absurde : l'éventualité que nous venons d'envisager n'est donc pas possible.*

8.4.2.3. $\dim(\mathfrak{h}_1/\mathfrak{b}) = 3$: Il existe alors une base (x, y, z) d'un supplémentaire de $\mathfrak{b}$ dans $\mathfrak{h}_1$ telle que

$$\psi(x) = \lambda(y) = \mu(z) = 1$$
$$\psi(y) = \psi(z) = \lambda(x) = \lambda(z) = \mu(x) = \mu(y) = 0$$

et dans ces conditions :

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{h}_1 = \mathbf{R}x \oplus \mathbf{R}y \oplus \mathbf{R}z \oplus \mathfrak{b},\\
&\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{g}(f, \mathfrak{a}) = \mathfrak{h}_1 \cap \operatorname{Ker}\lambda \cap \operatorname{Ker}\mu = \mathbf{R}x \oplus \mathfrak{b},\\
&\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{c} = \mathbf{R}x \oplus \mathbf{R}y \oplus \mathbf{R}z \oplus \mathfrak{b} \oplus \mathbf{R}b,\\
&\mathfrak{h} + \mathfrak{a} = \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{a} = \mathbf{R}x \oplus \mathbf{R}y \oplus \mathbf{R}z \oplus \mathfrak{b} \oplus \mathbf{R}a \oplus \mathbf{R}a' \oplus \mathbf{R}b,\\
&\mathfrak{h}' = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}(f, \mathfrak{a}) + \mathfrak{a} = (\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{g}(f, \mathfrak{a})) \oplus \mathfrak{a}\\
&\quad = \mathbf{R}x \oplus \mathfrak{b} \oplus \mathbf{R}a \oplus \mathbf{R}a' \oplus \mathbf{R}b,
\end{aligned}$$

ce qui implique

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned}
&(\mathfrak{h} + \mathfrak{a})/\mathfrak{b} = \mathbf{R}\bar{x} \oplus \mathbf{R}\bar{y} \otimes \mathbf{R}\bar{z} \oplus \mathbf{R}\bar{a} \oplus \mathbf{R}\bar{a}' \oplus \mathbf{R}\bar{b},\\
&\bar{\mathfrak{h}} = \mathbf{R}\bar{x} \oplus \mathbf{R}\bar{y} \oplus \mathbf{R}\bar{z} \oplus \mathbf{R}\bar{b},\\
&\bar{\mathfrak{h}}' = \mathbf{R}\bar{x} \oplus \mathbf{R}\bar{a} \oplus \mathbf{R}\bar{a}' \oplus \mathbf{R}\bar{b}
\end{aligned}\right.$$

et

$$(10)\qquad \dim \mathfrak{h} = \dim \mathfrak{h}' = \dim \mathfrak{b} + 4.$$

Déterminons la structure de l'algèbre de Lie $(\mathfrak{h} + \mathfrak{a})/\mathfrak{b}$. La forme linéaire ψ est proportionnelle à une racine de $\mathfrak{g}$: elle s'annule donc sur l'idéal dérivé de $\mathfrak{g}$; il s'ensuit que $[x, y]$, $[y, z]$ et $[x, z]$ appartiennent à $\mathfrak{h}_1 \cap \operatorname{Ker}\psi = \mathbf{R}y \oplus \mathbf{R}z \oplus \mathfrak{b}$. Il existe donc des nombres réels η_1, η_2, η_3, ζ_1, ζ_2, ζ_3 tels que

$$[\bar{x}, \bar{y}] = \eta_1\bar{y} + \zeta_1\bar{z}, \qquad [\bar{x}, \bar{z}] = \eta_2\bar{y} + \zeta_2\bar{z}, \qquad [\bar{y}, \bar{z}] = \eta_3\bar{y} + \zeta_3\bar{z}$$

et par suite :

$$\begin{aligned}
&[[\bar{x}, \bar{y}], \bar{a}] = \eta_1\bar{b}, \qquad [[\bar{x}, z], \bar{a}] = \eta_2\bar{b}, \qquad [[\bar{y}, \bar{z}], \bar{a}] = \eta_3\bar{b},\\
&[[\bar{x}, \bar{y}], \bar{a}'] = \zeta_1\bar{b}, \qquad [[\bar{x}, \bar{z}], \bar{a}'] = \zeta_2\bar{b}, \qquad [[\bar{y}, \bar{z}], \bar{a}'] = \zeta_3\bar{b}.
\end{aligned}$$

Par ailleurs l'identité de Jacobi donne

$$\begin{aligned}
[[\bar{x}, \bar{y}], \bar{a}] &= [\bar{x}, [\bar{y}, \bar{a}]] + [\bar{y}, [\bar{a}, \bar{x}]] = [\bar{y}, [\bar{a}, \bar{x}]]\\
&= -[\bar{y}, \bar{a} - \alpha\bar{a}'] = -\bar{b},\\
[[\bar{x}, \bar{y}], \bar{a}'] &= [\bar{x}, [\bar{y}, \bar{a}']] + [\bar{y}, [\bar{a}', \bar{x}]] = [\bar{y}, [\bar{a}', \bar{x}]]\\
&= -[\bar{y}, \alpha\bar{a} + \bar{a}'] = -\alpha\bar{b},\\
[[\bar{x}, \bar{z}], \bar{a}] &= [\bar{x}, [\bar{z}, \bar{a}]] + [\bar{z}, [\bar{a}, \bar{x}]] = [\bar{z}, [\bar{a}, \bar{x}]]\\
&= -[\bar{z}, \bar{a} - \alpha\bar{a}'] = \alpha\bar{b},\\
[[\bar{x}, \bar{z}], \bar{a}'] &= [\bar{x}, [\bar{z}, \bar{a}']] + [\bar{z}, [\bar{a}', \bar{x}]] = [\bar{z}, [\bar{a}', \bar{x}]]\\
&= -[\bar{z}, \alpha\bar{a} + \bar{a}'] = -\bar{b}.
\end{aligned}$$

Soit

$$\eta_1 = -1, \qquad \eta_2 = \alpha, \qquad \zeta_1 = -\alpha, \qquad \zeta_2 = -1.$$

Par ailleurs, comme $y, z \in \operatorname{Ker}\psi$ et que $[\operatorname{Ker}\psi, \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{c}$, on a

$$[[y, z], \mathfrak{a}] \subset [\operatorname{Ker}\psi, [\operatorname{Ker}\psi, \mathfrak{a}]] \subset [\operatorname{Ker}\psi, \mathfrak{c}] = \{0\}.$$

Donc $[y, z] \in h_1 \cap \mathfrak{z}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{b}$ et, partant :

$$\eta_3 = \zeta_3 = 0.$$

L'algèbre $(\mathfrak{h} + \mathfrak{a})/\mathfrak{b}$ est donc définie par les crochets non nuls

$$\begin{gathered}[\bar{x}, \bar{y}] = -\bar{y} - \alpha\bar{z}, \qquad [\bar{x}, \bar{a}] = \bar{a} - \alpha\bar{a}', \\ [\bar{x}, \bar{z}] = \alpha\bar{y} - \bar{z}, \qquad [\bar{x}, \bar{a}'] = \alpha\bar{a} + \bar{a}', \\ [\bar{y}, \bar{a}] = [\bar{z}, \bar{a}'] = \bar{b}.\end{gathered}$$

Elle est donc isomorphe à l'algèbre $\mathfrak{h}$ du lemme 6, lorsque, avec les notations de ce lemme, $\dim \mathcal{V}_1 = \dim \mathcal{V}_2 = 2$. Il résulte alors du lemme 7, compte tenu des égalités (8), que

$$\rho_1 \simeq \rho'_1 \qquad \text{et} \qquad \rho(f, \mathfrak{h}) \simeq \rho(f, \mathfrak{h}')$$

ce qui, compte tenu de (9), implique que l'éventualité (A) est réalisée dans ce cas, et termine la démonstration.

CHAPITRE III.

1. Dans ce chapitre, G désigne un groupe exponentiel résoluble simplement connexe; la définition des objets $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}^\star$, Ω, $\hat{G}$, ... attachés à G et la terminologie y afférant sont celles du chapitre I. Nous nous proposons de définir une bijection canonique de Ω sur $\hat{G}$.

Pour la commodité du langage, nous noterons :

$(A_{f,G})$ l'assertion que $I(f) \neq \emptyset$, f étant un élément fixé de $\mathfrak{g}^\star$.

$(B_{f,G})$ l'assertion que toutes les représentations

$$\rho(f, \mathfrak{h}), \qquad \text{avec} \quad \mathfrak{h} \in I(f)$$

sont équivalentes, f étant un élément fixé de $\mathfrak{g}^\star$.

(A_G) [resp. (B_G)] l'assertion que $(A_{f,G})$ [resp. $(B_{f,G})$] est vraie pour tout $f \in \mathfrak{g}^\star$, G étant fixé.

(C_G) l'assertion que, pour G fixé, et pour tout couple (f, f') d'éléments de $\mathfrak{g}^\star$, s'il existe $\mathfrak{h} \in I(f)$ et $\mathfrak{h}' \in I(f')$ tels que $\rho(f, \mathfrak{h}) \simeq \rho(f', \mathfrak{h}')$, alors f et f' sont sur une même orbite.

(A_n) [resp. (B_n), (C_n)] l'assertion que (A_G) [resp. (B_G), (C_G)] est vraie si dim $G < n$, n étant un entier fixé ≥ 2.

(A) [resp. (B), (C)] l'assertion que (A_n) [resp. (B_n), (C_n)] est vraie pour tout entier $n \geq 2$.

(D) l'assertion que, quel que soit le groupe exponentiel résoluble simplement connexe G, et quelle que soit la représentation irréductible ρ de G, il existe $f \in \mathfrak{g}^\star$ et $\mathfrak{h} \in I(f)$ tels que $\rho \simeq \rho(f, \mathfrak{h})$.

2. Convenons de dire qu'une représentation de G est *obtenue à partir d'un élément f de* $\mathfrak{g}^\star$ s'il existe $\mathfrak{h} \in I(f)$ tel que $\rho = \rho(f, \mathfrak{h})$.

Cela étant, montrons tout de suite comment (A), (B), (C) et (D) impliquent le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Soient :*

G *un groupe exponentiel résoluble simplement connexe* (*cf.* I, 2);
$\mathfrak{g}$ *l'algèbre de Lie de* G;
$\mathfrak{g}^\star$ *l'espace vectoriel dual de* $\mathfrak{g}$;
Ω *l'ensemble des orbites de* $\mathfrak{g}^\star$ *sous l'action de* G;
$\hat{G}$ *le dual de* G.

Alors :

(i) *Toute représentation irréductible de* G *est équivalente à une représentation obtenue à partir d'un élément f de* $\mathfrak{g}^\star$.

(ii) *Pour tout* $f \in \mathfrak{g}^\star$, *il existe des représentations irréductibles de* G *obtenues à partir de f.*

(iii) *Toutes les représentations irréductibles de* G *obtenues à partir d'éléments f d'une orbite fixée* $\omega \in \Omega$ *sont équivalentes.*

(iv) *Si deux représentations irréductibles de* G *obtenues à partir d'éléments f et f' de* $\mathfrak{g}^\star$ *sont équivalentes, alors f et f' sont sur une même orbite.*

(v) *Il existe une bijection canonique de* Ω *sur* $\hat{G}$: *elle fait correspondre à toute orbite* $\omega \in \Omega$ *la classe d'équivalence des représentations irréductibles de* G *obtenues à partir des éléments de* ω.

En effet (D) $\Leftrightarrow$ (i), (A) $\Leftrightarrow$ (ii), (C) $\Leftrightarrow$ (iv) et (v) résulte immédiatement de (i), (ii), (iii) et (iv). Il suffit donc de vérifier que (B) implique (iii). Soient en effet

$$\omega \in \Omega, \qquad f \in \omega, \qquad f' \in \omega, \qquad \mathfrak{h} \in I(f) \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{h}' \in I(f').$$

Il existe alors $g \in G$ tel que $f' = f^g$. Par suite, compte tenu de (I, 3.2) :

$$\mathfrak{h}^g \in S(f^g) = S(f') \qquad \text{et} \qquad \rho(f, \mathfrak{h}) \simeq \rho(f^g, \mathfrak{h}^g) = \rho(f', \mathfrak{h}^g).$$

Donc $\mathfrak{h}^g \in I(f')$ et (B) implique alors

$$\rho(f, \mathfrak{h}) \simeq \rho(f', \mathfrak{h}^g) \simeq \rho(f' \mathfrak{h}').$$

3. Nous sommes donc ramenés à vérifier (A), (B), (C) et (D).

Il résulte de [13] que toute représentation irréductible ρ de G est équivalente à une représentation induite par une représentation ρ' de dimension 1 d'un sous-groupe fermé connexe (et donc simplement connexe) G'. Soit $\mathfrak{g}'$ l'algèbre de Lie de G'. Alors ρ' s'identifie à un caractère χ de G', χ à un élément f_1 de $\mathfrak{g}'$: si donc $f \in \mathfrak{g}^*$ prolonge f_1, il est clair que $\mathfrak{g}' \in S(f)$ et que $\rho \simeq \rho(f, \mathfrak{g}')$, ce qui montre que (D) est vraie.

Pour vérifier (A), (B) et (C), nous procéderons par récurrence sur la dimension de G. Les assertions (A_G), (B_G) et (C_G) sont trivialement vérifiées lorsque G est commutatif; il s'ensuit en particulier que (A_2), (B_2) et (C_2) sont vraies et qu'on peut se limiter à la considération des groupes G non commutatifs. Nous supposerons désormais que l'entier $n \geq 2$ est fixé et que :

— $\dim G = n$;
— G n'est pas commutatif.

Au paragraphe 4, nous montrons que (A_n) et (B_n) impliquent dans ces conditions (A_G) et (B_G), et donc (A_{n+1}) et (B_{n+1}), ce qui établit (A) et (B).

Au paragraphe 4.1, nous précisons nos notations et établissons quelques résultats liminaires.

