PAUL LÉVY

Le déterminisme de la fonction brownienne dans l'espace de Hilbert. II

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 80, nº 2 (1963), p. 193-212
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1963_3_80_2_193_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
3e série, t. 80, 1963, p. 193 à 212.

LE DÉTERMINISME DE LA FONCTION BROWNIENNE DANS L'ESPACE DE HILBERT

(SECOND MÉMOIRE)

PAR M. PAUL LÉVY.

1. INTRODUCTION. — Dans un premier Mémoire [1] sur la fonction brownienne X (A) définie dans l'espace de Hilbert Ω, j'ai démontré que si cette fonction est connue dans une petite sphère, elle est déterminée dans tout l'espace. Il y a lieu de penser, et j'ai cherché à démontrer, qu'on retrouve le même caractère déterministe en ne considérant que les valeurs de X (A) sur une hypersurface analytique (1), c'est-à-dire que : *si ces valeurs sont connues sur une partie ouverte d'une hypersurface* S, *analytique et d'un seul tenant, la fonction* X (A) *est déterminée sur toute cette surface* (2). Ce théorème ne sera démontré ici que dans le cas où il ne manque à S qu'un nombre fini de dimensions pour remplir un volume de l'espace Ω; mais il semble bien que cette restriction ne soit pas essentielle (3).

(1) Nous appelons *hypersurfaces, hyperplans* et *hypersphères*, les surfaces, plans et sphères qui ont une infinité de dimensions.

(2) Nous appelons partie ouverte de S un ensemble non vide, qui soit l'intersection de S avec un ensemble ouvert de l'espace Ω. Nous étudions ici les valeurs sur S de la fonction X (A) définie dans Ω. Mais tous nos résultats semblent s'étendre au cas où, pour deux points A et B de S, on substitue à la distance euclidienne r (A, B) la distance r^* (A, B) comptée sur S, ce qui conduit à une fonction X^* (A) analogue à X (A) mais définie seulement sur cette surface.

(3) L'énoncé de cette restriction a été omis par erreur dans [2], note de la page 73, et dans [4].

Je rappellerai d'abord quelques résultats connus, pour éviter au lecteur d'avoir à rechercher mes travaux antérieurs et aussi pour montrer que certains de ces résultats, que je n'avais démontrés que dans le cas des fonctions browniennes, se rattachent à quelques théorèmes généraux sur les systèmes laplaciens de variables aléatoires, dont la démonstration est indiquée ailleurs [5].

Le résultat nouveau annoncé ci-dessus sera démontré au n° 7. Les n^{os} 8 à 10 contiennent d'abord une brève indication sur les raisons qui me font croire à l'exactitude d'un énoncé plus général, puis différentes remarques sur la nature analytique de $\sigma(\mathrm{A}\,|\,\mathcal{E})$, écart type de $\mathrm{X}(\mathrm{A})$ quand les valeurs de cette fonction dans l'ensemble $\mathcal{E}$ sont connues. Ces remarques contiennent un mélange de résultats démontrés et d'autres qui ne sont que vraisemblables. Je souhaite qu'elles suscitent de nouvelles recherches.

2. SYSTÈMES LAPLACIENS DE VARIABLES ALÉATOIRES. — Nous dirons qu'un ensemble de variables aléatoires (v. a.) constitue un *système laplacien orthonormé* si ces variables sont laplaciennes, réduites, et indépendantes les unes des autres. Nous désignerons de telles variables par ξ_ρ $(\rho \in \mathrm{J})$. Un ensemble de v. a. X_ν $(\nu \in \mathrm{I})$ constituera un *système laplacien* si les X_ν sont des fonctions linéaires certaines de variables auxiliaires ξ_ρ constituant un système laplacien orthonormé ([4]). Dans le cas d'un système semi-réduit [c'est-à-dire que tous les $\mathrm{E}(\mathrm{X}_\nu)$ sont nuls], on a ainsi

$$\mathrm{X}_\nu = \sum_{\rho \in j_\nu} a_{\nu,\rho}\,\xi_\rho \qquad (j_\nu \subset \mathrm{J}). \tag{1}$$

Comme évidemment

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}_\nu^2) = \sum_{\rho \in j_\nu} a_{\nu,\rho}^2 < \infty, \tag{2}$$

j_ν doit être un sous-ensemble dénombrable de J. Si I n'est pas dénombrable, il peut arriver que J, qui est la réunion des j_ν, ne le soit pas non plus.

N'importe quel ensemble pouvant être bien ordonné, nous pouvons supposer que les indices ν et ρ sont des nombres transfinis. Cela indiquera que nous faisons abstraction des propriétés topologiques ou métriques de l'espace I. Quand nous appliquerons nos résultats à l'espace de Hilbert, nous écrirons $\mathrm{X}(\mathrm{A})$ au lieu de X_ν.

Énonçons maintenant sans démonstration quelques résultats établis dans [5]. Certains d'ailleurs sont classiques, au moins pour les ensembles

([4]) On définit parfois les systèmes laplaciens par la condition que toutes les combinaisons linéaires des X_ν soient des v. a. laplaciennes. La définition du texte est plus restrictive. Mais un raisonnement très simple, dû à L. Schwartz, montre que, considérées comme définitions faibles, ces deux définitions sont équivalentes.

finis; mais il ne semble pas que leur extension au cas d'ensembles infinis non dénombrables de v. a. puisse être considérée comme classique. Nos résultats ne comportent aucune restriction concernant la nature des ensembles I et J.

1° Un système laplacien semi-réduit est bien défini par sa covariance, c'est-à-dire par l'ensemble des moments

$$\Gamma_{\nu,\nu'} = \mathrm{E}(X_\nu X_{\nu'}) \qquad [(\nu, \nu') \in \mathrm{I}]. \tag{3}$$

2° Théorème 1. — *Pour qu'un ensemble de nombres donnés* $\Gamma_{\nu,\nu'}$ *constitue une covariance, il faut et il suffit que, quels que soient l'entier* $n < \infty$, *les* n *nombres réels* u_h $(h = 1, 2, \ldots, n)$, *et les* n *indices* $\nu_h \in \mathrm{I}$, *on ait*

$$Q(u) = \sum_{h=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{\nu_h,\nu_k} u_h u_k \geqq 0. \tag{4}$$

3° Quels que soient le sous-ensemble $\mathcal{E}$ de I et l'indice $\nu \in \mathrm{I}$, si les $X_{\nu'}$ sont connus dans $\mathcal{E}$, X_ν prend la forme $\mu + \sigma\xi$, ξ étant une v. a. laplacienne réduite (v. a. l. r.); σ est un nombre certain, $\geqq 0$; μ est une fonction linéaire presque sûrement bien définie des X_ν connus.

Un point important pour la suite, et dont nous allons rappeler la démonstration, est que μ peut toujours s'exprimer en fonction d'au plus une infinité dénombrable des $X_{\nu'}$ connus. En effet, si l'on se donne successivement tous les $X_{\nu'}$ d'indices $\nu' \in \mathcal{E}$, chacun d'eux, ou bien n'apprend rien de nouveau sur X_ν, ou bien a pour effet de diminuer σ d'une quantité positive. Or il y a au plus une infinité dénombrable de telles diminutions.

Bien entendu, si un $X_{\nu'}$ n'apprend rien sur X_ν, cela ne veut pas dire, en général, que ces variables soient indépendantes, mais seulement que l'information qu'on peut déduire de $X_{\nu'}$ était déjà connue.

4° *Représentation canonique.* — Si l'on applique successivement le résultat précédent à tous les X_ν, en prenant chaque fois pour $\mathcal{E}$ l'ensemble I_ν des indices qui précèdent ν, on obtient la représentation canonique du système des X_ν, qui a les caractères suivants : J est un sous-ensemble de I. Si $\nu \in \mathrm{J}$, on a

$$X_\nu = \sum_{\nu \in j_\nu} a_{\nu,\rho}\xi_\rho + \sigma_\nu \xi_\nu \qquad (\sigma_\nu > 0), \tag{5}$$

j_ν étant un sous-ensemble dénombrable de $\mathrm{J}_\nu = \mathrm{I}_\nu \cap \mathrm{J}$. Si $\nu \notin \mathrm{J}$, on a

$$X_\nu = \sum_{\nu \in j_\nu} a_{\nu,\rho}\xi_\rho. \tag{6}$$

Les formules (5) pouvant être résolues par rapport aux ξ_ν, la formule (6) montre que, si $\nu \notin J$, X_ν est une fonction certaine des $X_{\nu'}$ d'indices $\nu' \in J_\nu$.

