

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

MAURICE FRÉCHET

Les probabilités nulles et la raréfaction

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 80, n° 2 (1963), p. 139-172

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1963_3_80_2_139_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1963, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LES PROBABILITÉS NULLES ET LA RARÉFACTION

PAR M. MAURICE FRÉCHET.

AVERTISSEMENT. — Ce Mémoire se décompose en deux parties. La première est un court exposé expliquant comment le besoin de classer les probabilités nulles a conduit Borel à la notion de raréfaction.

Dans la seconde partie, nous étudierons et nous généraliserons la notion de raréfaction d'un ensemble de mesure nulle.

Une partie de ce Mémoire a été résumée dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (voir plus loin, p. 172).

CLASSIFICATION DES PROBABILITÉS NULLES. — Émile Borel a été conduit, suivant deux voies distinctes, à la notion de raréfaction d'un ensemble de mesure nulle. Elle s'est trouvée nécessaire pour créer sa célèbre théorie des fonctions monogènes et, d'autre part, pour établir une classification des probabilités nulles. Laissons ici de côté les fonctions monogènes.

Si la loi de répartition d'un nombre aléatoire X compris entre 0 et 1 est uniforme, les probabilités respectives que X appartienne à deux ensembles de nombres E , F sont égales aux mesures de ces ensembles. Si ces ensembles sont de mesure nulle, ces probabilités sont nulles et, par suite, égales. Or il y a des cas où, intuitivement, il est plus probable que X appartienne à E que d'appartenir à F . *Le besoin se fait donc sentir d'établir une échelle entre les probabilités nulles.*

L'esprit innovateur de Borel lui a permis de définir trois telles échelles, non équivalentes, l'une qualitative, les deux autres quantitatives. Dans un autre article, nous rappellerons que Borel a défini un symbolisme des raréfactions (dans le paragraphe 53 de son livre ⁽¹⁾, sous le

⁽¹⁾ *Éléments de la théorie des ensembles* (voir Chap. VI, p. 152-199 et p. 294-301). Albin Michel, Paris, 1949.

titre « Calcul de la raréfaction ») qui semblait se rapporter à la définition primitive. Mais nous montrerons ensuite que ce symbolisme constitue une *quatrième définition* de la raréfaction qui fournit une échelle des raréfactions *plus fine* que celle correspondant à sa première définition.

Mais Borel avait posé ces trois définitions *a priori*, dogmatiquement et elles apparaissaient ainsi comme inattendues et artificielles.

Laissant provisoirement de côté les deux dernières définitions de Borel, nous allons donc essayer d'abord de combler cette lacune et d'indiquer une suite d'idées qui peut conduire intuitivement à la première définition de Borel.

Reprenons notre nombre aléatoire X . Dans une définition intuitive plus générale que la définition habituelle de la probabilité, on peut, sans attribuer à cette probabilité une valeur numérique, convenir de ranger toutes les probabilités dans un ordre linéaire. Désignons par $\Pi(E)$, la probabilité *généralisée* que X appartienne à E . Alors si E appartient à un ensemble G , on considérera comme évident que X tombera au moins aussi probablement dans G que dans F , ou encore que la probabilité généralisée de G ne précède pas celle de E . En symboles, on pourra dire qu'on n'a pas

$$\Pi(G) \prec \Pi(E)$$

ou écrire qu'on a

$$\Pi(E) \succ \Pi(G).$$

On peut, d'après un théorème de Borel, rappelé plus loin, enfermer tout ensemble de mesure nulle E dans une suite dénombrable infinie S d'intervalles distincts $J_1, J_2, \dots, J_n, \dots$ telle que : la série de leurs longueurs soit convergente, et que tout point de E soit intérieur à une infinité de ces intervalles J_n . On peut même supposer que chacun d'eux contienne au moins un point de E à son intérieur. On dira alors que S *majore* E .

On peut de même majorer un autre ensemble de mesure nulle G par une suite T d'intervalles K_n . Soient l_n, L_n les longueurs de J_n, K_n et les séries, convergentes par hypothèse,

$$r_n = l_{n+1} + l_{n+2} + \dots; \quad R_n = L_n + l_{n+1} + \dots$$

Quelle que soit la suite T , si E fait partie de G , la série $\sum L_n$ correspondant à T est convergente. Supprimons de T les intervalles (s'il en existe) auxquels aucun point de E n'est intérieur, on obtiendra ainsi une autre suite S_T dont la série des longueurs est convergente. Tout point de E appartient à une infinité d'intervalles de T qui appartiennent aussi à S_T . Enfin tout intervalle de S_T contient au moins un point de E . Ainsi S_T majore aussi E .

Mais la série des longueurs de S_T résulte d'une amputation de celle des longueurs de T . D'après la page 146, elle converge au moins aussi rapidement que T . Ainsi, quand E appartient à G , aucune suite T majorant G ne converge plus rapidement que toute suite majorant E .

Et, d'autre part, on est conduit, intuitivement, à considérer que la probabilité généralisée de E ne dépasse pas la probabilité généralisée de G

$$\Pi(G) \succeq \Pi(E).$$

Laisant alors de côté le cas particulier où E appartient à G , pour l'inégalité

$$(1) \quad \Pi(E) \succeq \Pi(G),$$

il sera naturel de généraliser l'inégalité (1), comme équivalant à la condition que, quelle que soit la suite T majorant G , il existe une suite S_T majorant E telle que la série s_i des longueurs de S_T converge au moins aussi rapidement que la série t des longueurs de T . Ce qu'on représentera par la notation

$$\text{Rap. } s_i \succeq \text{Rap. } t \quad (3).$$

On en déduirait immédiatement les définitions d'une probabilité *généralisée* plus grande ou plus petite.

Mais de façon à libérer la notion de mesure de celle de probabilité uniforme, Borel a été amené à remplacer l'expression de probabilité généralisée, d'abord par celle de « mesure asymptotique », puis par celle de raréfaction qui, intuitivement, doit varier en sens inverse de la probabilité généralisée. D'ailleurs la notion de l'inégalité de raréfaction, à laquelle nous allons être conduit maintenant, est seulement inspirée de celle de Borel. Pour éviter certaines difficultés, nous avons été amené, en effet, à modifier légèrement, comme on le verra plus loin, les définitions de Borel.

Une généralisation de la raréfaction d'un ensemble de mesure nulle (4).

INTRODUCTION. — Nous avons eu plusieurs fois l'occasion de dire que si, dans l'œuvre d'Émile Borel, on doit admirer combien souvent il a pu venir à bout de démonstrations difficiles, on doit plus encore l'admirer comme un initiateur, que ce soit par ses définitions de la mesure, des fonctions monogènes, des probabilités dénombrables, de la stratégie des joueurs, etc. C'est le même rôle qu'il a joué quand il a eu l'audace d'intercaler, sous le nom de raréfaction, un repérage intermédiaire non

(3) Cette expression sera expliquée p. 154.

(4) Un résumé d'une partie de ce Mémoire a paru sous le même titre dans les *C. R. Acad. Sc.*, t. 252, 1961, p. 1245-1250.

quantitatif, entre les grandeurs d'ensembles distincts quoique de mesures numériquement égales. [Il a même proposé deux raffinements de cette notion (sous les noms de raréfaction relative minimale et de raréfaction logarithmique), dont nous ne nous occuperons pas dans cet article.] Comme dans beaucoup de directions où il a ouvert la voie, il n'a pas exploité à fond le nouveau domaine. Il écrit lui-même: « La théorie de la raréfaction, qui complète celle de la mesure est assez vaste; je souhaiterais qu'elle tentât de jeunes chercheurs ». Il ne semble pas que ce souhait ait été encore exaucé. Peut-être le présent Mémoire pourra-t-il attirer à nouveau l'attention sur ce sujet.

Pour abrégé et simplifier, tous les ensembles de mesure nulle dont il va s'agir seront des ensembles linéaires (c'est-à-dire formés chacun de points d'une même droite illimitée, droite éventuellement variable d'un ensemble à l'autre).

La définition que donne Borel de la raréfaction est inattendue, car on ne voit, au premier abord, aucun rapport entre la petitesse d'un ensemble et la rapidité de convergence d'une série (fut-ce, comme ici, d'une série de longueurs associées à cet ensemble). Nous avons vu plus haut (p. 141), comment, pourtant, on peut y être assez naturellement amené.

Borel écrit (I, p. 163): « Nous avons montré comment on peut définir un ensemble de mesure nulle au moyen d'une série convergente d'intervalles tels que tout point de l'ensemble de mesure nulle est intérieur à une infinité de ces intervalles. Nous conviendrons de dire que l'ensemble de mesure nulle est d'autant plus *raréfié* que la convergence de la série est plus rapide ».

Borel impose trois limitations à cette définition.

Première limitation : « Nous sommes ainsi amené à nous borner aux ensembles de mesure nulle que nous pouvons appeler ensembles B d'après la terminologie de Lebesgue ». Il est certainement intéressant d'étudier, en particulier, les ensembles mesurables B, qui sont plus simples. Toutefois, rien dans la définition citée plus haut n'exclut les ensembles mesurables L, c'est-à-dire au sens de Lebesgue, sauf le mot « définir ». Mais il suffit, pour éviter cette exclusion, de remplacer ainsi les premiers mots de la première phrase de la première citation par les mots suivants : « Nous avons montré que pour qu'un ensemble soit de mesure nulle, il faut et il suffit qu'il existe une suite dénombrable d'intervalles, dont la série des longueurs est convergente et telle que tout point ... ». (Il nous sera commode de dire dans la suite qu'un tel ensemble d'intervalles surcouvre l'ensemble considéré.) Avec cette légère modification, nous pourrions étendre la définition de Borel, des ensembles mesurables B aux ensembles mesurables L.

La seconde limitation apparaît dans la suite de notre première citation. « Il est des cas, comme nous le verrons plus loin, où il est possible pour le même ensemble de mesure nulle de définir plusieurs séries d'intervalles dont l'une converge plus rapidement que les autres; pour définir la raréfaction d'un ensemble de mesure nulle, nous devons supposer qu'on choisit la série qui converge le plus rapidement; . . . , ce qu'il y a de certain, c'est qu'il y a de nombreux exemples où ce choix s'impose et ne peut être modifié; les ensembles de mesure nulle correspondants sont donc classés les uns par rapport aux autres sans aucune ambiguïté. » Ainsi la définition de Borel ne s'applique qu'aux ensembles de mesure nulle pour lesquels, parmi les suites dénombrables d'intervalles qui surcouvrent l'ensemble borné, il y en a une dont la série des longueurs converge plus rapidement que pour les autres suites. [Il est clair, comme nous le verrons plus loin (p. 154) qu'en écrivant « converge plus rapidement », Borel a voulu dire « au moins aussi rapidement ».]