Au paragraphe 4.2, nous traitons le cas où G est de genre A; au paragraphe 4.3, celui où G est de genre B; au paragraphe 4.4, celui où G est de genre C.

Nous montrons au paragraphe 5 que (A), (B) et (C_n) impliquent (C_G), donc (C_{n+1}) et par suite (C).

4. Vérification des assertions (A) et (B).

4.1.1. Nous adopterons jusqu'à la fin du chapitre les notations suivantes :

— n et G étant choisis conformément au paragraphe 3, $\mathfrak{g}$ désignera l'algèbre de Lie de G et $\mathfrak{g}^*$ l'espace vectoriel dual de $\mathfrak{g}$.

En outre, nous noterons :

$\mathfrak{c}$ le centre de $\mathfrak{g}$;

$\mathfrak{a}$ un idéal de $\mathfrak{g}$ choisi une fois pour toutes :

— qui appartient à $D(\mathfrak{g})$ si G est de genre A,
— qui est minimal parmi les idéaux distincts de $\mathfrak{c}$ et de $\{0\}$ si G est de genre C;

f un élément de $\mathfrak{g}^*$;
C le centre de G;
$Z(\mathfrak{a})$ le groupe $\exp \mathfrak{z}(\mathfrak{a})$.

4.1.2. *Toute algèbre* $\mathfrak{h} \in I(f)$ *contient* $\mathfrak{c}$. Si en effet on avait $\mathfrak{h} \not\supset \mathfrak{c}$, alors $\mathfrak{c} \neq \{0\}$ et $\chi(f, \mathfrak{h})$ induirait une représentation réductible du sous-groupe $\exp(\mathfrak{h}+\mathfrak{c})$ (I, 1.3, *c*), et *a fortiori* une représentation réductible de G (I, 1.3, *a* et *b*).

4.1.3. Soit $\mathfrak{p}$ un idéal non nul de $\mathfrak{g}$, σ la surjection canonique $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{p}$, P le sous-groupe $\exp \mathfrak{p}$.

1. Supposons $f|\mathfrak{p}=0$. Alors f s'identifie à un élément $\tilde{f}$ de $(\sigma\mathfrak{g})^*$ et il résulte de (A_n) que $I(\tilde{f}) \neq \emptyset$. Soit $\tilde{\mathfrak{h}} \in I(\tilde{f})$. Alors $\sigma^{-1}(\tilde{\mathfrak{h}}) \in S(f)$ et la représentation $\rho(\tilde{f}, \tilde{\mathfrak{h}})$ de G/P s'identifie à la représentation $\rho(f, \sigma^{-1}(\tilde{\mathfrak{h}}))$ de G, ce qui montre que $\sigma^{-1}(\tilde{\mathfrak{h}}) \in I(f)$ et donc $I(f) \supset \sigma^{-1}(I(\tilde{f})) \neq \emptyset$: $(A_{f,G})$ est donc vérifiée.

Par ailleurs, l'hypothèse de récurrence (B_n) implique que toutes les représentations $\rho(f, \mathfrak{h})$, avec $\mathfrak{h} \in \sigma^{-1} I(\tilde{f})$, sont équivalentes.

2. Supposons en outre que $\mathfrak{p}$ soit central (avec, toujours, $f|\mathfrak{p}=0$). Il résulte alors du paragraphe 4.1.2 que les algèbres de $I(f)$ contiennent $\mathfrak{p}$, et par suite $I(f)=\sigma^{-1} I(\tilde{f})$, ce qui, compte tenu de ce que nous venons de voir, implique $(B_{f,G})$.

4.1.4. Supposons qu'il existe une sous-algèbre $\mathfrak{g}_f \neq \mathfrak{g}$ de $\mathfrak{g}$ ayant la propriété suivante :

Pour tout $\mathfrak{h} \in I(f)$, il existe $\mathfrak{h}' \in I(f)$ tel que

$$\rho(f, \mathfrak{h}) \simeq \rho(f, \mathfrak{h}') \quad \text{et} \quad \mathfrak{h}' \subset \mathfrak{g}_f.$$

Alors $(B_{f,G})$ est vérifiée. Soit en effet $f_1 = f|\mathfrak{g}_f$. Alors toutes les algèbres $\mathfrak{h}' \in I(f)$ contenues dans $\mathfrak{g}_f$ appartiennent aussi à $I(f_1)$ (I, 1.3, *b*), et (B_n) implique dans ces conditions que toutes les représentations correspondantes $\rho(f_1, \mathfrak{h}')$ de $\exp \mathfrak{g}_f$ sont équivalentes; il en est donc de même des représentations $\rho(f, \mathfrak{h}')$ de G; $(B_{f,G})$ résulte alors de la propriété de $\mathfrak{g}_f$.

Une telle algèbre existe en particulier si toutes les sous-algèbres $\mathfrak{h} \in I(f)$ sont contenues dans une même sous-algèbre $\mathfrak{g}' \neq \mathfrak{g}$: il suffit de prendre $\mathfrak{g}_f = \mathfrak{g}'$.

4.2. *Supposons que* G *soit de genre A.*

Alors $\mathfrak{a} \in D(\mathfrak{g})$. Posons $f_1 = f|\mathfrak{z}(\mathfrak{a})$ et distinguons deux cas :

1. $f|\mathfrak{a}=0$. Il résulte alors du paragraphe 4.1.3 que $I(f)=\emptyset$, ce qui équivaut à $(A_{f,G})$, et du lemme 4 du chapitre II que tous les éléments de $I(f)$ contiennent $\mathfrak{a}$, ce qui implique $(B_{f,G})$ d'après le paragraphe 4.1.3.

2. $f|\mathfrak{a} \neq 0$. On sait alors (I, 4.1) que $Z(\mathfrak{a})$ est le stabilisateur de $\chi(f, \mathfrak{a})$ et que $\mathfrak{z}(\mathfrak{a}) \neq \mathfrak{g}$. Comme $\mathfrak{a}$ est central dans $\mathfrak{z}(\mathfrak{a})$, les éléments de $I(f_1)$ contiennent $\mathfrak{a}$ (4.1.2), donc (I, 1.3, *e* et 4.1) $I(f_1) \subset I(f)$, ce qui implique $(A_{f,G})$. Par ailleurs (II, lemme 4), les éléments de $I(f)$ sont contenus dans $\mathfrak{z}(\mathfrak{a})$, et par conséquent (4.1.4), $(B_{f,G})$ est vérifiée. Il en résulte en

outre que $I(f) = I(f_1)$ et que les éléments de $I(f)$ contiennent $\mathfrak{a}$ et sont contenus dans $\mathfrak{z}(\mathfrak{a})$; ce dernier point nous sera utile plus loin (§ 5).

Les assertions (A_G) et (B_G) sont donc vérifiées si G est de genre *A*.

4.3. *Supposons que* G *soit de genre B.*

Alors $\dim \mathfrak{c} > 1$ et, pour tout $f \in \mathfrak{g}^\star$, $\mathfrak{c} \cap \operatorname{Ker} f$ est un idéal central $\neq \{0\}$ de $\mathfrak{g}$; dans ces conditions (4.1.3), (A_n) et (B_n) impliquent (A_G) et (B_G).

4.4. *Supposons que* G *soit de genre C.*

4.4.1. Alors $\dim \mathfrak{c} = 1$, Notons b un élément non nul de $\mathfrak{c}$. Compte tenu du paragraphe 4.1.3, on peut se limiter au cas où $f(b) \neq 0$, *ce que nous ferons.* Comme les éléments de $I(f)$ contiennent $\mathfrak{c}$ (4.1.2), nous pouvons alors leur appliquer le lemme 9. L'éventualité (B) de ce lemme étant exclue pour ces algèbres, il s'ensuit que, pour tout $\mathfrak{h} \in I(f)$, on a

$$\rho(f, \mathfrak{h}) \simeq \rho(f, \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}(f, \mathfrak{a}) + \mathfrak{a}).$$

Or $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}(f, \mathfrak{a}) + \mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}(f, \mathfrak{a}) \neq \mathfrak{g}$, donc (4.1.4), $(B_{f,G})$ est vérifiée. Pour établir $(A_{f,G})$, nous distinguerons trois cas :

4.4.2. $\mathfrak{a}$ *est un idéal de première espèce.*

On peut alors trouver une base (a, b) de $\mathfrak{a}$ et un élément non nul λ de $\mathfrak{g}^\star$ tels qu'on ait, pour tout $x \in \mathfrak{g}$:

$$[x, a] = \lambda(x) b.$$

Comme $f(b) \neq 0$, on sait (I, 4.3.1) que $Z(\mathfrak{a})$ est le stabilisateur de $\chi(f, \mathfrak{a})$. Soit $f_1 = f | \mathfrak{z}(\mathfrak{a})$. Comme $\mathfrak{a}$ est central dans $\mathfrak{z}(\mathfrak{a})$, si $\mathfrak{h} \in I(f_1)$, alors $\mathfrak{h} \supset \mathfrak{a}$ (4.1.2) et par suite (I, 1.3, *e*), $\mathfrak{h} \in I(f)$ et $I(f) \supset I(f_1)$, ce qui implique $(A_{f,G})$ puisque $\mathfrak{z}(\mathfrak{a}) = \operatorname{Ker} \lambda \neq \mathfrak{g}$.

4.4.3. $\mathfrak{a}$ *est un idéal de deuxième espèce.*

Il existe alors un élément non nul a de $\mathfrak{a} \cap \operatorname{Ker} f$ et λ, $\psi \in \mathfrak{g}^\star$ linéairement indépendants (I, 4.3.2) tels qu'on ait, pour tout $x \in \mathfrak{g}$:

$$[x, a] = \psi(x) a + \lambda(x) b.$$

Il est clair que dans ces conditions :

$$\mathfrak{a} = \mathbf{R}a \oplus \mathbf{R}b, \qquad \mathfrak{g}(f, \mathfrak{a}) = \operatorname{Ker} \lambda \neq \mathfrak{g} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{R}a \in D(\operatorname{Ker} \lambda)$$

et par suite, $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{s}(\mathfrak{g}(f, \mathfrak{a}))$.

Par ailleurs [II, lemme 8 (ii)] le stabilisateur de $\chi(f, \mathfrak{a})$ est le sous-groupe $\exp(\operatorname{Ker} \lambda) = \exp \mathfrak{g}(f, \mathfrak{a})$. Si donc $f_1 = f | \operatorname{Ker} \lambda$ et $\mathfrak{h} \in I(f_1)$, alors (II, lemme 4), $\mathfrak{h} \supset \mathfrak{a}$ et, partant (I, 1.3, *e*), $\mathfrak{h} \in I(f)$, soit $I(f_1) \subset I(f)$, ce qui implique $(A_{f,G})$.

4.4.4. $\mathfrak{a}$ *est un idéal de troisième espèce.*

Il existe alors (I, 4.3.3) :

1° une base (a, a') de $\mathfrak{a} \cap \operatorname{Ker} f$;

2° un nombre réel non nul α;

3° $\psi, \lambda, \mu \in \mathfrak{g}^\star$ linéairement indépendants tels qu'on ait, pour tout $x \in \mathfrak{g}$:

$$[x, a\,] = \psi(x)\,(\;\, a - \alpha a')\,\lambda(x)\,b,$$
$$[x, a'] = \psi(x)\,(\alpha a + \;\, a')\,\mu(x)\,b.$$

Il est clair dans ces conditions que

$$\mathfrak{g}(f, \mathfrak{a}) = \operatorname{Ker}\lambda \cap \operatorname{Ker}\mu \neq \mathfrak{g} \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{a} \cap \operatorname{Ker} f \in \mathrm{D}(\mathfrak{g}(f, \mathfrak{a}))$$

et par suite, $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{s}(\mathfrak{g}(f, \mathfrak{a}))$.

Si donc $f_1 = f \mid \mathfrak{g}(f, \mathfrak{a})$ et $\mathfrak{h} \in \mathrm{I}(f_1)$, alors (II, lemme 4), $\mathfrak{h} \supset \mathfrak{a}$ et par suite $\mathfrak{h} \in \mathrm{I}(f)$, donc $\mathrm{I}(f) \supset \mathrm{I}(f_1) \neq \emptyset$, ce qui implique $(\mathrm{A}_{f,\mathrm{G}})$.

5. Vérification de l'assertion (C).

5.1. Nous gardons les notations du paragraphe 3 : G désigne toujours un groupe exponentiel résoluble simplement connexe de dimension n, non commutatif. Il résulte du paragraphe 4 qu'il existe une application canonique $\Omega \to \hat{\mathrm{G}}$, et cette application est surjective d'après (D) (*cf.* § 3). Nous noterons Ψ_G cette surjection. Nous allons montrer qu'avec les notations du paragraphe 1, (C_n) implique que Ψ_G est injectif, donc implique (C_G) et par suite (C).

Le paragraphe 5.2 est consacré à quelques remarques; en application immédiate, on traite le cas où G est de genre *B*. La vérification de (C_G) dans les autres cas fait l'objet des paragraphes 5.3 et 5.4.

5.2.

5.2.1. *Partition de* Ω *associée à un idéal de* $\mathfrak{g}$.

Soient $\mathfrak{p}$ un idéal de $\mathfrak{g}$, $\mathrm{P} = \exp \mathfrak{p}$, $f \in \mathfrak{g}^\star$, $\mathfrak{h} \in \mathrm{I}(f)$. Il résulte de la définition des représentations induites (*cf.* [9], § 3) que, lorsque $\mathfrak{h} \supset \mathfrak{p}$, $\rho(f, \mathfrak{h}) \mid \mathrm{P}$ est trivial si et seulement si $f \mid \mathfrak{p} = 0$. Soit $(\mathfrak{g}^\star)_\mathfrak{p}$ la partie de $\mathfrak{g}^\star$ formée des f tels que $f \mid \mathfrak{p} = 0$. Comme $\mathfrak{p}$ est un idéal, $(\mathfrak{g}^\star)_\mathfrak{p}$ et son complémentaire dans $\mathfrak{g}^\star$ sont stables par G, et $\mathfrak{p}$ définit par conséquent une partition $(\Omega'_\mathfrak{p}, \Omega''_\mathfrak{p})$ de Ω :

$\Omega'_\mathfrak{p}$ est l'ensemble des orbites dont tous les éléments s'annulent identiquement sur $\mathfrak{p}$.