Pour un système laplacien bien ordonné, la représentation canonique existe toujours, et, pour chaque ordre donné des X_ν, elle est unique. On sait qu'il n'en serait pas de même s'il ne s'agissait pas d'un ensemble bien ordonné; si l'indice ν est remplacé par un paramètre continu, l'existence d'une représentation canonique n'est pas assurée.

5° *Ensembles minimisants et suites minimisantes.* — Désignons par $\mu(\nu \mid \mathcal{E})$ et $\sigma(\nu \mid \mathcal{E})$ les grandeurs désignées au 3° par μ et σ. Si $\mathcal{E}'$ est un sous-ensemble de $\mathcal{E}$, on a évidemment

$$\sigma(\nu \mid \mathcal{E}') \geqq \sigma(\nu \mid \mathcal{E}). \tag{7}$$

S'il y a égalité, nous dirons que $\mathcal{E}'$ est un sous-ensemble de $\mathcal{E}$ *minimisant* pour $\sigma(\nu)$. De même, une suite de sous-ensembles $\mathcal{E}_n$ de $\mathcal{E}$ sera minimisante si

$$\sigma(\nu \mid \mathcal{E}_n) \to \sigma(\nu \mid \mathcal{E}) \qquad (n \to \infty).$$

THÉORÈME 2. — *Un ensemble non dénombrable $\mathcal{E} \subset$ I admet toujours des sous-ensembles dénombrables minimisants pour $\sigma(\nu)$ et des suites minimisantes composées de sous-ensembles finis.*

La première partie de ce théorème n'est qu'un autre énoncé du résultat établi au 3°. La seconde en est un corollaire évident.

THÉORÈME 3. — *Si $\mathcal{E}'$ est un sous-ensemble de $\mathcal{E}$ minimisant pour $\sigma(\nu)$, on a presque sûrement $\mu(\nu \mid \mathcal{E}') = \mu(\nu \mid \mathcal{E})$. Si une suite de sous-ensembles $\mathcal{E}_n$ est minimisante pour $\sigma(\nu)$, $\mu(\nu \mid \mathcal{E}_n)$ tend en moyenne quadratique vers $\mu(\nu \mid \mathcal{E})$; si, de plus, $\mathcal{E}_n \subset \mathcal{E}_{n+1}$* (pour tout n assez grand) *la convergence est presque sûre.*

Il semble inutile de répéter la démonstration, indiquée dans un travail en cours d'impression dont tout ce n° 2 est le résumé [5].

3. LA FONCTION BROWNIENNE DANS L'ESPACE DE HILBERT. — 1° Rappelons que cette fonction, que nous désignerons par X(A), est la fonction aléatoire (f. a.) *laplacienne* définie à une constante près par la formule

$$X(B) - X(A) = \xi\sqrt{r(A, B)}, \tag{8}$$

où $\xi = \xi(A, B)$ désigne toujours une v. a. laplacienne réduite; $r(A, B)$ désigne la distance des points A et B. Sur une droite de l'espace Ω, elle se réduit à la fonction bien connue du mouvement brownien linéaire.

---

[5] *Voir* aussi, pour les deux premières parties de ce théorème, le lemme 3 de notre premier Mémoire. La démonstration, donnée pour la fonction brownienne, s'applique sans changement dans le cas général.

La fonction $\overline{X}(A) = X(A) - X(O)$ (O étant un point pris pour origine) a pour covariance

$$\Gamma(A, B) = \frac{1}{2}[r(O, A) + r(O, B) - r(A, B)]. \tag{9}$$

Dans Ω, cette fonction vérifie la condition nécessaire et suffisante du théorème 1. Le fait est sans doute assez connu pour qu'il soit inutile d'en rappeler la démonstration. Rappelons seulement la méthode à suivre pour former effectivement un échantillon de cette fonction $X(A)$ [en supposant $X(O) = 0$, pour fixer les idées].

Il faut d'abord choisir dans Ω une suite de points A_n constituant un ensemble dénombrable et partout dense, et calculer successivement les $X_n = X(A_n)$ par la formule (5), dans laquelle les coefficients $a_{\nu,\rho}$ et σ_ν sont déterminés par la donnée de la covariance. Un point A quelconque est alors la limite d'une suite de points A'_n choisis parmi les A_n. Il est alors évident que $X(A)$ est la limite en moyenne quadratique de $X(A'_n)$, et, $\mathcal{E}_n$ désignant l'ensemble des n premiers points A'_h, il résulte du théorème 3 que $X(A)$ est la limite presque sûre de $\mu(A \mid \mathcal{E}_n)$ [6]. Tous les $X(A)$ sont ainsi bien définis, par des formules linéaires, en fonction d'une suite de v. a. ξ_n constituant un système laplacien orthonormé.

2° La fonction $X(A)$ est presque sûrement continue sur n'importe quelle surface à un nombre fini de dimensions admettant un plan tangent qui varie d'une manière continue. Elle est pourtant discontinue. Nous allons rappeler et compléter les indications antérieurement données sur cette discontinuité.

Nous allons d'abord montrer qu'au voisinage d'un point quelconque O, que nous pouvons prendre comme origine, la fonction $X(A)$ est complètement discontinue : on peut trouver une suite de points tendant vers O et où les valeurs de $X(A)$ tendent vers n'importe quelle limite donnée u, finie ou infinie. Cela revient à dire que, quel que soit $\varepsilon > 0$ et quel que soit l'intervalle i contenant x, on peut trouver un point A tel que $r(O, A) \leqq \varepsilon$ et $X(A) \in i$. Plus précisément, en désignant par A_n le point $x_n = \varepsilon$ de l'axe Ox_n, nous montrerons qu'il y a une infinité de points A_n ayant cette propriété.

Désignons par $\mathcal{E}_\omega$ l'ensemble des points A_ν et par $\mathcal{E}_n$ l'ensemble des n premiers. On a évidemment

$$\mu_n = \frac{1}{n}\sum_1^n X(A_h) = \mu(A_{n+1} \mid \mathcal{E}_n) = \mu(O \mid \mathcal{E}_n), \tag{10}$$

[6] Cette remarque ne se trouve pas dans notre premier Mémoire. Nous avions seulement observé que, si l'on choisit une suite de points A'_n tendant assez vite vers A, la convergence de $X(A'_n)$ vers $X(A)$ est presque sûre.

et, d'après le théorème 3, cette expression a pour n infini une limite presque sûre, qui est $\mu(O \mid \mathcal{E})$. On a alors

$$X(A_{n+1}) = \mu_n + \sigma_n \xi_n, \tag{11}$$

et l'on déduit de la formule (9), appliquée aux différences $X(A_h) - X(A_{n+1})$, que

$$\sigma_n^2 = E\{[\mu_n - X(A_{n+1})]^2\} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\left(1 + \frac{1}{n}\right). \tag{12}$$

Ainsi, pour n infini, μ_n a une limite presque sûre et σ_n a une limite positive. Les ξ_n sont des v. a. laplaciennes, réduites, indépendantes les unes des autres. Leurs valeurs forment donc presque sûrement un ensemble partout dense dans le plan, et il en est de même de celles de $X(A_{n+1})$,

C. Q. F. D.

Nous allons maintenant préciser ce résultat en démontrant que :

THÉORÈME 4. — *On peut presque sûrement définir un chemin continu, aboutissant à n'importe quel point donné* O, *et sur lequel* $X(A)$ *tende vers n'importe quelle limite donnée u, finie ou infinie.*

