ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

ROBERT MEYNIEUX

Sur l'équation fonctionnelle vectorielle $f[x(u), y(v), z(u+v)] = 0$ (chapitre I)

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 81, nº 1 (1964), p. 77-106

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1964_3_81_1_77_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
3e série, t. 81, 1964, p. 77 à 106.

SUR L'ÉQUATION FONCTIONNELLE VECTORIELLE

$f[x(u), y(v), z(u+v)] = 0$ [1]

PAR M. ROBERT MEYNIEUX.

INTRODUCTION.

Ce travail a son origine dans la suggestion, que m'a faite autrefois M. Paul Montel, de développer des questions qu'il avait traitées dans son Mémoire de 1931, sur les fonctions d'une variable réelle qui admettent un théorème d'addition algébrique [34]. En ce qui concerne le présent travail, il s'agit essentiellement du fait qu'une telle fonction, supposée réelle et continue dans un intervalle fermé $[0, a]$, est analytique par morceaux en nombre fini, résultat redémontré dans [34] après J. F. Ritt [37] (dans les deux cas, on montre que la fonction satisfait à une équation différentielle algébrique). C'est ce résultat, dans ce qu'il a de local (il s'agit donc d'un nombre fini de morceaux au voisinage d'un point), qui est généralisé ici (chap. IV) comme suit : les variables u, v, $u+v$ sont des vecteurs de $\mathbf{R}^q$, avec $q \geqq 1$; elles peuvent varier dans des ouverts distincts [plus précisément, on n'impose pas *a priori* de condition à l'ouvert Δ lieu de (u, v) dans $\mathbf{R}^q \times \mathbf{R}^q$]; elles sont les arguments de fonctions x, y, z *a priori* distinctes; celles-ci prennent leurs valeurs dans des espaces de dimensions l, m, n (entiers $\geqq 1$) quelconques; dans l'équation fonctionnelle $f(x, y, z) = 0$, au lieu de supposer que f est un polynome (scalaire) irréductible, on suppose que f est analytique (définie au voisinage des valeurs prises par x, y, z) et vectorielle. Pour pouvoir énoncer le résultat relatif à z, il suffit alors de supposer en outre régulière au point $z(u+v)$ l'application $z \rightarrow f[x(u), y(v), z]$, pour les (u, v) d'un ensemble partout

(1) *Thèse Sc. math.*, Paris, 1964.

dense dans Δ (hypothèse raisonnable : dans le cas contraire, on peut avoir des solutions monstrueuses, sur lesquelles il est difficile de dire quelque chose de simple).

Une autre démonstration du résultat de J. F. Ritt, où l'on recherche directement la forme que doit avoir f pour qu'il existe une solution, a été donnée par P. J. Myrberg [38], puis étendue par T. Pentikäinen [39] au cas où f et la fonction inconnue x prennent leurs valeurs dans un espace à n dimensions (la variable u restant scalaire), et même à certains cas où x, y, z sont des fonctions distinctes. J'avais indiqué sans démonstration ([40], [41]) des résultats plus généraux, mais certaines de leurs conditions de validité demandaient à être précisées; par ailleurs, P. Montel [34] avait déjà étudié des cas particuliers où $n = 2$ (*cf.* aussi [42]).

Le lecteur trouvera d'autres renseignements historiques et bibliographiques sur cette question ou des questions voisines dans le livre récent de J. Aczél [43], auquel je renvoie.

Une grande partie de ce travail s'inspire plus ou moins directement du Mémoire [34] de P. Montel. Ainsi l'emploi des nombres dérivés est généralisé au cas des éléments dérivés des fonctions vectorielles (chap. III, sect. I).

Mais la complexité inhérente aux généralisations étudiées rend nécessaire l'usage de certaines notions telles que celles de germe (chap. I, sect. I), de germe cylindrique (chap. I, sect. IV), d'application différentiable (chap. II, sect. I), de variété (chap. II, sect. II), d'ensemble analytique (chap. II, sect. III), de germe connexe (chap. II, sect. IV), de variable réduite pour une fonction analytique dépendant d'un paramètre (chap. III, sect. II); les propriétés utiles de ces notions sont étudiées ou (s'il s'agit de propriétés bien connues) rappelées et adaptées à la question dont il s'agit. On en déduit une autre notion qui joue un rôle important dans notre étude : celle de germe analytique associé à une application continue d'un espace topologique E dans une variété analytique et à un point a de E; ainsi que quelques notions annexes, comme celle de dimension analytique de cette application en a (n° 36).

Dans de nombreuses questions où interviennent les ensembles analytiques, directement ou par l'intermédiaire de germes analytiques associés à des applications, ou de dimensions analytiques, on n'utilise que certaines de leurs propriétés. Cette remarque m'a conduit à définir axiomatiquement certaines familles de parties d'un espace topologique, obtenant ainsi ce que j'ai appelé des structures analyticoïdes (chap. I, sect. II et III); exemple : la structure algébrique dans un espace affine réel ou complexe (n° 39).

La plus grande partie de ce travail est résumée dans quatre Notes que j'ai fait présenter en 1962 à l'Académie des Sciences et qui figurent dans les tomes 254 (p. 1726, 3301 et 4413) et 255 (p. 28) des *Comptes rendus* *de l'Académie des Sciences*. Je signale à ce propos deux rectifications. Dans la première de ces quatre Notes, au n° 5, 3e alinéa, supprimer les mots « que l'adhérence de E′ », ainsi que toute la ligne qui suit. Dans la dernière des quatre Notes, l'assertion contenue dans la dernière phrase n'est pas démontrée; il est donc douteux que W′ soit réunion localement finie de domaines; il convient, comme au n° 78 du présent travail, de considérer, au lieu de W′, le lieu de tous les points w d'analyticité.

Les notations et les termes employés ici sont le plus souvent ceux des *Éléments de Mathématique* de N. Bourbaki; ainsi, la relation $A \subset B$ entre parties d'un ensemble exprime l'inclusion (de A dans B) au sens large (compatible avec l'égalité).

CHAPITRE I.

Germes. Structures analyticoïdes.

SECTION I : GERMES.

1. Germe d'une application suivant un filtre. — Soient donnés *deux ensembles* A, B et un *filtre* $\mathcal{F}$ sur A.

Rappelons (*cf*. Bourbaki [1], p. 74) comment on définit une relation d'équivalence (dite *équivalence suivant* $\mathcal{F}$) dans l'ensemble des applications dans B des parties de A appartenant à $\mathcal{F}$:

Soient $U \in \mathcal{F}$, $V \in \mathcal{F}$; soit f (resp. g) une application de U (resp. V) dans B. On dit que f et g sont équivalentes suivant $\mathcal{F}$ si (et seulement si) il existe $W \in \mathcal{F}$, telle que $W \subset U \cap V$ et que les restrictions de f et g à W coïncident. La classe d'équivalence de f suivant $\mathcal{F}$ est appelée le *germe de f suivant $\mathcal{F}$*.

L'équivalence suivant $\mathcal{F}$ se réduit à l'égalité quand $\mathcal{F}$ est le filtre *le moins fin* sur A (celui dont A est l'unique élément).

Toute application dans B de $U \in \mathcal{F}$ est équivalente suivant $\mathcal{F}$ à une application dans B de A tout entier. On pourra donc, pour déterminer les germes, se borner aux applications de A dans B (cf. *loc. cit.*).

2. Germes de parties d'un ensemble. — Conservons les notations précédentes, mais prenons en particulier pour B un ensemble à *deux éléments*, de sorte que les applications de A dans B correspondent biunivoquement aux parties de A (dont elles sont les *fonctions caractéristiques*). On a ainsi (*cf.* [1], p. 73-75) dans l'ensemble $\mathfrak{P}(A)$ des parties de A une relation R d'équivalence (suivant $\mathfrak{F}$, dirons-nous encore) : les parties X, Y de A sont équivalentes suivant $\mathfrak{F}$ si (et seulement si) il existe $W \in \mathfrak{F}$ telle que $X \cap W = Y \cap W$. On est ainsi conduit à la notion de *germe suivant* $\mathfrak{F}$ *d'une partie de* A : ce germe est un élément de l'ensemble quotient $\mathfrak{P}(A)/R$.

Rappelons que la relation d'*inclusion* (au sens large, i. e. égalité comprise; nous notons $\subset$ cette relation, comme Bourbaki), ou encore les opérations de *réunion* ($\cup$) et d'*intersection* ($\cap$), font de $\mathfrak{P}(A)$ un *réseau booléien* ([1], p. 155, exerc. 20), ou *treillis de Boole* (P. Dubreil et M.-L. Dubreil-Jacotin [2], p. 191), ou (une) *algèbre de Boole* (Sikorski [3]).

Les germes suivant $\mathfrak{F}$ de la réunion et de l'intersection de deux parties X, Y de A ne dépendent de X, Y que par les germes de X et Y suivant $\mathfrak{F}$, ce qui permet de définir dans $\mathfrak{P}(A)/R$ les opérations de réunion et d'intersection, et fait de cet ensemble quotient un *ensemble réticulé*, ou *treillis*, dans lequel la relation d'ordre (inclusion) peut aussi se définir directement comme suit : le germe suivant $\mathfrak{F}$ de $X \subset A$ est inclus dans celui de $Y \subset A$ si, et seulement si, l'une des conditions équivalentes *a*, *b*, *c* est vérifiée :

a. il existe $X' \subset Y$ équivalente à X suivant $\mathfrak{F}$;

b. il existe $Y' \supset X$ équivalente à Y suivant $\mathfrak{F}$;

c. il existe $W \in \mathfrak{F}$ telle que $X \cap W \subset Y \cap W$.

En outre, le réseau $\mathfrak{P}(A)$ étant booléien, il en est de même de $\mathfrak{P}(A)/R$.

On pourra parler de *germe vide*, de *germes disjoints*, etc. (*cf.* [1], p. 74) et employer pour les germes les notations $\cup$, $\cap$, $\subset$, $\supset$.

D'ailleurs on sait (Stone [4]) que tout réseau booléien est isomorphe à un sous-réseau du réseau booléien des parties d'un ensemble convenablement choisi (construit à partir du réseau donné).

3. Image d'un filtre. — Revenons à la situation du n° 1, où B est un ensemble quelconque. L'image $f(\mathfrak{F})$ par f (application de A dans B) du filtre $\mathfrak{F}$ est un filtre sur $f(A)$, donc une base d'un filtre $\mathfrak{G}$ sur B, qui ne dépend que du germe de f suivant $\mathfrak{F}$. Mais ce filtre $\mathfrak{G}$ peut rester le même pour plusieurs germes de fonctions suivant $\mathfrak{F}$; exemple : prenons pour $\mathfrak{F}$ le filtre le moins fin sur A; le seul élément de $f(\mathfrak{F})$ est alors $f(A)$, et une application non constante peut toujours être remplacée par une autre donnant le même filtre $\mathfrak{G}$.

4. Cas d'un produit d'ensembles. — *a*. Conservons les mêmes notations, et supposons $B = B_1 \times B_2$. L'ensemble des germes suivant $\mathfrak{F}$ d'applications de A dans B peut être considéré comme produit des ensembles des germes suivant $\mathfrak{F}$ d'applications de A dans B_1 et dans B_2 respectivement ([1], p. 75).

Soit $f = f_1 \times f_2$, et soit $\mathfrak{G}_1$ (resp. $\mathfrak{G}_2$) le filtre engendré sur B_1 (resp. B_2) par $f_1(\mathfrak{F})$ [resp. $f_2(\mathfrak{F})$]. Alors le filtre $\mathfrak{G}_1 \times \mathfrak{G}_2$ sur B est inclus dans $\mathfrak{G}$, car $f_1(U) \times f_2(V) \supset f(U \cap V)$ (*cf.* [1], p. 71-72).

b. Supposons, en outre, que A aussi soit un produit $A_1 \times A_2$, que $\mathfrak{F}$ soit le produit d'un filtre sur A_1 et d'un filtre sur A_2, et que $f_1(x_1, x_2)$ [resp. $f_2(x_1, x_2)$] ne dépende que de $x_1 \in A_1$ (resp. $x_2 \in A_2$). Alors $\mathfrak{G}$ coïncide avec $\mathfrak{G}_1 \times \mathfrak{G}_2$.

Résultats analogues pour les produits de plus de deux ensembles.

5. Cas d'une topologie au départ. — *a*. Revenons à la situation des nos 1 et 3, en prenant pour A un *espace topologique*, et pour $\mathfrak{F}$ le *filtre des voisinages d'un point* $a \in A$. Au lieu de « germe suivant $\mathfrak{F}$ » on parle alors de *germe au point a* ([1], p. 76); au lieu d' « équivalence suivant $\mathfrak{F}$ » on dira « équivalence au voisinage de a ».

b. Dans toute la suite de cette étude nous désignerons par X_a le germe de X en a, chaque fois que X et a désigneront respectivement une partie et un point d'un espace topologique.