$\Omega''_\mathfrak{p}$ est l'ensemble des orbites dont aucun élément ne s'annule identiquement sur $\mathfrak{p}$.

Nous poserons

$$\Psi'_\mathfrak{p} = \Psi_\mathrm{G} \mid \Omega'_\mathfrak{p}, \qquad \Psi''_\mathfrak{p} = \Psi_\mathrm{G} \mid \Omega''_\mathfrak{p}.$$

5.2.2. Gardant les notations précédentes, montrons que, *si* $\mathfrak{p}$ *n'est pas nul, alors* (C_n) *implique que* $\Psi'_{\mathfrak{p}}$ *est injectif.* Pour $u \in \mathfrak{g}$, $g \in G$, $f \in (\mathfrak{g}^\star)_{\mathfrak{p}}$, désignons par $\bar{u}$, $\bar{g}$, $\bar{f}$ respectivement, l'image canonique de u (resp. g, f) dans $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}$ [resp. G/P, $(\mathfrak{g}/\mathfrak{p})^\star$].

Dans ces conditions, pour x, $u \in \mathfrak{g}$, on a $\overline{[x, u]} = [\bar{x}, \bar{u}]$, soit $\overline{\mathrm{ad}\, x . u} = \mathrm{ad}\, \bar{x} . \bar{u}$; par récurrence sur k, on en déduit que $\overline{(\mathrm{ad}\, x)^k u} = (\mathrm{ad}\, \bar{x})^k \bar{u}$ pour tout $k \in \mathbf{N}$ et par suite $\overline{\exp x . u} = \exp \bar{x} . \bar{u}$. On a donc, pour $g \in G$, $u \in \mathfrak{g}$: $\overline{u^g} = \bar{u}^{\bar{g}}$, ce qui implique, pour $f \in (\mathfrak{g}^\star)_{\mathfrak{p}}$:

$$\overline{f^g}(\bar{u}) = f^g(u) = f(u^g) = \bar{f}(\overline{u^g}) = \bar{f}(\bar{u}^{\bar{g}}) = \bar{f}^{\bar{g}}(\bar{u})$$

et par conséquent :

$$\bar{f}^{\bar{g}} = \overline{f^g}.$$

Soient alors f, $f' \in (\mathfrak{g}^\star)_{\mathfrak{p}}$ tels que les représentations irréductibles de G obtenues à partir de f soient équivalentes aux représentations irréductibles de G obtenues à partir de f'. Il existe (4.1.3) des algèbres $\mathfrak{h} \in I(f)$ et $\mathfrak{h}' \in I(f')$ telles que $\mathfrak{h} \supset \mathfrak{p}$ et $\mathfrak{h}' \supset \mathfrak{p}$. Soit $\bar{\mathfrak{h}}$ (resp. $\bar{\mathfrak{h}}'$) l'image canonique de $\mathfrak{h}$ (resp. $\mathfrak{h}'$) dans $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}$. La représentation $\rho(f, \mathfrak{h})$ [resp. $\rho(f', \mathfrak{h}')$] de G s'identifie alors à la représentation $\rho(\bar{f}, \bar{\mathfrak{h}})$ [resp. $\rho(\bar{f}', \bar{\mathfrak{h}}')$] de G/P : donc $\rho(\bar{f}, \bar{\mathfrak{h}})$ et $\rho(\bar{f}', \bar{\mathfrak{h}}')$ sont équivalentes et irréductibles. Par suite, comme $\mathfrak{p} \neq 0$, il existe d'après (C_n) un élément g de G tel que

$$\bar{f}' = \bar{f}^{\bar{g}} = \overline{f^g}.$$

L'application canonique $(\mathfrak{g}^\star)_{\mathfrak{p}} \to (\mathfrak{g}/\mathfrak{p})^\star$ étant bijective, il s'ensuit que $f' = f^g$, ce qui établit notre assertion.

5.2.3. Supposons que $\mathfrak{p}$ ait la propriété suivante :

(P) $\mathfrak{p} \neq \{0\}$ et pour tout $f \in \mathfrak{g}^\star$ il existe $\mathfrak{h} \in I(f)$ tel que $\mathfrak{h} \supset \mathfrak{p}$.

Il résulte alors du paragraphe 5.2.1 que $\Psi'_{\mathfrak{p}}(\Omega'_{\mathfrak{p}}) \cap \Psi''_{\mathfrak{p}}(\Omega''_{\mathfrak{p}}) = \emptyset$, et par suite, compte tenu du paragraphe précédent, *pour que* Ψ_G *soit injectif, il faut et il suffit que* $\Psi''_{\mathfrak{p}}$ *le soit.*

5.2.4. Jusqu'à la fin de ce chapitre, nous noterons :

— $\mathfrak{c}$ le centre de $\mathfrak{g}$;

— pour $f \in \mathfrak{h}^\star$ fixé, $\hat{\rho}_f$ la classe d'équivalence des représentations irréductibles de G obtenues à partir de f.

5.2.5. Montrons comment (C_n) et nos remarques précédentes impliquent (C_G) *lorsque* G *est de genre B.* Supposons en effet $\dim \mathfrak{c} > 1$. Soient :

$$f, f' \in \mathfrak{g}^\star \quad \text{tels que} \quad \hat{\rho}_f = \hat{\rho}_{f'};$$
$$\mathfrak{h} \in I(f) \quad \text{et} \quad \mathfrak{h}' \in I(f').$$

Alors $\mathfrak{h} \supset \mathfrak{c}$ et $\mathfrak{h}' \supset \mathfrak{c}$ (4.1.2). Le caractère central de $\rho(f, \mathfrak{h})$ [resp. $\rho(f', \mathfrak{h}')$], prend la valeur 1 sur $\exp(\mathfrak{c} \cap \operatorname{Ker} f)$ [resp. $\exp(\mathfrak{c} \cap \operatorname{Ker} f')$] (*cf.* 5.2.1), donc (5.2.1), $\mathfrak{c} \cap \operatorname{Ker} f' = \mathfrak{c} \cap \operatorname{Ker} f$ et (C_G) résulte alors du paragraphe 5.2.2.

5.3. *Les couples* $\mathcal{C}$.

5.3.1. Notons, pour tout idéal commutatif $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{g}$ et pour tout $f \in \mathfrak{g}^\star$:
$H(f, \mathfrak{p})$ le stabilisateur du caractère $\chi(f, \mathfrak{p})$ de $\exp \mathfrak{p}$;
$\mathfrak{h}(f, \mathfrak{p})$ l'algèbre de Lie de $H(f, \mathfrak{p})$.

Cela étant, nous dirons qu'un couple $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ d'idéaux de $\mathfrak{g}$ est un couple $\mathcal{C}$ si :

(E_1) $\mathfrak{m} \supset \mathfrak{n} \neq \{0\}$ et $\mathfrak{m}$ est commutatif et $\mathfrak{n}$ vérifie la propriété (P) du paragraphe 5.2.3;

(E_2) $\exp \mathfrak{m}$ est régulièrement plongé dans G;

et si, pour tout $f \in \mathfrak{g}^\star$ tel que $f \mid \mathfrak{n} \neq 0$:

(E_3) $H(f, \mathfrak{m})$ est connexe et $\dim H(f, \mathfrak{m}) < \dim G$;

(E_4) il existe $\mathfrak{h} \in I(f)$ tel que $\mathfrak{h} \supset \mathfrak{m}$ et $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{h}(f, \mathfrak{m})$;

(E_5) l'orbite de f contient tous les éléments de $\mathfrak{g}^\star$ qui coïncident avec f sur $\mathfrak{h}(f, \mathfrak{m})$.

5.3.2. *Montrons que l'existence d'un couple* $\mathcal{C}$ *implique* (C_G).

Soit en effet $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ un tel couple. Comme $\mathfrak{n}$ vérifie (P), il suffit (5.2.3) de montrer que $\Psi''_{\mathfrak{n}}$ est injectif, i. e. que si $f, f' \in \mathfrak{g}^\star$ sont tels que

$$(1) \qquad f \mid \mathfrak{n} \neq 0 \quad \text{et} \quad f' \mid \mathfrak{n} \neq 0 \quad \text{et} \quad \hat{\rho}_f = \hat{\rho}_{f'},$$

alors il existe $g \in G$ tel que $f' = f^g$.

Soient donc f, f' vérifiant (1). D'après (E_4) il existe $h \in I(f)$ et $\mathfrak{h}' \in I(f')$ tels que $\mathfrak{h} \supset \mathfrak{m}$, $\mathfrak{h}' \supset \mathfrak{m}$, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{h}(f, \mathfrak{m})$ et $\mathfrak{h}' \subset \mathfrak{h}(f', \mathfrak{m})$. Posons

$$f_0 = f \mid \mathfrak{h}(f, \mathfrak{m}), \qquad f'_0 = f' \mid \mathfrak{h}(f', \mathfrak{m}), \qquad \rho_0 = \rho(f_0, \mathfrak{h}), \qquad \rho'_0 = \rho(f'_0, \mathfrak{h}').$$

Comme, d'après (E_3), $H(f, \mathfrak{m})$ et $H(f', \mathfrak{m})$ sont connexes (et donc simplement connexes), ces derniers symboles ont un sens : ρ_0 (resp. ρ'_0) est une représentation de $H(f, \mathfrak{m})$ [resp. $H(f', \mathfrak{m})$] telle que

$$\operatorname{Ind}(\rho_0, G) \in \hat{\rho}_f \qquad [\text{resp. } \operatorname{Ind}(\rho'_0, G) \in \hat{\rho}_{f'}].$$

Donc ρ_0 et ρ'_0 sont irréductibles (I, 1.3, *b*), et, comme $\mathfrak{h} \supset \mathfrak{m}$ (resp. $\mathfrak{h}' \supset \mathfrak{m}$) et que $H(f, \mathfrak{m})$ [resp. $H(f', \mathfrak{m})$] est le stabilisateur de $\chi(f, \mathfrak{m})$ [resp. $\chi(f', \mathfrak{m})$], $\rho_0 \mid \exp \mathfrak{m}$ (resp. $\rho'_0 \mid \exp \mathfrak{m}$) est un multiple de $\chi(f, \mathfrak{m})$ [resp. $\chi(f', \mathfrak{m})$]. Par ailleurs, comme $\operatorname{Ind}(\rho_0, G) \simeq \operatorname{Ind}(\rho'_0, G)$, les mesures de Stone de $\operatorname{Ind}(\rho_0, G) \mid \exp \mathfrak{m}$ et $\operatorname{Ind}(\rho'_0, G) \mid \exp \mathfrak{m}$ sont équivalentes. Or, $\operatorname{Ind}(\rho_0, G)$ [resp. $\operatorname{Ind}(\rho'_0, G)$] étant irréductible, la mesure de Stone de $\operatorname{Ind}(\rho_0, G) \mid \exp \mathfrak{m}$ [resp. $\operatorname{Ind}(\rho'_0, G) \mid \exp \mathfrak{m}$] est concentrée sur une orbite $\tilde{\omega}$ (resp. $\tilde{\omega}'$) du dual de $\exp \mathfrak{m}$: donc $\tilde{\omega} = \tilde{\omega}'$. Comme $\chi(f, \mathfrak{m}) \in \tilde{\omega}$ et $\chi(f', \mathfrak{m}) \in \tilde{\omega}'$, il existe donc $g_1 \in G$ tel que $\chi(f', \mathfrak{m}) = \chi(f, \mathfrak{m})^{g_1}$. On peut donc, remplaçant f par f^{g_1}, se ramener au cas où

$$\chi(f', \mathfrak{m}) = \chi(f, \mathfrak{m}), \qquad H(f', \mathfrak{m}) = H(f, \mathfrak{m}), \qquad \mathfrak{h}(f', \mathfrak{m}) = \mathfrak{h}(f, \mathfrak{m}).$$

Mais dans ces conditions $\rho'_0 \simeq \rho_0$ (I, 1.3, *e*). On peut alors compte tenu de (E_3) appliquer l'hypothèse de récurrence (C_n) : il existe $g_0 \in H(f, \mathfrak{m})$ tel que $f'_0 = f_0^{g_0} = f^{g_0} | \mathfrak{h}(f, \mathfrak{m})$, et ($E_5$) implique alors que f' et f^{g_0} sont sur une même orbite; il en est donc de même pour f et f'.

5.4. Il nous suffit donc, pour terminer la démonstration, d'établir l'existence d'un couple $\mathcal{C}$ lorsque G est de genre *A* ou *C*.

Si G *est de genre A*, notons $\mathfrak{a}$ un élément de $D(\mathfrak{g})$. Alors $(\mathfrak{a}, \mathfrak{a})$ est un couple $\mathcal{C}$: les propriétés (E_2) et (E_3) résultent de (I, 4.1); les propriétés (E_1) et (E_4) du paragraphe 4.2 et de (I, 4.1); la propriété (E_5) de [II, lemme 8 (i)].

Si G *est de genre C*, notons $\mathfrak{a}$ un idéal minimal parmi les idéaux de $\mathfrak{g}$ distincts de $\{0\}$ et de $\mathfrak{c}$; alors $(\mathfrak{a}, \mathfrak{c})$ est un couple $\mathcal{C}$: les propriétés (E_1), (E_2), (E_3) résultent du paragraphe 4.1.2 et de (I, 4.3); la propriété (E_4) résulte de (II, lemme 9); la propriété (E_5), de [II, lemme 8 (ii)].

CHAPITRE IV.

1. Notant toujours G un groupe exponentiel résoluble simplement connexe et $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie, nous nous proposons dans ce chapitre d'étudier les ensembles $I(f)$, f étant un élément donné de $\mathfrak{g}^\star$.

Convenons de dire qu'une sous-algèbre $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ possède la propriété $M(f)$ si $\mathfrak{h}$ est de dimension maximale parmi les sous-algèbres subordonnées à f.