Supposons d'abord u fini. D'après le résultat que nous venons de démontrer, on peut presque sûrement choisir des axes Oy_n deux à deux rectangulaires, tels que, B_n désignant le point $y_n = \frac{1}{n}$ de l'axe Oy_n, on ait

$$|X(B_n) - u| < \frac{1}{n}. \tag{13}$$

Ces points tendant vers O, il suffit de montrer qu'on peut joindre B_n et B_{n+1} par un chemin continu sur lequel $|X(A) - u|$ reste $< \frac{1}{n}$. A cet effet, divisons le segment rectiligne $B_n B_{n+1}$ en n parties égales [7]; à une distance $< \frac{1}{n^3}$ de chacun des points de division $B'_{n,\nu}$, nous pouvons presque sûrement trouver un point $B_{n,\nu}$ où la condition

$$|X(A) - u| < \frac{1}{n} \tag{14}$$

soit vérifiée. Les points B_n et B_{n+1} sont ainsi reliés par une ligne brisée, presque rectiligne, dont les sommets vérifient cette condition. Nous pouvons opérer de la même manière sur chacun des segments rectilignes $B_{n,\nu} B_{n,\nu+1}$, et ainsi de suite indéfiniment. Cette opération n'étant répétée qu'une infinité dénombrable de fois, il est presque sûr qu'on peut indéfiniment

---

[7] Nous supposons $n > 1$. Si l'on voulait faire partir le chemin continu de B_1, on pourrait pour le trajet de B_1 à B_2 remplacer n par 2.

trouver les points cherchés vérifiant la condition (14). Finalement, nous obtenons un chemin continu le long duquel cette condition est constamment vérifiée, C. Q. F. D.

Le cas où u est infini se traite plus simplement encore, puisqu'après avoir défini les B_n de manière que $X(B_n) > n$ (ou $< -n$), il n'y a qu'à exiger que $|X(A)|$ soit $> |X(B_n)| - 1$ sur un chemin allant de B_n à B_{n+1}.

4. Théorèmes sur l'hypersphère. — 1° Rappelons d'abord deux théorèmes sur l'hypersphère, qui constituent une première application simple des théorèmes 2 et 3. A cet effet, considérons Ω comme l'espace produit de deux sous-espaces de Hilbert Ω_1 et Ω_2, ayant la même origine O, et désignons par S, S_1 et S_2 les sphères de centre O et de même rayon R, situées respectivement dans Ω, Ω_1 et Ω_2. Comme elles sont égales, on a

$$\sigma(O \mid S) = \sigma(O \mid S_1) = \sigma(O \mid S_2), \tag{15}$$

de sorte que S_1 et S_2 sont des sous-ensembles minimisants de S. Il résulte alors du théorème 3 que :

Théorème 5. — *Les moyennes de* $X(A)$ *sur les surfaces* S, S_1 et S_2 *sont presque sûrement bien définies, et égales.*

Ce théorème s'applique évidemment quelles que soient les hypersphères S_1 et S_2 de centre O et de rayon R. Mais, si leurs plans sont perpendiculaires et sans autre point commun que O, il a un aspect déterministe curieux : quoique la distance de S_1 et S_2 soit $R\sqrt{2}$, la moyenne de $X(A)$ sur S_1 détermine la moyenne de cette fonction sur S_2.

Rappelons aussi qu'on définit généralement (avec R. Gâteaux) la moyenne d'une fonction sur S comme la limite, pour n infini, de la moyenne sur la section s_n de cette surface par le plan $Ox_1x_2\ldots x_n$. Même pour une fonction uniformément continue sur S, cette moyenne peut ne pas exister. On pourrait s'attendre à ce qu'*a fortiori*, pour la fonction extraordinairement discontinue qu'est $X(A)$, elle n'existe pas. Mais les sections s_n forment pour S une suite minimisante; il résulte alors du théorème 3 que $\mu(O \mid S)$ est la limite presque sûre de $\mu(O \mid s_n)$.

2° Formons maintenant un des sous-ensembles minimisants dénombrables $\mathcal{E}_\omega$ dont le théorème 2 établit l'existence [8]. Il faut pour cela calculer $\sigma^2 = \sigma^2(O \mid S)$. Il résulte de la formule (9) que

$$\left\{\begin{aligned} \sigma^2 &= E\{[\mu(O \mid S) - X(O)]^2\} = \underset{A\in S}{\mathfrak{M}}\ \underset{B\in S}{\mathfrak{M}}\,\Gamma(A, B) \\ &= R - \frac{1}{2}\underset{A\in S}{\mathfrak{M}}\ \underset{B\in S}{\mathfrak{M}}\, r(A, B), \end{aligned}\right. \tag{16}$$

[8] On peut évidemment prendre pour $\mathcal{E}_\omega$ n'importe quel sous-ensemble dénombrable et partout dense dans S. Mais il est intéressant pour la suite d'en définir un qui n'ait aucun point d'accumulation.

le symbole $\mathfrak{M}$ désignant la moyenne, définie au sens de Gâteaux. Or, pour chaque A fixe, il est bien connu que la surface s_n se concentre à la limite dans l'hyperplan perpendiculaire à OA, de sorte que $r(\mathrm{A}, \mathrm{B})$ est à la limite presque partout égal à $\mathrm{R}\sqrt{2}$. Cette moyenne est donc indépendante de A, et il vient finalement

$$\sigma^2 = \mathrm{R}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right). \tag{17}$$

Considérons maintenant sur S une suite de points A_h, extrémités de rayons deux à deux perpendiculaires, de sorte que, si $h \neq k$, la distance $r(\mathrm{A}_h, \mathrm{A}_k)$ aura exactement la valeur $\mathrm{R}\sqrt{2}$ qui était prépondérante dans le calcul précédent; mais $r(\mathrm{A}_h, \mathrm{A}_h) = 0$. En considérant les n premiers points, la moyenne des n^2 grandeurs $r(\mathrm{A}_h, \mathrm{A}_k)$ est $\left(1 - \frac{1}{n}\right)\mathrm{R}\sqrt{2}$. Pour n infini, cette moyenne tend vers $\mathrm{R}\sqrt{2}$, et, si $\mathcal{E}_\omega$ est l'ensemble de tous les points A_n, on trouve pour $\sigma^2(\mathrm{O} \mid \mathcal{E}_\omega)$ la même valeur (17) que dans le cas de l'hypersphère S [9]. $\mathcal{E}_\omega$ est bien un sous-ensemble minimisant.

5. Le déterminisme de X (A). — Rappelons maintenant le théorème fondamental de notre premier Mémoire.

Théorème 6. — *Si la fonction* X (A) *est connue dans un volume* V, *de l'espace* Ω, *elle est déterminée dans tout l'espace.*

Rappelons aussi la démonstration, qu'il est utile pour la suite d'avoir présente à l'esprit. Soit O un point de V, que nous prendrons pour origine; B étant un point quelconque de Ω, nous prendrons OB, orienté de O vers B, pour axe $\mathrm{O}x_0$, et désignerons par $2\mathrm{R}$ l'abscisse x_0 de B. Désignons par $\mathrm{S}(\theta)$ l'intersection de l'hypersphère Σ de diamètre OB et de l'hyperplan $x_0 = \mathrm{R}(1 - \cos\theta)$. La moyenne $\mathrm{M}(\theta)$ de $\mathrm{X}(\mathrm{A}) - \mathrm{X}(\mathrm{O})$ sur $\mathrm{S}(\theta)$, étant égale à $\mu[\mathrm{O} \mid \mathrm{S}(\theta)]$, est presque sûrement bien déterminée, et sa covariance est

$$\Gamma(\theta, \theta') = \mathrm{E}\{\mathrm{M}(\theta)\,\mathrm{M}(\theta')\} = \mathfrak{M}_{\mathrm{A} \in \mathrm{S}(\theta)}\ \mathfrak{M}_{\mathrm{A}' \in \mathrm{S}(\theta')}\ \frac{r(\mathrm{O}, \mathrm{A}) + r(\mathrm{O}, \mathrm{A}') - r(\mathrm{A}, \mathrm{A}')}{2}. \tag{18}$$

Pour le dernier terme, on retrouve la circonstance déjà signalée; il y a une valeur prépondérante, obtenue lorsque les plans OAB et OA'B sont rectangulaires. On a ainsi

$$\begin{aligned}[\mathfrak{M}\, r(\mathrm{A}, \mathrm{A}')]^2 &= \mathrm{R}^2[(\cos\theta - \cos\theta')^2 + \sin^2\theta + \sin^2\theta'] \\ &= 2\mathrm{R}^2(1 - \cos\theta\cos\theta'),\end{aligned} \tag{19}$$