De même, si Φ désigne un ensemble de parties de l'espace topologique A, l'ensemble des germes en $a \in A$ des éléments de Φ sera noté Φ_a. Ainsi, $[\mathfrak{P}(A)]_a = \mathfrak{P}(A)/R$, avec les notations du no 2.

c. Par des abus de langage analogues à ceux du no 2, les germes en a des parties fermées (resp. ouvertes) de A seront dits eux aussi *fermés* (resp. *ouverts*), et les germes en a ouverts sont les *compléments* des germes en a fermés dans le réseau booléien $\mathfrak{P}(A)/R$.

Soit $\mathfrak{P}^F(A)$ l'ensemble des parties fermées de A : c'est un *sous-ensemble réticulé*, ou *sous-treillis*, du réseau booléien $\mathfrak{P}(A)$, car il est stable pour la réunion et l'intersection (finies), mais ce n'est pas en général un réseau booléien, car il faut pour cela que les ouverts de A soient en même temps fermés. De même, $[\mathfrak{P}^F(A)]_a$ est un sous-treillis (en général non booléien) de $\mathfrak{P}(A)/R$. Tout germe non vide appartenant à ce sous-treillis inclut $\{a\}_a$.

Une partie X de l'espace topologique A est dite *localement fermée* si, pour tout $a \in X$, le germe X_a est fermé (*cf.* [1], p. 42).

d. Le germe en $a \in A$ d'une partie X est dit *connexe* si tout voisinage de a dans A inclut une partie connexe dont X_a soit le germe en a (*cf.* [1], p. 125).

Soit a un point adhérent ou non à une partie X de A; on appellera *voisinage de a dans* X toute partie V de A telle que $V \subset X$ et $V_a = X_a$. Cette notion coïncide avec la notion classique de voisinage quand a est un point de X; il n'y aura donc pas de confusion. On peut dire que X_a est connexe quand il existe des voisinages connexes de a dans X « aussi petits qu'on veut » (le germe vide en a est connexe, puisque la partie vide de A est connexe).

Soient $X \subset A$ et $Y \subset A$ telles que $X_a = Y_a$. Alors les adhérences de X et de Y dans A ont même germe en a, qu'on appellera *adhérence* de X_a. On appellera de même *intérieur* de X_a le germe commun en a des intérieurs de X et de Y.

6. Cas d'une topologie a l'arrivée. — Revenons à la situation du n° 3, en prenant cette fois, non plus pour A, mais pour B, un *espace topologique,* sur lequel on suppose en outre que le filtre $\mathfrak{G}$ engendré par $f(\mathfrak{F})$ *converge vers un point b.* C'est dire que tout voisinage V de b dans B inclut un élément de $f(\mathfrak{F})$, ou encore que $f^{-1}(V) \in \mathfrak{F}$. Supposons, en outre, que l'espace topologique B soit *séparé* ([1], p. 86) (i. e. soit un *espace de Hausdorff*) : alors b est le seul point limite du filtre $\mathfrak{G}$; et si l'intersection des éléments du filtre $\mathfrak{G}$ n'est pas vide, elle se réduit alors à $\{b\}$.

7. Cas d'une application continue. — *a.* Supposons satisfaites à la fois les conditions du n° 6 et celles du début du n° 5, i. e. : $\mathfrak{F}$ est le filtre des voisinages de $a \in A$, et $f(\mathfrak{F})$ converge vers le point b de l'espace *séparé* B.

Alors $b = f(a)$, et f est *continue* en a. Nous dirons que le filtre $\mathfrak{G}$ est le *filtre associé* à la fonction f et au point a.

b. Dans les mêmes conditions, soit F une partie de B, et soit E son image réciproque par f dans A. Le germe E_a ne dépend, f étant donnée, que de F_b; il ne change d'ailleurs pas quand f change en conservant le même germe en a.

c. Supposons, en outre, que f soit un *homéomorphisme de* A *sur* B, donc f^{-1} un homéomorphisme de B sur A. Alors les relations équivalentes $F = f(E)$, $E = f^{-1}(F)$, entre parties E de A et parties F de B, établissent une bijection de $\mathfrak{P}(A)$ sur $\mathfrak{P}(B)$ qui est un isomorphisme de treillis, et transforme $\mathfrak{F}$ [partie de $\mathfrak{P}(A)$] en le filtre $\mathfrak{G} = f(\mathfrak{F})$, qui est ici le filtre des voisinages de $b \in B$. En associant F_b à E_a, on a donc une bijection de $[\mathfrak{P}(A)]_a$ sur $[\mathfrak{P}(B)]_b$; on dira que F_b est *transformé* de E_a *par f.*

d. Soit Φ un ensemble d'homéomorphismes d'un espace séparé B sur lui-même, et soit b un point de B *invariant* par Φ, i. e. : $f(b) = b$ pour tout $f \in \Phi$. Nous dirons que le germe en b d'une partie de B est *invariant par* Φ s'il est transformé en lui-même (*cf.* c, en prenant $A = B$ et $a = b$) par tout $f \in \Phi$.

Voir nº 20 des propriétés de germes invariants par certains groupes d'homéomorphismes.

8. Application semi-continue dans une chaîne finie. — L'étude d'une application semi-continue d'un espace topologique A dans une *chaîne finie* (ensemble fini totalement ordonné), munie de la topologie discrète, nous servira plus d'une fois au cours de ce travail, et notamment dans la suite du présent chapitre. C'est pourquoi nous la plaçons ici, bien qu'elle n'ait pas grand lien avec ce qui précède.

Soit donc, pour fixer les idées, une application d d'un espace topologique A dans une chaîne finie I à n éléments ($n > 0$); on suppose vérifiées les deux conditions (α), (β), qui sont équivalentes l'une à l'autre et que voici :

(α) *en tout point de* A *la fonction* d *a un maximum local;*

(β) *la fonction* d *est semi-continue supérieurement*, I étant munie de la topologie discrète.

Le lieu des points de A où la fonction d a un *minimum* local est partout dense dans A (puisque I est finie); et ce lieu coïncide d'après (α) avec l'ouvert lieu des points *au voisinage desquels la fonction* d *est constante.*

Il existe donc dans A *un nombre fini* ($\leqq n$) *d'ouverts non vides disjoints* (connexes ou non) *dans chacun desquels la fonction* d *est constante, et dont la réunion est partout dense.*

La conclusion subsiste évidemment dans le cas d'une fonction semi-continue inférieurement (échanger les mots « maximum » et « minimum »).

SECTION II : ENSEMBLES SATURÉS DE SOUS-ESPACES.

9. Ensembles saturés et lâches de sous-espaces. — *a.* Soit B un *espace topologique.*

Soit $\mathfrak{P}(B)$ l'ensemble des parties de B. Rappelons (nº 5 b) que, pour tout $x \in B$ et pour toute partie $\mathfrak{A}$ de $\mathfrak{P}(B)$, on désigne par $\mathfrak{A}_x$ l'ensemble des germes en x des éléments de $\mathfrak{A}$. On désignera, en outre, par $\mathfrak{A}'_x$ l'ensemble des germes en x de ceux de ces éléments auxquels x appartient, i. e. l'ensemble de ceux des éléments de $\mathfrak{A}_x$ qui incluent $\{x\}_x$. On posera

$$G(\mathfrak{A}) = \bigcup_{x \in B} \mathfrak{A}_x, \qquad G'(\mathfrak{A}) = \bigcup_{x \in B} \mathfrak{A}'_x, \qquad S(\mathfrak{A}) = \bigcup_{E \in \mathfrak{A}} E \quad (\textit{support} \text{ de } \mathfrak{A}).$$

b. On dira d'un ensemble *non vide* $\mathcal{C}$ de *parties non vides de* B qu'il est *saturé* si (et seulement si) il satisfait à la condition que voici :

Condition de saturation : Toute partie non vide E *de* B *telle que* $E_x \in \mathcal{C}'_x$ *pour tout* $x \in E$ *appartient à* $\mathcal{C}$.

Tout ensemble non vide $\mathcal{A}$ de parties non vides de B est inclus dans un ensemble saturé minimal $\mathcal{C}$, dont les éléments sont les parties non vides E de B telles que $E_x \in \mathcal{A}'_x$ pour tout $x \in E$. L'opération qui donne $\mathcal{C}$ à partir de $\mathcal{A}$ sera appelée *saturation.* La réunion de deux éléments de $\mathcal{A}$, même disjoints, n'appartient pas nécessairement à $\mathcal{C}$; toutefois il en est ainsi chaque fois que chacun des deux est extérieur à l'autre.

La condition de saturation peut encore s'énoncer : $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}$, pour tout ensemble $\mathcal{A}$ de parties non vides de B tel que $G'(\mathcal{A}) \subset G'(\mathcal{C})$.

Soit $\mathcal{A}$ un ensemble non vide de parties non vides de B, et soit $\mathcal{C}$ l'ensemble obtenu par saturation de $\mathcal{A}$. On peut encore définir $\mathcal{C}$ comme le plus grand ensemble de parties non vides de B tel que $G'(\mathcal{C}) = G'(\mathcal{A})$ [ou même $G'(\mathcal{C}) \subset G'(\mathcal{A})$]. On a, en particulier, $S(\mathcal{C}) = S(\mathcal{A})$, lieu des x, où $\mathcal{A}'_x$ n'est pas vide. Et, *pour tout* $E \in \mathcal{A}$, *toute partie non vide de* E *ouverte dans* E *appartient à* $\mathcal{C}$; il en est ainsi notamment quand $\mathcal{A} = \mathcal{C}$.

c. Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}^\star$ deux ensembles saturés de parties (non vides) de B. Pour que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}^\star$ soient disjoints, il faut et il suffit que $G'(\mathcal{C})$ et $G'(\mathcal{C}^\star)$ soient disjoints (i. e. : n'aient aucun élément commun); ou encore que $G(\mathcal{C})$ et $G(\mathcal{C}^\star)$ n'aient aucun élément commun non vide. Pour qu'il existe $E \in \mathcal{C}$ et $E^\star \in \mathcal{C}^\star$ tels que $E \subset E^\star$, il faut et il suffit qu'il existe $x \in B$, $F \subset B$ et $F^\star \subset B$ tels que F_x soit non vide, $F_x \in \mathcal{C}_x$, $F^\star_x \in \mathcal{C}^\star_x$ et $F_x \subset F^\star_x$; ou encore tels que $F_x \in \mathcal{C}'_x$, $F^\star_x \in \mathcal{C}^{\star\prime}_x$ et $F_x \subset F^\star_x$.

d. Définition. — On dit qu'*un ensemble saturé* $\mathcal{C}$ de parties (non vides) de B *est lâche si* (et seulement si), *quels que soient* $x \in B$ *et deux éléments distincts de* $\mathcal{C}'_x$, *l'intersection de ces deux éléments n'inclut aucun élément non vide de* $\mathcal{C}_x$.

En particulier, si $\mathcal{C}$ est lâche, de deux éléments de $\mathcal{C}'_x$ distincts, aucun n'inclut l'autre; si $E \in \mathcal{C}$, $F \in \mathcal{C}$ et $E \subset F$, E est alors ouvert dans F.

Entre ensembles saturés lâches $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}^\star$ de parties (non vides) de B, *on notera* $\mathcal{C} \prec \mathcal{C}^\star$ *la relation : il existe* $E \in \mathcal{C}$ *et* $E^\star \in \mathcal{C}^\star$ *tels que* $E \subset E^\star$.

10. Ensembles ordonnés d'ensembles saturés lâches. — *a.* Soit Γ un ensemble dont les éléments sont des ensembles saturés lâches de parties de B. On dira que Γ est *ordonnable* si (et seulement si) toute suite finie d'éléments de Γ telle que $\mathcal{C} \prec \mathcal{C}^\star$ quels que soient deux termes consécutifs $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}^\star$ de la suite, et dont les termes extrêmes sont égaux, a tous ses termes égaux.

b. Soit Γ un ensemble ordonnable non vide de parties saturées lâches de $\mathfrak{T}(\mathrm{B})$. On a alors dans Γ une *relation d'ordre*, que nous noterons $\mathcal{C} \leqq \mathcal{C}^\star$, définie comme suit : $\mathcal{C}$ *est le premier terme et* $\mathcal{C}^\star$ *le dernier terme d'une suite finie d'éléments de* Γ, *dont deux termes consécutifs quelconques*, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}^\star$ *satisfont à la relation* $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{A}^\star$.

Notons qu'il ne s'agit pas là, en général, d'un ordre total : autrement dit, deux éléments de Γ peuvent être incomparables.