Nous montrons au paragraphe 2 que les éléments de $I(f)$ possèdent une propriété $M_1(f)$ plus forte que $M(f)$; au paragraphe 3 que $M(f)$ caractérise $I(f)$ lorsque G appartient à une certaine classe de groupes exponentiels résolubles simplement connexes, classe plus large que celle des groupes réels nilpotents simplement connexes, mais bien différente de celle des groupes complètement résolubles simplement connexes. Nous donnons au paragraphe 4 quelques exemples qui montrent qu'en général $M_1(f)$ est strictement plus forte que $M(f)$ et ne caractérise pourtant pas $I(f)$.

Signalons enfin qu'il existe, dans le cas général des groupes exponentiels résolubles simplement connexes, une caractérisation des ensembles $I(f)$ en terme d'algèbre de Lie, caractérisation à vrai dire de peu d'intérêt en raison de sa complexité : aussi bien ne la donnerons-nous pas.

2. Propriétés des ensembles $I(f)$.

2.1. *Notations et terminologie.* — Nous conservons celles du chapitre I. Les objets G, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}^*$ sont supposés fixés, f désigne un élément quelconque de $\mathfrak{g}^*$. Si $\mathfrak{k}$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{a}$ un idéal de $\mathfrak{k}$, nous noterons :

$\sigma(\mathfrak{k}, \mathfrak{a})$ la surjection canonique $\mathfrak{k} \to \mathfrak{k}/\mathfrak{a}$;
$\sigma^{-1}(\mathfrak{k}, \mathfrak{a})$ la correspondance réciproque de $\sigma(\mathfrak{k}, \mathfrak{a})$.

Si $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{k}$ sont deux sous-algèbres de $\mathfrak{g}$, nous dirons que $\mathfrak{h}$ est $(f, \mathfrak{k})$-*saturée* si :

1° $\mathfrak{h} \in S(f)$ et $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{k}$;

2° pour tout idéal $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{k}$ tel que $f \mid \mathfrak{a} = 0$, on a

$$\mathfrak{h} \supset \sigma^{-1}(\mathfrak{k}, \mathfrak{a}).(\mathfrak{s}(\mathfrak{k}/\mathfrak{a})).$$

Cela étant, nous noterons :

$E_0(f)$ l'ensemble des sous-algèbres $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ qui sont $(f, \mathfrak{g})$-saturées;
$E(f)$ l'ensemble des sous-algèbres $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ qui sont $(f, \mathfrak{k})$-saturées pour toute sous-algèbre $\mathfrak{k} \supset \mathfrak{h}$.

Si $\mathfrak{g}'$ est une algèbre exponentielle quelconque, f' un élément de $(\mathfrak{g}')^*$, on définit de même les ensembles $E(f')$, $E_0(f')$. En particulier, si $\mathfrak{k}_1$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{p}$ un idéal de $\mathfrak{g}$ tel que $f \mid \mathfrak{p} = 0$, $\bar{f}$ l'image canonique de f dans $(\mathfrak{g}/\mathfrak{p})^*$, alors :

$E(f \mid \mathfrak{k}_1)$ est l'ensemble des sous-algèbres $\mathfrak{h}_1$ de $\mathfrak{k}_1$ subordonnées à $f \mid \mathfrak{k}_1$ qui sont $(f \mid \mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}'_1)$-saturées pour toute sous-algèbre $\mathfrak{k}'_1 \supset \mathfrak{h}_1$ de $\mathfrak{k}_1$;
$E(\bar{f})$ est l'ensemble des sous-algèbres $\mathfrak{h}$ de $(\mathfrak{g}/\mathfrak{p})$ subordonnées à $\bar{f}$ qui sont $(\bar{f}, \bar{\mathfrak{k}})$-saturées pour toute sous-algèbre $\bar{\mathfrak{k}} \supset \bar{\mathfrak{h}}$ de $(\mathfrak{g}/\mathfrak{p})$.

Il est clair dans ces conditions que tout élément de $E(f)$ contenu dans $\mathfrak{k}_1$ appartient à $E(f \mid \mathfrak{k}_1)$, et par suite :

$$E(f) \cap S(f \mid \mathfrak{k}_1) \subset E(f \mid \mathfrak{k}_1).$$

Par ailleurs, nous noterons $S(f, \mathfrak{s}(\mathfrak{g}))$, ou plus simplement $S(f, \mathfrak{s})$, l'ensemble des algèbres de $S(f)$ qui contiennent $\mathfrak{s}(\mathfrak{g})$. Nous définirons de manière analogue les ensembles $S(f', \mathfrak{s}(\mathfrak{g}'))$, lorsque f' est une forme linéaire sur une algèbre exponentielle quelconque $\mathfrak{g}'$.

Cela étant, nous nous proposons de montrer qu'on a pour tout $f \in \mathfrak{g}^*$:

$$I(f) \subset \mathcal{M}(E(f)) \subset \mathcal{M}(S(f))$$

et que, si $\mathcal{M}(S(f)) = \mathcal{M}(E(f))$, alors $I(f) = \mathcal{M}(S(f))$. Ce sera l'objet du paragraphe 2.3. Pour ce faire, nous aurons besoin de quelques résultats préliminaires rassemblés au paragraphe 2.2.

2.2. *Quelques lemmes.*

LEMME 2.2.1. — *Soient :*

$\mathcal{V}$ *un espace vectoriel de dimension finie;*
E, E′ *deux familles de sous-espaces de* $\mathcal{V}$.

Si $E' \subset E$ *et si* $\mathcal{M}(E) \cap E' \neq \emptyset$, *alors* $\mathcal{M}(E') = \mathcal{M}(E) \cap E'$.

Démonstration. — Il résulte des hypothèses que E, E′ et donc $\mathcal{M}(E')$ ne sont pas vides. Soient donc $\mathcal{W} \in \mathcal{M}(E) \cap E'$ et $\mathcal{W}' \in \mathcal{M}(E')$. Alors $\dim \mathcal{W}' \leqq \dim \mathcal{W} \leqq \dim \mathcal{W}'$. Donc $\mathcal{W} \in \mathcal{M}(E')$ et $\mathcal{W}' \in \mathcal{M}(E) \cap E'$, ce qui revient à dire que $\mathcal{M}(E) \cap E' \subset \mathcal{M}(E') \subset \mathcal{M}(E) \cap E'$.

LEMME 2.2.2. — *Soient :*

G *un groupe exponentiel résoluble simplement connexe de dimension* $\geqq 2$;
$\mathfrak{g}$ *l'algèbre de Lie de* G;
f *une forme linéaire sur* $\mathfrak{g}$.

Alors l'une au moins des deux éventualités (A), (B) *suivantes est toujours réalisée :*

(A) *Il existe un idéal* $\mathfrak{p} \neq \{0\}$ *de* $\mathfrak{g}$ *tel que*

$$f|\mathfrak{p} = 0 \qquad \text{et, si } \mathfrak{h} \in I(f), \text{ alors } \quad \mathfrak{h} \supset \mathfrak{p}.$$

(B) *Il existe une sous-algèbre* $\mathfrak{g}(f)$ *de* $\mathfrak{g}$, *distincte de* $\mathfrak{g}$, *ayant les propriétés suivantes :*

(B′) *si* $\mathfrak{h} \in I(f)$, *il existe* $\mathfrak{h}' \in I(f)$ *telle que*

$$\dim \mathfrak{h} = \dim \mathfrak{h}' \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{h}' \subset \mathfrak{g}(f);$$

(B″) *si* $\mathfrak{h} \in S(f)$, *il existe* $\mathfrak{h}' \in S(f)$ *telle que*

$$\dim \mathfrak{h} \leqq \dim \mathfrak{h}' \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{h}' \subset \mathfrak{g}(f).$$

Démonstration. — Nous distinguerons trois cas.

1. *Le groupe* G *est de genre A*. Soit alors $\mathfrak{a} \in D(\mathfrak{g})$.

L'éventualité (A) est réalisée pour $\mathfrak{p} = \mathfrak{a}$ si $f|\mathfrak{a} = 0$ [II, lemme 4 (i)].

Supposons donc $f|\mathfrak{a} \neq 0$. Les algèbres de $I(f)$ sont alors contenues dans $\mathfrak{z}(\mathfrak{a})$ [II, lemme 4 (ii)]; soit par ailleurs $\mathfrak{h}$ une algèbre subordonnée à f non contenu dans $\mathfrak{z}(\mathfrak{a})$; dans ces conditions, $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{a} = \{0\}$ (II, lemme 2) et par suite, $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{z}(\mathfrak{a}) + \mathfrak{a} = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{z}(\mathfrak{a}) \oplus \mathfrak{a}$, et l'on a

$$\dim(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{z}(\mathfrak{a}) + \mathfrak{a}) = (\dim \mathfrak{h} - 1) + \dim \mathfrak{a} \geqq \dim \mathfrak{h}.$$

En outre

$$[\mathfrak{h} \cap \mathfrak{z}(\mathfrak{a}) + \mathfrak{a}, \mathfrak{h} \cap \mathfrak{z}(\mathfrak{a}) + \mathfrak{a}] \subset [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \cap \mathfrak{z}(\mathfrak{a}) \subset \mathfrak{h} \cap \mathfrak{z}(\mathfrak{a}) \cap \operatorname{Ker} f$$

et par conséquent, $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{z}(\mathfrak{a}) + \mathfrak{a}$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ subordonnée à f, évidemment contenue dans $\mathfrak{z}(\mathfrak{a})$: l'éventualité (B) est réalisée, avec $\mathfrak{g}(f) = \mathfrak{z}(\mathfrak{a})$.

2. *Le groupe* G *est commutatif ou de genre B.*

Alors l'éventualité (A) est réalisée pour $\mathfrak{p} = \mathfrak{c}(\mathfrak{g}) \cap \operatorname{Ker} f$ (II, 4.1.2).

3. *Le groupe* G *est de genre C.*

L'éventualité (A) est réalisée pour $\mathfrak{p} = \mathfrak{c}(\mathfrak{g})$ si $f \mid \mathfrak{c}(\mathfrak{g}) = 0$ (II, 4.1.2). Supposons donc $f \mid \mathfrak{c}(\mathfrak{g}) \neq 0$. Notant $\mathfrak{a}$ un idéal de $\mathfrak{g}$ minimal parmi les idéaux distincts de $\{0\}$ et de $\mathfrak{c}(\mathfrak{g})$, nous allons montrer que l'éventualité (B) est réalisée si l'on prend $\mathfrak{g}(f) = \mathfrak{g}(f, \mathfrak{a})$. Notons $\mathfrak{h}$ un élément de $S(f)$ et posons $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}(f, \mathfrak{a}) + \mathfrak{a}$. Il résulte dans ces conditions du lemme 9 du chapitre II, d'une part que $\mathfrak{g}(f, \mathfrak{a})$ possède la propriété (B′), d'autre part que $\mathfrak{h}' \in S(f)$. Comme par ailleurs $\mathfrak{h}' \subset \mathfrak{g}(f, \mathfrak{a})$, *il nous suffit donc de montrer que* $\dim \mathfrak{h} \leq \dim \mathfrak{h}'$. Nous pourrons évidemment nous limiter au cas $\mathfrak{h} \not\subset \mathfrak{g}(f, \mathfrak{a})$.

Nous distinguerons deux cas.

a. $\dim \mathfrak{a} = 2$ ($\mathfrak{a}$ est donc dans ces conditions un idéal de première ou de deuxième espèce.)

Il existe alors (I, 4.3) un élément non nul b de $\mathfrak{c}(\mathfrak{g})$, un élément non nul a de $\mathfrak{a} \cap \operatorname{Ker} f$, et deux éléments λ, ψ de $\mathfrak{g}^\star$, λ étant non nul, tels qu'on ait pour tout $x \in \mathfrak{g}$:

$$[x, a] = \psi(x)\, a + \lambda(x)\, b.$$

Par suite, $\mathfrak{g}(f, \mathfrak{a}) = \operatorname{Ker} \lambda$. Si donc $\mathfrak{h} \not\subset \mathfrak{g}(f, \mathfrak{a})$, alors $a \notin \mathfrak{h}$: sinon il existerait un élément $x \in \mathfrak{h}$ tel que $\lambda(x) = 1$, et par suite on aurait

$$0 = f([x, a]) = f(\psi(x)\, a + b) = f(b),$$

ce qui est exclu par hypothèse. Par conséquent :

$$\dim \mathfrak{h}' = \dim(\mathfrak{h} \cap \operatorname{Ker} \lambda + \mathfrak{a}) = (\dim \mathfrak{h} - 1) + 1 = \dim \mathfrak{h}.$$

b. $\dim \mathfrak{a} = 3$ ($\mathfrak{a}$ est donc dans ces conditions un idéal de troisième espèce.)

Il existe alors (I, 4.3.3) un nombre réel $\alpha \neq 0$, un élément non nul b de $\mathfrak{c}(\mathfrak{g})$ une base (a, a') de $\mathfrak{a} \cap \operatorname{Ker} f$ et trois éléments ψ, λ, μ de $\mathfrak{g}^\star$ linéairement indépendants tels qu'on ait, pour tout $x \in \mathfrak{g}$:

$$(1) \qquad \begin{cases} [x, a\,] = \psi(x)\,(\;\, a - \alpha a') + \lambda(x)\, b, \\ [x, a'] = \psi(x)\,(\alpha a + \;\, a') + \mu(x)\, b. \end{cases}$$

Il est clair que $\mathfrak{g}(f, \mathfrak{a}) = \operatorname{Ker} \lambda \cap \operatorname{Ker} \mu$. Si donc $\mathfrak{h} \not\subset \mathfrak{g}(f, \mathfrak{a})$, alors $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}(f, \mathfrak{a})$ est de codimension 1 ou 2 dans $\mathfrak{h}$.