[9] Dans ce cas, comme dans celui de S, la moyenne de $r(\mathrm{A}, \mathrm{B})$ ne résulte pas d'une compensation entre des valeurs plus petites et des valeurs plus grandes. Une seule valeur est prépondérante, et détermine la moyenne. C'est une circonstance très générale dans l'étude des hypersurfaces; ainsi elle est toujours réalisée pour une hypersurface fermée si la courbure des sections normales est toujours comprise entre deux nombres positifs finis.

et, comme

$$r(\mathrm{O}, \mathrm{A}) = 2\mathrm{R}\sin\frac{\theta}{2}, \qquad r(\mathrm{O}, \mathrm{A}') = 2\mathrm{R}\sin\frac{\theta'}{2},$$

il vient

$$\Gamma(\theta, \theta') = \mathrm{R}\left(\sin\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta'}{2} - \sqrt{\frac{1 - \cos\theta\cos\theta'}{2}}\right). \tag{20}$$

Cette fonction est analytique dans $(0, \pi) \times (0, \pi)$. Il résulte alors d'un théorème de M. Loève que $\mathrm{M}(\theta)$ est presque sûrement analytique. Or, pour θ assez petit, $\mathrm{S}(\theta) \subset \mathrm{V}$ et $\mathrm{M}(\theta)$ est connu. Donc, cette fonction est déterminée dans $(0, \pi)$; donc sa limite $\mathrm{M}(\pi) = \mathrm{X}(\mathrm{B}) - \mathrm{X}(0)$, et par suite $\mathrm{X}(\mathrm{B})$, sont connus,

C. Q. F. D.

2° Ce qui précède est la démonstration donnée dans [1]. Il faut remarquer maintenant qu'on ne change rien à $\mathrm{M}(\theta) = \mu[\mathrm{O} \mid \mathrm{S}(\theta)]$ en remplaçant $\mathrm{S}(\theta)$ par un de ses sous-ensembles minimisants dénombrables. Choisissons à cet effet l'ensemble $\mathcal{E}_\omega$ des points $\mathrm{A}_n(\theta)$, chaque $\mathrm{A}_n(\theta)$ étant le point $x_0 = \mathrm{R}(1 - \cos\theta)$, $x_n = \mathrm{R}\sin\theta$ du plan $\mathrm{O}x_0 x_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Ce sont les extrémités de rayons deux à deux rectangulaires de la sphère $\mathrm{S}(\theta)$, et nous avons vu plus haut que, dans ces conditions, la moyenne des $\mathrm{X}[\mathrm{A}_n(\theta)]$ était bien la moyenne de $\mathrm{X}(\mathrm{A})$ sur la sphère $\mathrm{S}(\theta)$.

L'intérêt de cette remarque est qu'il peut être plus commode, pour les généralisations de ce théorème, de raisonner sur l'ensemble $\mathcal{E}_\omega$ que sur $\mathrm{S}(\theta)$. Remarquons aussi que, grâce à elle, nous arrivons au résultat, pour chaque point B, en n'utilisant qu'une partie des données. Pour chaque indice n, le lieu de $\mathrm{A}_n(\theta)$ est une demi-circonférence C_n. Il suffit donc que $\mathrm{X}(\mathrm{A})$ soit connu sur les intersections $\mathrm{V} \cap \mathrm{C}_n$ pour être déterminé en B. Ce résultat est susceptible de généralisations. Ainsi, on ne change rien d'essentiel en remplaçant les demi-circonférences C_n par des demi-ellipses égales, et il est bien probable que, si l'on considère une infinité de lignes analytiques L_n, partant de O dans des directions deux à deux rectangulaires et se recoupant en B, et si $\mathrm{X}(\mathrm{A})$ est connu sur les intersections $\mathrm{L}_n \cap \mathrm{V}$, $\mathrm{X}(\mathrm{B})$ est bien déterminé.

Cet énoncé de type déterministe est assez curieux. Mais nous n'insisterons pas sur cet aspect du déterminisme de $\mathrm{X}(\mathrm{A})$, parce que les autres aspects de ce déterminisme dont nous allons parler maintenant semblent plus importants.

3° Une extension évidente du théorème 6 est relative au cas d'un hyperplan $\mathrm{P} \subset \Omega$. Bien qu'il ne soit qu'une partie de Ω, aucune propriété intrinsèque ne le distingue de Ω. Par suite, si la fonction $\mathrm{X}(\mathrm{A})$ est connue sur une partie ouverte de P, elle est déterminée dans tout l'hyperplan P.

Une autre extension simple est relative au cas d'une hypersphère S. Le raisonnement fait au 1° subsiste, en effet, presque sans changement : B étant un point quelconque choisi sur S, et Σ étant toujours l'hypersphère de diamètre OB, l'intersection de S et Σ est dans un hyperplan P, et, X(A) étant connu dans une partie ouverte de $P \cap \Sigma$ voisine de O, le raisonnement se termine comme au 1°.

Nous avons ainsi deux exemples simples d'hypersurfaces analytiques S présentant les caractères suivants : $\mathcal{E}$ étant une partie ouverte de S, l'équation $\sigma(A \mid \mathcal{E}) = 0$ définit le prolongement analytique de $\mathcal{E}$ et permet de retrouver S. C'est cette manière d'énoncer les résultats très simples qui précèdent qui nous a conduit à penser qu'il s'agit peut-être d'une propriété générale des hypersurfaces analytiques dans l'espace de Hilbert. Nous établirons tout à l'heure un théorème qui donne une réponse partielle à cette question; il nous faut d'abord présenter quelques remarques générales sur les surfaces analytiques dans cet espace.

6. Surfaces analytiques dans l'espace de Hilbert. — Considérons l'espace Ω comme l'espace produit de deux espaces Ω_1 et Ω_2 orthogonaux et ayant en commun l'origine O. Un point A de Ω est défini par les projections x et y du vecteur OA sur Ω_1 et Ω_2. Une équation $y = f(x)$ définit une surface S qui a le même nombre de dimensions que Ω_1. Si ce nombre a une valeur finie n, nous dirons que S est une *n-surface*; dans ce cas, Ω_2 a une infinité de dimensions. Dans le cas contraire, S est une hypersurface, et le nombre de dimensions de Ω_2 peut être fini ou infini. S'il est fini, nous dirons que S est une *$(\omega - n)$-surface*; s'il est infini, nous dirons que S est une *surface de type doublement infini*.

Désignons par x_ν les composantes de x, et par y_h celles de y. Une fonction $y_h = f_h(x)$ à valeurs scalaires est dite *analytique* dans un volume ouvert $V \subset \Omega_1$ si, pour chaque point $a \in V$, elle admet une série de Taylor $\sum_1^\infty p_n(x - a)$ convergente au moins dans une petite sphère de centre a strictement intérieure à V; $p_n(x)$ représente un polynôme homogène de degré n par rapport aux x_ν; si les x_ν sont un nombre infini, ce polynôme est une série qu'on suppose convergente (si elle l'est dans une sphère, elle l'est dans tout l'espace).

Une fonction vectorielle $y = f(x)$ à un nombre fini de composantes est dite analytique si ses composantes sont analytiques; c'est le cas qui nous intéresse surtout pour la suite. Si le nombre des composantes est infini, il faut ajouter deux conditions supplémentaires : il faut d'abord que les composantes $f_\nu(x)$ soient *également analytiques*, c'est-à-dire qu'en chaque point leurs séries de Taylor aient une même majorante qui soit convergente au moins dans une petite sphère [s'il en est ainsi, la fonction $y = f(x)$ peut être définie dans un domaine d'un espace complexe auquel V est strictement intérieur]. En outre, pour que $y = f(x)$ soit à valeurs dans Ω_2, il faut que $\sum f_h^2(x)$ soit fini, et il est naturel d'exiger de plus que cette fonction soit analytique.