Nous montrerons plus loin qu'il y a au moins un ensemble de mesure nulle pour lequel cette limitation n'est pas respectée. Pour de tels ensembles, la définition de Borel ne s'applique pas. Nous modifierons donc légèrement plus loin sa définition de façon à nous affranchir aussi de cette seconde limitation.

La troisième limitation consiste à écarter les ensembles de mesure nulle pour chacun desquels la série des longueurs des intervalles qui le surcouvrent a une convergence qualifiée par Borel d'*irrégulière*. Il n'est pas nécessaire de préciser ici le sens de ce dernier mot. Car rien dans les citations précédentes de Borel ne fait intervenir cette notion. Les définitions de Borel gardent un sens, ce ne sont que les exemples qu'il donne qui en sont affectés. Nous l'aurions gardée si elle avait été utile dans les démonstrations, ce qui n'est pas le cas. (*Voir* cependant, p. 153.)

CONCLUSION. — En résumé, tout en respectant l'essentiel de l'idée originale de Borel, nous modifierons légèrement ses définitions de façon à nous affranchir de ses trois limitations ⁽⁵⁾. Nous allons ainsi pouvoir définir la comparaison de deux raréfactions et en étudier les propriétés *dans un cas plus général* (en trois directions) que celui de Borel.

De plus, nous établirons (p. 155-168) un certain nombre de propriétés de la raréfaction non mentionnées par Borel.

Nous commencerons par rappeler le théorème ci-dessus de Borel en le précisant un peu.

⁽⁵⁾ La définition de Borel repose sur celle de l'inégalité des rapidités de convergences de deux séries. A la fin de notre Mémoire, nous verrons (p. 168) comment elle est affectée par une définition différente de cette inégalité.

SUITE MAJORANTE. — Par définition, un ensemble E est de mesure nulle (au premier sens adopté par Borel, avant sa restriction aux ensembles B) si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une suite dénombrable S , d'intervalles dont la longueur totale est $< \varepsilon$ et qui « couvre » E , c'est-à-dire que tout point de E est *intérieur* à l'un, au moins, des intervalles de la suite.

Soit ε_n le terme général d'une série convergente à termes positifs. Pour $\varepsilon = \varepsilon_n$, S est une certaine suite Φ_n .

Soit Φ la famille des intervalles appartenant chacun à l'un au moins des Φ_n . La somme des longueurs de la famille dénombrable Φ sera $\leq \sum \varepsilon_n$; la série de ces longueurs est donc convergente. Il en sera de même pour la famille Ψ qu'on obtient quand on supprime de Φ tout intervalle identique à l'un des précédents. Il en sera encore de même pour la famille $\mathcal{F}(E)$ qu'on obtient en supprimant de Ψ tout intervalle auquel aucun point de E n'est intérieur. On peut ranger les intervalles de $\mathcal{F}(E)$ en une suite $S(E)$ dénombrable : I_1, I_2, \dots . Nous conviendrons de dire que $S(E)$ « majore » E , entendant par là que $S(E)$ est une suite infinie dénombrable d'intervalles distincts, dont la série des longueurs est convergente, qui « surcouvre » E en ce sens que tout point de E est intérieur à une *infinité* d'intervalles de $S(E)$ (qui sont distincts), et enfin on suppose aussi que tout intervalle de $S(E)$ a, en son intérieur, au moins un point de E .

Réciproquement, s'il existe une suite Γ d'intervalles $J_1, J_2, \dots, J_p, \dots$ qui majore un ensemble F , F est de mesure nulle. En effet, soit $\varepsilon > 0$; pour n assez grand, le reste $r_n = \omega_n + \omega_{n+1} + \dots$ de la série des longueurs des intervalles de Γ sera $< \varepsilon$. Tout point de F étant intérieur à une infinité d'intervalles de Γ appartient à l'un au moins des intervalles J_n, J_{n+1}, \dots , famille dénombrable dont la longueur totale est $r_n < \varepsilon$. Donc F est de mesure nulle.

Remarque. — Soit $S(E)$ une suite d'intervalles, I_1, I_2, \dots , qui majore un ensemble E . L'ensemble E_1 des points, a , qui sont chacun intérieur à une infinité d'intervalles de $S(E)$ distincts, comprend évidemment E . Par hypothèse, chaque I_n comprend au moins un point a_n de E à son intérieur. La série des longueurs des I_n est convergente, donc la longueur l_n de I_n tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$. Or, pour une infinité de valeurs de n , a appartient à I_n , et par suite $aa_n < l_n$; donc $aa_n \rightarrow 0$: a est limite de points de E . Donc E_1 appartient à la fermeture \bar{E} de E

$$E \subset E_1 \subset \bar{E}.$$

On voit que $E_1 \equiv E$ quand E est fermé ⁽⁶⁾.

(6) Mais quand E n'est pas fermé, E_1 étant comme E_2 de mesure nulle, n'est pas nécessairement distinct de E .

Remarque. — Pour appliquer les définitions précédentes, il sera utile d'étudier d'abord la comparaison des convergences sans s'imposer les limitations de Borel.

Comparaison des convergences.

RAPIDITÉ DE CONVERGENCE. — Soient deux séries convergentes à termes positifs :

$$s = u_0 + u_1 + \dots,$$

$$t = v_0 + v_1 + \dots$$

et posons

$$s_n = u_0 + \dots + u_{n-1}, \quad t_n = v_0 + \dots + v_{n-1}.$$

D'après Borel, s converge *plus rapidement* que t si

(1 bis)
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t - t_n}{s - s_n} = +\infty.$$

Nous écrivons alors

(2)
$$\text{Rap. } s \succ \text{Rap. } t.$$

La condition (1 bis) peut encore s'exprimer en disant que la plus petite des limites de $\frac{t - t_n}{s - s_n}$ est $+\infty$.

Quand on n'a ni (2), ni

(3)
$$\text{Rap. } t \succ \text{Rap. } s,$$

alors la plus petite des limites de $\frac{t - t_n}{s - s_n}$ est finie ≥ 0 et la plus grande des limites est positive (finie ou non). On dira alors que les rapidités de convergence de s et de t sont *du même ordre* et l'on écrira

(4)
$$\text{Rap. } s \approx \text{Rap. } t.$$

Un cas particulier simple où il en est ainsi est celui où, à partir d'un certain rang, $\frac{t - t_n}{s - s_n}$ reste compris, quand n varie, entre deux nombres positifs et finis.

Il en résulte, en particulier, que la relation (4) est vérifiée (comme il le fallait) pour $s \equiv t$.

On voit que pour s et t déterminés, on a toujours *une et une seule* des relations (2), (3) ou (4). De plus, chacune de ces trois relations peut être réalisée par au moins un couple s, t correspondant. On a déjà vu que, quel que soit s , (4) est réalisée pour $t \equiv s$. D'autre part, prenons

$$s \equiv \sum q^n, \quad t \equiv \sum r^n, \quad \text{avec } 0 < \left\{ \begin{matrix} q \\ r \end{matrix} \right\} < 1.$$

On voit immédiatement que pour $q < r$, on a la relation (2) et pour $q > r$, la relation (3).

On voit aussi que pour qu'on ait, soit (2), soit (4), c'est-à-dire pour que s converge au moins aussi rapidement que t , ce qu'on représente par

$$(5) \quad \text{Rap. } s \succ \text{Rap. } t,$$

il faut et il suffit que la plus grande des limites de $\mu_n = \frac{t - t_n}{s - s_n}$ soit positive (finie ou non), autrement dit quand μ_n ne tend pas vers zéro. C'est ce qui a lieu, en particulier, quand μ_n a une borne inférieure positive.

SÉRIE AMPUTÉE. — THÉORÈME. — Si l'on supprime des termes (en nombre fini ou non) dans une série convergente $t = \nu_0 + \nu_1 + \nu_2 + \dots$ à termes positifs, on obtient une série $s = \nu_{n_0} + \nu_{n_1} + \nu_{n_2} + \dots$ qui converge au moins aussi rapidement que la série t .

On a $n_0 < n_1 < n_2 < \dots$, avec $n_a \geq a$ et avec les notations précédentes :

$$s - s_{a-1} = \nu_{n_a} + \nu_{n_{a+1}} + \dots \leq \nu_{n_a} + \nu_{n_{a+1}} + \dots \leq \nu_a + \nu_{a+1} + \dots = t - t_{a-1},$$

d'où

$$\frac{t - t_{a-1}}{s - s_{a-1}} \geq 1$$

et, par suite,

$$\text{Rap. } s \succ \text{Rap. } t.$$

Deux cas de cette relation sont à envisager :

$$(I) : \text{Rap. } s \approx \text{Rap. } t \quad \text{ou} \quad (II) : \text{Rap. } s \succ \text{Rap. } t.$$

Les deux cas peuvent effectivement se présenter comme vont le montrer deux exemples. Dans ceux-ci, l'amputation portera seulement sur les p premiers termes. La série amputée sera $\sum u_n$ avec $u_n = \nu_{n+p}$.

1° Prenons $\nu_n = \frac{1}{n^2}$; alors $u_n = \nu_{n-p} = \frac{1}{(n+p)^2}$, d'où les restes

$$r'_n = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots, \quad r_n = \frac{1}{(n+1+p)^2} + \frac{1}{(n+2+p)^2} + \dots$$

Or

$$1 > \left(\frac{n+a}{n+a+p} \right)^2 > \left(\frac{n}{n+p} \right)^2,$$

donc

$$r'_n > r_n > \left(\frac{n}{n+p} \right)^2 r'_n.$$

Donc $\frac{r'_n}{r_n} \rightarrow 1$ quand $n \rightarrow \infty$. Il en résulte la relation (I).

2° Prenons

$$v_n = \frac{1}{e^{en}}, \quad \text{d'où} \quad \frac{v_{n+a}}{u_{n+a}} = \frac{e^{e^{n+p+a}}}{e^{e^{n+a}}} = e^{e^{n+a}(e^p-1)} > e^{en}.$$

D'où

$$v_{n+a} > e^{en(e^p-1)} u_a = [e^{(e^p-1)}]^n u_{n+a}.$$

Donc

$$\frac{r'_n}{r_n} = \frac{v_{n+1} + v_{n+2} + \dots}{u_{n+1} + u_{n+2} + \dots} > [e^{(e^p-1)}]^n \rightarrow \infty, \quad \text{avec } n.$$

Ainsi la série amputée s converge, dans ce cas, plus rapidement que la série primitive t .

CHANGEMENT DE L'ORDRE DES TERMES (1). — I. Considérons une série $s = u_1 + u_2 + \dots$ convergente et à termes > 0 . On sait que si l'on change l'ordre de ses termes, on obtient encore une série convergente à termes > 0 et avec la même somme

$$s = U_1 + U_2 + \dots$$

Comparons leurs rapidités de convergence et, pour cela, étudions le rapport

$$\frac{R_n}{r_n} = \frac{U_{n+1} + U_{n+2} + \dots}{u_{n+1} + u_{n+2} + \dots}.$$

Nous allons d'abord considérer un exemple.