Si $\dim(\mathfrak{h}/(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}(f, \mathfrak{a}))) = 1$, alors $\mathfrak{h} \cap (\mathfrak{a} \cap \operatorname{Ker} f) \neq \mathfrak{a} \cap \operatorname{Ker} f$: sinon les formules (1) impliqueraient $\lambda \mid \mathfrak{h} = \mu \mid \mathfrak{h} = 0$, et donc $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}(f, \mathfrak{a})$. Par suite $\mathfrak{h}' \neq \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}(f, \mathfrak{a})$ et par conséquent :

$$\dim \mathfrak{h}' \geq \dim(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}(f, \mathfrak{a})) + 1 = \dim \mathfrak{h}.$$

Si $\dim(\mathfrak{h}/(\mathfrak{h}\cap\mathfrak{g}(f, \mathfrak{a}))) = 2$, alors les éléments $\lambda \mid \mathfrak{h}$ et $\mu \mid \mathfrak{h}$ de $\mathfrak{h}^*$ sont linéairement indépendants. Si donc il existait des nombres réels β, β' tels que $\beta a + \beta' a' \in \mathfrak{h} - \{0\}$, on aurait, pour tout $x \in \mathfrak{h}$:

$$0 = f([x, \beta\mathfrak{a} + \beta' a']) = (\beta\lambda(x) + \beta'\mu(x))f(b) = \beta\lambda(x) + \beta'\mu(x)$$

soit $\beta(\lambda \mid \mathfrak{h}) + \beta'(\mu \mid \mathfrak{h}) = 0$, ce qui est absurde.

Donc $\mathfrak{h} \cap \operatorname{Ker} f \cap \mathfrak{a} = 0$ et par suite :

$$\dim\mathfrak{h}' \geqq \dim(\mathfrak{h}\cap\mathfrak{g}(f, \mathfrak{a})) + 2 = (\dim\mathfrak{h} - 2) + 2 = \dim\mathfrak{h},$$

ce qui achève la démonstration.

LEMME 2.2.3. — *Soient :*

G *un groupe exponentiel résoluble simplement connexe;*

$\mathfrak{g}$ *son algèbre de Lie;*

f *une forme linéaire sur* $\mathfrak{g}$.

Alors $I(f) \subset \mathcal{M}(S(f))$.

Démonstration. — Procédons par récurrence sur la dimension de G. Le lemme est trivialement vérifié si G est commutatif [car alors $I(f) = \mathcal{M}(S(f)) = \{\mathfrak{g}\}$], et donc en particulier si $\dim G = 1$. Supposons-le vérifié pour les groupes exponentiels résolubles simplement connexes de dimension $< n$. Soit donc G de dimension n. L'une des deux éventualités (A), (B) du lemme précédent est réalisée pour f.

Supposons d'abord que ce soit l'éventualité (A).

Soit alors $\mathfrak{h} \in I(f)$. Par hypothèse, il existe un idéal $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{g}$ tel que $f \mid \mathfrak{p} = 0$ et $\mathfrak{h} \supset \mathfrak{p}$. Soit $\bar{\mathfrak{h}}$ (resp. $\bar{f}$) l'image canonique de $\mathfrak{h}$ (resp. f) dans $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}$ [resp. $(\mathfrak{g}/\mathfrak{p})^*$]. Dans ces conditions $\bar{\mathfrak{h}} \in I(\bar{f})$ et, par l'hypothèse de récurrence, $\bar{\mathfrak{h}}$ est de dimension maximum dans $S(\bar{f})$. Soit par ailleurs $\mathfrak{h}' \in \mathcal{M}(S(f))$; alors

$$[\mathfrak{h}' + \mathfrak{p}, \mathfrak{h}' + \mathfrak{p}] \subset [\mathfrak{h}', \mathfrak{h}'] + \mathfrak{p} \subset (\mathfrak{h}' + \mathfrak{p}) \cap \operatorname{Ker} f$$

et donc $\mathfrak{h}' + \mathfrak{p} \in S(f)$; la maximalité de $\mathfrak{h}'$ implique par conséquent que $\mathfrak{h}' \supset \mathfrak{p}$. Or $\mathfrak{h}'/\mathfrak{p} \in S(\bar{f})$ et donc $\dim(\mathfrak{h}'/\mathfrak{p}) \leqq \dim\bar{\mathfrak{h}} = \dim(\mathfrak{h}/\mathfrak{p})$. Par suite, $\dim\mathfrak{h}' \leqq \dim\mathfrak{h}$, ce qui implique que $\mathfrak{h} \in \mathcal{M}(S(f))$.

Supposons maintenant que l'éventualité (B) *du lemme précédent soit réalisée pour* f.

Soient alors $\mathfrak{h}$ un élément de $I(f)$, et $\mathfrak{g}(f)$ une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ vérifiant les propriétés (B′) et (B″) de ce lemme. Il existe donc $\mathfrak{h}' \in I(f)$ tel que

$$\mathfrak{h}' \subset \mathfrak{g}(f) \qquad \text{et} \qquad \dim\mathfrak{h} = \dim\mathfrak{h}'$$

et par conséquent $\mathfrak{h}' \in I(f \mid \mathfrak{g}(f))$. Par l'hypothèse de récurrence, $\mathfrak{h}'$ est donc de dimension maximum parmi les algèbres de $S(f \mid \mathfrak{g}(f))$. Soit alors $\mathfrak{h}''$ une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ appartenant à $\mathcal{M}(S(f))$. D'après la propriété (B″), on peut trouver une sous-algèbre $\mathfrak{h}'''$ appartenant à $S(f)$ telle que

$$\dim \mathfrak{h}''' \geq \dim \mathfrak{h}'' \quad \text{et} \quad \mathfrak{h}''' \subset \mathfrak{g}(f)$$

et donc $\mathfrak{h}''' \in S(f \mid \mathfrak{g}(f))$. Il s'ensuit que

$$\dim \mathfrak{h} = \dim \mathfrak{h}' \geq \dim \mathfrak{h}''' \geq \dim \mathfrak{h}'' \geq \dim \mathfrak{h},$$

et, partant, $\dim \mathfrak{h} = \dim \mathfrak{h}''$, $\mathfrak{h} \in \mathcal{M}(S(f))$, ce qui termine la démonstration.

2.3.

Proposition 2.3.1. — *Soient :*

G *un groupe exponentiel résoluble simplement connexe;*
$\mathfrak{g}$ *l'algèbre de Lie de* G;
$E(f)$, $E_0(f)$, $S(f, \mathfrak{s})$ *les familles de sous-algèbres de* $\mathfrak{g}$ *définies au paragraphe* 2.1;
$\mathcal{M}(E(f))$, $\mathcal{M}(E_0(f))$, $\mathcal{M}(S(f, \mathfrak{s}))$ *l'ensemble des éléments* de $E(f)$, $E_0(f)$, $S(f, \mathfrak{s})$ *de dimension maximale.*

Alors :

(i) $I(f) \subset \mathcal{M}(E(f)) \subset \mathcal{M}(E_0(f)) \subset \mathcal{M}(S(f, \mathfrak{s})) \subset \mathcal{M}(S(f))$.

(ii) *Les algèbres de* $I(f)$ *sont de même dimension, et cette dimension ne dépend que de l'orbite de f sous l'action de* G.

Démonstration. — On sait déjà, par le lemme précédent, que

$$(1) \qquad I(f) \subset \mathcal{M}(S(f)),$$

ce qui établit la première assertion de (ii). Pour toute forme linéaire f' sur $\mathfrak{g}$, notons $d(f')$ la dimension commune des algèbres de $I(f')$. Si $g \in G$ et si $\mathfrak{h} \in I(f)$, alors (I, 3.2), $\mathfrak{h}^{g^{-1}} \in I(f^g)$, et par suite

$$d(f^g) = \dim(\mathfrak{h}^{g^{-1}}) = \dim \mathfrak{h} = d(f),$$

ce qui termine la démonstration de (ii).

Montrons (i) : Remarquons d'abord que

$$(2) \qquad E(f) \subset E_0(f) \subset S(f, \mathfrak{s}) \subset S(f).$$

La première et la dernière inclusions (2) résultent trivialement des définitions de $E(f)$, $E_0(f)$, $S(f, \mathfrak{s})$ (2.1); la deuxième de ce que, si $\mathfrak{h}$ est un élément de $E_0(f)$, alors avec les notations du paragraphe 2.1 :

$$\mathfrak{h} \supset \sigma^{-1}(\mathfrak{g}, \{0\})(\mathfrak{s}(\mathfrak{g}/\{0\})) = \mathfrak{s}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{s}.$$

Montrons maintenant que

$$(3) \qquad I(f) \subset E(f).$$

Soient en effet :

$\mathfrak{h}$ un élément de $I(f)$;
$\mathfrak{k}$ une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ contenant $\mathfrak{h}$;
$\mathfrak{a}$ un idéal de $\mathfrak{k}$ tel que $f \mid \mathfrak{a} = 0$.

Alors $\rho(f, \mathfrak{h}) \simeq \mathrm{Ind}(\rho(f \mid \mathfrak{k}, \mathfrak{h}), G)$ (I, 1.3, *a*), donc (I, 1.3, *b*) $\mathfrak{h} \in I(f \mid \mathfrak{k})$ et par suite (lemme 2.2.3) $\mathfrak{h} \in \mathcal{M}(S(f \mid \mathfrak{k}))$. La maximalité de $\mathfrak{h}$ dans $S(f \mid \mathfrak{k})$ implique dans ces conditions que $\mathfrak{h} \supset \mathfrak{a}$. Soit alors $\bar{\mathfrak{h}}$ (resp. $\bar{f}$) l'image canonique de $\mathfrak{h}$ (resp. $f \mid \mathfrak{k}$), dans $\mathfrak{k}/\mathfrak{a}$ [resp. $(\mathfrak{k}/\mathfrak{a})^*$]. La représentation $\rho(f \mid \mathfrak{k}, \mathfrak{h})$ du groupe $\exp \mathfrak{k}$ s'identifie à la représentation $\rho(\bar{f}, \bar{\mathfrak{h}})$ du groupe $\exp(\mathfrak{k}/\mathfrak{a})$, et par conséquent $\bar{\mathfrak{h}} \in I(\bar{f})$, ce qui entraîne (II, lemme 4) que $\bar{\mathfrak{h}} \supset \mathfrak{s}(\mathfrak{k}/\mathfrak{a})$ et, partant,

$$\mathfrak{h} = \sigma^{-1}(\mathfrak{k}, \mathfrak{a})(\bar{\mathfrak{h}}) \supset \sigma^{-1}(\mathfrak{k}, \mathfrak{a})(\mathfrak{s}(\mathfrak{k}/\mathfrak{a})).$$

Donc $\mathfrak{h} \in E(f)$, et $I(f) \subset E(f)$.

Rapprochant (2) et (3), on obtient

$$I(f) \subset E(f) \subset E_0(f) \subset S(f, \mathfrak{s}) \subset S(f)$$

et par suite, compte tenu de (1) :

$$\mathcal{M}(S(f)) \cap S(f, \mathfrak{s}) \subset \mathcal{M}(S(f)) \cap E_0(f) \subset \mathcal{M}(S(f)) \cap E(f) \subset I(f) \neq \emptyset.$$

Le lemme 2.2.1 implique alors

$$\mathcal{M}(S(f)) \cap E(f) = \mathcal{M}(E(f)), \qquad \mathcal{M}(S(f)) \cap E_0(f) = \mathcal{M}(E_0(f)),$$
$$\mathcal{M}(S(f)) \cap S(f, \mathfrak{s}) = \mathcal{M}(S(f, \mathfrak{s}))$$

et donc, finalement

$$I(f) \subset \mathcal{M}(E(f)) \subset \mathcal{M}(E_0(f)) \subset \mathcal{M}(S(f, \mathfrak{s})) \subset \mathcal{M}(S(f)).$$

Les inclusions de la proposition précédente ne peuvent pas, en général, être remplacées par des égalités (*cf.* § 4, *infra*). On a cependant la proposition suivante :

PROPOSITION 2.3.2. — *Les notations étant celles de la proposition précédente, si* $\mathcal{M}(S(f)) = \mathcal{M}(E(f))$, *alors* $\mathcal{M}(S(f)) = I(f)$.

Démonstration. — Supposons que $\mathcal{M}(S(f)) = \mathcal{M}(E(f))$.

1. Nous allons d'abord montrer que dans ces conditions, si :
$\mathfrak{k}$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ telle que $S(f \mid \mathfrak{k}) \cap \mathcal{M}(S(f)) \neq \emptyset$;
$\mathfrak{p}$ un idéal de $\mathfrak{g}$ tel que $f \mid \mathfrak{p} = 0$;
$\bar{f}$ l'image canonique de f dans $(\mathfrak{g}/\mathfrak{p})^*$;
alors

$$\mathcal{M}(S(f \mid \mathfrak{k})) = \mathcal{M}(E(f \mid \mathfrak{k})) \quad \text{et} \quad \mathcal{M}(S(\bar{f})) = \mathcal{M}(E(\bar{f})).$$

Notons d'abord qu'il suffit pour cela de vérifier que

$$\mathcal{M}(S(f\,|\,\mathfrak{k}))\subset E(f\,|\,\mathfrak{k}) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{M}(S(\bar{f}))\subset E(\bar{f}).$$

Comme en effet $E(f\,|\,\mathfrak{k})\subset S(f\,|\,\mathfrak{k})$ et que $E(f)\subset S(f)$, il s'ensuivra, compte tenu du lemme 2.2.1 :

$$\mathcal{M}(E(f\,|\,\mathfrak{k}))=\mathcal{M}(S(f\,|\,\mathfrak{k}))\cap E(f\,|\,\mathfrak{k})=\mathcal{M}(S(f\,|\,\mathfrak{k})$$

et de même

$$\mathcal{M}(E(\bar{f}))=\mathcal{M}(S(\bar{f})).$$

a. $\mathcal{M}(S(f|\mathfrak{k}))\subset E(f|\mathfrak{k})$: Comme $S(f|\mathfrak{k})\subset S(f)$ et que $S(f|\mathfrak{k})\cap\mathcal{M}(S(f))\neq\emptyset$ par hypothèse, il résulte du lemme 2.2.1 et de la remarque du paragraphe 2.1 que

$$\mathcal{M}(S(f\,|\,\mathfrak{k}))=\mathcal{M}(S(f))\cap S(f\,|\,\mathfrak{k})=\mathcal{M}(E(f))\cap S(f\,|\,\mathfrak{k})\subset E(f)\cap S(f\,|\,\mathfrak{k})\subset E(f\,|\,\mathfrak{k}).$$

b. $\mathcal{M}(S(\bar{f})\subset E(\bar{f})$: Soient $\bar{\mathfrak{h}}\in\mathcal{M}(S(\bar{f}))$, $\bar{\mathfrak{k}}$ une sous-algèbre de $(\mathfrak{g}/\mathfrak{p})$ contenant $\bar{\mathfrak{h}}$, $\bar{\mathfrak{q}}$ un idéal de $\bar{\mathfrak{k}}$ tel que $\bar{f}\,|\,\bar{\mathfrak{q}}=0$. Il s'agit de montrer que

$$\bar{\mathfrak{h}}\supset\sigma^{-1}(\bar{\mathfrak{k}},\bar{\mathfrak{q}}).\mathfrak{s}(\bar{\mathfrak{k}}/\bar{\mathfrak{q}}).$$