Dans les différents cas possibles, si la fonction $y = f(x)$ est analytique dans V, elle définit une portion s d'une *surface analytique* S, portion dont la projection sur Ω_1 est V. La surface analytique complète s'obtient par le prolongement analytique de s. Bien entendu, on ne se contentera pas de prolonger la fonction $f(x)$ autant qu'il est possible; il faut, en outre, observer que les plans de coordonnées peuvent être changés, et qu'en rapportant à de nouveaux plans les éléments de surfaces obtenus, on a de nouvelles représentations qui peuvent permettre de nouveaux prolongements. *L'ensemble des éléments de surface qu'on peut ainsi obtenir par prolongement de l'élément initial est la surface analytique que nous considérerons.* Elle est donc d'un seul tenant. Nous ne savons pas si le théorème que nous allons maintenant démontrer s'étend aux surfaces analytiques définies par des équations analytiques implicites et ayant plusieurs nappes distinctes.

7. Théorème 7 : le cas des $(\omega - n)$-surfaces. — *Si* S *est une* $(\omega - n)$-*surface analytique et d'un seul tenant, et si la fonction brownienne* X (A) *est connue sur une partie ouverte* $\mathcal{E}$ *de* S, *elle est déterminée sur toute la surface* S.

Il s'agit de montrer qu'il ne peut pas exister sur S une frontière telle que X (A), connu d'un côté de S, soit indéterminé de l'autre. S'il en était ainsi, nous pourrions définir un élément de surface s, coupé par cette frontière, et assez petit pour que les n fonctions $y_h = f_h(x)$ qui le définissent y soient, avec des axes convenablement choisis, représentées par des séries de Taylor convergentes, et par suite majorées par une même série convergente. Comme on peut prendre pour plan des x_ν n'importe quel plan peu différent d'un plan tangent à s, on peut, si s est assez petit, prendre O dans la partie de s où X (A) est connu, B de l'autre côté, et supposer que OB soit l'axe des Ox_0. Soit Σ la sphère de diamètre OB dans le plan Ω_1 ; on peut naturellement supposer encore O et B assez voisins l'un de l'autre pour que cette sphère soit intérieure à la projection de s sur Ω_1.

Désignons par R le rayon de cette sphère, par $A_p(\theta)$ le point

$$x_0 = R(1 - \cos\theta), \qquad x_p = R\sin\theta \tag{21}$$

du plan $Ox_0\,x_p$, et par $B_p(\theta)$ le point de s dont la projection sur Ω est $A_p(\theta)$ [de sorte que $B_p(0)$ est O et que $B_p(\pi)$ est B]. En $A_p(\theta)$, le vecteur

$y = f(x)$ a une valeur $g_p(\theta)$; ses composantes $g_{p,h}(\theta)$ sont, d'après l'hypothèse faite sur $f(\theta)$, des fonctions également analytiques de θ (h variant de 1 à n et p de 1 à ∞). Alors, si $p \neq q$, les distances

$$(22) \qquad r[B_p(\theta), B_q(\theta')] = \left\{ 2R^2(1 - \cos\theta\cos\theta') + \sum_1^n [g_{p,h}(\theta) - g_{q,h}(\theta')]^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

sont dans $(0, \pi) \times (0, \pi)$ des fonctions également analytiques de θ et θ', tandis que

$$(23) \qquad r[B_p(\theta), B_p(\theta')] = \left\{ 4R^2 \sin^2\frac{\theta - \theta'}{2} + \sum_1^n [g_{p,h}(\theta) - g_{p,h}(\theta')]^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

n'est pas analytique pour $\theta = \theta'$.

Considérons maintenant une moyenne de la forme

$$(24) \qquad M_p(\theta) = \sum_{h=1}^n a_{p,h} X[B_h(\theta)],$$

où les coefficients $a_{p,h}$ vérifient les conditions

$$(25) \qquad a_{p,h} \geq 0, \qquad \sum_{n=1}^n a_{p,h} = 1, \qquad \sum_{h=1}^n a_{p,h}^2 = o(1) \qquad (p \to \infty).$$

Compte tenu des formules (9) et (22) à (25), on voit que la covariance

$$(26) \qquad \Gamma_p(\theta, \theta') = E\{M_p(\theta) M_p(\theta')\}$$

contient p^2 termes dont p ne sont pas analytiques. Mais, pour p infini, la somme de ces termes tend vers zéro, et, si $\Gamma_p(\theta, \theta')$ a une limite $\Gamma_\omega(\theta, \theta')$, cette limite, qu'on peut considérer comme la limite de la moyenne de fonctions également analytiques, est analytique. La fonction $M(\theta)$, dont elle est la covariance, est alors presque sûrement analytique, et, comme elle est connue pour θ assez petit, $M(\pi) = X(B)$ est connu. Le théorème est ainsi démontré dans les cas où les limites $\Gamma_\omega(\theta, \theta')$ et $M(\theta)$ existent.

Mais il n'en est pas toujours ainsi. Pour obtenir une moyenne des $X[B_h(\theta)]$ dont l'existence soit presque sûre, nous pouvons utiliser le théorème 3. D'après ce théorème, $\mathcal{E}_\omega(\theta)$ désignant l'ensemble des points $B_h(\theta)$, et $\mathcal{E}_p(\theta)$ l'ensemble des p premiers, $\mu[O \mid \mathcal{E}_p(\theta)]$, qui est une moyenne pondérée des $X[B_h(\theta)]$, tend presque sûrement pour p infini vers la limite bien définie $\mu[O \mid \mathcal{E}_\omega(\theta)]$. Mais, pour cette moyenne, les coefficients $a_{p,h}$ varient en fonction de θ. On peut d'ailleurs démontrer que ce sont des fonctions analytiques. Mais la complication croissante des formules rend le passage à la limite difficile, et il n'est pas évident que $\mu[O \mid \mathcal{E}_\omega(\theta)]$ ait une covariance analytique.

Nous éluderons cette difficulté en remplaçant $\mathcal{E}_\omega(\theta)$ par un de ses sous-ensembles $\mathcal{E}^\star_\omega(\theta)$. Nous avons déjà observé que les fonctions vectorielles $g_p(\theta)$ sont également analytiques; elles forment donc un ensemble compact, et l'on peut choisir une suite partielle d'indices p_ν tels que les fonctions $g_{p_\nu}(\theta) = g^\star_\nu(\theta)$ aient une limite $g^\star(\theta)$ qui, vérifiant les limitations imposées aux $g_p(\theta)$, est analytique ([10]). On peut d'ailleurs supposer la convergence aussi rapide qu'on veut; nous pouvons par exemple, ε étant arbitrairement petit, supposer

$$(27) \qquad \| g^\star_\nu(\theta) - g_\nu(\theta) \| < e^{-\nu}\varepsilon \qquad (\nu = 1, 2, \ldots).$$

Si cette différence était nulle, la moyenne $\mu[\mathrm{O} \mid \mathcal{E}^\star_\omega(\theta)]$ coïnciderait avec la moyenne arithmétique

$$(28) \qquad \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_1^n \mathrm{X}[\mathrm{B}^\star_\nu(\theta)],$$

$\mathrm{B}^\star_\nu(\theta)$ étant le $\nu^{\text{ième}}$ point de l'ensemble $\mathcal{E}^\star_\omega(\theta)$. En fait, nous pouvons seulement affirmer que

$$(29) \qquad \mu[\mathrm{O} \mid \mathcal{E}^\star_\omega(\theta)] = \lim_{n \to \infty} \sum_1^n \frac{1 + \varepsilon_{n,\nu}}{n} \mathrm{X}[\mathrm{B}^\star_\nu(\theta)],$$

$\varepsilon_{n,\nu}$ tendant rapidement vers zéro pour ν infini et $n > \nu$. Or, il est presque sûr que cette limite μ existe, et que

$$(30) \qquad \sum_1^n \frac{\varepsilon_{n,\nu}}{n} \mathrm{X}[\mathrm{B}^\star_\nu(\theta)] \to 0 \quad ([11]).$$

Donc la moyenne (28) existe aussi presque sûrement. Les coefficients étant constants, sa covariance est analytique, et le raisonnement se termine comme dans le cas considéré d'abord.