Prenons le cas particulier où le changement consiste à permuter certains couples des u_j , plus précisément à permuter les termes de rangs pairs $2p$ avec certains termes de rangs impairs, ceux de la forme 3^p .

La série $\sum U_n$ sera

$$u_1 + u_3 + u_2 + u_9 + u_5 + u_{27} + u_7 + u_{81} + u_4 + \dots + u_6 + \dots + u_8 + \dots$$

On a

$$R_n - r_n = (U_{n+1} + U_{n+2} + \dots) - (u_{n+1} + u_{n+2} + \dots).$$

Or on a $2p < 3^p$. Dans le changement de rangs, la différence $R_n - r_n$ n'est affectée ni par les permutations entre les termes de $s_n = u_1 + \dots + u_n$, ni par celles entre les termes de r_n . $R_n - r_n$ est égal à la somme des termes de la forme $u_{2p} - u_{3^p}$ pour lesquels un terme de s_n est permuté avec un terme de r_n , de sorte que

$$(6) \quad 2p \leq n < 3^p.$$

(1) Peut-être certains résultats de ce paragraphe ont-ils été déjà publiés, mais je n'en ai pas vu la référence.

Puisque $p \leq \frac{n}{2}$, il n'y a, pour n donné, qu'un nombre limité de ces termes p variant de $\omega(n)$ à $\Omega(n)$. D'où

$$R_n - r_n = \sum_{p=\omega(n)}^{p=\Omega(n)} (u_{2p} - u_{3p}).$$

Les relations (6) peuvent s'écrire

$$\frac{\log n}{\log 3} < p \leq \frac{n}{2}$$

$\omega(n) - 1$ est la partie entière de $\frac{\log n}{\log 3}$ et $\Omega(n)$ est la partie entière de $\frac{n}{2}$.

Considérons le cas particulier de la série

$$s = 1 + q + q^2 + \dots + q^n + \dots, \quad \text{avec } 0 < q < 1.$$

On aura

$$r_n = \frac{q^n}{1 - q},$$

$$R_n - r_n = \sum_p (q^{2p} - q^{3p}).$$

Posons $\lambda_n = \frac{R_n - r_n}{r_n}$, on aura

$$\lambda_n = (1 - q) \sum_p q^{2p-n} (1 - q^{3p-2p}) > (1 - q) \sum_p (1 - q^{3p-2p}).$$

D'autre part,

$$\sum_{p=\omega(n)}^{\Omega(n)} (1 - q^{3p-2p}) = [\Omega(n) - \omega(n) + 1] - S_n,$$

avec

$$S_n = \omega'(n) + \dots + \Omega'(n),$$

où

$$\Omega'(n) \equiv q^{3^{\Omega(n)-2\omega(n)}} > q^{3^{\Omega(n)-2\Omega(n)}} = \omega'(n).$$

Donc

$$S_n < q^{3^{\Omega(n)-2\omega(n)}} [\Omega(n) - \omega(n) + 1],$$

$$(7) \quad \lambda_n > (1 - q) [\Omega(n) - \omega(n) + 1] \left[1 - q^{3n-2 \frac{\log n}{\log 3} - 2} \right].$$

Or

$$\Omega(n) - \omega(n) + 1 > \frac{n}{2} - \frac{\log n}{\log 3} - 2.$$

Dans (7), le premier crochet tend donc vers l'infini et le second vers 1.

D'où

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty.$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R_n}{r_n} = \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R_n - r_n}{r_n} \right] + 1 = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n \right) + 1 = +\infty.$$

Dès lors, d'après la définition de Borel, la série $\sum q^n$ converge plus rapidement que la série $\sum U_n$ obtenue par un certain changement de l'ordre des termes de la série $\sum q^n$.

Naturellement si le changement inverse est opéré sur $\sum U_n$, ce sera la série obtenue, $\sum q^n$, qui converge plus rapidement que la série primitive.

Ainsi, en modifiant l'ordre des termes d'une série, il arrive qu'on peut rendre, soit moins rapide, soit plus rapide, sa convergence.

II. Dès lors, il est naturel de chercher si, parmi les changements, il en est au moins un qui réalise la plus grande rapidité de convergence. C'est ce qui a lieu, comme nous allons le montrer.

Soit donc $s = u_1 + u_2 + \dots$ une série convergente quelconque à termes > 0 . Ses termes sont bornés dans leur ensemble.

Le nombre de ceux qui sont $\geq \varepsilon$ est fini. Il n'est pas nul, si l'on prend $\varepsilon < u_1$. Le plus grand d'entre eux, u , est aussi le plus grand des termes de toute la série. Appelons ν_1 ce terme s'il est seul, et appelons ν_1 le premier d'entre eux s'il y en a plusieurs. En enlevant ν_1 , on a encore une série convergente à termes > 0 . Appelons ν_2 le premier de ceux qui sont égaux au plus grand terme de la nouvelle série. En continuant de même, on voit qu'on obtiendra une série $\sum \nu_n$ dont les termes vont sans croître et qui s'obtient par un changement convenable de l'ordre des termes de la série s . On sait que cette série est convergente et a pour somme s . En appelant U et V les deux séries mentionnées, nous allons montrer que *la seconde série, V , converge au moins aussi rapidement que la première* [l'exemple traité précédemment où $u_n = q^n$ ($0 < q < 1$) a montré qu'il peut même arriver que V converge plus rapidement que U].

En effet, on a $u_n \equiv \nu_{p_n}$, où la suite des p_n s'obtient par un changement de l'ordre des termes de la suite $1, 2, \dots, n, \dots$.

Soit q_n le plus grand des indices distincts p_1, p_2, \dots, p_n . Si $q_n = n$, p_1, p_2, \dots, p_n est une permutation de $1, 2, \dots, n$ et l'on a

$$\nu_1 + \dots + \nu_n = u_1 + \dots + u_n,$$

d'où pour les restes ρ_n, r_n correspondants, $\rho_n = r_n$.

Si $q_n \neq n$, on a nécessairement $q_n > n$. Alors dans la somme $\varphi_{p_1} + \dots + \varphi_{p_n}$, il y a peut-être des termes appartenant à $\varphi_1 + \dots + \varphi_n$, mais il y en a d'autres qui, étant placés après φ_n sont inférieurs ou égaux à tous les termes de $\varphi_1 + \dots + \varphi_n$. On a alors dans ce cas

$$u_1 + \dots + u_n \leq \varphi_1 + \dots + \varphi_n \quad \text{et, par suite,} \quad \rho_n \leq r_n.$$

Ainsi dans tous les cas $\frac{r_n}{\rho_n} \geq 1$. Ce rapport ne tend pas vers zéro, donc la série $\sum \varphi_n$ converge au moins aussi rapidement que la série $\sum u_n$.

TRANSITIVITÉ. — I. Si l'on a trois séries convergentes à termes > 0 , s , t , σ , telles que

$$(8) \quad \text{Rap. } s \succ \text{Rap. } t \quad \text{et} \quad \text{Rap. } t \succ \text{Rap. } \sigma$$

les rapports des restes $\frac{t-t_n}{s-s_n}$ et $\frac{\sigma-\sigma_n}{t-t_n}$ doivent tendre vers $+\infty$ et, par suite, aussi $\frac{\sigma-\sigma_n}{s-s_n}$, donc

$$(9) \quad \text{Rar. } s \succ \text{Rar. } \sigma$$

Ainsi la relation (2) est transitive.

II. Par contre, la relation (4) n'est pas transitive. On peut le montrer par un contre-exemple.

Prenons

$$s - s_n = e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}, \quad \sigma - \sigma_n = e^{-n^2}$$

On aura bien

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma - \sigma_n}{s - s_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{2} + n} \rightarrow \infty.$$

Prenons, en outre,

$$t - t_n = \begin{cases} s - s_n & \text{pour } n \text{ pair,} \\ \sigma - \sigma_n & \text{pour } n \text{ impair,} \end{cases}$$

d'où

$$(10) \quad \frac{t - t_n}{s - s_n} = \begin{cases} 1 & \text{pour } n \text{ pair,} \\ \frac{\sigma - \sigma_n}{s - s_n} & \text{pour } n \text{ impair.} \end{cases}$$

Les trois séries, s , σ , t sont évidemment convergentes.

Le premier quotient dans (10) aura pour plus petite limite 1 $\neq \begin{cases} 0 \\ +\infty \end{cases}$, donc

$$(11) \quad \text{Rap. } t \approx \text{Rap. } s.$$

De même,

$$\frac{\sigma - \sigma_n}{t - t_n} = \begin{cases} \frac{\sigma - \sigma_n}{s - s_n} & \text{pour } n \text{ pair,} \\ 1 & \text{pour } n \text{ impair,} \end{cases}$$

d'où

(12) $\text{Rap. } \sigma \approx \text{Rap. } t.$

Et toutefois, $\frac{\sigma - \sigma_n}{s - s_n} \rightarrow +\infty$, d'où

$\text{Rap. } s \succ \text{Rap. } \sigma.$

Cependant, pour justifier le résultat, il faut vérifier que s, t, σ sont bien des séries à termes > 0 , que par exemple, si l'on pose

$$\begin{aligned} s_n &= u_1 + u_2 + \dots + u_n, \\ u_n &= (s - s_{n-1}) - (s - s_n), \end{aligned}$$

on a $u_n > 0$.

Il suffit pour cela que $s - s_n$ aille en décroissant, ce qui est bien le cas. Il en est de même pour $\sigma - \sigma_n$.

Pour $t - t_n = v_{n+1} + v_{n+2} + \dots$, on a

$$v_n = (t - t_{n-1}) - (t - t_n),$$

d'où

$$\begin{aligned} v_{2p} &= (\sigma - \sigma_{2p-1}) - (s - s_{2p}) = e^{-(2p-1)^2} - e^{-\left(2p+\frac{1}{2}\right)^2} > 0, \\ v_{2p+1} &= (s - s_{2p}) - (\sigma - \sigma_{2p+1}) = e^{-\left(2p+\frac{1}{2}\right)^2} - e^{-(2p+1)^2} > 0. \end{aligned}$$

Remarque. — La relation (4) peut redevenir transitive si l'on soumet les trois séries s, t, σ à des restrictions convenables.