Posons pour ce faire :

$$\mathfrak{k}=\sigma^{-1}(\mathfrak{g},\mathfrak{p}).\bar{\mathfrak{k}}, \qquad \mathfrak{h}=\sigma^{-1}(\mathfrak{g},\mathfrak{p}).\bar{\mathfrak{h}}, \qquad \mathfrak{q}=\sigma^{-1}(\mathfrak{g},\mathfrak{p}).\bar{\mathfrak{q}}.$$

Dans ces conditions :

1° $\mathfrak{k}$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$;

2° $\mathfrak{h}$ (resp. $\mathfrak{q}$) est une sous-algèbre (resp. un idéal) de $\mathfrak{k}$;

3° $f\,|\,\mathfrak{q}=0$;

4° l'algèbre $\bar{\mathfrak{k}}/\bar{\mathfrak{q}}$ s'identifie canoniquement à l'algèbre $\mathfrak{k}/\mathfrak{q}$ et $\sigma(\mathfrak{k},\mathfrak{q})$ s'identifie au produit $\sigma(\bar{\mathfrak{k}},\bar{\mathfrak{q}}).(\sigma(\mathfrak{g},\mathfrak{p})\,|\,\mathfrak{k})$.

Cela étant, *montrons que* $\mathfrak{h}\in\mathcal{M}(S(f))$. Il est clair d'une part que $\mathfrak{h}\in S(f)$. Si par ailleurs $\mathfrak{h}'$ est un élément de $\mathcal{M}(S(f))$, alors la maximalité de $\mathfrak{h}'$ implique $\mathfrak{h}'\supset\mathfrak{p}$; comme en outre, $\sigma(\mathfrak{g},\mathfrak{p})\mathfrak{h}'\in S(\bar{f})$, il s'ensuit que

$$\dim\mathfrak{h}=\dim\bar{\mathfrak{h}}+\dim\mathfrak{p}\geqq\dim\sigma(\mathfrak{g},\mathfrak{p})\,\mathfrak{h}'+\dim\mathfrak{p}=\dim\mathfrak{h}'.$$

Donc $\mathfrak{h}\in\mathcal{M}(S(f))=\mathcal{M}(E(f))$, et par conséquent :

$$\mathfrak{h}\supset\sigma^{-1}(\mathfrak{k},\mathfrak{q}).\mathfrak{s}(\mathfrak{k}/\mathfrak{q}),$$

ce qui implique :

$$\bar{\mathfrak{h}}\supset\sigma(\mathfrak{g},\mathfrak{p}).\sigma^{-1}(\mathfrak{k},\mathfrak{q}).\mathfrak{s}(\mathfrak{k}/\mathfrak{q})=\sigma^{-1}(\bar{\mathfrak{k}},\bar{\mathfrak{q}}).\mathfrak{s}(\bar{\mathfrak{k}}/\bar{\mathfrak{q}}).$$

2. Ce point étant acquis, nous établirons la proposition par récurrence sur la dimension de G. Elle est trivialement vérifiée si G est commutatif [puisque alors $I(f)=\mathcal{M}(S(f))=\{\mathfrak{g}\}$], et donc en particulier si G est de

dimension 1. Supposons-la donc démontrée pour les groupes de dimension $< n$, n étant un entier ≥ 2, et supposons que G soit de dimension n. Compte tenu du lemme 2.2.3, il suffit de vérifier que si $\mathfrak{h} \in \mathcal{M}(\mathrm{S}(f)) = \mathcal{M}(\mathrm{E}(f))$, alors $\rho(f, \mathfrak{h})$ est irréductible. Distinguons deux cas :

a. Il existe un idéal non nul $\mathfrak{p}$ *de* $\mathfrak{g}$ *tel que* $f \mid \mathfrak{p} = 0$.

Posons $\bar{\mathfrak{h}} = \sigma(\mathfrak{g}, \mathfrak{p})\mathfrak{h}$ et notons $\bar{f}$ l'image canonique de f dans $(\mathfrak{g}/\mathfrak{p})^\star$. Dans ces conditions, $\bar{\mathfrak{h}} \in \mathrm{S}(\bar{f})$. Par ailleurs la maximalité de $\mathfrak{h}$ dans $\mathrm{S}(f)$ implique $\mathfrak{h} \supset \mathfrak{p}$ et par suite $\dim \mathfrak{h} = \dim \bar{\mathfrak{h}} + \dim \mathfrak{p}$. Si donc $\bar{\mathfrak{h}}'$ est un élément de $\mathcal{M}(\mathrm{S}(\bar{f}))$, alors $\sigma^{-1}(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}).\bar{\mathfrak{h}}' \in \mathrm{S}(f)$ et

$$\dim \mathfrak{h} \geq \dim(\sigma^{-1}(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}).\bar{\mathfrak{h}}') = \dim \bar{\mathfrak{h}}' + \dim \mathfrak{p} \geq \dim \bar{\mathfrak{h}} + \dim \mathfrak{p} = \dim \mathfrak{h}.$$

Par conséquent,

$$\dim \bar{\mathfrak{h}} = \dim \bar{\mathfrak{h}}', \qquad \bar{\mathfrak{h}} \in \mathcal{M}(\mathrm{S}(\bar{f})).$$

Il résulte d'autre part de l'hypothèse de récurrence et de la première partie de la démonstration que $\mathcal{M}(\mathrm{S}(\bar{f})) = \mathrm{I}(\bar{f})$. Donc $\bar{\mathfrak{h}} \in \mathrm{I}(\bar{f})$ et la représentation $\rho(f, \mathfrak{h})$ de G, qui s'identifie à la représentation $\rho(\bar{f}, \bar{\mathfrak{h}})$ de $\mathrm{G}/\exp \mathfrak{p}$, est irréductible.

b. La forme linéaire f ne s'annule identiquement sur aucun idéal $\neq \{0\}$ *de* $\mathfrak{g}$. Ce cas ne peut se produire que si G est de genre *A* ou *C*.

Supposons que G *soit de genre A*. Soit alors $\mathfrak{a}$ un idéal de $\mathrm{D}(\mathfrak{g})$. Comme $\mathrm{E}(f) \subset \mathrm{S}(f, \mathfrak{s}(\mathfrak{g}))$ [*cf.* par exemple la démonstration de la proposition 2.3.1, formule (2)], $\mathfrak{h}$ contient $\mathfrak{a}$; il s'ensuit puisque $f \mid \mathfrak{a} \neq 0$, que $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{z}(\mathfrak{a})$ (II, lemme 2). Donc $\mathcal{M}(\mathrm{S}(f)) \cap \mathrm{S}(f \mid \mathfrak{z}(\mathfrak{a})) \neq \emptyset$, ce qui signifie que $\mathfrak{z}(\mathfrak{a})$ possède la propriété de l'algèbre $\mathfrak{k}$ de la première partie de la démonstration; l'hypothèse de récurrence implique dans ces conditions que

$$\mathcal{M}(\mathrm{S}(f \mid \mathfrak{z}(\mathfrak{a}))) = \mathrm{I}(f \mid \mathfrak{z}(\mathfrak{a})).$$

Par ailleurs $\mathrm{S}(f \mid \mathfrak{z}(\mathfrak{a})) \subset \mathrm{S}(f)$ et donc (lemme 2.2.1),

$$\mathcal{M}(\mathrm{S}(f \mid \mathfrak{z}(\mathfrak{a}))) = \mathcal{M}(\mathrm{S}(f)) \cap \mathrm{S}(f \mid \mathfrak{z}(\mathfrak{a}));$$

par conséquent $\mathfrak{h} \in \mathrm{I}(f \mid \mathfrak{z}(\mathfrak{a}))$, ce qui entraîne (I, 1.3, *e* et 4.1) que $\rho(f, \mathfrak{h})$ est irréductible.

Supposons que G *soit de genre C*. Notons alors $\mathfrak{c}$ le centre de $\mathfrak{g}$; $\mathfrak{a}$ un idéal minimal parmi les idéaux distincts de $\{0\}$ et de $\mathfrak{c}$. Par hypothèse $f \mid \mathfrak{c} \neq 0$. Appliquons alors le lemme 9 du chapitre II. Il suit de la définition de $\mathrm{E}(f)$ que l'éventualité (B) de ce lemme ne peut être réalisée pour $\mathfrak{h}$, et donc

$$\dim \mathfrak{h} = \dim(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}(f, \mathfrak{a}) + \mathfrak{a}) \qquad \text{et} \qquad \rho(f, \mathfrak{h}) \simeq \rho(f, \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}(f, \mathfrak{a}) + \mathfrak{a}).$$

Il en résulte en particulier que $\mathcal{M}(\mathrm{S}(f)) \cap \mathrm{S}(f \mid \mathfrak{g}(f, \mathfrak{a})) \neq \emptyset$; l'hypothèse de récurrence et la première partie de la démonstration impliquent alors que

$$\mathrm{I}(f \mid \mathfrak{g}(f, \mathfrak{a})) = \mathcal{M}(\mathrm{S}(f \mid \mathfrak{g}(f, \mathfrak{a}))).$$

Or (lemme 2.2.1),

$$\mathcal{M}(\mathrm{S}(f \mid \mathfrak{g}(f, \mathfrak{a}))) = \mathcal{M}(\mathrm{S}(f)) \cap \mathrm{S}(f \mid \mathfrak{g}(f, \mathfrak{a})),$$

et par conséquent, $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}(f, \mathfrak{a}) + \mathfrak{a} \in \mathrm{I}(f \mid \mathfrak{g}(f, \mathfrak{a}))$. Dans ces conditions, $\rho(f, \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}(f, \mathfrak{a}) + \mathfrak{a})$ est irréductible [I, 1.3, *e* et 4.3; II, lemme 8 (ii)]. Il en est donc de même pour $\rho(f, \mathfrak{h})$, ce qui termine la démonstration.

3. Groupes de Lie quasi nilpotents.

3.1. *Définition.* — Nous dirons qu'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}'$ est *quasi nilpotente* si elle est exponentielle résoluble et si, pour tout $x \in \mathfrak{g}'$, les valeurs propres réelles de $\mathrm{ad}\, x$ sont toutes nulles. Nous appellerons *quasi nilpotents* les groupes exponentiels dont l'algèbre de Lie est quasi nilpotente.

Dire qu'un groupe de Lie réel connexe est nilpotent revient donc à dire qu'il est à la fois complètement résoluble et quasi nilpotent.

Il résulte du paragraphe 3.3.1 du chapitre I que, si $\mathfrak{g}'$ est une algèbre de Lie résoluble, et si $x \in \mathfrak{g}'$, les valeurs propres de $\mathrm{ad}\, x$ sont les valeurs en x des racines de $\mathfrak{g}'$. On peut donc encore définir les algèbres quasi nilpotentes comme les algèbres exponentielles résolubles dont toutes les racines réelles sont nulles.

3.2. *Propriétés de stabilité.*

Lemme 3.2 :

(i) *Toute sous-algèbre, toute algèbre quotient d'une algèbre de Lie quasi nilpotente est quasi nilpotente.*

(ii) *Tout sous-groupe fermé connexe, tout groupe quotient par un sous-groupe distingué fermé connexe, d'un groupe quasi nilpotent simplement connexe, est un groupe quasi nilpotent simplement connexe.*

Démonstration. — Soient :

$\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie quasi nilpotente;
$\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$;
$\mathfrak{a}$ un idéal de $\mathfrak{g}$;
x un élément de $\mathfrak{g}$:

Comme $\mathfrak{a}$ est stable par $\mathrm{ad}\, x = \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, x$, l'opérateur $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, x$ sur $\mathfrak{g}$ définit par passage au quotient un opérateur $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{a}}\, x$ sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ dont les valeurs propres sont des valeurs propres de $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, x$. Or $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{a}}\, x$ est égal à $\mathrm{ad}\, \sigma(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}) x$: l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ est donc quasi nilpotente.

Si $x \in \mathfrak{h}$, alors les valeurs propres de $\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}\, x = \mathrm{ad}\, x \mid \mathfrak{h}$ sont des valeurs propres de $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, x$, ce qui montre que $\mathfrak{h}$ est quasi nilpotente et établit (i).

L'assertion (ii) résulte aussitôt de (i) et des propriétés générales des groupes exponentiels résolubles simplement connexes (I, 3.1).

Proposition 3.3. — *Soient* G *un groupe exponentiel résoluble simplement connexe et* $\mathfrak{g}$ *son algèbre de Lie.*

Si G *est quasi nilpotent, alors, pour toute forme linéaire* f *sur* $\mathfrak{g}$, *on a*

$$\mathrm{I}(f) = \mathcal{M}(\mathrm{S}(f)).$$

En d'autres termes, pour qu'une représentation $\rho(f, \mathfrak{h})$ *de* G *soit irréductible, il faut et il suffit que* $\mathfrak{h}$ *soit une sous-algèbre de* $\mathfrak{g}$ *subordonnée à* f *de dimension maximum.*

Démonstration. — Compte tenu de la proposition 2.3.2, il suffit de vérifier que $\mathcal{M}(\mathrm{S}(f)) = \mathcal{M}(\mathrm{E}(f))$ pour toute forme linéaire f sur $\mathfrak{g}$; or (lemme 2.2.1) cette inégalité est impliquée par l'inclusion $\mathcal{M}(\mathrm{S}(f)) \subset \mathrm{E}(f)$, qu'il suffit donc d'établir. Il s'agit donc de montrer que si :

— $\mathfrak{h}$ est un élément de $\mathcal{M}(\mathrm{S}(f))$;
— $\mathfrak{k}$ une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ contenant $\mathfrak{h}$;
— $\mathfrak{p}$ un idéal de $\mathfrak{k}$ tel que $f \mid \mathfrak{p} = 0$;

alors $\mathfrak{h} \supset \sigma^{-1}(\mathfrak{k}, \mathfrak{p}).\mathfrak{s}(\mathfrak{k}/\mathfrak{p})$.