8. Extensions du théorème 7. — Il s'agit maintenant d'étendre ce théorème au cas où Ω_1 et Ω_2 sont tous les deux des hyperplans. Le raisonnement qui précède ne s'applique pas dans ce cas. Si, en effet, on peut déterminer les p_ν de manière à assurer la convergence faible de $g^\star_\nu(\theta)$ vers une limite, c'est la convergence forte qui est nécessaire pour que la

---

([10]) On choisira d'abord une suite partielle d'indices p tels que $g_p(0)$ ait une limite; dans cette suite, un nouveau choix donnera des indices pour lesquels $g'_p(0)$ ait une limite; et ainsi de suite. Le procédé diagonal conduit alors à une suite de fonctions $g^\star_\nu(\theta)$ ayant une limite $g^\star(\theta)$, et la majoration obtenue pour les fonctions $g_p(\theta)$ et leurs dérivées ne cessant pas de s'appliquer, cette limite est analytique.

([11]) Les $\mathrm{X}[\mathrm{B}^\star_\nu(\theta)]$ sont presque sûrement $\mathrm{O}(\sqrt{\log \nu})$, et, compte tenu de la formule (27), on peut supposer la suite des p_ν telle que $\varepsilon_{n,\nu} = o(2^{-\nu})$.

formule (27) reste applicable. Mais il semble possible de baser l'extension de notre théorème sur une méthode qui n'implique pas la recherche d'une suite partielle ayant une limite. Elle repose toujours sur l'étude d'une moyenne telle que $M_p(\theta)$, et utilise une extension du théorème de Loève d'après laquelle le défaut d'analyticité de $M(\theta)$ est lié au défaut d'analyticité de sa covariance; s'il est assez petit, et si $M(\theta)$ est connu dans un intervalle $(0, \theta_0)$, l'écart type conditionnel de $M(\pi) = X(B)$ est petit. Il n'est alors pas nécessaire que $M(\theta)$ ait une limite pour qu'on puisse conclure que $\sigma(B \mid \mathcal{E}) = 0$.

Précisons d'abord l'extension du théorème de Loève. Soit $\Gamma(\theta, \theta')$ la covariance de $M(\theta)$. Celle de $\frac{d^p M(\theta)}{d\theta^p}$ est $\frac{\partial^{2p}\Gamma(\theta, \theta')}{\partial\theta^p \partial\theta'^p}$, et si

$$\left[\frac{\partial^{2p}\Gamma(\theta, \theta')}{\partial\theta^p \partial\theta'^p}\right]_{\theta'=\theta} \leq f^2(p), \tag{31}$$

on a presque sûrement, en tenant compte de ce que $M(\theta)$ est une fonction laplacienne semi-réduite,

$$\frac{d^p M(\theta)}{d\theta^p} = O[f(p)\sqrt{\log p}] \qquad (p \to \infty), \tag{32}$$

l'existence de cette dérivée résultant de celle des dérivées de $\Gamma(\theta, \theta')$ jusqu'à $\frac{\partial^{2p}\Gamma(\theta, \theta')}{\partial\theta^p \partial\theta'^p}$. L'analyticité de $\Gamma(\theta, \theta')$ entraîne ainsi presque sûrement celle de $M(\theta)$. Une hypothèse un peu moins stricte entraîne des conséquences un peu moins strictes. Ainsi, si $\Gamma(\theta, \theta')$ appartient à une classe de fonctions quasi analytiques (au sens de A. Denjoy et T. Carleman), il en est presque sûrement de même de $M(\theta)$.

Prenons maintenant pour $\mathcal{E}_n(\theta)$ l'intersection du plan $Ox_0 x_1 \ldots x_n$, du plan $x_0 = R(1 - \cos\theta)$, et de la sphère de diamètre OB. Chaque point A de $\mathcal{E}_n(\theta)$ étant la projection d'un point B de la surface s, posons $X(B) = Y(A)$, et prenons pour $M_n(\theta)$ la moyenne de $Y(A)$ sur $\mathcal{E}_n(\theta)$. Sa covariance $\Gamma_n(\theta, \theta')$ peut être considérée comme la moyenne sur $\mathcal{E}_n(\theta')$ d'un potentiel relatif à la surface située sur s et dont la projection sur Ω_1 est $\mathcal{E}_n(\theta)$, la fonction génératrice du potentiel étant $r(O, B) + r(O, B') - r(B, B')$. Cette surface étant à $n - 1$ dimensions, $\Gamma_n(\theta, \theta')$ est $n - 1$ fois dérivable, et il suffit que $n \geqq 2p + 1$ pour que la dérivée $\frac{\partial^{2p}\Gamma_n(\theta, \theta')}{\partial\theta^p \partial\theta'^p}$ existe. Alors $M_n(\theta)$ est presque sûrement p fois dérivable. Ainsi le « défaut d'analyticité » de $M_n(\theta)$ tend vers zéro pour n infini, ce qui conduit à penser qu'on se rapproche de plus en plus des circonstances réalisées pour les fonctions analytiques, et que, si $M_n(\theta)$ est connu dans un intervalle $(0, \theta_0)$, l'écart type conditionnel de $M_n(\pi) = X(B)$ tend vers zéro pour n infini.

Je ne l'ai pas démontré, mais je crois ce résultat exact, et il en résulterait évidemment que $\sigma(B \mid \mathcal{E}) = 0$. Je pense aussi que ce résultat s'étend aux hypersurfaces quasi analytiques. Il y a lieu de remarquer que, s'il en est ainsi, il ne s'agit plus de classes de surfaces caractérisées par des majorations déterminées des fonctions qui les représentent, mais que l'ensemble de ces hypersurfaces serait caractérisé parce que, sur une telle surface S, la fonction X (A) est partout déterminée par la donnée de ses valeurs sur n'importe quelle partie ouverte de S.

On peut aussi essayer d'arriver à une démonstration en prenant pour $M_n(\theta)$ la moyenne arithmétique

$$\frac{1}{n}\sum_{1}^{n} X[B_h(\theta)]. \tag{33}$$

Sa covariance étant la somme d'un terme analytique et d'un terme qui tend vers zéro pour n infini, on peut aussi parler d'un défaut d'analyticité qui tend vers zéro.

9. Les ensembles complets. — 1° Désignons par $\mathcal{K}(\mathcal{E})$ l'ensemble des points où $\sigma(A \mid \mathcal{E}) = 0$, c'est-à-dire l'ensemble des points où la fonction X (A) est déterminée par la donnée de ses valeurs dans $\mathcal{E}$. Si $\mathcal{E} = \mathcal{K}(\mathcal{E})$, l'ensemble $\mathcal{E}$ est dit *complet*. Dans le cas contraire, lui substituer $\mathcal{K}(\mathcal{E})$, c'est le *compléter*.

Il est évident que la fermeture $\overline{\mathcal{E}}$ de $\mathcal{E}$ appartient à $\mathcal{K}(\mathcal{E})$. Les résultats qui précèdent nous permettent de dire que même un ensemble fermé peut n'être pas complet. Mais c'est une circonstance exceptionnelle; le cas où $\mathcal{K}(\mathcal{E})$ coïncide avec $\overline{\mathcal{E}}$ apparaît comme de beaucoup le cas le plus général. On peut même dire que le cas général est celui où $\sigma^2(A \mid \mathcal{E})$ et la distance δ de A à $\overline{\mathcal{E}}$ sont du même ordre de grandeur, le rapport de ces deux nombres étant borné inférieurement et supérieurement.