I. Il y a un premier cas où l'on retrouve la transitivité de (4). C'est celui où l'on donne un sens plus strict à l'égalité (4), à savoir où l'on suppose qu'à partir d'un certain rang n , les rapports des restes pour les trois séries s, t et t, σ , soient $\frac{r_n}{\rho_n}$ et $\frac{\rho_n}{\nu_n}$ restent chacun compris entre deux nombres positifs et fixes : a, b et α, β . Alors

$$0 < a\alpha < \frac{r_n}{\nu_n} = \frac{r_n}{\rho_n} \frac{\rho_n}{\nu_n} < b\beta,$$

de sorte que $\frac{r_n}{\nu_n}$ ne tend ni vers zéro ni vers l'infini et que, par suite, on a bien

(13) $\text{Rap. } s \approx \text{Rap. } \sigma.$

Un cas particulier de l'hypothèse précédente, est celui où l'on est conduit quand on adopte la troisième condition de Borel (qui nous sera inutile dans tout notre Mémoire, en dehors du problème actuel).

Borel suppose que toutes les séries qu'il considère sont à convergence régulière. La définition de la régularité est plus précise qu'il ne nous sera nécessaire.

Nous supposons d'abord définie une certaine famille \mathcal{F} de fonctions λ_n de n positives et tendant vers zéro avec $\frac{1}{n}$. Nous appellerons les fonctions λ_n des *fonctions simples* [ce seront, par exemple, les fonctions $\frac{1}{n^p}$ ($p > 0$), $e^{-\frac{1}{n}}$, ...].

Ceci étant, pour qu'une fonction r_n positive tendant vers zéro avec $\frac{1}{n}$ soit dite à *convergence régulière*, il faudra qu'il existe une fonction simple λ_n , telle qu'à partir d'un certain rang, le rapport $\frac{r_n}{\lambda_n}$, reste compris entre deux nombres positifs fixes a et b . Nous dirons que deux fonctions de n , f_n , g_n sont « du même type de convergence », lorsque leur rapport $\frac{f_n}{g_n}$ reste aussi compris, pour n assez grand, entre deux nombres positifs fixes. Alors nous pourrions dire :

Si les restes r_n , f_n , ν_n sont à notre sens, à convergence régulière, c'est-à-dire s'il existe trois fonctions de n simples λ_n , μ_n , δ_n , qui soient respectivement des mêmes types de convergence que r_n , ρ_n , ν_n , alors : 1° Pour qu'on ait les relations

$$\text{Rap. } r \approx \text{Rap. } t \quad \text{et} \quad \text{Rap. } t \approx \text{Rap. } \sigma,$$

c'est-à-dire pour que

$$\frac{\rho_n}{r_n} \quad \text{et} \quad \frac{\nu_n}{\rho_n}$$

ne tendent, ni vers zéro, ni vers l'infini, il est clair qu'il suffit que $\frac{\mu_n}{\lambda_n}$ et $\frac{\nu_n}{\mu_n}$ ne tendent ni vers zéro ni vers l'infini, ce qui a lieu, en particulier, quand λ_n , μ_n et ν_n sont du même type de convergence.

2° Quand cette dernière condition est remplie, alors $\frac{\rho_n}{r_n}$ et $\frac{\nu_n}{\rho_n}$ restent compris entre deux nombres positifs et fixes, et l'on a vu qu'alors on a encore

$$(14) \quad \text{Rap. } s \approx \text{Rap. } \sigma.$$

II. Il peut être utile d'observer que si pour trois séries s , σ , t convergentes à termes positifs, on a

$$\text{Rap. } s \succ \text{Rap. } t \quad \text{et} \quad \text{Rap. } t \succ \text{Rap. } \sigma,$$

alors

$$(15) \quad \text{Rap. } s \succ \text{Rap. } \sigma.$$

Car on aura

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma - \sigma_n}{t - t_n} = +\infty,$$

et il y aura une suite n_1, n_2, \dots , d'entiers croissants, telle que

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{t - t_{n_p}}{s - s_{n_p}} = M > 0 \quad (M \text{ fini ou non}).$$

Dès lors, on aura

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\sigma - \sigma_{n_p}}{s - s_{n_p}} = +\infty,$$

d'où (14). Il en serait de même, si l'on avait

$$\text{Rap. } s \succ \text{Rap. } t \quad \text{et} \quad \text{Rap. } t \succ \text{Rap. } \sigma.$$

(Rappelons que pour que $\text{Rap. } s \succ \text{Rap. } \sigma$, il suffirait que $\lim \frac{\sigma - \sigma_n}{s - s_n}$ soit positive. On trouve ici un renseignement supplémentaire, on a $\overline{\lim} \frac{\sigma - \sigma_n}{s - s_n} = +\infty$.)

Remarque. — Si s, σ et t étaient des nombres > 0 , alors, des relations

$$s > t \quad \text{et} \quad t \geq \sigma,$$

on déduirait

$$s > \sigma.$$

Par analogie, on peut se demander si l'on ne pourrait préciser le résultat ci-dessus et conclure non seulement qu'on a (14) mais, même, qu'on a

$$(16) \quad \text{Rap. } s \succ \text{Rap. } \sigma.$$

L'exemple précédent (p. 150) montre que cette relation n'est pas une conséquence nécessaire. Car, dans cet exemple, on a pour les séries s, σ, t

$$\text{Rap. } s \succ \text{Rap. } \sigma, \quad \text{Rap. } \sigma \approx \text{Rap. } t,$$

et seulement

$$\text{Rap. } s \approx \text{Rap. } t,$$

ce qui exclut

$$\text{Rap. } s \succ \text{Rap. } t.$$

Remarque. — Toutefois, dans cet exemple, t a une convergence « irrégulière ». Or il serait intéressant de chercher si, oui ou non, la conséquence (15) est toujours vérifiée quand les convergences de s, σ, t sont « régulières », c'est-à-dire quand on s'impose la troisième limitation de Borel.

Comparaison des raréfactions.

INTERPRÉTATION DE LA SECONDE LIMITATION. — Borel ne définit l'inégalité de raréfaction que pour des ensembles E , de mesure nulle tels qu'il existe, au moins, une suite $S_0(E)$ d'intervalles majorant E qui converge « plus rapidement » que toutes les autres suites majorant E .

Soit, dans ce cas, $S'_0(E)$, la suite obtenue en remplaçant chaque intervalle I_n de $S_0(E)$ par un intervalle I'_n ayant même milieu et dont la longueur est c fois celle de I_n ($c > 1$). Les intervalles I'_1 seront distincts comme les intervalles I_n .

Il est clair que $S'_0(E)$ majorera E comme $S_0(E)$, et sera distinct de $S_0(E)$. Par définition de $S_0(E)$, $S_0(E)$ devrait converger plus rapidement que $S'_0(E)$; or le rapport des restes des séries correspondant à $S_0(E)$ et $S'_0(E)$ reste égal au nombre fini c au lieu de tendre vers l'infini. Il y a donc contradiction.

Ainsi, la seconde limitation de Borel, *prise littéralement*, n'est pas possible. Mais il est évident que Borel a voulu dire que $S_0(E)$ *doit converger* au moins aussi *rapidement que toute suite* $S(E)$ *majorant* E . C'est cette interprétation que nous donnerons à la seconde limitation de Borel.

RARÉFACTION. — I. Borel écrit (p. 163) : « Nous avons montré comment on peut définir un ensemble de mesure nulle au moyen d'une série convergente d'intervalles tels que tout point de l'ensemble de mesure nulle est intérieur à une infinité de ces intervalles. Nous conviendrons de dire que l'ensemble de mesure nulle est d'autant plus *raréfié* que la convergence de la série est plus rapide. »

Il a lieu d'observer que lorsqu'on cherche à définir l'ensemble de mesure nulle comme ci-dessus, c'est *non pas*, au moyen d'une série d'intervalles, mais au moyen d'un *ensemble dénombrable* d'intervalles, dont l'ordre importe peu, au point de vue géométrique. Mais quand on veut introduire la rapidité de convergence, il faut ordonner cet ensemble dénombrable d'intervalles en une suite. Or, on peut le faire d'une infinité de manières et nous avons vu (p. 149) qu'il peut arriver que, parmi les séries de longueurs d'intervalles correspondant à un même ensemble dénombrable d'intervalles, il y en ait une qui converge plus rapidement qu'une autre. Il n'y a donc pas à parler de la série dont la convergence est plus rapide que la série correspondant à un autre ensemble de mesure nulle. D'autant que, non seulement, on a à exercer un choix parmi les séries correspondant à un même ensemble d'intervalles, mais il y a *aussi* à exercer un choix parmi les *divers* ensembles d'intervalles qui majorent l'ensemble de mesure nulle considéré. C'est ici qu'intervient la seconde limitation de Borel.

Or cette seconde limitation est *effective*. Il suffit de citer un contre-exemple. Nous prendrons le plus simple : un ensemble E réduit à un point a . Si cet ensemble (de mesure nulle) relevait de la seconde limitation, il existerait une suite $S_0(a)$ d'intervalles majorant $E \equiv a$ qui converge au moins aussi rapidement que toute suite $S(a)$ majorant a . $S_0(a)$ est une suite d'intervalles auxquels a est intérieur et dont la série des longueurs de ces intervalles, soit $u_1 + u_2 + \dots$, est convergente. Prenons pour $S(a)$ une suite majorante a mais dont la série des longueurs est $\frac{u_1}{2} + \frac{u_2}{2^2} + \dots + \frac{u_n}{2^n} + \dots$. Les restes correspondants sont

$$r_n^0 = u_{n+1} + u_{n+2} + \dots,$$

$$r_n = \frac{u_{n+1}}{2^{n+1}} + \frac{u_{n+2}}{2^{n+2}} + \dots < \frac{r_n^0}{2^{n+1}}.$$

Donc

$$\frac{r_n^0}{r_n} > 2^{n+1} \rightarrow \infty,$$

de sorte que la série correspondant à $S(a)$ converge plus rapidement que celle qui correspond à $S_0(a)$, contrairement à l'hypothèse.

Ainsi, un ensemble de mesure nulle réduit à un point *ne relève pas de la seconde limitation de Borel*, alors que cet exemple n'est pas exclu par Borel (dans son livre, p. 187).

II. Soient deux ensembles de mesure nulle E, F. Borel définit l'inégalité de raréfaction en supposant que E, F sont soumis chacun à sa seconde limitation. Il y a donc deux suites fixes $S_0(E)$, $S_0(F)$ majorant E, F respectivement, qui convergent respectivement au moins aussi rapidement que deux suites respectives quelconques $S(E)$, $S(F)$ majorant E, F. Borel dit alors que E est plus raréfié que F si $S_0(E)$ converge plus rapidement que $S_0(F)$. Mais nous avons vu que la seconde limitation est effective.

Nous allons chercher à l'éviter. A cet effet, observons que, d'après la définition de Borel, on a

$$\text{Rap. } S_0(E) \succ \text{Rap. } S_0(F) \succ \text{Rap. } S(F).$$

On a vu qu'alors,

$$\text{Rap. } S_0(E) \succ \text{Rap. } S(F).$$

$S_0(E)$ converge *au moins aussi* rapidement que $S(F)$. Cette condition nécessaire de la plus grande raréfaction (au sens de Borel) n'est pas suffisante. Nous allons donc la renforcer en exigeant que $S_0(E)$ converge *plus* rapidement que $S(F)$ tout en abandonnant la restriction de Borel au cas où $S_0(E)$ convergerait au moins aussi rapidement que $S(E)$. Nous arrivons

donc à la définition suivante qui, restant dans le sillage de la définition de Borel, s'en écarte pour en étendre l'application.