La maximalité de $\mathfrak{h}$ dans $\mathrm{S}(f)$ implique $\mathfrak{h} \supset \mathfrak{p}$. Posons

$$\sigma = \sigma(\mathfrak{k}, \mathfrak{p}), \qquad \bar{\mathfrak{h}} = \sigma\mathfrak{h}, \qquad \bar{\mathfrak{k}} = \sigma\mathfrak{k} = \mathfrak{k}/\mathfrak{p}, \qquad \bar{\mathfrak{s}} = \mathfrak{s}(\bar{\mathfrak{k}})$$

et notons $\bar{f}$ l'image canonique de $f \mid \mathfrak{k}$ dans $\bar{\mathfrak{k}}^\star$. Il suffit dès lors de vérifier que $\bar{\mathfrak{h}} \supset \bar{\mathfrak{s}}$.

Pour ce faire, remarquons d'abord que $\bar{\mathfrak{h}} \in \mathcal{M}(\mathrm{S}(\bar{f}))$: sinon il existerait $\bar{\mathfrak{h}}' \in \mathrm{S}(\bar{f})$ telle que

$$\dim \bar{\mathfrak{h}}' - \dim \bar{\mathfrak{h}} = \dim \sigma^{-1}(\bar{\mathfrak{h}}') - \dim \mathfrak{h} > 0,$$

et l'on aurait $\sigma^{-1}(\bar{\mathfrak{h}}') \in \mathrm{S}(f \mid \mathfrak{k}) \subset \mathrm{S}(f)$, ce qui est absurde.

Il s'ensuit d'abord que $\bar{\mathfrak{h}}$, maximal dans $\mathrm{S}(\bar{f})$, contient le centre de $\bar{\mathfrak{k}}$. Montrons donc que $\bar{\mathfrak{h}}$ contient les éléments de $\mathrm{D}(\bar{\mathfrak{k}})$, ce qui terminera la démonstration.

C'est clair si $\mathrm{D}(\bar{\mathfrak{k}}) = \emptyset$. Sinon soit $\bar{\mathfrak{a}} \in \mathrm{D}(\bar{\mathfrak{k}})$. Alors (lemme 3.2) $\dim \bar{\mathfrak{a}} = 2$. Distinguons deux cas :

Si $\bar{\mathfrak{h}} \subset \mathfrak{z}(\bar{\mathfrak{a}})$, alors $\bar{\mathfrak{h}} + \bar{\mathfrak{a}} \in \mathrm{S}(\bar{f})$, la maximalité de $\bar{\mathfrak{h}}$ implique donc $\bar{\mathfrak{h}} \supset \bar{\mathfrak{a}}$.

Si $\bar{\mathfrak{h}} \not\subset \mathfrak{z}(\bar{\mathfrak{a}})$, alors (II, lemme 2), $\bar{\mathfrak{h}} \supset \bar{\mathfrak{a}}$ ou $\bar{\mathfrak{h}} \cap \bar{\mathfrak{a}} = \{0\}$. Mais cette dernière éventualité est exclue : sinon $\bar{\mathfrak{h}} \cap \mathfrak{z}(\bar{\mathfrak{a}}) + \bar{\mathfrak{a}}$ serait une algèbre subordonnée à $\bar{f}$ de dimension supérieure à celle de $\bar{\mathfrak{h}}$, car on aurait

$$\dim(\bar{\mathfrak{h}} \cap \mathfrak{z}(\bar{\mathfrak{a}}) + \bar{\mathfrak{a}}) = \dim(\bar{\mathfrak{h}} \cap \mathfrak{z}(\bar{\mathfrak{a}}) \oplus \bar{\mathfrak{a}}) = (\dim \bar{\mathfrak{h}} - 1) + 2 = \dim \bar{\mathfrak{h}} + 1.$$

4. Quelques contre-exemples.

4.1. Les notations étant celles du paragraphe 2, nous avons établi (prop. 2.3.1) les inclusions

$$\mathrm{I}(f) \subset \mathcal{M}(\mathrm{E}(f)) \subset \mathcal{M}(\mathrm{E}_0(f)) \subset \mathcal{M}(\mathrm{S}(f, \mathfrak{s})) \subset \mathcal{M}(\mathrm{S}(f)).$$

Nous allons donner quelques contre-exemples montrant que, dans le cas général, elles ne peuvent pas être remplacées par des égalités. Dans ce qui suit, pour toute algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, nous noterons $\mathcal{D}(\mathfrak{g})$ ou plus simplement $\mathcal{D}$ l'algèbre dérivée de $\mathfrak{g}$.

4.2. *Exemple d'algèbre $\mathfrak{h} \in \mathcal{M}(\mathrm{S}(f))$ qui n'appartient pas à $\mathcal{M}(\mathrm{S}(f, \mathfrak{s}))$.*

Soient :

$\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie réelle de base (x, y) définie par le crochet $[x, y] = y$;
f une forme linéaire sur $\mathfrak{g}$ telle que $f(y) \neq 0$;
$\mathfrak{h} = \mathbf{R}x$.

Alors

$$\mathfrak{s}(\mathfrak{g}) = \mathbf{R}y, \qquad \mathfrak{h} \in \mathrm{S}(f) \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{g} \notin \mathcal{M}(\mathrm{S}(f)).$$

Donc

$$\mathfrak{h} \in \mathcal{M}(\mathrm{S}(f)) - \mathcal{M}(\mathrm{S}(f, \mathfrak{s})).$$

4.3. *Exemple d'algèbre $\mathfrak{h} \in \mathcal{M}(\mathrm{S}(f, \mathfrak{s}))$ qui n'appartient pas à $\mathcal{M}(\mathrm{E}_0(f))$.*

Soient :

$\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie réelle de base (x, u, a) définie par les crochets non nuls

$$[x, u] = u + a, \qquad [x, a] = a;$$

f une forme linéaire sur $\mathfrak{g}$ telle que $f(a) = 0$ et $f(u) \neq 0$;
$\mathfrak{h} = \mathbf{R}x \oplus \mathbf{R}a$, $\mathfrak{k} = \mathbf{R}a$.

Il est clair que $\mathfrak{k}$ est un idéal non central de $\mathfrak{g}$, et que $\mathcal{D} = \mathbf{R}u \oplus \mathbf{R}a$. Par conséquent $(\mathfrak{g}, \mathcal{D}, \mathfrak{k})$ est une suite de Jordan-Hölder du $\mathfrak{g}$-module $\mathfrak{g}$, donc $\mathfrak{g}$ est complètement résoluble et par suite exponentielle. Par ailleurs $f(\mathcal{D}) \neq 0$ et $f(\mathcal{D}(\mathfrak{h})) = f(\mathfrak{k}) = \{0\}$, ce qui montre que $\mathfrak{h} \in \mathcal{M}(\mathrm{S}(f))$.

Vérifions que $\mathfrak{k} = \mathfrak{s}(\mathfrak{g})$.

Il est clair que $\mathfrak{c}(\mathfrak{g}) = 0$ et que $\mathfrak{k} \in \mathrm{D}(\mathfrak{g})$. Par suite :

$$\mathfrak{k} \subset \mathfrak{s}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{a}_0(\mathfrak{g}) \subset \mathcal{D} = \mathbf{R}u \oplus \mathbf{R}a.$$

Si donc on avait $\mathfrak{k} \neq \mathfrak{s}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{a}_0(\mathfrak{g})$, comme les idéaux de $\mathrm{D}(\mathfrak{g})$ sont deux à deux disjoints, il existerait $a' \in \mathcal{D} - \mathfrak{k}$ tel que $[\mathfrak{g}, \mathbf{R}a'] = \mathbf{R}a'$. Par suite, $\mathcal{D}$ étant commutatif, il existerait deux nombres réels non nuls β, γ tels que

$$a' = u + \beta a \qquad \text{et} \qquad [x, a'] = \gamma a'$$

et par suite :

$$(u+a)+\beta a=\gamma(u+\beta a), \qquad \gamma=1, \qquad 1+\beta=\beta\gamma,$$

ce qui est impossible.

Donc $\mathfrak{k}=\mathfrak{s}(\mathfrak{g})$, et par conséquent (lemme 2.2.1) :

$$\mathfrak{h}\in\mathfrak{M}(\mathrm{S}(f))\cap\mathrm{S}(f,\mathfrak{s}(\mathfrak{g}))=\mathfrak{M}(\mathrm{S}(f,\mathfrak{s}(\mathfrak{g}))),$$

Montrons que $\mathfrak{h}\notin\mathrm{E}_0(f)$.

Si $\mathfrak{h}$ appartenait à $\mathrm{E}_0(f)$, alors, comme $f|\mathfrak{k}=0$, on aurait

$$\mathfrak{h}\supset\sigma^{-1}(\mathfrak{g},\mathfrak{k}).\mathfrak{s}(\mathfrak{g}/\mathfrak{k}).$$

Or il est clair que $\mathfrak{s}(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})=\sigma(\mathfrak{g},\mathfrak{k}).\mathbf{R}u$, et donc

$$\sigma^{-1}(\mathfrak{g},\mathfrak{k}).\mathfrak{s}(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})=\mathbf{R}u\oplus\mathbf{R}a=\varpi(\mathfrak{g}).$$

Mais $\mathfrak{h}\not\supset\varpi(\mathfrak{g})$.

Il s'ensuit *a fortiori* que $\mathfrak{h}\notin\mathfrak{M}(\mathrm{E}_0(f))$, et donc que

$$\mathfrak{h}\in\mathfrak{M}(\mathrm{S}(f,\mathfrak{s}))-\mathfrak{M}(\mathrm{E}_0(f)).$$

4.4. *Exemple d'algèbres appartenant à l'un des ensembles*

$$\mathfrak{M}(\mathrm{E}_0(f))-\mathfrak{M}(\mathrm{E}(f)), \qquad \mathfrak{M}(\mathrm{E}(f))-\mathrm{I}(f).$$

4.4.1. Soient :

$\mathfrak{g}$ l'espace vectoriel réel de base (x, y, u, a, b) muni de la loi interne définie par les crochets anticommutatifs

$$(1)\qquad \begin{cases}[x,y]=-y, & [x,a]=[y,u]=a, \qquad [x,u]=2u,\\ [y,a]=b, & [x,b]=[y,b]=[u,a]=[u,b]=[a,b]=0;\end{cases}$$

f une forme linéaire sur $\mathfrak{g}$ telle que

$$f(x)=f(y)=f(a)=0, \qquad f(u)\neq 0 \qquad \text{et} \qquad f(b)\neq 0;$$

$\mathfrak{h}_1$ le sous-espace $\mathbf{R}x\oplus\mathbf{R}a\oplus\mathbf{R}b$;
$\mathfrak{h}_2$ le sous-espace $\mathbf{R}x\oplus\mathbf{R}y\oplus\mathbf{R}b$;
$\mathfrak{a}$ le sous-espace $\mathbf{R}a\oplus\mathbf{R}b$.

4.4.2. *Montrons d'abord que les crochets* (1) *munissent* $\mathfrak{g}$ *d'une structure d'algèbre de Lie complètement résoluble.*

L'identité de Jacobi est trivialement vérifiée pour les triplets

$$(x,y,b), \quad (x,u,b), \quad (x,a,b), \quad (y,u,b), \quad (y,a,b), \quad (u,a,b).$$

Par ailleurs :

$$\begin{aligned}
&[[x,y],u]+[[y,u],x]+[[u,x],y]\\
&\qquad=-[y,u]+[a,x]+2[y,u]=-a-a+2a=0,\\
&[[x,u],a]+[[u,a],x]+[[a,x],u]=2[u,a]-[a,u]=0,\\
&[[x,y],a]+[[y,a],x]+[[a,x],y]=-[y,a]+[b,x]-[a,y]=0,\\
&[[y,u],a]+[[u,a],y]+[[a,y],u]=[a,a]+0+[u,b]=0.
\end{aligned}$$

Ce qui montre que les crochets (1) munissent $\mathfrak{g}$ d'une structure d'algèbre de Lie, Par ailleurs, les inclusions

$$\mathfrak{g} \supset \mathcal{D}(\mathfrak{g}) = \mathbf{R}y \oplus \mathbf{R}u \oplus \mathbf{R}a \oplus \mathbf{R}b \supset \mathbf{R}u \oplus \mathbf{R}a \oplus \mathbf{R}b \supset \mathfrak{a} = \mathbf{R}a \oplus \mathbf{R}b \supset \mathbf{R}b$$

définissent une suite de Jordan-Hölder du $\mathfrak{g}$-module $\mathfrak{g}$, ce qui montre que $\mathfrak{g}$ est complètement résoluble.

4.4.3. *Montrons que* $\mathrm{D}(\mathfrak{g}) = \emptyset$.

Comme $\mathfrak{g}$ est complètement résoluble, il suffit de vérifier qu'il n'existe pas d'idéal de dimension 1 non central.