Il ne semble pas douteux que ces circonstances soient toujours réalisées dans le cas d'une n-surface $y = f(x)$, la fonction $f(x)$ étant continue. Nous allons seulement le démontrer dans le cas d'un ensemble $\mathcal{E}$ situé dans un plan P à n dimensions, à cela près quelconque. Il s'agit de démontrer que, si O est un point de P extérieur à $\mathcal{E}$, $\sigma(O \mid \mathcal{E})$ est positif $\Big[$en dehors du plan P, cela est évident, puisque $\sigma(O \mid \mathcal{E}) \geqq \sigma(O \mid P) = c_n\sqrt{h}$, h étant la distance de O à P, et $c_n^4 > c_\omega^4 = \frac{1}{2}\Big]$. Désignons par R la distance de O à $\overline{\mathcal{E}}$, par S (r) la sphère de centre O et de rayon r, et par $\mathcal{E}'$ l'ensemble des points A pour lesquels $r(O, A) \geqq R$. Comme $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}'$, $\sigma(O \mid \mathcal{E}) \geqq \sigma(O \mid \mathcal{E}')$ et il suffit de montrer que $\sigma(O \mid \mathcal{E}') > 0$, ce qui revient à dire que X (O) n'est pas déterminé par la donnée de X (.) dans $\mathcal{E}'$. Or, M (r) désignant la moyenne de X (A) sur S (r), la loi conditionnelle dont dépend X (O) = M (o) quand X (.) est connu dans $\mathcal{E}'$ ne dépend évidemment que des valeurs de M (r) dans (R, ∞), et l'on sait que la donnée de ces valeurs ne détermine pas cette fonction dans (O, R) [12]; en particulier, M (o) = X (O) reste indéterminé,

C. Q. F. D.

2° Revenons aux hypersurfaces analytiques. Les résultats démontrés au n° 7 ou rendus probables par les remarques du n° 8 peuvent s'énoncer en disant que, si $\mathcal{E}$ est une partie ouverte d'une hypersurface analytique d'un seul tenant S, $\mathcal{K}$ ($\mathcal{E}$) contient S. Il ne semble pas douteux que, d'une manière plus précise, $\mathcal{K}$ ($\mathcal{E}$) coïncide avec S, c'est-à-dire qu'en dehors de S, σ (A | $\mathcal{E}$) soit positif. Cela se vérifie immédiatement dans le cas d'un hyperplan P, puisque $\sigma^2 (\mathrm{A} \mid \mathrm{P}) = \frac{h}{\sqrt{2}}$, h étant la distance de A à P. Si S est la surface d'une sphère de centre O et de rayon R, si σ (A | S), qui ne dépend que de $r = r$ (O, A), s'annulait en un point A tel que $r \neq$ R, il s'annulerait aussi sur la sphère Σ de centre O contenant A, et la moyenne M (r) de X (A) sur cette sphère serait connue, et égale à sa valeur probable conditionnelle M (R). Or, ce n'est pas le cas : dans l'espace de Hilbert, la fonction M (r) est analytique, mais n'est ni constante, ni déterminée par une seule de ses valeurs.

Il n'est guère douteux que ce résultat s'étende à toutes les hypersurfaces analytiques d'un seul tenant. Il y a même lieu de penser que, pour une telle surface S, σ^2 (A | S) est toujours de l'ordre de grandeur de la distance à S.

Nous dirons qu'une surface S constitue un ensemble complet *indivisible* si, quelle que soit la partie ouverte $\mathcal{E}$ de S, $\mathcal{K}$ ($\mathcal{E}$) coïncide avec S. Elle peut donc être reconstituée par le prolongement de n'importe laquelle de ses parties ouvertes. Les résultats qui précèdent peuvent alors s'exprimer en disant que : *les hypersurfaces analytiques et d'un seul tenant sont des ensembles complets indivisibles*. La question suivante se pose alors tout naturellement : y en a-t-il d'autres ?

3° Il faut d'abord examiner le cas des hypersurfaces analytiques, définies par des équations implicites, qui peuvent avoir plusieurs nappes

---

[12] Le prolongement à gauche de M (r), dans le cas $n = 2p + 1$, a été étudié au n° 5.3 de notre communication au Third Berkeley Symposium, 1955, vol. II, p. 133-175. Le cas $n = 2p$, plus difficile, a été étudié depuis séparément par T. Hida et par H. P. Mc Kean. Il y a lieu de remarquer que, un plan P_{2p} pouvant être considéré comme une partie d'un plan P_{2p+1}, l'étude du cas $n = 2p + 1$ suffit pour l'énoncé d'une conclusion générale.

distinctes. Il semble que, dans ces cas, chacune de ces nappes constitue un ensemble complet; l'ensemble n'est pas indivisible. Ainsi, si ε est très petit, la surface

$$[(x_0 - a)^2 + \rho^2][(x_0 + a)^2 + \rho^2] = 4\varepsilon^2 a^4 \qquad \left(\rho^2 = \sum_1^\infty x_\nu^2\right) \tag{34}$$

comprend deux nappes S_1 et S_2, qui sont très peu différentes de deux petites sphères de même rayon εa, la distance de leurs centres étant $2a$. Si alors $A \in S_2$, il y a lieu de penser que $\sigma^2(A \mid S_1)$ diffère très peu de la valeur relative à la petite sphère voisine de S_1, donc de $2a$, et ne peut pas être nul.

4° Il y a d'autres cas dans lesquels $\mathcal{H}(\mathcal{E})$ ne se réduit pas à la fermeture $\overline{\mathcal{E}}$ de $\mathcal{E}$. Reportons-nous pour le voir au théorème 6, et désignons par C_n le lieu du point $A_n(\theta)$ quand θ varie de o à π. Nous avons vu qu'on peut démontrer que X (B) est déterminé, en n'utilisant qu'une partie des hypothèses : il suffit que X (A) soit connu sur toutes les courbes C_n dans un même intervalle (θ_0, θ_1) intérieur à $(0, \pi)$. D'une manière générale, considérons un ensemble de courbes analytiques C_n, aboutissant à un même point B, ayant en ce point des tangentes qui n'appartiennent pas à un même plan à un nombre fini de dimensions. Si le point $A_n(\theta)$ qui décrit C_n dépend analytiquement de θ, il peut arriver que la moyenne (ou une moyenne pondérée) $M(\theta)$ des $X[A_n(\theta)]$ ait une covariance analytique; alors X (B) est déterminé par la donnée de tous les $X[A_n(\theta)]$ dans un même intervalle (θ_0, θ_1). Mais, dans ce cas, il s'agit d'un point B particulier vers lequel les lignes C_n convergent, et non d'une surface sur laquelle X (A) serait connu.

5° Signalons maintenant quelques autres circonstances possibles : désignons par λ l'ensemble de plusieurs paramètres λ_h, et par $S(\lambda)$ une hypersurface analytique dépendant de λ; supposons que la réunion Σ de tous les $S(\lambda)$ ne remplisse pas un volume, et ne contienne pas de surface analytique ou quasi analytique ayant plus de dimensions que chaque surface $S(\lambda)$. Elle constitue un ensemble complet, mais qui n'est pas indivisible. Si, en effet, $\mathcal{E}$ est une partie ouverte de Σ, $\mathcal{H}(\mathcal{E})$ n'est que la réunion de celles des surfaces $S(\lambda)$ qui ont des points communs avec la fermeture $\overline{\mathcal{E}}$ de $\mathcal{E}$.

Considérons encore, dans Ω, la famille des hyperplans P_n définis par les équations $x_1 = \frac{1}{n}$, et dans chaque P_n, la sphère

$$(x_2 - n)^2 + \sum_3^\infty x_\nu^2 < 1. \tag{Σ_n}$$

Si $\mathcal{E}$ est la réunion de ces sphères Σ_n, $\mathcal{K}(\mathcal{E})$ comprend tous les $\mathcal{K}(\Sigma_n)$, c'est-à-dire tous les plans P_n. Mais la réunion $\bigcup \mathcal{K}(\Sigma_n) = \bigcup P_n$ n'est pas un ensemble complet; si, en effet, la fonction X(A) est connue dans tous les P_n, elle est déterminée dans le plan limite $x_1 = 0$. On voit par cet exemple que, si l'on considère une infinité dénombrable d'ensembles $\mathcal{E}_n$, et si $\mathcal{E}$ est leur réunion, la réunion des $\mathcal{K}(\mathcal{E}_n)$ et de $\overline{\mathcal{E}}$ peut n'être qu'une partie de $\mathcal{K}(\mathcal{E})$. Nous pensons qu'au contraire, si le nombre des $\mathcal{E}_n$ est fini, $\mathcal{K}(\mathcal{E})$ coïncide toujours avec la réunion des $\mathcal{K}(\mathcal{E}_n)$.