III. NOUVELLE DÉFINITION. — Nous dirons que l'ensemble E est plus raréfié que l'ensemble F, s'il existe au moins *une* suite d'intervalles majorant E, soit $S_1(E)$ qui converge plus rapidement que *toute* suite d'intervalles majorant F, soit $S(F)$. Et nous écrirons

$$(15) \quad \text{Rar. } E \succ \text{Rar. } F.$$

Cette relation est incompatible avec la relation inverse

$$(16) \quad \text{Rar. } F \succ \text{Rar. } E.$$

Car, avec des notations évidentes, on aurait

$$(17) \quad \text{Rap. } S_1(E) \succ \text{Rap. } S(F),$$

$$(18) \quad \text{Rap. } S_1(F) \succ \text{Rap. } S(E).$$

d'où, en particulier,

$$(19) \quad \text{Rap. } S_1(E) \succ \text{Rap. } S_1(F).$$

Ces relations étant transitives (p. 150), on aurait

$$\text{Rap. } S_1(E) \succ \text{Rap. } S(E),$$

et, en particulier,

$$\text{Rap. } S_1(E) \succ \text{Rap. } S_1(E),$$

ce qui est évidemment impossible.

Quand, pour E, F, donnés, on n'a ni (15), ni (16), nous dirons que les raréfactions de E et de F sont *du même ordre* et nous écrirons

$$(20) \quad \text{Rar. } E \approx \text{Rar. } F.$$

Il est clair que, pour E, F donnés, on a *une et une seule* des relations (15), (16), (20).

Nous dirons que E est *au moins aussi raréfié* que F si F n'est pas plus raréfié que E. Alors, quelle que soit la suite majorante $t = S(F)$, il existe au moins une suite majorante $S_t(E)$ telle que $S(F)$ ne converge pas plus rapidement que $S_t(E)$, c'est-à-dire que

$$\text{Rap. } S_t(E) \succeq \text{Rap. } S(F).$$

Inversement, soient G, H deux ensembles de mesures nulles tels que, pour tout $t \equiv S(H)$, il existe $S_t(G)$ pour lequel

$$(21) \quad \text{Rap. } S_t(G) \succeq \text{Rap. } S(H).$$

Peut-on avoir en même temps

$$(22) \quad \text{Rar. H} \succ \text{Rar. G?},$$

C'est-à-dire, existe-t-il un $S_1(H)$ tel que

$$(23) \quad \text{Rap. } S_1(H) \succ \text{Rap. S(G)}$$

pour tout $S(G)$?

Alors, en particulier,

$$(24) \quad \text{Rap. } S_1(H) \succ \text{Rap. } S_t(G).$$

Posons $t_1 = S_1(H)$ et $S_0(G) = S_{t_1}(G)$, on tirerait de (21)

$$(25) \quad \text{Rap. } S_0(G) \succ \text{Rap. } S_1(H)$$

et, de (23),

$$(26) \quad \text{Rap. } S_1(H) \succ \text{Rap. } S_0(G).$$

Or, par définition, (25) exprime que (26) n'a pas lieu, d'où contradiction entre ces deux inégalités et, par suite, contradiction entre (21) et (22).

THÉORÈME. — Finalement, on voit que : pour que

$$\text{Rar. G} \succ \text{Rar. H},$$

il faut et il suffit qu'à toute suite $t \equiv S(H)$ majorant H , soit associée au moins une suite $S_t(G)$ majorant G telle que

$$\text{Rap. } S_t(G) \succ \text{Rap. S(H)}.$$

TRANSITIVITÉ. — I. Si l'on a

$$(27) \quad \text{Rar. E} \succ \text{Rar. F} \quad \text{et} \quad \text{Rar. F} \succ \text{Rar. G}$$

il existe $S_1(E)$ et $S_1(F)$ tels que

$$(28) \quad \text{Rap. } S_1(E) \succ \text{Rap. S(F)} \quad \text{et} \quad \text{Rap. } S_1(F) \succ \text{Rap. S(G)}$$

quels que soient les $S(F)$, $S(G)$ majorant F et G respectivement. D'où

$$(29) \quad \text{Rap. } S_1(E) \succ \text{Rap. } S_1(F).$$

La relation (29) est transitive; en combinant (28) et (29), on a donc

$$(30) \quad \text{Rap. } S_1(E) \succ \text{Rap. S(G)},$$

d'où

$$(31) \quad \text{Rar. E} \succ \text{Rar. G}.$$

Ainsi les relations (27) sont transitives.

II. La remarque suivante est souvent utile :

Si

$$\text{Rar. E} \succ \text{Rar. F} \quad \text{et} \quad \text{Rar. F} \succ \text{Rar. G},$$

on a

$$(32) \quad \text{Rar. E} \succ \text{Rar. G}.$$

Car, avec les notations précédentes,

$$(33) \quad \text{Rap. S}_1(\text{E}) \succ \text{Rap. S}(\text{F})$$

et

$$(34) \quad \text{Rap. S}_u(\text{F}) \succ \text{Rap. S}(\text{G}), \quad \text{où } u = \text{S}(\text{G}),$$

(33) donne, en particulier,

$$(35) \quad \text{Rap. S}_1(\text{E}) \succ \text{Rap. S}_u(\text{F}).$$

En combinant (34) et (35), on a d'après la page 142,

$$\text{Rap. S}_1(\text{E}) \succ \text{Rap. S}(\text{G}),$$

d'où (32).

Ici, on a un résultat plus précis que le résultat (31) annoncé. Car on peut prendre $\text{S}_u(\text{E}) \equiv \text{S}_1(\text{E})$ indépendant de u .

COMPARAISON DES DEUX DÉFINITIONS. — Plaçons-nous d'abord dans le cas où la seconde limitation de Borel s'applique à deux ensembles E, F et comparons les deux définitions de la raréfaction.

Supposons qu'on ait, à notre sens,

$$(15) \quad \text{Rar. E} \succ \text{Rar. F}$$

et, par suite, comme plus haut,

$$(33) \quad \text{Rap. S}_1(\text{E}) \succ \text{Rap. S}(\text{F}).$$

La seconde limitation de Borel consiste à supposer que, parmi les suites S(E) d'intervalles qui majorent E, il en existe au moins une $\text{S}_0(\text{E})$ qui converge au moins aussi vite que toutes les autres. On aura, en particulier :

$$(36) \quad \text{Rap. S}_0(\text{E}) \succ \text{Rap. S}_1(\text{E}).$$

D'après la page 152, en combinant (35) et (36), on en déduit

$$(37) \quad \text{Rap. S}_0(\text{E}) \succ \text{Rap. S}(\text{F}).$$

Si F est aussi soumis à la seconde limitation de Borel, il y aura au moins une suite d'intervalles $\text{S}_0(\text{F})$ qui converge au moins aussi rapidement que S(F). D'après (37) :

$$\text{Rap. S}_0(\text{E}) \succ \text{Rap. S}_0(\text{F}).$$

C'est précisément la condition pour que E soit au moins aussi raréfié que F au sens de Borel. *Ainsi quand E est plus raréfié que F à notre sens il est au moins aussi raréfié que F au sens de Borel.*

Inversement, si E est plus raréfié que F au sens de Borel, nous avons vu (p. 154) qu'alors il existe au moins une suite $S_0(E)$ majorant E qui converge au moins aussi rapidement que toute suite $S(F)$ majorant F. Donc si E est plus raréfié que F au sens de Borel, E est au moins aussi raréfié que F à notre sens.

Les théorèmes suivants établissent un lien entre la grandeur d'un ensemble de mesure nulle et sa « raréfaction ».

THÉORÈME. — Soit E un sous-ensemble d'un ensemble F de mesure nulle; alors

$$(38) \quad \text{Rar. } E \underline{\asymp} \text{Rar. } F.$$

En effet, si la suite d'intervalles $t \equiv S(F)$ majore F, on aura une suite $S_t(E)$, qui majore E en supprimant de $S(F)$ les intervalles (s'il y en a) auxquels aucun point de E n'est intérieur. Si $l_1 + l_2 + \dots$ est la série des longueurs des intervalles de $S(F)$, la série correspondante pour $S_t(E)$ s'obtiendra en supprimant, s'il y a lieu, certains termes de $l_1 + l_2 + \dots$. D'après la page 140, la seconde série converge au moins aussi rapidement que la première :

$$\text{Rap. } S_t(E) \underline{\asymp} \text{Rap. } S(F).$$

D'après la page 156, on aura donc la relation (38).

THÉORÈME. — Si l'on déplace par translation un ensemble E, de mesure nulle sur la droite qui le porte, la raréfaction de E reste du même ordre.

En effet, si F est l'ensemble E déplacé, à toute suite $t \equiv S(E)$ majorant E, correspond une suite $S_t(F)$ majorant F, obtenue par translation de $S(E)$. Les séries des longueurs des intervalles de $S(E)$ et de $S_t(F)$ seront exactement les mêmes; on aura

$$\text{Rap. } S_t(F) \approx \text{Rap. } S(E)$$

et, par suite (p. 156), $\text{Rar. } F \underline{\asymp} \text{Rar. } E$. De même, en permutant E, F

$$\text{Rar. } E \underline{\asymp} \text{Rar. } F,$$

d'où

$$\text{Rar. } F \approx \text{Rar. } E.$$

Cependant, la raréfaction d'un ensemble n'est pas seulement fonction de la « grandeur » de cet ensemble, comme va le montrer le théorème qui suit. Borel a donc eu raison de choisir le mot « raréfaction » qui exprime une idée de dispersion plus complexe que celle de grandeur.

THÉORÈME. — Si l'on transforme par similitude un ensemble E de mesure nulle en un autre ensemble F , les raréfactions de E et de F restent du même ordre.

En effet, dans ce cas, à $t \equiv S(E)$ est associée une suite $S_t(F)$ qui, elle aussi, est obtenue par similitude de $S(E)$. Si le rapport de similitude est c , le rapport des restes de même rang des séries des longueurs des intervalles de $S(E)$ et $S_t(F)$ est égal à c . Il ne tend ni vers $+\infty$, ni vers zéro. On a donc

$$\text{Rap. } S_t(F) \asymp \text{Rap. } S(E).$$

Par suite,

$$\text{Rar. } F \asymp \text{Rar. } E$$

et, de même, $\text{Rar. } E \asymp \text{Rar. } F$, en permutant E et F , d'où

$$\text{Rar. } E \approx \text{Rar. } F.$$

(Voir cependant, p. 172).