L'ensemble Γ, muni de cette relation d'ordre, sera dit *simplement ordonné* (on dira « ordonné » au lieu de « simplement ordonné » s'il n'y a pas danger de confusion). $\mathcal{C} \in \Gamma$ *et* $\mathcal{C}^\star \in \Gamma$ *sont disjoints s'ils ne sont pas confondus, qu'ils soient comparables ou non.*

c. Tout ouvert non vide de B appartient à $\mathcal{C}$, ensemble saturé de parties de B, dès que $\mathrm{B} \in \mathcal{C}$. *Mais* B *appartient à une et une seule partie saturée lâche de* $\mathfrak{T}(\mathrm{B})$, *qui est l'ensemble* $\mathcal{B}$ *des ouverts non vides de* B. Dans tout ensemble simplement ordonné Γ de parties saturées lâches de $\mathfrak{T}(\mathrm{B})$, dont l'une est $\mathcal{B}$, on a $\mathcal{C} \leqq \mathcal{B}$ pour tout $\mathcal{C} \in \Gamma$. On a $\mathcal{B}'_x = \{\mathrm{B}_x\}$ pour tout $x \in \mathrm{B}$.

d. Toute partie discrète non vide de B appartient à $\mathcal{C}$, ensemble saturé de parties de B, dès que toute partie de B qui a un point et un seul appartient à $\mathcal{C}$. *Il existe une et une seule partie saturée lâche de* $\mathfrak{T}(\mathrm{B})$ *à laquelle* $\{x\}$ *appartienne pour tout* $x \in \mathrm{B}$: *c'est l'ensemble* $\mathcal{O}$ *des parties discrètes non vides de* B. On a $\mathcal{O}'_x = \{\{x\}_x\}$ pour tout $x \in \mathrm{B}$. Dans tout ensemble simplement ordonné Γ de parties saturées lâches de $\mathfrak{T}(\mathrm{B})$, dont l'une est $\mathcal{O}$, on a $\mathcal{O} \leqq \mathcal{C}$ pour tout $\mathcal{C} \in \Gamma$.

11. Ensembles cohérents d'ensembles saturés lâches. — *a.* Pour tout ensemble Γ de parties de $\mathfrak{T}(\mathrm{B})$, on posera $\mathfrak{S}(\Gamma) = \bigcup_{\mathcal{C} \in \Gamma} \mathcal{C}$. On appellera $\mathcal{J}(\Gamma)$ l'ensemble de celles des parties non vides de B qui appartiennent à $\mathfrak{S}(\Gamma)$ ou s'obtiennent par intersection de plusieurs éléments de $\mathfrak{S}(\Gamma)$, en nombre fini. Pour tout $x \in \mathrm{B}$, les éléments de $[\mathcal{J}(\Gamma)]'_x$ sont donc les intersections d'un ou plusieurs éléments de $\bigcup_{\mathcal{C} \in \Gamma} \mathcal{C}'_x$ en nombre fini.

On a un sous-demi-treillis de $\mathfrak{T}(\mathrm{B})$, relatif à l'opération intersection, quand on adjoint aux éléments de $\mathcal{J}(\Gamma)$ la partie vide de B.

Partons d'un ensemble non vide Γ de parties saturées de $\mathfrak{T}(\mathrm{B})$. Alors $\mathfrak{S}(\Gamma)$ est un ensemble non vide de parties non vides de B. Nous désignerons par $\mathfrak{J}(\Gamma)$ la partie de $\mathfrak{T}(\mathrm{B})$ obtenue par saturation de $\mathcal{J}(\Gamma)$. *Toute partie non vide de* B *intersection de deux éléments de* $\mathfrak{J}(\Gamma)$ *appartient elle aussi à* $\mathfrak{J}(\Gamma)$: $\mathfrak{J}(\Gamma) \cup \{\emptyset\}$ est un sous-demi-treillis de $\mathfrak{T}(\mathrm{B})$ (pour l'intersection).

b. Soit Γ un ensemble simplement ordonné de parties saturées lâches de $\mathfrak{T}(B)$. Nous dirons qu'il est *cohérent* si (et seulement si), *pour tout* $x \in B$ *et tous* $\mathcal{C} \in \Gamma$ *et* $\mathcal{C}^\star \in \Gamma$ *tels que* $\mathcal{C} < \mathcal{C}^\star$, *chaque élément de* $\mathcal{C}_x^{\star\prime}$ *inclut tout élément de* $\mathcal{C}'_x$ *tel que l'intersection de ces deux éléments inclue un élément non vide de* $\mathcal{C}_x$.

D'après la définition d'une partie saturée lâche de $\mathfrak{T}(B)$, on peut, dans cet énoncé, remplacer « tels que $\mathcal{C} < \mathcal{C}^\star$ » par « tels que $\mathcal{C} \leqq \mathcal{C}^\star$ », puis supprimer totalement cette condition, qui résulte de la suite de l'énoncé.

c. Soit Γ un ensemble ordonné *cohérent* de parties saturées lâches de $\mathfrak{T}(B)$. Soit $E \in \mathcal{J}(\Gamma)$, et soit $x \in E$. Soient $\mathcal{C} \in \Gamma$, $\mathcal{C}^\star \in \Gamma$, $F \in \mathcal{C}$, $F^\star \in \mathcal{C}^\star$ tels que $F_x \subset E_x \subset F_x^\star$, F_x non vide; alors $\mathcal{C} \leqq \mathcal{C}^\star$. Et si $\mathcal{C}^\star = \mathcal{C}$, tout élément de $[\mathfrak{S}(\Gamma)]_x$ qui inclut E_x appartient à $[\mathfrak{S}(\Gamma)]'_x$ et inclut F_x, donc inclut $F_x^\star$ (d'après la définition d'un ensemble cohérent); alors $E_x = F_x^\star$, puisque $E_x \in [\mathcal{J}(\Gamma)]'_x$.

Donc, aucun élément de $[\mathcal{J}(\Gamma)]'_x$ *strictement inclus dans un élément de* $\mathcal{C}'_x$ ($\mathcal{C}$ *désignant un élément de* Γ *et* x *un point de* B) *n'inclut d'élément non vide de* $\mathcal{C}_x$ (*ni plus généralement de* $\mathcal{C}_x^\star$ *pour* $\mathcal{C}^\star \geqq \mathcal{C}$).

12. Condition des chaînes descendantes. — *a.* Replaçons-nous dans les conditions du n° 11 *a*. Chaque élément de $\mathcal{J}(\Gamma)$ est intersection finie d'éléments de $\bigcup_{\mathcal{C} \in \Gamma} \mathcal{J}(\{\mathcal{C}\})$, relatifs à des éléments de Γ distincts.

Soit Γ un ensemble non vide de parties saturées de $\mathfrak{T}(B)$. Toute partie non vide de B intersection finie d'éléments de $\bigcup_{\mathcal{C} \in \Gamma} \mathcal{J}(\{\mathcal{C}\})$ appartient à $\mathcal{J}(\Gamma)$, qu'on obtient en saturant l'ensemble de ces intersections.

b. Rappelons (*cf.* Bourbaki [6], p. 16 et 97), pour un *ensemble ordonné* $\mathfrak{A}$, l'équivalence des trois conditions ci-après (α), (β), (γ) :

(α) *Toute chaîne dans* $\mathfrak{A}$ (i. e. : toute partie non vide de $\mathfrak{A}$ *totalement ordonnée* par l'ordre induit) *a un plus petit élément;*

(β) *Toute suite décroissante* d'éléments de $\mathfrak{A}$ (résultant d'une application décroissante dans $\mathfrak{A}$ d'un ensemble non vide d'entiers positifs) *a un plus petit élément;*

(γ) *Toute partie non vide de* $\mathfrak{A}$ *a au moins un élément minimal.* La condition (α) ou (β) est appelée *condition des chaînes descendantes*, et la condition (γ) *condition minimale.*

c. Pour un *demi-treillis* $\mathfrak{A}$ relatif à l'opération *intersection* [i. e. : pour tous $X \in \mathfrak{A}$ et $Y \in \mathfrak{A}$ existe $\inf(X, Y) = X \cap Y$, plus grand minorant commun dans $\mathfrak{A}$ de X et Y], rappelons l'équivalence de la condition des chaînes descendantes avec la condition (δ) que voici :

(δ) *Toute partie non vide de* $\mathfrak{A}$ *qui est stable pour l'intersection* (binaire), *c'est-à-dire qui est un sous-demi-treillis de* $\mathfrak{A}$, *a un plus petit élément.*

Rappelons quelques *conséquences* de la condition (δ) :

Le demi-treillis $\mathcal{A}$ est *complet*, i. e. : *toute partie non vide de* $\mathcal{A}$ *admet* dans $\mathcal{A}$ *une borne inférieure* (ou *intersection :* plus grand minorant commun des éléments de cette partie). En outre, de toute partie non vide on peut extraire une partie *finie* non vide ayant même intersection.

Du fait que le demi-treillis $\mathcal{A}$ est complet résulte que *toute partie majorée de* $\mathcal{A}$ *admet dans* $\mathcal{A}$ *une borne supérieure* (plus petit majorant), à ne pas confondre avec la borne supérieure éventuelle (qui lui est égale ou strictement inférieure) de la même partie dans un demi-treillis dont $\mathcal{A}$ serait un sous-demi-treillis (*cf.* [2], p. 171 et 237).

d. Soit, pour un ensemble fini non vide Γ *de parties saturées de* $\mathfrak{T}(\mathrm{B})$, *la condition que voici : le demi-treillis* $[\mathcal{J}(\Gamma)]'_x$, pour tout $x \in \mathrm{S}[\mathfrak{S}(\Gamma)]$, *satisfait à la condition des chaînes descendantes.*

On dira d'un ensemble non vide Γ de parties saturées de $\mathfrak{T}(\mathrm{B})$ qu'il est *de caractère fini* s'il est fini et satisfait à la condition qui vient d'être énoncée (et seulement dans ce cas). Il faut et suffit pour cela que Γ soit fini, et que, pour tout $\mathcal{C} \in \Gamma$, $\{\mathcal{C}\}$ soit de caractère fini.

e. Soit Γ *un ensemble non vide de parties saturées de* $\mathfrak{T}(\mathrm{B})$, *de caractère fini; soit* $x \in \mathrm{B}$, et *soit* $\mathfrak{G}$ *un filtre sur* B. Alors, *l'ensemble de germes* $\mathfrak{G}_x \cap [\mathcal{J}(\Gamma)]'_x$ *a un plus petit élément s'il est non vide;* c'est toujours le cas si $\mathcal{B} \in \Gamma$.

f. Rappelons encore une autre conséquence de la condition des chaînes descendantes pour un demi-treillis $\mathcal{A}$ relatif à l'intersection, ou plus généralement pour un *ensemble ordonné* $\mathcal{A}$.

Disons qu'un élément $\mathrm{X} \in \mathcal{A}$ est *irréductible* s'il n'existe pas dans $\mathcal{A}$ deux éléments distincts de X et admettant X pour borne supérieure. Alors *tout élément de* $\mathcal{A}$ *est borne supérieure d'une famille finie* (non vide) *d'éléments irréductibles.* (Car sinon il existerait un élément minimal de l'ensemble des éléments de $\mathcal{A}$ qui n'auraient pas cette propriété, d'après la condition minimale, ce qui est impossible.)

13. Sous-espaces distingués. — *a.* Soit Γ un ensemble simplement ordonné de parties saturées lâches de $\mathfrak{T}(\mathrm{B})$. Pour toute partie E de B, et tout $\mathcal{C} \in \Gamma$, on désignera par $\mathrm{E}^{\mathcal{C}}$ le lieu des points $x \in \mathrm{B}$ tels que $\mathrm{E}_x \in \mathcal{C}'_x$: c'est une partie de E ouverte dans E, et, si elle n'est pas vide, la plus grande partie de E qui soit ouverte dans E et appartienne à $\mathcal{C}$. Les $\mathrm{E}^{\mathcal{C}}$ relatifs aux différents éléments $\mathcal{C}$ de Γ sont des ouverts disjoints du sous-espace E; à tout $x \in \mathrm{E}$ est associée une partie Γ_{E}^{x} de Γ (E étant donné), dont les éléments sont les $\mathcal{C}$ tels que x adhère à $\mathrm{E}^{\mathcal{C}}$; pour que la réunion des $\mathrm{E}^{\mathcal{C}}$ soit partout dense dans E, il faut et suffit que Γ_{E}^{x} ne soit vide pour

aucun $x \in E$; pour que cette réunion soit E, il faut, mais ne suffit pas, que, pour tout $x \in E$, Γ_E^x ait un élément et un seul.

b. Soient x un point de B, E un sous-espace de B; on dira d'un élément de $[\mathfrak{T}(B)]_x$ qu'il est *ouvert dans* E_x s'il est le germe en x d'un ouvert de E (et par conséquent d'un ouvert de $E^\star$ si $E^\star_x = E_x$); on dira qu'il est *fermé dans* E_x s'il est le germe en x d'un fermé de E (ou encore : le complément dans E_x d'un germe ouvert dans E_x). Ce sont là des relations d'ordre (qui impliquent l'inclusion).

Soit encore Γ un ensemble simplement ordonné de parties saturées lâches de $\mathfrak{T}(B)$, et soit E une partie non vide de B. Soient $x \in E$, $\mathcal{C} \in \Gamma$; dire que $\mathcal{C} \in \Gamma_E^x$ équivaut à dire que $\mathcal{C}_x$ a un élément non vide ouvert dans E_x (ce qui implique : inclus dans E_x).

c. Définition d'un germe distingué. — Pour tout $\mathcal{C} \in \Gamma$ et tout $X \in \mathcal{C}$, posons $d(X) = \mathcal{C}$. Nous définissons ainsi une application d de $\mathfrak{S}(\Gamma)$ (n° 11) sur Γ.