10. La nature analytique de $\sigma(A \mid \mathcal{E})$. — 1° Étudions d'abord le cas d'un ensemble $\mathcal{E}$ composé de trois points A_1, A_2, A_3. Nous désignerons respectivement par r_i et ρ_i la distance $r(O, A_i)$ et celle des deux points A_j et A_k autres que A_i. $\sigma^2(A \mid \mathcal{E})$ est le minimum de

$$\left\{\begin{aligned} \sigma^2 &= E\{(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \lambda_3 X_3)^2\} \\ &= \lambda_1^2 r_1 + \lambda_2^2 r_2 + \lambda_3^2 r_3 + \lambda_2\lambda_3(r_2 + r_3 - \rho_1) \\ &\qquad + \lambda_3\lambda_1(r_3 + r_1 - \rho_2) + \lambda_1\lambda_2(r_1 + r_2 - \rho_3), \end{aligned}\right. \tag{35}$$

λ_1, λ_2, λ_3 étant liés par la relation

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1. \tag{36}$$

Il est donné par cette relation jointe aux conditions

$$\frac{\partial\sigma^2}{\partial\lambda_1} = \frac{\partial\sigma^2}{\partial\lambda_2} = \frac{\partial\sigma^2}{\partial\lambda_3}. \tag{37}$$

Or, j et k désignant toujours les deux indices autres que i, on a

$$2\frac{\partial\sigma^2}{\partial\lambda_i} = \sum_{h=1}^{3} (r_i + r_h)\lambda_h - \rho_k\lambda_j - \rho_j\lambda_k, \tag{38}$$

d'où, par soustraction, et en tenant compte des équations (33) et (34),

$$r_j - r_i = \rho_k(\lambda_i - \lambda_j) + (\rho_i - \rho_j)\lambda_k. \tag{39}$$

Ces équations, et l'équation (33), donnent

$$\lambda_i D = \rho_i(\rho_j + \rho_k - \rho_i) - 2\rho_i r_i + (\rho_i + \rho_j - \rho_k) r_j + (\rho_i - \rho_j + \rho_k) r_k, \tag{40}$$

avec

$$D = 2(\rho_2\rho_3 + \rho_3\rho_1 + \rho_1\rho_2) - (\rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2). \tag{41}$$

Compte tenu de ce que ρ_1, ρ_2, ρ_3 sont les côtés d'un triangle, D est $\geqq 0$, et ne s'annule que si deux des trois sommets sont confondus. On voit ainsi que les λ_i sont des fonctions linéaires des r_i.

D'après l'équation d'Euler relative à la fonction homogène σ^2, et d'après les formules (36) et (37), $2\sigma^2 = \frac{\partial\sigma^2}{\partial\lambda_1}$, et par suite, compte tenu des formules (38) et (40).

$$\sigma^2 D = -(\rho_1 r_1^2 + \rho_2 r_2^2 + \rho_3 r_3)^2 + r_2 r_3(\rho_2 + \rho_3 - \rho_1) + r_3 r_1(\rho_3 + \rho_1 - \rho_2) + r_1 r_2(\rho_1 + \rho_2 - \rho_3)$$
$$+ (\rho_2 + \rho_3 - \rho_1)\rho_1 r_1 + (\rho_3 + \rho_1 - \rho_2)\rho_2 r_2 + (\rho_1 + \rho_2 - \rho_3)\rho_3 r_3 - \rho_1\rho_2\rho_3.$$

Donc σ^2 est un polynôme du second degré en r_1, r_2, r_3. Mais, les différences $r_i - r_j$ restant bornées quand A s'éloigne indéfiniment, σ^2 n'est (comme il était évident *a priori*) qu'un infiniment grand du premier ordre.

2° Pour un ensemble $\mathcal{E}_n$ de n points, la complication des calculs augmente rapidement avec n. Mais certaines circonstances subsistent : il s'agit de trouver le minimum de l'expression

$$\sigma^2 = E\left\{\left(\sum_1^n \lambda_h X_h\right)^2\right\},$$

compte tenu de $\sum \lambda_h = 1$. Les dérivées $\frac{\partial\sigma^2}{\partial\lambda_i}$ contiennent des termes du second degré par rapport à l'ensemble des variables λ_i et r_i; mais, dans les différences, les λ_i ne figurent dans ces termes que par la combinaison $\sum \lambda_h = 1$, et les équations qui définissent les λ_i restent linéaires par rapport aux λ_i et aux r_i. Les expressions des λ_i sont donc linéaires par rapport aux r_i, et finalement σ^2 est un polynôme du second degré par rapport aux r_i. Mais le nombre des termes augmente avec n, et le déterminant qui remplace D est un polynôme de degré $n - 1$ par rapport aux $\rho_{i,j}$. L'expression de σ^2 devient donc de plus en plus compliquée, et le passage à la limite est difficile. Nous retiendrons seulement le résultat suivant : *dans le cas d'un ensemble fini* $\mathcal{E}_n$, $\sigma^2(A \mid \mathcal{E}_n)$ *est un polynôme du second degré en* $r_1, r_2, \ldots, r_n$ *qui* (d'après le n° 8, 2°) *ne s'annule que dans* $\mathcal{E}_n$; *en dehors de cet ensemble*, σ *est une fonction analytique de* A.

La première partie de cet énoncé ne s'étend pas aux ensembles dénombrables. Les théorèmes 6 et 7 prouvent, en effet, qu'il peut arriver que $\sigma(A \mid \mathcal{E})$ s'annule en des points extérieurs à $\overline{\mathcal{E}}$; or, on peut toujours trouver dans $\mathcal{E}$ un sous-ensemble $\mathcal{E}_\omega$ dénombrable et partout dense dans $\mathcal{E}$. Alors $\sigma(A \mid \mathcal{E}_\omega) = \sigma(A \mid \mathcal{E})$ s'annule aussi en ces points.

3° Pour l'étude de $\sigma(A \mid \mathcal{E})$, comme cette fonction ne change pas si l'on remplace $\mathcal{E}$ par $\mathcal{K}(\mathcal{E})$, nous pouvons supposer que cela soit fait, c'est-à-dire que $\mathcal{E}$ soit un ensemble complet; alors, en dehors de $\mathcal{E}$, $\sigma(A \mid \mathcal{E})$ est toujours > 0. Il semble que cette circonstance entraîne l'analyticité de $\sigma(A \mid \mathcal{E})$ en dehors de $\mathcal{E}$; nous ne l'avons pas démontré.

Les points de $\mathcal{E}$ sont, au contraire, des points singuliers, sauf dans le cas où $\sigma(\mathrm{A} \mid \mathcal{E})$ est identiquement nul; $\sigma(\mathrm{A} \mid \mathcal{E})$ est en effet de l'ordre de grandeur de $\sqrt{\delta}$, δ étant la distance à $\mathcal{E}$. D'une manière précise, on a toujours $\sigma^2 \leqq \delta$. Il n'existe d'ailleurs aucune constante positive c telle qu'on ait toujours $\sigma^2 \geqq c\delta$. Mais une égalité de cette forme est réalisée dans des cas très généraux.

Il résulte de ce qui précède que $\sigma^4(\mathrm{A} \mid \mathcal{E})$ est continu sur $\mathcal{E}$. On démontre aisément que c'est une fonction continue dans tout l'espace. Elle peut être analytique. Elle l'est évidemment dans le cas d'un plan P_n, puisque dans ce cas $\sigma^4 = c_n \delta^2$, c_n décroissant de la valeur $c_0 = 1$ (cas d'un point unique) à $c_\omega = \frac{1}{2}$ (cas de l'hyperplan). Il est probable que, si S est une hypersurface analytique, $\sigma^4(\mathrm{A} \mid \mathrm{S})$ est analytique dans tout l'espace. Au contraire, il n'en est ainsi, ni pour un ensemble de n points $(n > 1)$, ni pour une surface non analytique et constituant un ensemble complet [puisque alors cette surface est définie par $\sigma^4 = 0$].

BIBLIOGRAPHIE.

Paul Lévy :

[1] *Le déterminisme de la fonction brownienne dans l'espace de Hilbert* (*Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, t. 79, 1962, p. 377-398).

[2] *Le mouvement brownien fonction d'un ou de plusieurs paramètres*, Edizioni Cremonese, Roma, 1963, p. 1-78.

[3] *Le déterminisme de la fonction brownienne d'un point de l'espace de Hilbert* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 254, 1962, p. 3962-3964).

[4] *Systèmes laplaciens de variables aléatoires et fonction brownienne définie dans l'espace de Hilbert* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 256, 1963, p. 1444-1446).

[5] *Systèmes laplaciens de variables aléatoires* (*J. Math. pures et appl.*, sous presse).