RARÉFACTION D'UN ENSEMBLE DÉNOMBRABLE. — I. Soient N un ensemble dénombrable de points a_1, a_2, \dots , en nombre fini ou infini et $U \equiv \sum u_n$, une série convergente à termes positifs. On peut l'écrire sous la forme

$$\begin{array}{c|cccc} a_1 & u_1 & u_3 & u_6 & u_{10} \dots \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_2 & u_2 & u_5 & u_9 \dots & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \\ a_3 & u_4 & u_8 \dots & & \\ & \cdot & \cdot & & \\ a_4 & u_7 \dots & & & \\ \vdots & & & & \end{array}$$

Si l'on définit des intervalles ayant le centre a_n et dont les longueurs sont celles du tableau ci-dessus (celles qui sont sur la même ligne que a_n quand N est infini), la suite de ces intervalles majorera évidemment N .

Au cas où N serait fini, aurait par exemple trois points, le tableau serait de la forme

$$\begin{array}{c|cccc} a_1 & u_1 & u_3 & u_6 & u_9 \dots \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_2 & u_2 & u_5 & u_8 \dots & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \\ a_3 & u_4 & u_7 \dots & & \end{array}$$

Et la conclusion précédente subsisterait.

Ainsi, quels que soient l'ensemble dénombrable N et la série convergente à termes positifs $U \equiv \sum u_n$, cette série est la série des longueurs d'une suite d'intervalles majorant N .

II. Dès lors, soit E un ensemble quelconque de mesure nulle. Si E était plus raréfié que N, il y aurait une suite S majorant E plus rapidement convergente que toute suite T majorant N. Or, soit $U \equiv \sum u_n$ la série des longueurs de S, il y a une suite T_0 majorant N dont la série des longueurs est aussi $\sum u_n$. Le rapport des restes de ces deux séries reste égal à 1, alors qu'il devrait tendre vers l'infini. Ainsi :

THÉORÈME. — *Tout ensemble dénombrable (fini ou infini), N, de points est donc au moins aussi raréfié que tout ensemble E de mesure nulle :*

$$\text{Rar. N} \succ \text{Rar. E.}$$

Si N' est un autre ensemble dénombrable, on aura donc, à la fois

$$\text{Rar. N} \succ \text{Rar. N'} \quad \text{et} \quad \text{Rar. N'} \succ \text{Rar. N.}$$

Dès lors :

THÉORÈME. — *Tous les ensembles dénombrables (finis ou infinis) ont le même ordre de raréfaction. En particulier, ils ont le même ordre de raréfaction qu'un ensemble réduit à un seul point [un tel ensemble n'est pas exclu par Borel, qui le considère (p. 187 de son livre déjà cité)].*

Il était évident, *intuitivement*, que ce dernier ensemble était au moins aussi raréfié que tout ensemble de mesure nulle. Nous venons de *démontrer*, que sa raréfaction atteint, en un certain sens, le *maximum de toutes les raréfactions possibles*.

DES ENSEMBLES NON DÉNOMBRABLES DU MÊME ORDRE. — Nous allons voir qu'il y a une famille très générale d'ensembles non dénombrables qui sont du même ordre de raréfaction que les ensembles dénombrables. Nous considérerons d'abord les ensembles fermés, puis une famille plus générale d'ensembles.

THÉORÈME. — I. Soient deux ensembles (linéaires) de mesure nulle E, F. Quand F est fermé, il n'est pas possible que E soit plus raréfié que F. Autrement dit, F est au moins aussi raréfié que E.

Pour montrer que E n'est pas plus raréfié que F, il faudrait montrer que, quelle que soit la suite S majorant E, il y a au moins une suite correspondante T(S) majorant F telle que S ne converge pas plus rapidement que T(S). Et, pour cela, il suffit de montrer que si r_n et φ_n sont les restes de même rang des séries des longueurs $\sum u_n$, $\sum \varphi_n$ des intervalles de S et T(S) $\frac{\varphi_n}{r_n}$ ne tend pas vers l'infini. C'est-à-dire qu'il y a un nombre fini positif K tel que

$$\frac{\varphi_n}{r_n} < K$$

pour une infinité de valeurs de n . $\sum u_n$ étant une fois choisi arbitrairement, il s'agit de montrer que le choix de $T(S)$ est possible.

Partons d'une suite T quelconque majorant F . Puisque F est fermé et que T majorant F , couvre F , c'est-à-dire que tout point de F est intérieur à un des intervalles de T , il résulte d'un théorème de Borel, qu'on peut extraire de T un ensemble couvrant encore F mais composé d'un nombre fini d'intervalles de T . Soit b_1 le dernier de ceux-ci, il est clair que la suite G_1 composée de b_1 et de tous les intervalles de T précédant b_1 couvrira aussi F . Soit alors T_1 la suite obtenue en supprimant G_1 de T . Puisque T_1 majore aussi F , on pourra trouver un intervalle b_2 de T_1 , tel que la suite G_2 formée par b_2 et les éléments de T_1 précédant b_2 couvre aussi F ; etc. De proche en proche, on décomposera T en une suite $G_1, G_2, \dots, G_n, \dots$, où G_n est un ensemble d'un nombre fini d'intervalles de T qui couvre F , les intervalles de G_1, G_2, \dots , étant des intervalles de T pris dans le même ordre, le premier intervalle a_n de G_n suivant exactement le dernier intervalle b_{n-1} de G_{n-1} . Non seulement tout intervalle de la suite G_1, \dots, G_n, \dots appartient à T , mais réciproquement, tout intervalle I de T appartient à l'un des G_n (et à un seul), car le rang de b_n croît avec n et, par suite, finit par dépasser pour $n \geq p$, le rang de I dans T . Donc I appartient à G_p .

Soit λ_n la somme des longueurs des intervalles de G_n . Puisque T , majorant F , $\sum \lambda_n$ est convergente, λ_n tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$. Donc à partir d'un certain rang m_2 , $\lambda_n < \frac{1}{2} \lambda_1$. De même, à partir d'un certain rang m_3 , $\lambda_n < \frac{1}{2} \lambda_{m_2}, \dots$. On a ainsi une suite de rangs $m_1 (m_1 = 1), m_2, \dots$ tels que

$$\lambda_{m_{n+1}} < \frac{1}{2} \lambda_{m_n},$$

d'où

$$\lambda_{m_{n+p}} < \frac{1}{2^p} \lambda_{m_n}.$$

Pour simplifier l'écriture, posons $\mu_n = \lambda_{m_n}$ et $\Gamma_n = G_{m_n}$. Et appelons U la suite des intervalles des suites de $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n, \dots$

μ_n est la somme des longueurs des intervalles de Γ_n , avec

$$(38) \quad \mu_{n+p} < \frac{1}{2^p} \mu_n.$$

Il est clair que la série $\sum \mu_n$ est convergente et que U majore aussi F .

Soit K un nombre positif.

On va sélectionner dans la suite des $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots$ une certaine suite $\Delta_1 = \Gamma_{q_1}, \Delta_2 = \Gamma_{q_2}, \dots$, avec $q_1 < q_2, \dots$, et N_{q_i} désignant le nombre des intervalles de Γ_{q_i} . C'est cette suite que nous prendrons pour $T(S)$. Nous allons la déterminer de façon qu'on ait $\frac{\rho_n}{r_n} < K$ pour l'infinité de valeurs de n égales à ξ_1, ξ_2, \dots , où

$$(39) \quad \xi_p = N_{q_1} + \dots + N_{q_{p-1}} + 1.$$

Le terme de rang ξ_p dans la suite des intervalles de $\Delta_1, \Delta_2, \dots$ en nombres N_{q_1}, N_{q_2}, \dots est celui qui suit $\Gamma_{q_1}, \dots, \Gamma_{q_{p-1}}$, c'est donc le premier de la suite Γ_{q_p} . Par conséquent φ_n , dans la suite des longueurs des intervalles de $\Delta_1, \Delta_2, \dots$ est la somme des longueurs des intervalles de $\Gamma_{q_p}, \Gamma_{q_{p+1}}, \dots$, soit

$$\mu_{q_p} + \mu_{q_{p+1}} + \dots$$

Or, d'après (38),

$$\mu_{n+p} < \mu_n,$$

d'où

$$\mu_{q_{p+1}} \leq \mu_{q_p+1} < \frac{1}{2} \mu_{q_p}$$

et, par suite,

$$\mu_{q_{p+s}} < \frac{1}{2^s} \mu_{q_p}$$

d'où

$$\rho_{\xi_p} < \mu_{q_p} \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \dots \right] = 2 \mu_{q_p}.$$

Donc, pour obtenir

$$\rho_{\xi_p} < K r_{\xi_p},$$

il suffit d'avoir

$$(40) \quad 2 \mu_{q_p} < K r_{\xi_p}.$$

Si l'on a choisi $\Gamma_{q_1}, \Gamma_{q_2}, \dots, \Gamma_{q_{p-1}}$, ξ_p sera connu d'après (39) et, par suite, aussi r_{ξ_p} . Puisque, d'autre part, μ_{q_p} tend vers zéro avec $\frac{1}{p}$, on pourra choisir q_p de façon à vérifier (40) avec $q_p > q_{p-1}$. Dès lors l'inégalité

$$\frac{\rho_n}{r_n} < K$$

sera vérifiée pour l'infinité de valeur, ξ_1, ξ_2, \dots . Il est ainsi démontré que E n'est pas plus raréfié que F .

II. Prenons maintenant un ensemble G dont la fermeture \overline{G} est de mesure nulle. Cette fermeture étant fermée, on aura

$$\frac{\rho'_n}{r_n} < K$$

pour une infinité de valeurs de n , en désignant par φ'_n le reste de rang n de la série $\sum t_n$ des longueurs d'une certaine suite, L , majorant \bar{G} . Cette suite ou une suite partielle infinie de celle-ci, soit L , majore G , puisque G appartient à \bar{G} . Si φ_n est le reste de rang n de la série des longueurs de cette suite L majorant G , on aura

$$\varphi_n \leq \varphi'_n,$$

d'où

$$\frac{\varphi_n}{r_n} = \frac{\varphi_n}{\varphi'_n} \frac{\varphi'_n}{r_n} \leq \frac{\varphi'_n}{r_n} < K,$$

pour une infinité de valeurs de n . Donc E n'est pas plus raréfié que G :

$$\text{Rar. } G \succ \text{Rar. } E.$$

THÉORÈME 1. — *Tout ensemble G dont la fermeture \bar{G} est de mesure nulle est au moins aussi raréfié que tout ensemble E de mesure nulle.* (1)

Si H est un autre ensemble dont l'ensemble de fermeture H est de mesure nulle, on aura, en particulier,

$$\text{Rar. } G \succ \text{Rar. } H,$$

mais aussi

$$\text{Rar. } H \succ \text{Rar. } G,$$

donc

$$\text{Rar. } G \approx \text{Rar. } H.$$

THÉORÈME 2. — *Ainsi, tous les ensembles G, H, \dots dont les ensembles de fermeture \bar{G}, \bar{H}, \dots sont de mesure nulle, ont le même ordre de raréfaction.*

De la même façon, on voit que pour tout ensemble dénombrable N ,

$$\text{Rar. } G \succ \text{Rar. } N$$

et d'après (161),

$$\text{Rar. } N \succ \text{Rar. } G$$

D'où le

THÉORÈME 2. — *Tout ensemble G dont l'ensemble de fermeture, \bar{G} , est de mesure nulle, est du même ordre de raréfaction que tout ensemble dénombrable (et, en particulier, que tout ensemble réduit à un seul point).*

(1) Depuis la rédaction du présent Mémoire, MM. Choquet et Moszner m'ont communiqué, chacun (simultanément et indépendamment) une démonstration du théorème suivant :

Tout ensemble linéaire qui est la réunion d'un ensemble dénombrable d'ensembles fermés de mesure nulle est du même ordre de raréfaction qu'un ensemble linéaire dénombrable.