Par extension, pour tout point x adhérent à $X \in \mathcal{C}$ (avec $\mathcal{C} \in \Gamma$), nous poserons aussi $d(X_x) = \mathcal{C}$, de sorte que l'ensemble où d est définie comprend maintenant, outre $\mathfrak{S}(\Gamma)$, l'ensemble des germes non vides des éléments de $\mathfrak{S}(\Gamma)$.

Soit $E \subset B$, et soit $x \in E$. Nous dirons que le germe E_x est un *germe distingué* (relativement à Γ) si (et seulement si) il existe *un sous-ensemble ordonné fini* I *de* Γ, *et une injection* φ *de* I *dans* $[\mathfrak{S}(\Gamma)]_x$, satisfaisant aux conditions que voici :

(1) $\emptyset_x \notin \varphi(I)$;

(2) *les images par* φ *de deux éléments de* I *distincts quelconques sont des germes disjoints;*

(3) $d \circ \varphi$ *est l'identité dans* I;

(4) $E_x = \bigcup_{\xi \in I} \varphi(\xi)$;

(5) $\forall \eta \in I$, *le germe* $\psi(\eta) = \bigcup_{\xi \leq \eta} \varphi(\xi)$ *est fermé dans* E_x.

d. Soit toujours le germe distingué E_x; conservons les mêmes notations. Les conditions (4) et (5) entraînent : *si* $\xi \leq \eta$ $(\in I)$, *alors* $\psi(\xi)$ *est fermé dans* $\psi(\eta)$.

Pour tout $\eta \in I$, on a $\varphi(\eta) \subset \psi(\eta)$, et

$$\psi(\eta) - \varphi(\eta) = \bigcup_{\xi < \eta} \varphi(\xi) = \bigcup_{\xi < \eta} \psi(\xi).$$

Puisque I est fini, $\psi(\eta) - \varphi(\eta)$ est donc réunion finie de germes fermés dans $\psi(\eta)$: c'est donc un germe fermé dans $\psi(\eta)$, et dans E_x. Le germe $\varphi(\eta)$ est donc ouvert dans $\psi(\eta)$, et plus généralement dans $\bigcup_{\xi \not> \eta} \varphi(\xi)$.

En particulier, *si* α *est un élément maximal de* I, *le germe* $\varphi(\alpha)$ *est ouvert dans* E_x.

Pour tout $\xi \in I$, *le germe* $\psi(\xi)$ *est distingué*, ainsi que (s'il n'est pas vide) $\psi(\xi) - \varphi(\xi)$.

(Il ne faut pas croire que E_x détermine toujours I, ni que E_x et I déterminent toujours φ : *cf.* chapitre II, section IV.)

L'ensemble ordonné fini I admet (au moins) un élément minimal ω. Le germe $\varphi(\omega) = \psi(\omega)$ est fermé dans E_x et appartient à $[\mathfrak{S}(\Gamma)]'_x$ (n° 9 *a*). Pour tout $\xi \in I$ autre que ω, $\varphi(\xi)$ est disjoint de $\varphi(\omega)$, d'après la condition (2), et n'est donc pas fermé dans E_x; l'élément ξ n'est donc pas minimal dans I, et ω est *le seul élément minimal*, donc *le plus petit élément* de I. Le germe $\varphi(\omega)$ est inclus et fermé dans $\psi(\xi)$ pour tout $\xi \in I$.

e. Tout élément de $\mathcal{C}'_x$ (si $\mathcal{C} \in \Gamma$) *est distingué* (on peut, si l'on veut, prendre pour I le sous-ensemble $\{\mathcal{C}\}$ de Γ). Quel que soit le choix possible (pour un tel germe) de I, *le seul élément maximal de* I *est alors* $\mathcal{C}$, qui est donc dans ce cas *le plus grand élément de* I.

f. Partons d'un germe distingué E_x quelconque, et conservons les notations de *c*. Nous allons montrer que, *pour tout* $y \in E$ *assez voisin de* x, *le germe* E_y *est distingué.*

Nous pouvons, en effet, puisqu'il s'agit d'une propriété locale, et puisque I est fini, supposer (en remplaçant au besoin E par un voisinage ouvert assez petit de x dans E) qu'on a une partition

$$E = \bigcup_{\xi \in I} F(\xi), \qquad \text{avec} \quad F(\xi) \in \mathfrak{S}(\Gamma),$$

telle que $[F(\xi)]_x = \varphi(\xi)$ et que $\bigcup_{\xi \leq \eta} F(\xi)$ soit, pour tout $\eta \in I$, une partie de E fermée dans E.

Soit alors $y \in F(\eta)$. Au voisinage de y, l'ensemble E équivaut à $\bigcup_{\xi \in J} F(\xi)$, si J désigne l'ensemble des ξ (tous $\geqq \eta$) tels que y adhère à $F(\xi)$. Alors *l'application* $\xi \to [F(\xi)]_y$ *de* J *dans* $[\mathfrak{S}(\Gamma)]_y$ *satisfait bien aux conditions de c pour le germe* E_y.

C. Q. F. D.

g. Définition d'un sous-espace distingué. — Nous dirons qu'un *sous-espace* E de B est *distingué* (relativement à Γ) si (et seulement si), *pour tout* $x \in E$, *le germe* E_x *est distingué.*

D'après cette définition, *le sous-espace vide est distingué.*

D'après *f*, tout germe distingué est le germe d'un sous-espace distingué E en un point de E.

Soit $\mathcal{D}(\Gamma)$ *l'ensemble des sous-espaces distingués non vides : c'est un ensemble saturé*, qui inclut $\mathfrak{S}(\Gamma)$.

h. Reprenons les notations de *f*. *Soient* $\mathcal{C}\in\Gamma$ *et* $D\in\mathcal{C}$, *tels que* $D_x\subset E_x$, D_x *non vide;* soit H l'ensemble des $\xi\in I$ tels que $\varphi(\xi)\cap D_x$ ne soit pas vide. Nous supposerons E assez petit pour que $D\subset\bigcup_{\xi\in H}F(\xi)$.

Soit alors η un élément maximal de H, et prenons $y\in D\cap F(\eta)$. Alors (*cf. f*) $H\cap J=\{\eta\}$, et

$$D_y\subset[F(\eta)]_y,\qquad \text{d'où}\qquad \mathcal{C}\leqq\eta;$$

donc *il existe dans* I *au moins un majorant* η *de* $\mathcal{C}$ *tel que* $D_x\cap\varphi(\eta)$ *soit non vide et ouvert dans* D_x (on aurait pu aussi raisonner directement sur les germes en x).

Supposons, en outre, que D_x *soit ouvert dans* E_x. *Alors* $\mathcal{C}=\eta\in I$, et D_x *est ouvert dans* $\psi(\eta)$. Pour tout $z\in D$ assez voisin de x, le germe distingué $D_z=E_z$ et la comparaison des résultats de *e* et *f* montre que z adhère à $F(\eta)$. Il en résulte que l'adhérence du germe $D_x\cap\varphi(\eta)$, lequel est ouvert dans E_x, inclut D_x; en particulier, D_x *est inclus dans l'adhérence de* $\varphi(\eta)$.

i. De là résulte, en employant les notations de *a* et *b*, que la partie Γ^x_E de Γ est incluse dans I; elle est donc *finie.*

D'autre part, on a vu en *d* que, pour tout élément maximal $\alpha\in I$, le germe $\varphi(\alpha)$ est ouvert dans E_x; on a donc $\alpha\in\Gamma^x_E$. Donc (puisque I est fini) Γ^x_E n'est pas vide.

Ce dernier résultat, pour un sous-espace distingué E, entraîne (*cf. a*) que la réunion $\bigcup_{\mathcal{C}\in\Gamma}E^{\mathcal{C}}$ est partout dense dans E.

(Remarquons que, pour toute partie E de l'espace, et tout point $a\in E$, on a $\Gamma^x_E\subset\Gamma^a_E$ pour tout $x\in E$ assez voisin de a.)

14. Germes dimensionnables. — *a.* Dans les conditions et avec les notations du n° 13 *c*, nous dirons que le *germe distingué* E_x est *dimensionnable* si (et seulement si) il existe I et φ satisfaisant, non seulement aux cinq conditions (1) à (5) alors écrites, mais encore à :

(6) *l'ensemble* I *a un plus grand élément.*

b. Soient : E_x un germe dimensionnable; I et φ satisfaisant aux six conditions (1) à (6); α le plus grand élément de I.

Alors α ne dépend que de E_x (et non du choix de I et φ), puisque (n° 13 *h*) c'est le plus grand élément $\mathcal{C}$ de Γ tel que $\mathcal{C}_x$ ait un élément non vide inclus dans E_x.

c. Quand $E_x \in [\mathfrak{S}(\Gamma)]'_x$, le germe distingué E_x (n° 13 *e*) est dimensionnable, et $d(E_x) = \alpha$. Nous poserons cette égalité comme *définition de* $d(E_x)$ *pour tout germe dimensionnable* E_x.

[L'ensemble où l'application d (*cf.* n° 13 *c*) est maintenant définie est donc la réunion de trois ensembles plus ou moins hétérogènes, dont les deux derniers, disjoints du premier, ont toutefois comme partie commune la réunion des $\mathcal{C}'_x$ pour les $\mathcal{C} \in \Gamma$ et les $x \in B$.]

Si F_x est un germe dimensionnable inclus dans le germe dimensionnable E_x, on a $d(F_x) \leqq d(E_x)$.

d. On peut compléter la remarque de *b* comme suit : soient I et φ satisfaisant, pour le germe *dimensionnable* E_x, aux conditions (1) à (5) du n° 13 *c*. Alors la condition (6) du n° 14 *a* est automatiquement satisfaite, d'après la propriété, rappelée en *b*, du plus grand élément α.

e. Soient, pour le germe dimensionnable E_x, le sous-ensemble $I^\star \subset \Gamma$ et l'application $\varphi^\star$, satisfaisant aux mêmes conditions et définitions que I et φ; soit encore α le plus grand élément de I, et donc aussi de $I^\star$, d'après *b*. Les deux germes $\varphi(\alpha)$ et $\varphi^\star(\alpha)$ sont ouverts dans E_x; d'après le résultat (*in fine*) du n° 13 *h*, chacun d'eux est inclus dans l'adhérence de l'autre. *Ils ont* donc *même adhérence, qui est* encore *l'adhérence de leur réunion, et* aussi *celle de leur intersection* puisqu'il s'agit de germes ouverts dans E_x.

f. Désignons par $\mathcal{E}(\Gamma)$ *l'ensemble des sous-espaces distingués non vides* E *tels que,* $\forall x \in E$, *le germe distingué* E_x *soit dimensionnable.*

$\mathcal{E}(\Gamma)$ est une partie saturée de $\mathcal{D}(\Gamma)$, incluant $\mathfrak{S}(\Gamma)$. Ces trois ensembles ont même support (n° 9) dans B. [On a $\mathcal{E}(\Gamma) = \mathcal{D}(\Gamma)$ si Γ est totalement ordonné.]

Soit $E \in \mathcal{E}(\Gamma)$. Pour tout $x \in E$, l'ensemble Γ^x_E (n° 13 *a*) a un élément maximal $d(E_x)$ (*cf. c*). On a $d(E_x) \leqq d(E_a)$ pour tout $x \in E$ assez voisin d'un point donné $a \in E$.

Pour tout $E \in \mathcal{E}(\Gamma)$ et tout $x \in E$, le germe dimensionnable E_x satisfait à la condition (6′) que voici, plus forte que (6), I et φ étant choisis :

(6′) *pour tout* y *assez voisin de* x *dans* E, *le sous-ensemble* J *de* I défini au n° 13 *f a un plus grand élément.*

Réciproquement, soit E_x un germe distingué; si la condition (6′) est satisfaite (I et φ étant choisis), E_y est un germe dimensionnable pour tout y assez voisin de x dans E, donc E_x est le germe en x d'un sous-espace appartenant à $\mathcal{E}(\Gamma)$.

g. Nous dirons d'une partie *saturée* $\mathcal{A}$ de $\mathcal{E}(\Gamma)$, incluant $\mathfrak{S}(\Gamma)$, qu'elle est *autonome*, si (et seulement si), pour tout $E \in \mathcal{A}$ et tout $x \in E$ on peut choisir I et φ (*cf. a*), satisfaisant aux conditions (1), (2), (3), (4), (5) et (6), de façon qu'en outre, $\forall \xi \in I$, *on ait* $\psi(\xi) \in \mathcal{A}'_x$.

Pour qu'une partie saturée $\mathcal{A}$ de $\mathfrak{P}(B)$ soit une partie autonome de $\mathcal{E}(\Gamma)$, la condition (A) que voici est *nécessaire :*

(A) *Il existe une application* d^* *de* $G'(\mathcal{A})$ (n° 9) *dans* Γ, *telle que, pour tout* $E \in \mathcal{A}$ *et tout* $x \in E$, *le germe* E_x *soit réunion disjointe d'un germe non vide d'élément de* $d^*(E_x)$ *et d'une réunion finie* (*vide ou non*) *d'éléments de* $\mathcal{A}'_x$ *fermés dans* E_x, *et dont les images par* d^* *sont* $< d^*(E_x)$ *et deux à deux incomparables.*

SECTION III : STRUCTURES ANALYTICOÏDES.