Supposons qu'il existe un tel idéal, soit $\mathfrak{p}$. Comme $\mathcal{D}(\mathfrak{g})$ est nilpotent et que $\mathfrak{g} = \mathcal{D}(\mathfrak{g}) \oplus \mathbf{R}x$, il s'ensuit que $[\mathfrak{p}, \mathcal{D}(\mathfrak{g})] = 0$ et donc :

$$\mathfrak{p} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{p}] = [\mathbf{R}x, \mathfrak{p}].$$

Par conséquent il existe des nombres réels α, β, γ, δ, ε et un élément z de $\mathfrak{g}$ tels que

$$\mathfrak{p} = \mathbf{R}z, \qquad z = \alpha y + \beta u + \gamma a + \delta b, \qquad [x, z] = \varepsilon z$$

et

$$\varepsilon \neq 0, \qquad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 \neq 0.$$

Par suite, compte tenu de (1) :

$$-\alpha y + 2\beta u + \gamma a = \varepsilon(\alpha y + \beta u + \gamma a + \delta b)$$

soit

$$\varepsilon\delta = \delta = 0, \qquad \varepsilon\alpha = -\alpha, \qquad \varepsilon\beta = 2\beta, \qquad \varepsilon\gamma = \gamma.$$

Donc deux des trois quantités α, β, γ seraient nulles : l'idéal $\mathfrak{p}$ serait l'un des trois sous-espaces $\mathbf{R}y$, $\mathbf{R}u$, $\mathbf{R}a$, mais les formules (1) montrent que c'est impossible.

4.4.4. Par ailleurs, on vérifie aussitôt sur les formules (1) que $\mathbf{R}b$ est le centre de $\mathfrak{g}$. Par suite, compte tenu du paragraphe précédent, $\mathfrak{g}$ est l'algèbre de Lie d'un groupe de genre C, et tout idéal non nul de $\mathfrak{g}$ contient b : par conséquent f ne s'annule identiquement sur aucun idéal non nul de $\mathfrak{g}$, ce qui implique que $\mathrm{E}_0(f) = \mathrm{S}(f, \mathfrak{s}(\mathfrak{g}))$. Comme $\mathfrak{s}(\mathfrak{g}) = \mathbf{R}b$ est le centre de $\mathfrak{g}$ et que les éléments de $\mathcal{M}(\mathrm{S}(f))$ contiennent le centre de $\mathfrak{g}$ en raison de leur maximalité, il s'ensuit que

$$\mathcal{M}(\mathrm{E}_0(f)) = \mathcal{M}(\mathrm{S}(f)). \tag{2}$$

4.4.5. *Montrons que* $\mathfrak{h}_1 \in \mathcal{M}(\mathrm{S}(f))$.

Il résulte des formules (1) que $\mathfrak{a}$ est un idéal de deuxième espèce (*cf.* I, 4.3.2). Par ailleurs $\mathfrak{a} \cap \mathrm{Ker} f = \mathbf{R}a$. Nous avons donc [*cf.* formules (1)]:

$$\mathfrak{g}(f, \mathfrak{a}) = \mathbf{R}x \oplus \mathbf{R}u \oplus \mathfrak{a}. \tag{3}$$

Or

$$[\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_1] = \mathbf{R}a = \mathfrak{a} \cap \operatorname{Ker} f \qquad \text{et} \qquad [\mathfrak{g}(f, \mathfrak{a}), \mathfrak{g}(f, \mathfrak{a})] = \mathbf{R}u \oplus \mathbf{R}a \not\subset \operatorname{Ker} f.$$

Comme $\mathfrak{h}_1$ est contenue dans $\mathfrak{g}(f, \mathfrak{a})$, il s'ensuit que $\mathfrak{h}_1 \in \mathcal{M}(\mathrm{S}(f \mid \mathfrak{g}(f, \mathfrak{a})))$.

Par ailleurs, il résulte du lemme 9 du chapitre II que

$$\mathrm{I}(f) \cap \mathrm{S}(f \mid \mathfrak{g}(f, \mathfrak{a})) \neq \emptyset$$

et *a fortiori* (lemme 2.2.3) :

$$\mathcal{M}(\mathrm{S}(f)) \cap \mathrm{S}(f \mid \mathfrak{g}(f, \mathfrak{a})) \neq \emptyset.$$

Par conséquent (lemme 2.2.1), $\mathcal{M}(\mathrm{S}(f \mid \mathfrak{g}(f, \mathfrak{a}))) \subset \mathcal{M}(\mathrm{S}(f))$, ce qui établit notre assertion.

4.4.6. *Montrons que* $\mathfrak{h}_1 \notin \mathrm{E}(f)$.

Il résulte des formules (1) que $\mathbf{R}u \in \mathrm{D}(\mathfrak{g}(f, \mathfrak{a}))$. Or $\mathfrak{h}_1 \not\supset \mathbf{R}u$. Donc $\mathfrak{h}_1$ n'est pas $(f, \mathfrak{g}(f, \mathfrak{a}))$-saturée (*cf.* 2.1).

4.4.7. *Montrons que* $\mathfrak{h}_2 \in \mathrm{E}(f)$.

Remarquons d'abord que $\mathfrak{h}_2 \in \mathrm{S}(f)$: $[\mathfrak{h}_2, \mathfrak{h}_2] = \mathbf{R}y \subset \mathfrak{h}_2 \cap \operatorname{Ker} f$. Par ailleurs, il y a au moins trois sous-algèbres de $\mathfrak{g}$ contenant $\mathfrak{h}_2$:

— une de dimension 5, savoir $\mathfrak{g}$, et c'est la seule;
— une de dimension 4, savoir $\mathfrak{h}_2 + \mathfrak{a}$;
— une de dimension 3, savoir $\mathfrak{h}_2$, et c'est la seule.

Il est clair que $\mathfrak{h}_2$ est $(f, \mathfrak{h}_2)$-saturée. Comme f ne s'annule identiquement sur aucun idéal de $\mathfrak{g}$ et que par ailleurs $\mathrm{D}(\mathfrak{g}) = \emptyset$ (4.4.3), $\mathfrak{h}_2$ est également $(f, \mathfrak{g})$-saturée. Il suffit donc de vérifier que :

a. $\mathfrak{h}_2 + \mathfrak{a}$ est la seule sous-algèbre de dimension 4 contenant $\mathfrak{h}_2$;
b. $\mathfrak{h}_2$ est $(f, \mathfrak{h}_2 + \mathfrak{a})$-saturée.

Montrons (*a*) : Soient α, β deux nombres réels non tous deux nuls, z un élément de $\mathfrak{g}$ tels que

$$z = \alpha u + \beta a \qquad \text{et} \qquad [\mathfrak{h}_2, \mathbf{R}z] \subset \mathfrak{h}_2 \oplus \mathbf{R}z.$$

Comme $[x, z] = 2\alpha u + \beta a \in [\mathfrak{h}_2, \mathbf{R}z]$, il s'ensuit que α ou β est nul; comme $[y, z] = \alpha a + \beta b$ on a donc,

$$\alpha = 0, \qquad z = \beta a, \qquad \mathfrak{h}_2 \oplus \mathbf{R}z = \mathfrak{h}_2 + \mathfrak{a}.$$

Montrons (*b*) : On vérifie aussitôt sur les formules (1) que $\mathfrak{h}_2 + \mathfrak{a}$ est complètement résoluble et que son centre est égal à $\mathbf{R}b$.

Montrons que $\mathrm{D}(\mathfrak{h}_2 + \mathfrak{a}) = \emptyset$. Sinon, $\mathfrak{h}_2 + \mathfrak{a}$, étant complètement résoluble, posséderait un idéal non central $\mathfrak{p}$ de dimension 1. Cet idéal serait contenu dans $\mathcal{D}(\mathfrak{h}_2 + \mathfrak{a}) = \mathbf{R}y \oplus \mathbf{R}a \oplus \mathbf{R}b$. Comme $\mathfrak{h}_2 + \mathfrak{a} = \mathbf{R}x \oplus \mathcal{D}(\mathfrak{h}_2 + \mathfrak{a})$, il existerait des nombres réels α, β, γ, δ et un élément z de $\mathcal{D}(\mathfrak{h}_2 + \mathfrak{a})$ tels que

$$\mathfrak{p} = \mathbf{R}z, \qquad z = \alpha y + \beta a + \gamma b, \qquad [x, z] = \delta z$$

avec

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\neq 0 \qquad \text{et} \qquad \delta\neq 0$$

et par conséquent :

$$[x, z]=-\alpha y+\beta a=\delta(\alpha y+\beta a+\gamma b),$$

soit

$$-\alpha=\delta\alpha, \qquad \beta=\delta\beta, \qquad \gamma=0.$$

Par suite on aurait $\mathfrak{p}=\mathbf{R}y$ ou $\mathfrak{p}=\mathbf{R}a$, ce qui est impossible puisque $[y, a]=b$.

Donc $\mathrm{D}(\mathfrak{h}_2+\mathfrak{a})=\emptyset$, et $\mathfrak{h}_2+\mathfrak{a}$ est l'algèbre de Lie d'un groupe de genre C, tout idéal non nul de $\mathfrak{h}_2+\mathfrak{a}$ contient $\mathbf{R}b$. Comme $f(b)\neq 0$, f ne s'annule identiquement sur aucun idéal non nul de $\mathfrak{h}_2+\mathfrak{a}$. Par suite, les sous-algèbres de $\mathfrak{h}_2+\mathfrak{a}$ qui sont $(f, \mathfrak{h}_2+\mathfrak{a})$-saturées sont celles qui sont subordonnées à f et contiennent $\mathfrak{s}(\mathfrak{h}_2+\mathfrak{a})=\mathbf{R}b$; c'est le cas en particulier de $\mathfrak{h}_2$. Donc $\mathfrak{h}_2\in\mathrm{E}(f)$.

4.4.8. Soit G le groupe exponentiel résoluble simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Remarquons que

$$\mathfrak{h}_1=\mathfrak{h}_2\cap\mathfrak{g}(f, \mathfrak{a})+\mathfrak{a}.$$

Comme $\mathfrak{h}_2\in\mathrm{E}(f)$ (4.4.7), que $f(b)\neq 0$, il résulte du lemme 9 du chapitre II que les représentations $\rho(f, \mathfrak{h}_1)$ et $\rho(f, \mathfrak{h}_2)$ du groupe G sont équivalentes : le fait que $\mathfrak{h}_2\in\mathrm{E}(f)$ exclut l'éventualité (B) de ce lemme. Comme par ailleurs (4.4.6) $\mathfrak{h}_1\notin\mathrm{E}(f)$ et que $\mathrm{E}(f)\supset\mathrm{I}(f)$, *ces deux représentations sont réductibles.*

4.4.9. Nous pouvons dès lors montrer que $\mathfrak{h}_1$ et $\mathfrak{h}_2$ fournissent les contre-exemples annoncés. Plus précisément, nous allons vérifier que

$$\mathfrak{h}_1\in\mathcal{M}(\mathrm{E}_0(f))-\mathcal{M}(\mathrm{E}(f)) \tag{4}$$

$$\mathfrak{h}_2\in\mathcal{M}(\mathrm{E}(f))-\mathrm{I}(f). \tag{5}$$

Il résulte :

— du paragraphe précédent que $\mathfrak{h}_2\notin\mathrm{I}(f)$;
— du paragraphe 4.4.6 que $\mathfrak{h}_1\notin\mathrm{E}(f)$, et *a fortiori* que $\mathfrak{h}_1\notin\mathcal{M}(\mathrm{E}(f))$;
— des paragraphes 4.4.4 et 4.4.5 que $\mathfrak{h}_1\in\mathcal{M}(\mathrm{E}_0(f))$.

La relation (4) est donc établie et il suffit, pour vérifier (5), de montrer que $\mathfrak{h}_2\in\mathcal{M}(\mathrm{E}(f))$. Or $\mathfrak{h}_2\in\mathrm{E}(f)$ (4.4.7) et $\dim\mathfrak{h}_2=\dim\mathfrak{h}_1$. Comme $\mathfrak{h}_1\in\mathcal{M}(\mathrm{S}(f))$, il s'ensuit que

$$\mathfrak{h}_2\in\mathcal{M}(\mathrm{S}(f))\cap\mathrm{E}(f)=\mathcal{M}(\mathrm{E}(f)).$$

BIBLIOGRAPHIE.

[1] C. Chevalley, *On the topological structure of solvable groups* (*Ann. Math.*, t. 42, 1941, p. 668-675).

[2] J. Dixmier, *L'application exponentielle dans les groupes de Lie résolubles* (*Bull. Soc. math. Fr.*, t. 85, 1957, p. 113-121).

[3] J. Dixmier, *Sur les représentations unitaires des groupes de Lie nilpotents*, II (*Bull. Soc. math. Fr.*, t. 85, 1957, p. 325-388).

[4] J. Dixmier, *Sur les représentations unitaires des groupes de Lie nilpotents*, III (*Canad. J. Math.*, vol. 10, 1958, p. 321-348).

[5] J. Dixmier, *Sur les représentations unitaires des groupes de Lie nilpotents*, IV (*Canad. J. Math.*, vol. 11, 1959, p. 321-344).

[6] J. Dixmier, *Sur les représentations unitaires des groupes de Lie résolubles* (*Math. J. Okayama Univ.*, vol. 11, 1962, p. 1-18).

[7] A. A. Kirillov, *Unitarnye predstavlenija nil'potentnykh grupp Li* (*Uspekhi matematičeskikh Nauk.*, t. 17, n° 4, 1962, p. 57-110).

[8] G. W. Mackey, *Induced representations of locally compact groups*, I (*Ann. Math.*, t. 55, 1952, p. 101-139).

[9] G. W. Mackey, *Imprimitivity for representations of locally compact groups* (*Proc. Nat. Acad. Sc. U. S. A.*, t. 35, 1949, p. 537-545).

[10] F. I. Mautner, *Unitary representations of locally compact groups*, II (*Ann. Math.*, t. 32, 1950, p. 528-556).

[11] M. Saito, *Sur certains groupes de Lie résolubles*, I (*Scientifics papers of the college of general Education*, University of Tokyo, t. 7, 1957, p. 1-11).

[12] M. Saito, *Sur certains groupes de Lie résolubles*, II *Scientifics papers of the college of general Education*, University of Tokyo, t. 7, 1957, p. 157-168).

[13] O. Takenouchi, *Sur la facteur-représentation des groupes de Lie de type* (*E*) (*Math. J. Okayama Univ.*, t. 7, 1957, p. 151-161).