LE PROBLÈME RESTANT. — Si nous considérons la famille \mathcal{F}_0 comprenant tous les ensembles dénombrables et tous les ensembles dont l'ensemble de fermeture est de mesure nulle, alors d'après ce qui précède :

I. Tous les ensemble de la famille \mathcal{F}_0 (qui sont tous de mesure nulle) ont le même ordre de raréfaction.

II. Chacun des ensembles de la famille \mathcal{F}_0 est au moins aussi raréfié que tout ensemble de mesure nulle.

Remarque I. — La question essentielle de savoir s'il existe au moins un couple d'ensembles de mesure nulle dont l'un est *plus* raréfié que l'autre n'est pas résolue par ce qui précède. Car il existe des ensembles non dénombrables de mesure nulle dont l'ensemble de fermeture n'est pas de mesure nulle.

Tel est le cas de l'ensemble (déjà considéré par Borel) formé de tous les points dont les abscisses comptées dans la numération de base 3 ne comporte qu'un nombre fini (ou nul) de chiffres égaux à 1. Il serait intéressant de voir si cet ensemble que nous appellerons l'ensemble ternaire de Cantor *complété* et que nous désignerons par la lettre D est ou non moins raréfié que les ensembles dénombrables.

Remarque II. — A moins d'inattention de ma part, je n'ai vu nulle part, utilisée dans l'Ouvrage de Borel, sa propre définition d'une raréfaction supérieure, pour démontrer qu'elle était effectivement supérieure. De même, pour de nombreux ensembles de mesure nulle, Borel affirme qu'ils réalisent sa seconde limitation, mais je ne l'ai vu nulle part démontré. C'est, en tout cas, ce qu'on vérifiera à la page 166 de son livre, où il semble que Borel utilise une notion intuitive, non formulée de la raréfaction et non la définition précise qu'il avait donnée pages 163, 164. A moins qu'il ne considère comme évidentes les démonstrations manquantes (alors qu'elles sont beaucoup moins évidentes que bien des démonstrations faciles qu'il donne en détail ailleurs) ⁽¹⁾.

UNE SIMPLIFICATION DU PROBLÈME. — Sans résoudre le problème posé, nous pouvons le simplifier.

Supposons qu'on veuille démontrer qu'un ensemble réduit à un point a est plus raréfié que l'ensemble ternaire de Cantor complété, D. Quelle que soit la série convergente à termes positifs $\sum \rho_n$, elle peut être considérée comme la série des longueurs d'une suite d'intervalles de centre a , suite qui majore a . On devra démontrer que, parmi les séries $\sum \rho_n$, il y en a au moins une qui converge plus rapidement que la série des longueurs

(1) Voir sur ce sujet, la Note de M. Moszner, citée p. 172.

des intervalles d'une suite quelconque majorant D. Soit \mathcal{F} la famille de ces dernières suites.

Notre simplification consiste à prouver que la démonstration restera valable si l'on y substitue à la famille \mathcal{F} une famille plus réduite et plus simple de suites d'intervalles, que nous allons préciser.

Soit T une suite quelconque majorant D. On sait que si l'on arrange les intervalles de T suivant l'ordre de grandeur non croissante ⁽⁷⁾ des longueurs des intervalles de T, on aura une suite T' au moins aussi rapidement convergente que T et, plus précisément, que si ρ_n et ρ'_n sont les restes de rang n des séries correspondantes des longueurs de T et T', on aura

$$(41) \quad \frac{\rho_n}{\rho'_n} \geq 1.$$

Soit $x_n < x < x'_n$, le n^{ième} intervalle J_n de T', de longueur ω_n . On aura $\omega_1 \geq \omega_2, \dots$ et $x'_n = x_n + \omega_n$. Pour n assez grand, $n \geq q (\geq 1)$, il existe un entier s_n assez grand et tel que

$$(42) \quad \frac{1}{3} < \omega_n 3^{s_n} \leq 1.$$

On suppose $0 \leq x_n < x'_n \leq 1$. Il y a alors un entier $a_n \geq 0$ tel que

$$a_n \leq x_n 3^{s_n+1} < a_n + 1.$$

D'où

$$a_n + 1 < x'_n 3^{s_n+1} = x_n 3^{s_n+1} + \omega_n 3^{s_n+1} < a_n + 4.$$

Soit m_n le quotient de a_n par 3, on a

$$a_n = 3m_n + \alpha_n, \quad 0 \leq \alpha_n \leq 2,$$

d'où

$$y_n \equiv \frac{m_n}{3^{s_n}} \leq \frac{a_n}{3^{s_n+1}} \leq x_n < x'_n < \frac{3m_n + 6}{3^{s_n+1}} = \frac{m_n + 2}{3^{s_n}} \equiv y'_n + \frac{1}{3^{s_n}}.$$

Ainsi

$$y_n \leq x_n < x'_n \leq y'_n$$

et l'intervalle J_n de T' appartient à un certain intervalle J''_n dont la longueur

$$(43) \quad t_n \equiv y'_n - y_n = \frac{1}{3^{s_n}}, \quad \text{avec} \quad y_n = \frac{m_n}{3^{s_n}} \quad (m_n \text{ étant entier}).$$

J''_n est ainsi l'un des intervalles obtenus en divisant le segment (0, 1) en 3^{s_n} parties égales. Soit T'' la suite J''_1, J''_2, \dots

(7) Quand plusieurs des intervalles de T sont égaux, on les range suivant l'ordre de gauche à droite de leurs extrémités gauches.

On a, d'après (42), (43),

$$(44) \quad \frac{1}{3} < \frac{\omega_n}{t_n} \leq 1.$$

Dès lors, si φ''_n est le reste de rang n de la suite T'' , on aura aussi

$$(45) \quad \frac{1}{3} < \frac{\rho'_n}{\rho''_n} \leq 1.$$

Il peut y avoir dans cette suite T'' des intervalles identiques. Dans un tel cas, laissons parmi des intervalles identiques un seul d'entre eux et supprimons les autres.

On aura une suite S d'intervalles pour laquelle le reste de rang n , R_n , de la série des longueurs dans S sera tel que

$$(46) \quad \frac{\rho''_n}{R_n} \geq 1.$$

De sorte que, finalement, d'après (41), (45) et (46), si $r_n = \omega_n + \varphi_{n+1} + \dots$, on aura

$$(47) \quad \frac{\rho_n}{r_n} = \frac{\rho_n}{\rho'_n} \frac{\rho'_n}{\rho''_n} \frac{\rho''_n}{R_n} \frac{R_n}{r_n} \geq \frac{1}{3} \frac{R_n}{r_n}.$$

On voit d'abord que la suite S est majorante. En effet, on sait que toute série obtenue en changeant l'ordre des termes d'une série convergente à termes positifs est aussi convergente. Donc la série des longueurs des intervalles de T' est convergente, de même que la série analogue pour T . Il résulte de (44) qu'il en est de même pour T'' . Et de même pour S , puisque la série correspondante s'obtient en supprimant éventuellement des termes dans une série convergente.

Ainsi la série des longueurs des intervalles de S est convergente.

Les passages de T à S par T' , T'' conservent la propriété que chaque intervalle de ces suites contient au moins un point de D ainsi que la propriété que chaque point de D appartient à une infinité de points de chacune de ces suites.

Finalement, la suite S majore D .

Or, d'après (47),

$$(47 \text{ bis}) \quad \frac{\rho_n}{r_n} \leq \frac{1}{3} \frac{R_n}{r_n}.$$

Pour prouver que $\frac{\rho_n}{r_n} \rightarrow \infty$, il suffit donc de prouver que $\frac{R_n}{r_n} \rightarrow \infty$ avec n .

Dès lors, au lieu d'avoir à comparer $\sum \varphi_n$ à toutes les suites T majorant D , il suffit de comparer $\sum \varphi_n$ à une famille plus réduite, celle de toutes les suites analogues à S qui se caractérisent ainsi : Nous avons déjà vu que

les intervalles d'une suite S sont distincts et que le $n^{\text{ième}}$ est l'un des intervalles obtenus en divisant le segment $(0, 1)$ en 3^{sa} parties égales. D'ailleurs, en vertu de (42), les s_n forment une suite d'entiers non décroissants. Enfin S est une suite majorante de D .

NOUVELLE DÉFINITION DE LA RAPIDITÉ DE CONVERGENCE. — Quand Borel dit : s converge plus rapidement que t si $\mu_n = \frac{t-t_n}{s-s_n} \rightarrow \infty$, on devrait plutôt dire qu'alors s converge *beaucoup plus* rapidement que t . Dans ce cas, la plus petite des limites de μ_n (quand $n \rightarrow \infty$) est $+\infty$. Il semblerait plus conforme à notre intuition de dire que :

s converge plus rapidement que t si la plus petite des limites de μ_n est supérieure à l'unité.

Quand s converge plus rapidement que t au sens de Borel, il converge aussi plus rapidement que t à ce dernier sens. Mais la réciproque n'est pas vraie.

Nous allons examiner les conséquences de ce changement de définition. Nous verrons que si quelques démonstrations sont un peu changées, les résultats subsistent, sauf celui examiné page 172, qui semble plus favorable à notre définition.

Et, d'autre part, la simplification de la page 165 deviendrait un peu moins simple à la page 172.

Notre nouvelle définition peut s'exprimer aussi de la manière suivante :

On dit que la série s converge plus rapidement que la série t si les rapports $\mu_n = \frac{t-t_n}{s-s_n}$, pris à partir d'un certain rang, restent supérieurs à un nombre fixe supérieur à l'unité.

On dira que s converge au moins aussi rapidement que t quand t ne converge pas plus rapidement que s , donc : quand la plus grande des limites de μ_n est supérieure ou égale à l'unité.