15. Axiomes d'une structure analyticoïde. — *a. Soient :* B *un espace topologique;* Γ *un ensemble simplement ordonné de parties saturées lâches de* $\mathfrak{P}(B)$; $\mathcal{A}$ *une partie saturée de* $\mathfrak{P}(B)$, *incluant* $\mathfrak{S}(\Gamma)$. *Nous dirons que* Γ *et* $\mathcal{A}$ *déterminent sur* B *une structure analyticoïde*, $(B, \Gamma, \mathcal{A})$, *si* (et seulement si) *sont* en outre *vérifiés les six axiomes* que voici :

Axiome 1. — *L'ensemble* $\mathcal{B}$ *des ouverts non vides de* B *appartient à* Γ.

Axiome 2. — *L'ensemble* $\mathcal{O}$ *des parties discrètes non vides de* B *appartient à* Γ.

Axiome 3. — *La partie* $\mathcal{A} \cup \{\emptyset\}$ *de* $\mathfrak{P}(B)$ *est stable pour l'intersection* (binaire).

Axiome 4. — *Pour tout* $x \in B$, *l'ensemble ordonné* $\mathcal{A}'_x$ *vérifie la condition minimale.*

Axiome 5. — $\mathcal{A}$ *est une partie autonome de* $\mathcal{E}(\Gamma)$ (n° 14 *g*).

Axiome 6. — *Pour tout* $x \in B$ *et tout* $\mathcal{C} \in \Gamma$, *aucun élément de* $\mathcal{A}'_x$ *ne peut à la fois inclure un élément non vide de* $\mathcal{C}_x$ *et être strictement inclus dans un autre élément de* $\mathcal{C}_x$.

Les éléments de $G'(\mathcal{A})$ (n° 9) seront appelés *germes analyticoïdes*.

b. Les axiomes 1 et 2 ne font pas intervenir $\mathcal{A}$, mais seulement Γ. Les suivants font intervenir $\mathcal{A}$ avec Γ. Les axiomes 3 et 4 ne font intervenir Γ qu'implicitement, par l'hypothèse préliminaire $\mathcal{A} \supset \mathfrak{S}(\Gamma)$; cela suffit pour que Γ soit ainsi assujetti à certaines conditions, l'axiome 3 entraînant $\mathcal{A} \supset \mathcal{J}(\Gamma)$, et l'axiome 4 impliquant alors :

Axiome 4 *bis*. — $\forall x \in B$, *l'ensemble ordonné* $[\mathcal{J}(\Gamma)]'_x$ *vérifie la condition minimale.*

L'axiome 5 et l'axiome 6 impliquent de même respectivement (avec 3) :

AXIOME 5 *bis*. — $\mathcal{J}(\Gamma) \subset \mathcal{E}(\Gamma)$.

AXIOME 6 *bis*. — *L'ensemble ordonné* Γ *est cohérent* (n° 11).

Nous laissons ouverte la question des conditions supplémentaires à imposer à Γ pour qu'il existe $\mathcal{A}$ saturé, incluant $\mathfrak{S}(\Gamma)$ et satisfaisant aux axiomes 3, 4, 5, 6.

c. L'axiome 5 implique la condition (A) (n° 14 *g*).

Réciproquement, la condition (A) et l'axiome 4 impliquent pour tout $E_x \in \mathcal{A}'_x$ l'existence de I (fini) et φ satisfaisant aux conditions (1), (3), (4), (5) du n° 13 *c*, à la condition déduite de (2) en ajoutant « comparables » après « distincts », à la condition (6) du n° 14 *a* et à la condition $\psi(\xi) \in \mathcal{A}'_x$ pour tout $\xi \in I$. *Dans le cas où* Γ *est totalement ordonné*, l'axiome 5 résulte donc de la condition (A) et de l'axiome 4; *on peut* donc dans ce cas, dans la liste des axiomes 1 à 6, *remplacer l'axiome* 5 *par la condition à laquelle se réduit alors* (A) :

AXIOME 5_1. — *Il existe une application* $d^\star$ *de* $G'(\mathcal{A})$ *dans* Γ, *telle que, pour tout* $E \in \mathcal{A}$ *et tout* $x \in E$, *le germe* E_x *soit un germe non vide d'élément de* $d^\star(E_x)$, *ou la réunion disjointe d'un tel germe et d'un élément de* $\mathcal{A}'_x$ *fermé dans* E_x, *et dont l'image par* $d^\star$ *est strictement inférieure à* $d^\star(E_x)$.

d. L'énoncé de l'axiome 6 ne suppose pas que Γ soit ordonné, ni que la partie saturée $\mathcal{C}$ de $\mathfrak{P}(B)$ soit lâche; le fait que $\mathcal{C}$ est lâche résulte au contraire, sans qu'il soit besoin de le supposer *a priori*, des axiomes 3 et 6 et de l'hypothèse $\mathcal{A} \supset \mathcal{C}$.

16. PRODUIT DE DEUX STRUCTURES ANALYTICOÏDES. — Soient $(B_1, \Gamma_1, \mathcal{A}_1)$ et $(B_2, \Gamma_2, \mathcal{A}_2)$ deux structures analyticoïdes.

Posons $B = B_1 \times B_2$. Pour tout $x = (x_1, x_2) \in B$, on a

$$[\mathfrak{P}(B_1)]_{x_1} \times [\mathfrak{P}(B_2)]_{x_2} = [\mathfrak{P}(B_1) \times \mathfrak{P}(B_2)]_x \subset [\mathfrak{P}(B)]_x.$$

Soit $\mathcal{A}$ la partie de $\mathfrak{P}(B)$ obtenue par *saturation* de $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$. On a

$$\mathcal{A}'_x = (\mathcal{A}_1)'_{x_1} \times (\mathcal{A}_2)'_{x_2}.$$

De même, à tout $\mathcal{C}_1 \in \Gamma_1$ et tout $\mathcal{C}_2 \in \Gamma_2$ associons la partie $\mathcal{C}$ de $\mathfrak{P}(B)$ obtenue par saturation de $\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$. On a

$$\mathcal{C}'_x = (\mathcal{C}_1)'_{x_1} \times (\mathcal{C}_2)'_{x_2} \subset \mathcal{A}'_x, \qquad \text{d'où} \qquad \mathcal{C} \subset \mathcal{A}.$$

L'application ainsi définie de $\Gamma_1 \times \Gamma_2$ dans $\mathfrak{P}[\mathfrak{P}(B)]$ est injective, et l'ensemble Γ des parties *saturées* de $\mathfrak{P}(B)$ ainsi obtenues peut être assimilé au produit $\Gamma_1 \times \Gamma_2$, et muni de l'*ordre produit* des ordres de Γ_1 et Γ_2. Comme $(\forall E_1, F_1 \subset B_1, \forall E_2, F_2 \subset B_2)$ l'inclusion $E_1 \times E_2 \subset F_1 \times F_2$ équivaut à la conjonction des inclusions $E_1 \subset F_1$, $E_2 \subset F_2$, l'ensemble ordonné Γ ainsi défini s'avérera un *ensemble simplement ordonné* de parties saturées lâches de $\mathfrak{T}(B)$, et une *structure analyticoïde produit* $(B, \Gamma, \mathfrak{A})$ apparaîtra, par la vérification des axiomes 1, 2, 3, 4, 5, 6 (nº 15).

Vérification de l'axiome 1. — L'ensemble $\mathcal{B}$ des ouverts non vides de B est obtenu par saturation de $\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$ ($\mathcal{B}_i$ ensemble des ouverts non vides de B_i), car

$$B_x = (B_1)_{x_1} \times (B_2)_{x_2}.$$

Vérification de l'axiome 2. — L'ensemble $\mathcal{O}$ des parties discrètes non vides de B est obtenu par saturation de $\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2$ ($\mathcal{O}_i$ ensemble des parties discrètes non vides de B_i), car

$$\{x\}_x = \{x_1\}_{x_1} \times \{x_2\}_{x_2}.$$

Vérification de l'axiome 3. — Il suffit de vérifier que $\mathfrak{A}'_x$ est stable pour l'intersection. Or

$$(E_1 \times E_2)_x \cap (F_1 \times F_2)_x = [(E_1 \cap F_1) \times (E_2 \cap F_2)]_x,$$

pour tous E_1, $F_1 \in \mathfrak{A}_1$, et E_2, $F_2 \in \mathfrak{A}_2$. La vérification résulte de ce que $\mathfrak{A}_1$ et $\mathfrak{A}_2$ eux-mêmes vérifient l'axiome 3.

Vérification de l'axiome 4. — Les deux ensembles ordonnés $(\mathfrak{A}_1)'_{x_1}$ et $(\mathfrak{A}_2)'_{x_2}$ vérifiant la condition minimale, il en est de même de leur produit $\mathfrak{A}'_x$.

Vérification de l'axiome 5. — Soit $E = E_1 \times E_2 \in \mathfrak{A}$, et soit $x = (x_1, x_2) \in E$. Soient I_1 (resp. I_2) et φ_1 (resp. φ_2) vérifiant en $x_1 \in E_1$ (resp. $x_2 \in E_2$) les conditions (1), (2), (3), (4), (5) du nº 13 *c* (à la place de I et φ en $x \in E$), ainsi que la condition (6) du nº 14 *a* et les conditions d'autonomie (nº 14 *g*).

On prendra $I = I_1 \times I_2$, ordonné par l'ordre produit, et

$$\varphi(\xi_1, \xi_2) = \varphi_1(\xi_1) \times \varphi_2(\xi_2).$$

Condition (1) : $\varphi(\xi_1, \xi_2)$ n'est pas vide, ni $\varphi_1(\xi_1)$ ni $\varphi_2(\xi_2)$ ne l'étant.

Condition (2) :

$$[\varphi_1(\xi_1) \times \varphi_2(\xi_2)] \cap [\varphi_1(\eta_1) \times \varphi_2(\eta_2)] = [\varphi_1(\xi_1) \cap \varphi_1(\eta_1)] \times [\varphi_2(\xi_2) \cap \varphi_2(\eta_2)],$$

vide dès que $\xi_1 \neq \eta_1$ ou $\xi_2 \neq \eta_2$, i. e. $(\xi_1, \xi_2) \neq (\eta_1, \eta_2)$.

Condition (3) : $I_1 \times I_2$ est un sous-ensemble ordonné de $\Gamma_1 \times \Gamma_2$, et $d \circ \varphi$ y est la transformation identique résultant des transformations identiques dans I_1 et I_2.

Conditions (4) et (5) :

$$\bigcup_{\xi \in I} \varphi(\xi) = \left[\bigcup_{\xi_1 \in I_1} \varphi_1(\xi_1)\right] \times \left[\bigcup_{\xi_2 \in I_2} \varphi_2(\xi_2)\right]$$

et

$$\psi(\eta_1, \eta_2) = \Big[\bigcup_{\xi_1 \leqq \eta_1} \varphi_1(\xi_1)\Big] \times \Big[\bigcup_{\xi_2 \leqq \eta_2} \varphi_2(\xi_2)\Big],$$

fermé dans $(E_1)_{x_1} \times (E_2)_{x_2} = E_x$.

Condition (6) : soit α_1 (resp. α_2) le plus grand élément de I_1 (resp. I_2); alors (α_1, α_2) est le plus grand élément de I.

Condition d'*autonomie* :

$$\bigcup_{\xi_1 \leqq \eta_1} \varphi_1(\xi_1) \in (\mathcal{A}_1)'_{x_1} \qquad \text{et} \qquad \bigcup_{\xi_2 \leqq \eta_2} \varphi_2(\xi_2) \in (\mathcal{A}_2)'_{x_2},$$

donc

$$\psi(\eta_1, \eta_2) \in (\mathcal{A}_1)'_{x_1} \times (\mathcal{A}_2)'_{x_2} = \mathcal{A}'_x.$$

L'axiome 5 est donc bien vérifié.

Vérification de l'axiome 6. — Soient $E = E_1 \times E_2 \in \mathcal{A}$ et $a = (a_1, a_2) \in E$; soient

$$\mathcal{C} = (\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2) \in \Gamma_1 \times \Gamma_2 = \Gamma$$

(moyennant l'assimilation faite au début de ce n° 16),

$$F = F_1 \times F_2 \in \mathcal{C}, \qquad E \subset F;$$

soit encore $F^\star \in \mathcal{C}$, $F^\star \subset E$, $F^\star_a$ non vide. Soit $x = (x_1, x_2) \in F^\star \subset F$; on a

$$F^\star_x \in \mathcal{C}'_x = (\mathcal{C}_1)'_{x_1} \times (\mathcal{C}_2)'_{x_2};$$

le germe $F^\star_x$ est donc le produit d'éléments de $(\mathcal{C}_1)'_{x_1}$ et $(\mathcal{C}_2)'_{x_2}$, respectivement inclus dans $(F_1)_{x_1}$ et $(F_2)_{x_2}$, donc identiques à ces germes respectifs, puisque $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont lâches; on a donc $F^\star_x = F_x$, et $F^\star$ est un ouvert de F (et, par conséquent, aussi un ouvert de E, puisque $F^\star \subset E \subset F$). La projection de $F^\star$ dans F_1 est donc un ouvert de F_1 auquel a_1 adhère et qui est inclus dans E_1; comme on a $a_1 \in E_1$, $E_1 \subset F_1$ et $E_1 \in \mathcal{A}_1$, l'axiome 6 appliqué à $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{C}_1$ donne $(E_1)_{a_1} = (F_1)_{a_1}$. De même,

$$(E_2)_{a_2} = (F_2)_{a_2}, \qquad \text{donc} \quad E_a = F_a.$$

C. Q. F. D.

17. Germe analyticoïde associé a une application continue. — *a.* Soit $(B, \Gamma, \mathcal{A})$ une structure analyticoïde; soit a un point de B, et *soit* $\mathfrak{G}$ *un filtre sur* B. Comme $B \in \mathcal{A} \cap \mathfrak{G}$, l'ensemble ordonné de germes $\mathcal{A}'_a \cap \mathfrak{G}_a$ n'est pas vide (B_a en est un élément); inclus dans $\mathcal{A}'_a$, il satisfait à la condition minimale, et n'a que des éléments non vides (qui incluent $\{a\}_a$); et il est stable pour l'intersection finie, puisque $\mathcal{A}'_a$ et $\mathfrak{G}_a$ le sont. D'après la forme (δ) (n° 12 *c*; *voir* aussi n° 12 *e*) de la condi-

tion minimale pour un demi-treillis, il y a donc (en a) *un plus petit germe analyticoïde appartenant à* $\mathfrak{G}_a$.

b. Nous dirons que la structure analyticoïde $(\mathrm{B}, \Gamma, \mathcal{A})$ est *séparée* si (et seulement si) l'espace topologique B est *séparé*. Supposons qu'il en soit ainsi, et soit f une application dans B d'un espace topologique A, *continue* en un point $a \in \mathrm{A}$; soit $b = f(a)$, et soit $\mathfrak{G}$ le filtre sur B associé à f et a (nº 7), i. e. le filtre engendré par l'image (par f) du filtre des voisinages de a (dans A). D'après le résultat qui vient d'être obtenu (en a), on a un plus petit germe analyticoïde E_b appartenant à $\mathfrak{G}_b$ $(\mathrm{E} \in \mathcal{A} \cap \mathfrak{G},\ b \in \mathrm{E})$; nous appellerons E_b le *germe analyticoïde associé à f et a.*

c. Plus généralement, on peut associer pareillement un germe analyticoïde à l'application f et à tout filtre sur A dont l'image par f converge en un point de B.

En particulier, supposons que A soit un sous-espace de B, f l'application identique. Soit b un point de l'adhérence de A dans B; on peut appliquer ce qui précède au filtre (sur A) des voisinages de b dans A (nº 5 *d*); le *germe analyticoïde* ainsi obtenu sera dit *associé à* A *et b.* D'ailleurs, on ne change pas le germe analyticoïde associé en adjoignant à A le point b.

d. Soient $(\mathrm{B}_1, \Gamma_1, \mathcal{A}_1)$ et $(\mathrm{B}_2, \Gamma_2, \mathcal{A}_2)$ deux structures analyticoïdes *séparées*, et $(\mathrm{B}, \Gamma, \mathcal{A})$ la structure analyticoïde *produit* (nº 16), elle aussi séparée (puisque $\mathrm{B} = \mathrm{B}_1 \times \mathrm{B}_2$). Soit $f = (f_1, f_2)$ une application de A dans B, continue en $a \in \mathrm{A}$. Soit $\mathfrak{G}$ (resp. $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$) le filtre associé à f (resp. f_1, f_2) et a. Alors (nº 4 *a*) $\mathfrak{G}_1 \times \mathfrak{G}_2 \subset \mathfrak{G}$, d'où, si $f(a) = (b_1, b_2) = b$:

$$\mathcal{A}'_b \cap \mathfrak{G}_b \supset \mathcal{A}'_b \cap [(\mathfrak{G}_1)_{b_1} \times (\mathfrak{G}_2)_{b_2}] = [(\mathcal{A}_1)'_{b_1} \cap (\mathfrak{G}_1)_{b_1}] \times [(\mathcal{A}_2)'_{b_2} \cap (\mathfrak{G}_2)_{b_2}].$$

Le germe analyticoïde (relatif à $\mathcal{A}$) associé à f et a est donc *inclus dans le produit* du germe analyticoïde (relatif à $\mathcal{A}_1$) associé à f_1 et a et du germe analyticoïde (relatif à $\mathcal{A}_2$) associé à f_2 et a.

Si l'on suppose que A est le produit $\mathrm{A}_1 \times \mathrm{A}_2$ de deux espaces topologiques, et que $f_1(x_1, x_2)$ [resp. $f_2(x_1, x_2)$] ne dépend que de $x_1 \in \mathrm{A}_1$ (resp. $x_2 \in \mathrm{A}_2$), alors l'inclusion devient une coïncidence (nº 4 *b*).

e. Revenons à la situation de *a*.

Nous dirons que la structure analyticoïde $(\mathrm{B}, \Gamma, \mathcal{A})$ est *fermée* si tous les germes analyticoïdes sont fermés, et seulement dans ce cas. Il revient au même de dire que les sous-espaces de B qui appartiennent à $\mathcal{A}$ (et en particulier, pour $\mathcal{C} \in \Gamma$, ceux qui appartiennent à $\mathcal{C}$) sont *localement fermés.* [Dans ce cas, la condition « $\psi(\xi)$ fermé dans E_x » du nº 13 *c* est automatiquement vérifiée pour des germes analyticoïdes, de même que la condition « fermés dans E_x » incluse dans la condition (A) du nº 14 *g* et, si Γ est totalement ordonné, dans l'axiome 5_1 du nº 15 *c*.]

Supposons qu'il en soit ainsi. Alors il est loisible en a et b de ne considérer du filtre $\mathfrak{G}$ que ceux de ses éléments qui sont fermés, et en c de remplacer le sous-espace A de B par son adhérence.

18. Cas d'un ensemble totalement ordonné. — a. Soit B un espace topologique. Soit Γ un ensemble simplement ordonné de parties saturées lâches de $\mathfrak{T}(B)$, dans lequel l'ordre soit un *ordre total* (autrement dit, Γ est une *chaîne*). Soit $\mathfrak{A}$ une partie (saturée) de $\mathfrak{T}(B)$ telle que $(B, \Gamma, \mathfrak{A})$ soit une structure analyticoïde.

Nous avons vu qu'alors l'axiome 5 (nº 15 a) peut être remplacé par l'axiome 5_1 (nº 15 c).

Soit $E \in \mathfrak{A}$. Si, à tout $x \in E$, on associe $d(E_x) \in \Gamma$ (nº 14 f), cette application du sous-espace E dans l'ensemble ordonné Γ a en chaque point un maximum local (nº 14 f : c'est une propriété de tout $E \in \mathcal{E}(\Gamma)$ même quand Γ n'est pas totalement ordonné), et elle est localement constante dans un ouvert de E partout dense, réunion disjointe des $E^{\mathcal{C}}$ (nºs 13 a et 13 i). Pour tout $x \in E$, $d(E_x)$ est le maximum des $\mathcal{C}$ tels que x adhère à $E^{\mathcal{C}}$, et qui sont en nombre fini; les résultats du nº 13 h montrent même qu'un voisinage convenable de x dans E ne rencontre $E^{\mathcal{C}}$ pour aucun autre $\mathcal{C}$ que ceux-là (ce qui est bien dire davantage quand Γ est infini), de sorte que, quand un point y décrit ce voisinage, $d(E_y)$ ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs (localement, on a donc une application de l'espèce étudiée au nº 8, avec d'autres notations).

b. Supposons que $(B, \Gamma, \mathfrak{A})$ soit une structure analyticoïde *séparée*, Γ étant encore *totalement ordonné*. Soit f une application dans B d'un espace topologique A; soit a un point de A où f est *continue*, et soit $b = f(a)$; il existe en b un germe analyticoïde associé à f et a (nº 17 b); nous désignerons par $d_a(f)$ l'image par d de ce germe (c'est un élément de Γ).

c. Supposons, en outre, que f soit *continue partout*. Alors on a une application de A dans Γ, qui à $x \in A$ associe $d_x(f) \in \Gamma$.

Soit encore a un point de A, et soit E_b le germe analyticoïde associé à f et a $[E \in \mathfrak{A},\ b = f(a) \in E]$. Pour tout x d'un voisinage ouvert assez petit de a dans A, on a $f(x) \in E$ (puisque E appartient au filtre $\mathfrak{G}$ associé à f et a, *cf.* nºs 7 et 17 b), et, si l'on pose $y = f(x)$, le point $y \in E$ est assez voisin de b pour que $d(E_y) \in \Gamma_E^b$ (*cf.* ci-dessus a et nº 13 a). Or E appartient au filtre associé à f et x, donc E_y inclut le germe analyticoïde associé à f et x; donc

$$d_x(f) \leqq d(E_y) \leqq d(E_b) = d_a(f).$$

Il y a donc un *maximum local en tout point* de A pour l'application $x \to d_x(f)$.

d. Revenons à la situation examinée en *b* ci-dessus, en conservant les notations du n° 17 *b*. D'après l'axiome 5_1 (n° 15 *c*), le germe E_b est réunion disjointe d'un germe non vide F_b, tel que $F \in d(E_b)$, et d'un germe E^*_b fermé dans E_b et tel que, si E^*_b n'est pas vide, on ait $E^* \in \mathfrak{A}$ et $d(E^*_b) < d(E_b)$; nous supposerons, comme il est loisible, $E = E^* \cup F$, $E^* \cap F = \emptyset$, et E^* fermé dans E, donc F ouvert dans E.

Puisque E^*_b est, s'il n'est pas vide, un germe analyticoïde strictement inclus dans E_b, il n'inclut aucun élément de $\mathfrak{G}_b$ (n° 17). Tout élément de $\mathfrak{G}_b$ inclus dans E_b a donc avec F_b une intersection non vide; c'est le cas pour le germe en *b* de $f(V)$, si V est un voisinage de *a* (dans A) assez petit pour que $f(V) \subset E$. L'ensemble non vide $F \cap f(V)$ est alors ouvert dans $f(V)$.

e. Ajoutons, comme en *c*, l'hypothèse que *f* est continue partout, et supposons que le voisinage choisi V de *a* soit ouvert. Alors l'ensemble W des $x \in V$ tels que $f(x) \in F$, ensemble auquel *a* adhère d'après ce qui précède, est lui-même *ouvert* (dans A).

f. Ajoutons aux hypothèses précédentes celle-ci : *l'ensemble* Γ *est fini.*

Alors l'application $x \to d_x(f)$ de A dans Γ est de l'espèce étudiée au n° 8. *Le lieu des points* $a \in A$ *au voisinage desquels cette application est constante est un ouvert partout dense* A^* *de* A. Supposons que le point *a* ci-dessus (en *b*, *c*, *d*, *e*) ait été choisi dans A^*, et que l'application soit constante dans le voisinage V, et soit *x* un point de l'ouvert W, qui est inclus dans V; posons $y = f(x)$. Alors le germe analyticoïde associé à *f* et *x* est inclus dans F_y, alors que $F \in d(E_b) = d_x(f)$; *ce germe coïncide donc avec* F_y, d'après l'axiome 6 (n° 15 *a*).

g. Appelons *germe analyticoïde régulier* tout élément de $G'[\mathfrak{S}(\Gamma)]$, c'est-à-dire de

$$\bigcup_{\mathcal{C}\in\Gamma} G'(\mathcal{C}) = \bigcup_{\mathcal{C}\in\Gamma}\ \bigcup_{x\in B} \mathcal{C}'_x,$$

et conservons les mêmes hypothèses.

Le lieu A^R *des points* $a \in A^*$ *tels que le germe analyticoïde associé à f et a soit régulier est*, d'après ce qui précède, *partout dense dans* A. Ce lieu A^R est même un *ouvert* partout dense de A, car pour un tel point *a* on peut prendre $F = E$, d'où $W = V$. (Notons que le germe analyticoïde associé à *f* et *x* peut être régulier pour certains points de A qui n'appartiennent pas à A^*, ni par conséquent à A^R; *voir* un chapitre ultérieur pour un exemple, p. 123.)

A^R, comme A^*, se compose d'ouverts disjoints (connexes ou non) en nombre fini, tels que $d_x(f)$ reste constant quand *x* décrit l'un quelconque d'entre eux. D'autre part, il résulte de ce qui précède que A^R *est réunion* (non nécessairement finie) *d'ouverts* (non nécessairement disjoints) W *satisfaisant* (d'après f) *à la condition* que voici :

Il existe $F \in \mathfrak{S}(\Gamma)$ *tel que* $f(W) \subset F$ *et que*, $\forall x \in W$, *le germe analyticoïde associé à* f *et* x *soit le germe de* F *au point* $f(x)$ [et par conséquent $d_x(f) = d(F)$].

h. Revenons à la situation de *c* et *e*, en la particularisant comme suit : A *est un sous-espace de* B, f *l'identité dans* A. Puis généralisons un peu en supposant que $a\,(=b)$ adhère à A sans nécessairement lui appartenir (cela revient au même en considérant $A \cup \{a\}$ à la place de A). Au lieu de $d_a(f)$ nous écrirons alors $d_a(A)$; dans le cas où A_a est un germe analyticoïde lui-même, on a $d_a(A) = d(A_a)$; mais notons que si $A \in \mathfrak{S}(\Gamma)$ sans que $a \in A$, on a $d_a(A) \geqq d(A)$, sans que l'égalité ait lieu en général.