Les rapidités de convergence de s et t seront dites du même ordre quand aucune de ces deux séries ne converge plus rapidement que l'autre, c'est-à-dire quand la plus grande des limites de μ_n est ≥ 1 et sa plus petite limite ≤ 1 . Dans ce cas, μ_n étant considéré à partir d'un certain rang, ses bornes supérieure M et inférieure m , encadrent l'unité : $m \leq 1 \leq M$. Il faut, en outre, qu'une au moins des limites de μ_n soit ≤ 1 et une autre (ou la même) soit ≥ 1 . (Comme il le fallait, c'est ce qui a lieu quand $s \equiv t$ ou quand les termes de s et t sont les mêmes à partir d'un certain rang.)

Ici encore, pour s, t donnés, une et une seule des trois relations

$$\text{Rap. } s \succ \text{Rap. } t, \quad \text{Rap. } s \approx \text{Rap. } t, \quad \text{Rap. } t \succ \text{Rap. } s$$

[avec des simplifications différentes des relations (2), (3), (4)] a lieu.

TRANSITIVITÉ. — I. Avec les notations de la page 150, si les relations (8) ont lieu, les bornes inférieures de $\frac{t-t_n}{s-s_n}$ et de $\frac{\sigma-\sigma_n}{t-t_n}$ considérées seulement à partir d'un certain rang sont > 1 . Il en sera donc de même de $\frac{\sigma-\sigma_n}{s-s_n}$ et, par suite, on aura (9). La relation

$$\text{Rap. } s \succ \text{Rap. } t$$

est encore transitive.

II. La relation

$$\text{Rap. } s \succcurlyeq \text{Rap. } t$$

n'est au contraire pas transitive.

L'exemple II, donné page 150, suffit encore à le prouver dans le cas actuel où, pour s et t comme pour t et σ , $M = +\infty (> 1)$ et $m = 1$.

III. Il reste utile d'observer que si

$$\text{Rap. } s \succcurlyeq \text{Rap. } t \quad \text{et} \quad \text{Rap. } t \succ \text{Rap. } \sigma,$$

on a encore

$$(48) \quad \text{Rap. } s \succcurlyeq \text{Rap. } \sigma.$$

Car, à partir d'un certain rang, on aura

$$\frac{\sigma-\sigma_n}{t-t_n} \geq m > 1.$$

D'autre part, pour une certaine suite de valeurs n_p de n :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{t-t_{n_p}}{s-s_{n_p}} = M \geq 1,$$

d'où

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\sigma-\sigma_{n_p}}{s-s_{n_p}} \geq m M > 1,$$

d'où (48).

[Rappelons que pour avoir (48), il aurait suffi que la plus grande des limites de $\frac{\sigma-\sigma_n}{s-s_n}$ soit ≥ 1 , alors qu'ici elle est même > 1 .]

SÉRIE AMPUTÉE. — THÉORÈME. — Si t est une série obtenue en supprimant des termes de la série s , convergente et à termes > 0 , on a

$$\text{Rap. } t \succcurlyeq \text{Rap. } s.$$

Avec les notations de la page 146, on a vu, en effet, que

$$\frac{t-t_{r-1}}{s-s_{r-1}} < 1.$$

Donc

$$(49) \quad \text{Rap. } t \approx \text{Rap. } s$$

ou

$$(50) \quad \text{Rap. } t \succ \text{Rap. } s.$$

Comme à la page 146 les deux cas peuvent se présenter :

Pour le second exemple de la page 147, on a (50) au sens de Borel, donc aussi au nôtre.

Dans le premier exemple de la page 146, $\frac{r'_n}{r_n} \rightarrow 1$; donc la plus petite des limites de $\frac{r'_n}{r_n}$ n'est pas supérieure à 1 et la plus grande de ses limites n'est pas inférieure à 1. On a donc (49).

CHANGEMENT DE L'ORDRE DES TERMES. — En adoptant notre définition de la rapidité de convergence, les deux résultats concernant le changement de l'ordre des termes d'une série (p. 147) subsistent et leurs démonstrations restent valables. Le premier parce qu'une convergence plus rapide au sens de Borel est aussi plus rapide à notre sens. Le second parce que, dans les notations de ce second résultat, on a démontré que $\frac{r_n}{\rho_n} \geq 1$, et qu'alors la plus grande des limites de $\frac{r_n}{\rho_n}$ n'est plus < 1 .

NOUVELLE DÉFINITION DE L'INÉGALITÉ DE DEUX RARÉFACTIONS. — La définition de la raréfaction reste la même que plus haut (étant entendu qu'elle implique une définition différente de la rapidité de convergence).

De même, on démontre exactement comme plus haut, pour deux ensembles de mesure nulle donnés, E, F, les propositions suivantes :

I. On a nécessairement une et une seule des relations

$$\text{Rar. E } \succ \text{Rar. F}; \quad \text{Rar. E } \approx \text{Rar. F}; \quad \text{Rar. F } \succ \text{Rar. E}.$$

II. Pour que

$$\text{Rar. E } \succ \text{Rar. F},$$

il faut et il suffit qu'à toute suite $t \equiv S(F)$ majorant F soit associée au moins une suite $S_t(E)$ majorant E telle que

$$\text{Rap. } S_t(E) \succ \text{Rap. } S(F).$$

III. La relation

$$\text{Rar. E } \succ \text{Rar. F}$$

est transitive.

IV. Si

$$\text{Rar. E } \succ \text{Rar. F} \quad \text{et} \quad \text{Rar. F } \succ \text{Rar. G},$$

on a

$$\text{Rar. E } \succ \text{Rar. G}.$$

V. Soit E un sous-ensemble d'un ensemble de mesure nulle F, on a

$$\text{Rar. E} \not\sim \text{Rar. F.}$$

VI. Si l'on déplace par translation un ensemble de mesure nulle E jusqu'en un ensemble F (nécessairement de mesure nulle), on aura

$$\text{Rar. E} \approx \text{Rar. F.}$$

DIFFÉRENCES. — Au contraire, quand on passe de la définition de Borel à la nôtre, on a un résultat ou une démonstration un peu différente pour certains résultats énoncés plus haut.

I. Supposons qu'il existe une suite $S_0(E)$ majorant E qui converge plus rapidement que toute autre suite S (E) majorant E. Prenons pour $S'_0(E)$ une suite d'intervalles J_1, J_2, \dots , tels que si $S_0(E)$ est formée des intervalles I_1, I_2, \dots, J_n et I_n soient concentriques et que :

$$\text{longueur } J_n = (1 + \varepsilon_n) \text{ longueur } I_n,$$

où les ε_n vont en décroissant de sorte que

$$0 < \varepsilon_n < 1 \quad \text{et} \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0.$$

Nous allons montrer que $S_0(E)$ ne converge pas plus rapidement que $S'_0(E)$, contrairement à l'hypothèse.

$S'_0(E)$ majore aussi E, car $S'_0(E)$ est dénombrable, la somme s' des longueurs des J_n est $< 2s$, où $s = \sum (\text{longueur } I_n)$; donc s' est convergente comme s ; tout point de E appartient à une infinité de I_n , donc à une infinité des J_n , tout J_n comprend au moins un I_n , donc comprend au moins un point de E. Enfin, les intervalles J_n sont distincts.

Ainsi $S'_0(E)$ majore E. Les restes $s - s_n, s' - s'_n$ des séries des longueurs des intervalles de $S_0(E), S'_0(E)$ seront tels que

$$(1 + \varepsilon_{n+1})(s - s_n) > (1 + \varepsilon_{n+1}) \text{ longueur } I_{n+1} + \dots > s - s_n.$$

D'où

$$1 < \frac{s' - s'_n}{s - s_n} < 1 + \varepsilon_{n+1},$$

et, par suite,

$$\lim \frac{s' - s'_n}{s - s_n} = 1,$$

tandis qu'on devrait avoir $\underline{\lim} \frac{s' - s'_n}{s - s_n} > 1$.

Ainsi la seconde limitation de Borel est encore ici *irréalisable* sous sa forme primitive. Nous continuerons donc à la comprendre dans le sens restreint de la page 143 et, en particulier, dans ce qui suit.

II. La même observation s'applique à la démonstration de la page 161 selon laquelle un ensemble dénombrable est au moins aussi raréfié que tout ensemble de mesure nulle.

La démonstration reste la même, car $\frac{t-t_n}{t'-t'_n}$ tendant vers l'unité, sa plus petite limite n'est pas > 1 , ce qui suffit ici.

D'où la conclusion que les ensembles dénombrables ont des raréfactions toutes du même ordre.

III. SIMILITUDE. — Soient E un ensemble de mesure nulle et F un ensemble « semblable » à E, c étant le rapport de similitude. A toute suite $t \equiv S(F)$ majorant F correspond une suite $S_t(E)$ majorant E et obtenue par la même similitude. Si r_n et ρ_n sont les restes de rang n des séries de longueurs correspondant à $S_t(E)$ et $S(F)$, on aura $\rho_n = cr_n$, d'où $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\rho_n}{r_n} = c$. Dès lors, si $c > 1$, on a

$$\text{Rap. } S_t(E) \succ \text{Rap. } S(F),$$

d'où

$$\text{Rar. } E \succ \text{Rar. } F.$$

De même, si $c < 1$

$$\text{Rar. } F \succ \text{Rar. } E.$$

Au sens vulgaire du mot raréfié, si $c > 1$, F est plus étalé, moins raréfié que E et inversement si $c < 1$. Le résultat ci-dessus obtenu en partant de notre définition d'une convergence plus rapide nous paraît donc plus proche de notre notion intuitive de la raréfaction que le résultat obtenu (p. 160) en parlant de la définition de Borel, où E et F ont le même ordre de raréfaction, quel que soit c .

UNE SIMPLIFICATION MOINS SIMPLE. — A la page 165, la conclusion doit être modifiée en même temps que la définition de la rapidité de la convergence. Pour prouver que la limite de $\frac{\rho_n}{r_n}$ est plus grande que 1, il faudrait prouver que celle de $\frac{R_n}{r_n}$ est plus grande que 3.

LISTE BIBLIOLOGIQUE.

- M. FRÉCHET, *Une généralisation de la raréfaction* (C. R. Acad. Sc., t. 252, 1961, p. 1245-1250).
 M. FRÉCHET, *Sur la raréfaction relative minimale d'un ensemble de mesure nulle*, (C. R. Acad. Sc., t. 254, 1962, p. 4239).
 M. FRÉCHET, *Sur la comparaison des raréfactions*, (C. R. Acad. Sc., t. 255, 1962, p. 2033-2036).
 L. MOSZNER, *Remarques sur une notion de raréfaction d'un ensemble de mesure nulle*, (C. R. Acad. Sc., t. 256, 1963).