L'application $x \to d_x(A)$, à valeurs dans Γ, est définie dans l'adhérence $\overline{A}$ de A. Sa restriction à A a un maximum local en tout point de A. L'application définie dans $\overline{A}$ a elle-même un maximum local en tout point de A où A est localement fermé et en tout point isolé de $\overline{A} - A$; elle a un maximum local en tout point de $\overline{A}$ si la structure analyticoïde $(B, \Gamma, \mathcal{A})$ est fermée (nº 17 *e*), puisqu'alors elle coïncide avec l'application $x \to d_x(\overline{A})$.

Dans la situation ci-dessus, soit $E = E^{\star} \cup F$ comme en *d* et *e*, avec $a = b \in A$. Tout voisinage ouvert assez petit V de a dans A rencontre F suivant un ouvert W de A, auquel a adhère.

i. Ajoutons, dans la situation de *h*, l'hypothèse que Γ *est fini*. Alors le lieu des points $a \in A$ tels que, pour tout point x d'un voisinage convenable V de a dans A, on ait $d_x(A) = d_a(A)$, est un ouvert partout dense $A^{\star}$ de A.

Le lieu A^{R} des points $a \in A^{\star}$ tels que le germe analyticoïde associé à A et a soit régulier est un ouvert partout dense A^{R} du sous-espace A. L'ensemble A^{R} est une réunion de parties W de A, ouvertes dans A, satisfaisant à la condition que voici :

Il existe $F \in \mathfrak{S}(\Gamma)$ *tel que* $W \subset F$ *et que*, $\forall x \in W$, *le germe analyticoïde associé à* A *et* x *soit le germe de* F *en* x [et par conséquent $d_x(A) = d(F)$].

SECTION IV : CAS D'UN ESPACE AFFINE.

19. Ensembles cylindriques. — *a.* Soient : m un entier $\geqq 1$, K un *corps commutatif*, B un *espace affine de dimension m sur* K. *L'espace vectoriel sous-jacent* à B est le *groupe* $B^{\star}$ *des translations* de B, commutatif et simplement transitif.

Soit V un sous-espace vectoriel de B^*, de dimension p. La relation $x - y \in V$ entre points x, y de B est une relation d'équivalence dont les classes d'équivalence sont les classes d'intransitivité du sous-groupe V; ce sont des sous-espaces affines (ou variétés linéaires affines) de B, de dimension p; nous les appellerons V-*variétés*, et nous désignerons par V^x celle à laquelle appartient le point $x \in B$. [Pour $p = 0$, les V-variétés sont les points de B; pour $p = m$, la seule V-variété est B lui-même.]

On appellera V-*cylindre* toute réunion (vide ou non) de V-variétés, i. e. toute partie de B invariante par le sous-groupe V.

b. Supposons en outre que le corps K soit un *corps topologique* et munissons l'espace B de la topologie de l'espace produit K^m auquel on peut l'assimiler.

Le sous-espace vectoriel V étant donné, soit $\mathcal{V}$ l'ensemble saturé de parties de B engendré (*cf.* n° 9 *b*) par les V-cylindres non vides. Une partie E de B sera dite : V-*cylindrique en un point* $b \in B$, si le germe E_b est un germe de V-cylindre (i. e. est vide ou appartient à $\mathcal{V}_b$); *localement* V-*cylindrique*, si E est V-cylindrique en chacun de ses points, i. e. si E est vide ou appartient à $\mathcal{V}$.

Soit E une partie de B. Le lieu des points de E où E est V-cylindrique est localement V-cylindrique et ouvert dans E.

20. Lemmes concernant des groupes d'homéomorphismes. — *a.* Nous aurons besoin du lemme que voici :

Soit Φ *un groupe commutatif de permutations d'un ensemble* A (i. e. bijections de A sur A), *et soit* U *une partie de* A *qui soit stable par un demi-groupe* Ψ *qui engendre* Φ [« stable » signifie que, pour tout $f \in \Psi$, on a $f(U) \subset U$; dire que la partie Ψ de Φ est un demi-groupe revient à dire que $f \in \Psi$ et $g \in \Psi$ impliquent $g \circ f \in \Psi$; dire que le demi-groupe Ψ engendre Φ revient à dire que tout élément de Φ est de la forme $g \circ f^{-1}$, avec $f \in \Psi$, $g \in \Psi$, puisque Ψ est commutatif]. *Alors, pour tout* $x \in A$ *et tout* $y \in \Phi(x)$, *l'ensemble* $\Psi(x) \cap \Psi(y)$ *n'est pas vide; et il est inclus dans* U *si en outre* $x \in U$ *et* $y \in U$.

La seconde des deux parties de la conclusion résulte de ce que U est stable par Ψ (par hypothèse). La première résulte de l'existence de $f \in \Psi$ et de $g \in \Psi$ tels que $f(x) = g(y)$ [puisque y est transformé de x par $g^{-1} \circ f$].

b. Soit Φ *un groupe commutatif d'homéomorphismes d'un espace séparé* A *sur* A, *et soit* a *un point de* A, *tels qu'il existe un système fini* Ψ *de générateurs de* Φ, *et un système fondamental* $\mathfrak{U}$ *de voisinages de* a *stables par* Ψ. *Soit* E_a *un germe en* a (*de parties de* A) *invariant par* Ψ (n° 7 *d*); que a soit invariant par Ψ résulte de l'axiome de séparation et de la stabilité des voisinages $U \in \mathfrak{U}$. *Alors* E_a *est le germe en* a *d'une partie de* A *invariante par* Φ.

Démontrons ce second lemme en nous appuyant sur celui de a, où le demi-groupe à considérer serait actuellement celui qui est engendré par Ψ, i. e. la réunion des puissances Ψ^n d'exposants entiers $n \geqq 0$, et en prenant un voisinage $U \in \mathfrak{U}$ assez petit pour que

$$U \cap E = U \cap f(E) = U \cap f^{-1}(E) \quad \text{pour tout} \quad f \in \Psi$$

(ce qui est possible d'après la finitude de Ψ et l'invariance de E_a). Posons $U \cap E = F$. Alors, pour tout $x \in F$, on a $\Psi(x) \subset F$, et donc $\Psi^n(x) \subset F$ pour tout $n \geqq 0$; de même, pour tout $x \in F$, on a $U \cap \Psi^{-1}(x) \subset F$, et donc $U \cap \Psi^{-n}(x) \subset F$ pour tout $n \geqq 0$. Donc (*cf.* a, lemme précédent), pour tout $x \in F$, on a $U \cap \Phi(x) \subset F$; ce qu'on écrit $U \cap \Phi(F) \subset F$, et donc $U \cap \Phi(F) = F$, puisque $F \subset \Phi(F)$. Donc E_a est le germe en a de la partie $\Phi(F)$ de A, invariante par le groupe Φ.

C. Q. F. D.

c. Ajoutons aux hypothèses de b les deux que voici :

Φ *est sous-groupe d'un groupe* $\Phi^\star$ *d'homéomorphismes de* A *sur* A, *tel que, pour tout* $x \in A$, *l'adhérence de* $\Phi(x)$ *inclue* $\Phi^\star(x)$;
E *est fermé.*

Alors E_a *est le germe en* a *d'une partie de* A *invariante par* $\Phi^\star$ *et fermée.*

Démontrons-le, en remarquant qu'on peut toujours supposer E invariant par Φ : en effet, dans les conditions de b, l'adhérence de la partie $\Phi(F)$, invariante par Φ, est elle aussi invariante par Φ, qui est un ensemble d'homéomorphismes de A sur A; et cette adhérence équivaut au voisinage de a à celle de E, qui dans le cas présent coïncide avec l'ensemble fermé E. Il suffira alors de montrer que E, invariant par Φ et fermé, est aussi invariant par $\Phi^\star$, ou, ce qui revient au même ($\Phi^\star$ étant un groupe), stable par $\Phi^\star$: cela résulte de ce qu'il est stable par Φ et fermé.

21. Germes cylindriques. — a. Revenons à la situation du n° 19 b, et supposons que K *soit, ou bien le corps* $\mathbf{R}$ *des nombres réels, ou bien le corps* $\mathbf{C}$ *des nombres complexes.*

Dans le groupe des applications linéaires affines de l'espace affine B sur lui-même, considérons le sous-groupe Θ de celles qui laissent invariants à la fois un point donné $b \in B$ et chaque V-variété (V sous-espace vectoriel donné de $B^\star$, de dimension p); et remarquons que l'espace B est *séparé.*

Nous nous proposons de démontrer le théorème que voici :

Si un germe en b (*de parties de* B) *est fermé et invariant par* Θ, *c'est le germe d'une partie de* B *fermée et invariante par* Θ (i. e. le germe d'un V-cylindre fermé ou de $\{b\}$).

Soit donc E une partie *fermée* de B, telle que E_b soit *invariant* par Θ et que b *adhère au complément de* $\{b\}$ *dans* E. Il s'agit de montrer que E est V-cylindrique en b. (Le cas où E_b est vide ou identique à $\{b\}_b$ est trivial.)

b. Supposons d'abord que E_b soit inclus dans le germe en b de W^b, où W désigne un sous-espace vectoriel de $B^\star$, complémentaire de V (donc $\dim W = m - p$, et $V \cap W = \{0\}$); il serait aussi inclus dans les germes des transformés de W^b par Θ. Mais ces transformés, si $p > 0$, ont $\{b\}$ pour intersection, de sorte qu'alors E_b serait vide ou identique à $\{b\}_b$, cas déjà écartés; si, au contraire, $p = 0$, le seul élément de Θ est l'application identique, de sorte qu'alors le théorème est trivialement vrai, sans même qu'on ait besoin de supposer fermés le germe et la partie de B en question.

c. Nous supposerons $p > 0$, donc $E_b \not\subset W^b_b$. Soit $\Theta^\star$ le sous-groupe de Θ formé de ceux des éléments de Θ qui sont invariants par chaque translation appartenant à W; $\Theta^\star$ est isomorphe (en tant que groupe) au groupe linéaire de l'espace vectoriel V.

Il suffit de montrer que E_b est germe d'une partie de B fermée et invariante par $\Theta^\star$, car alors E_b est réunion disjointe d'un germe non vide de V-cylindre fermé et d'un germe inclus dans W^b_b, lui aussi nécessairement invariant par Θ, et donc fermé, d'après *b*, donc vide (parce que disjoint d'un germe fermé non vide).

d. Le germe E_b ne peut pas être inclus dans celui d'une réunion finie d'hyperplans qui incluent W^b, puisqu'alors, invariant par $\Theta^\star$, il serait inclus dans le germe de W^b, intersection des parties de B transformées de cette réunion d'hyperplans par des éléments de $\Theta^\star$ (qu'on peut prendre en nombre fini), et ce cas a été écarté.

Soient $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ des fonctions linéaires affines indépendantes, définies dans B et nulles sur W^b, en nombre $p = \dim V$. Soit D l'ouvert partout dense de B lieu des points où aucune de ces p fonctions ne s'annule; d'après ce qui précède, le germe $E_b \cap D_b$ n'est pas vide.

e. Soit $\Phi^\star$ le sous-groupe commutatif de $\Theta^\star$ qui laisse invariants les p hyperplans $\varphi_i = 0$ $(i = 1, \ldots, p)$, donc aussi D, et qui est simplement transitif dans $D \cap V^b$; pour toute $f \in \Phi^\star$, il existe p scalaires non nuls $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$, tels que, pour $i = 1, \ldots, p$, on ait $\varphi_i \circ f = \lambda_i \varphi_i$, et le groupe $\Phi^\star$ est ainsi isomorphe à la puissance $p^{\text{ième}}$ du groupe multiplicatif du corps K.

Il suffit de montrer que E_b *est germe d'une partie de* B *fermée et invariante par* $\Phi^\star$, car alors E_b (même raisonnement qu'en *c*) est réunion disjointe d'un germe non vide de V-cylindre fermé et d'un germe disjoint de D_b et lui aussi nécessairement invariant par Θ, donc inclus dans le germe de W^b d'après *d*, donc vide.

f. Assimilons B à l'espace produit $V^b \times W^b$ (en associant à $v \in V^b$ et $w \in W^b$ le point $v + w - b \in B$). Pour avoir un système fondamental $\mathcal{U}$ de voisinages de b dans B, il suffit de faire le produit de systèmes fondamentaux de voisinages de b dans V^b et dans W^b. Nous supposerons que chacun des voisinages choisis dans V^b est le lieu des points $v \in V^b$ tels que $|\varphi_i(v)| < \alpha_i$ $(i = 1, \ldots, p)$, les α_i désignant p réels > 0 dépendant du voisinage considéré.

Tout $U \in \mathcal{U}$ est alors stable par $f \in \Phi^\star$ dès que (avec les notations de *e*) on a $|\lambda_i| \leqq 1$ pour $i = 1, \ldots, p$. Choisissons les $2p + 1$ applications $f_0, f_1, \ldots, f_p$; $g_1, \ldots, g_p$ que voici, qui satisfont à cette condition et forment une partie finie Ψ de $\Phi^\star$ (on pourrait en choisir un moindre nombre, mais peu importe) :

Pour f_0 on choisit $\lambda_i = \beta_i$, avec $0 < \beta_i < 1$, de telle sorte qu'aucune combinaison linéaire des logarithmes de base 2 des p nombres $\beta_1, \ldots, \beta_p$ et de 1, à coefficients entiers non tous nuls, ne soit nulle.

Pour f_i $(i = 1, \ldots, p)$ on prend $\lambda_j = 1$ pour $j \neq i$, et $\lambda_i = \frac{1}{2}$.

Pour g_i $(i = 1, \ldots, p)$ on prend $\lambda_j = 1$ pour $j \neq i$, et $\lambda_i = \exp\left(\pi\gamma\sqrt{-1}\right)$, avec $\gamma = 1$ si $K = \mathbf{R}$, et γ irrationnel réel si $K = \mathbf{C}$.

Dans ces conditions, soit Φ le sous-groupe de $\Phi^\star$ engendré par Ψ; alors, pour tout $x \in B$, $\Phi^\star(x)$ est inclus dans l'adhérence de $\Phi(x)$. Le lemme du n° 20 *c* s'applique (A doit être remplacé par B, *a* par *b*), ce qui démontre l'assertion de *e* et donc notre théorème (*a*).

g. Nous avons vu (en *b*) que si $p = 0$ le théorème *a* est trivialement vrai, même si dans son énoncé on supprime l'adjectif « fermé » ou « fermée ».

On peut aussi supprimer cet adjectif dans l'autre cas extrême où $p = m$, *donc* $V^b = B$, $W^b = \{b\}$, $\Theta^\star = \Theta$. Autrement dit, *dans ce cas :*

Si un germe en b (*de parties de* B) *est invariant par* Θ, *c'est le germe d'une partie de* B *invariante par* Θ (i. e. le germe vide, ou celui de B, ou celui de $\{b\}$, ou celui du complément de l'ensemble $\{b\}$ dans B).

Pour la démonstration de ce nouveau théorème, on peut supposer que le germe de $\{b\}$ est strictement inclus dans le germe E_b considéré (en l'ajoutant au besoin, et écartant le cas trivial $E_b = \{b\}_b$). Soit U_0 un voisinage de b *borné* et *convexe;* définissons par récurrence U_{j+1} (pour j entier $\geqq 0$) comme transformé de U_j par l'homothétie h de centre b et rapport $\frac{1}{2}$, et U'_j comme complément de U_{j+1} dans U_j; alors U_0 est réunion disjointe de $\{b\}$ et des U'_j; nous supposerons en outre que U_0 a été choisi assez petit pour que

$$U_0 \cap E = U_0 \cap h(E), \qquad \text{donc} \quad U'_{j+1} \cap E = h(U'_j \cap E).$$

Soit F la réunion de $\{ b \}$ et des transformés de $U'_0 \cap E$ par les puissances de h (d'exposants entiers de signe quelconque) : $U_0 \cap F = U_0 \cap E$. Il suffit de montrer que, pour tout $f \in \Theta$, l'ensemble F est invariant par f, et même, puisque Θ est un groupe, de montrer que, pour tout $x \in F$, distinct de b, on a $f(x) \in F$. Or on peut prendre les entiers j et i assez grands pour que $U_j \cap F \subset f^{-1}(F)$ et que

$$h^i(x) \in U_j, \text{ d'où } \qquad h^i(x) \in U_j \cap F,$$

et donc $f(x) \in h^{-i}(F) = F$ (car $f \circ h^i = h^i \circ f$, puisque h est dans le centre de Θ).

C. Q. F. D.

Dans l'énoncé du théorème que nous venons de démontrer, il n'est pas nécessaire de supposer que le germe E_b considéré est invariant par tout le groupe Θ. Il suffit d'un sous-groupe dont un élément soit une homothétie de rapport λ, avec $|\lambda| < 1$, et qui ait les mêmes orbites (i. e. classes d'intransitivité); par exemple, si $K = \mathbf{R}$, le groupe engendré par les homothéties et les rotations de centre b (B étant considéré comme espace euclidien).

22. Structures analyticoïdes affines. — *a*. Soit encore B un espace affine de dimension m sur K, comme au n° 21, avec $K = \mathbf{R}$ ou $K = \mathbf{C}$; c'est un espace topologique séparé (n° 21 *a*).

Appelons I l'ensemble naturellement ordonné des $m + 1$ entiers 0, 1, ..., m.

Pour tout $i \in I$, soit $\mathcal{L}_i$ l'ensemble saturé de parties de B engendré (n° 9 *b*) par les sous-espaces affines de dimension i; en particulier, $\mathcal{L}_0$ est l'ensemble des parties discrètes non vides, et $\mathcal{L}_m$ est l'ensemble des ouverts non vides.

Les $m + 1$ parties $\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_m$ de $\mathfrak{P}(B)$ sont saturées et *lâches* (n° 9 *d*), et sont les éléments d'un ensemble Λ *simplement ordonné* (n° 10 *b*) isomorphe à I (comme ensemble ordonné). Soit $\mathcal{L}$ la partie saturée de $\mathfrak{P}(B)$ engendrée par $\mathfrak{S}(\Lambda) = \bigcup_{i \in I} \mathcal{L}_i$ (ou, ce qui revient au même, par les sous-espaces affines de toutes dimensions 0, 1, ..., m).

Alors Λ et $\mathcal{L}$ *déterminent sur* B *une structure analyticoïde* $(B, \Lambda, \mathcal{L})$ que nous appellerons la structure *linéaire*.

En effet, les axiomes 1 et 2 du n° 15 *a* sont vérifiés, avec $\mathcal{B} = \mathcal{L}_m$ et $\mathcal{O} = \mathcal{L}_0$. L'axiome 3 aussi, puisque l'ensemble des sous-espaces vectoriels de $B^\star$ est stable pour l'intersection; de même l'axiome 4, puisque toute chaîne, dans cet ensemble, est finie; et l'axiome 6 pour la même raison. L'axiome 5_1 (n° 15 *c*) est trivialement vérifié : $\forall x \in B$, on a $\mathcal{L}'_x = \bigcup_{i \in I} (\mathcal{L}_i)'_x$; tout germe analyticoïde est alors *régulier* (n° 18 *g*).

La structure linéaire est évidemment séparée (nº 17 *b*) et *invariante par le groupe affine* de B. Elle est en outre *fermée* (nº 17 *e*), puisque sont fermés les sous-espaces affines.

b. Conservons les mêmes notations. Une *structure analyticoïde* $(\mathrm{B}, \Gamma, \mathfrak{A})$ sur l'espace affine B (de dimension m sur K) sera dite *affine* si (et seulement si) elle satisfait (outre les axiomes 1 à 6 du nº 15) aux conditions (1) à (4) que voici :

(1) *elle est invariante par le groupe affine de* B;

(2) *elle est fermée* (i. e. : tout $\mathrm{E} \in \mathfrak{A}$ est localement fermé);

(3) *il existe un isomorphisme de* I *sur l'ensemble ordonné* $\Gamma : i \to \mathcal{C}_i$;

(4) $\mathcal{L}_i \subset \mathcal{C}_i$ *pour tout* $i \in \mathrm{I}$ (les conditions précédentes impliquent déjà $\mathcal{C}_0 = \mathcal{L}_0$ et $\mathcal{C}_m = \mathcal{L}_m$).

Il en résulte $\mathcal{L} \subset \mathfrak{A}$, puisque $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{S}(\Gamma) = \bigcup_{i \in \mathrm{I}} \mathcal{C}_i$. Ce résultat et la condition (4) permettent en un sens de dire que la structure linéaire est la « plus petite » structure analyticoïde affine sur B.

c. Dans ces conditions, soit V un sous-espace vectoriel de $\mathrm{B}^\star$, de dimension p.

THÉORÈME. — *Soient* E *une partie localement* V-*cylindrique de* B, *et b un point adhérent à* E. *Alors le germe analyticoïde associé à* E *et* b (nº 17 *c*) *est un germe de* V-*cylindre.* [Il s'agit de la structure analyticoïde affine $(\mathrm{B}, \Gamma, \mathfrak{A})$.]

Soit U un voisinage de b. Soit $\mathrm{E}' = \mathrm{E} \cap \mathrm{U}$. Soit F le V-cylindre engendré par E′ (i. e. : la réunion F des V-variétés qui rencontrent E′). Il suffit de montrer que le germe en question est aussi, pour un choix convenable de U, le germe analyticoïde associé à F et b, puisque ce dernier est fermé et invariant par le groupe Θ du nº 21, et qu'alors il suffit d'appliquer le théorème du nº 21 *a*, en remarquant que le germe ne peut se réduire à $\{ b \}_b$ que si $p = 0$. Puisque $\mathrm{E}' \subset \mathrm{F}$, le premier des deux germes est inclus dans le second, et il suffit de montrer qu'il inclut F_b.

Pour cela nous n'utiliserons pas toutes les hypothèses de l'énoncé ci-dessus, et *le théorème reste vrai si,* au lieu de supposer E localement V-cylindrique, *on suppose seulement* que $\mathrm{V}^x_x \subset \mathrm{E}_x$ *pour tout* $x \in \mathrm{E}$.

Prenons pour U un voisinage *ouvert* de b, *convexe*, et assez petit pour qu'il existe $\mathrm{F}' \in \mathfrak{A}$, fermé dans U, tel que $\mathrm{E}' = \mathrm{E} \cap \mathrm{U} \subset \mathrm{F}'$ et que F'_b soit le germe analyticoïde associé à E et b. Il suffit de montrer que $\mathrm{F}' \supset \mathrm{F} \cap \mathrm{U}$, autrement dit que $\mathrm{F}' \supset \mathrm{V}^x \cap \mathrm{U}$ pour tout $x \in \mathrm{E}'$. Or $\mathrm{F}' \cap \mathrm{V}^x$ est une partie (fermée) de l'espace *connexe* $\mathrm{V}^x \cap \mathrm{U}$. Il suffit donc de montrer que $\mathrm{F}' \cap \mathrm{V}^x$ inclut une partie non vide à la fois ouverte et fermée de $\mathrm{V}^x \cap \mathrm{U}$. C'est le cas pour le lieu H des points $y \in \mathrm{F}' \cap \mathrm{V}^x$ tels que $\mathrm{F}'_y \supset \mathrm{V}^x_y$; ce lieu est en effet évidemment ouvert dans $V^x \cap U$, et non vide puisque $F'_x \supset E'_x \supset V^x_x$; et nous allons montrer qu'il est fermé dans $V^x \cap U$.

Supposons, en effet, qu'un point $y \in V^x \cap U$ adhère à H. Alors y appartient à l'ensemble $F' \cap V^x$, qui est un élément de $\mathfrak{A}$, et dont le germe en y est un germe analyticoïde, inclus dans le germe régulier $V^x_y \in (\mathcal{L}_p)'_y$, et incluant le germe non vide $H_y \in (\mathcal{L}_p)_y$. L'axiome 6 (nº 15) et la condition (4) de b impliquent alors $(F' \cap V^x)_y = V^x_y$, i. e. $y \in H$.

C. Q. F. D.

d. Soit toujours la structure analyticoïde affine (B, Γ, $\mathfrak{A}$), et soit V un sous-espace vectoriel de B*. Soit $\mathcal{V}$ l'ensemble saturé défini au nº 19 *b*.

Théorème. — *Soient* $E \in \mathfrak{A}$, $E' \subset E$, $E' \in \mathcal{V}$, E' *partout dense dans* E. *Alors* $E \in \mathcal{V}$.

Soit, en effet, $b \in E$. Il suffit de remplacer E par E' dans le théorème précédent (*c*), en remarquant que le germe analyticoïde associé est ici E_b.

Comme il a été remarqué en *c*, *l'hypothèse* $E' \in \mathcal{V}$ *peut être remplacée par* l'hypothèse plus faible : $V^x_x \subset E'_x$ *pour tout* $x \in E'$.

e. Voici encore un théorème, où B, B*, V, $\mathcal{V}$, $\mathfrak{A}$ gardent la même signification.

Soit E *une partie de* B, *telle que le germe analyticoïde associé à* E *et* x *soit* V-*cylindrique, pour tout* $x \in E$. *Soit* b *un point adhérent à* E. *Alors le germe analyticoïde associé à* E *et* b *est* V-*cylindrique.*

Il suffit, en effet, comme en *c*, de montrer que ce germe inclut le germe en b du V-cylindre F engendré par $E' = E \cap U$, où U est un voisinage ouvert convexe de b (dans B) assez petit. Le seul changement à faire dans c est le remplacement de E'_x, dans les relations $F'_x \supset E'_x \supset V^x_x$ de c, par *le germe analyticoïde associé; l'hypothèse que ce germe inclut* V^x_x *suffit* d'ailleurs, sans qu'il soit besoin de le supposer V-cylindrique.

(*A suivre.*)