ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

PAUL LÉVY

Le déterminisme de la fonction brownienne dans l'espace de Hilbert

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 79, nº 4 (1962), p. 377-398
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1962_3_79_4_377_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
3e série, t. 79, 1962, p. 377 à 398.

LE DÉTERMINISME

DE LA

FONCTION BROWNIENNE DANS L'ESPACE DE HILBERT.

PAR M. PAUL LÉVY.

I. — Introduction. Rappel de résultats connus.

1. La fonction brownienne X(A) (A étant un point, soit d'un espace euclidien P_N à N dimensions, soit d'un espace de Hilbert Ω) est encore assez peu connue. Aussi commencerons-nous par rappeler sa définition, et son caractère de fonction continue dans chaque plan $P_N \subset \Omega$, mais discontinue dans Ω. Nous préciserons certains points de nos exposés antérieurs ([1]). Dans le chapitre II, nous démontrerons quelques lemmes simples. Le lecteur déjà au courant de ces questions pourra aborder directement la lecture du chapitre III.

Le chapitre III contient le théorème fondamental suivant : *si la fonction* X(A) *est connue dans un ensemble ouvert de l'espace de Hilbert, elle est connue dans tout l'espace*. Ce déterminisme n'existe pas dans le cas d'un espace à N dimensions ($N < \infty$). Il existe aussi dans ce qu'on peut appeler la sphère de Riemann-Hilbert.

Dans le chapitre IV, nous étudierons le cas où la fonction X(A) est connue sur un ensemble $\mathcal{E}$, contenu dans Ω, à cela près quelconque; elle est alors connue dans un ensemble $\mathcal{K}(\mathcal{E})$, qui peut se réduire à la fermeture $\overline{\mathcal{E}}$ de $\mathcal{E}$, mais qui, d'après le théorème fondamental, peut comprendre tout l'espace. Deux points A et B seront dits *conjugués* par rapport à $\mathcal{E}$ si les probabilités

([1]) *Voir* notamment [1] à [4]. J'avais désigné X(A) sous le nom de mouvement brownien fonction d'un point de P_N ou de Ω. Mais ayant constaté que le mot « mouvement » éveillait l'idée d'une fonction du temps et pouvait entraîner des confusions, j'ai préféré ne plus l'employer.

conditionnelles de X(A) et X(B) qui résultent de la donnée de X(.) dans $\mathcal{E}$ sont indépendantes. L'étude générale de cette relation paraît assez difficile. Nous indiquerons quelques cas particuliers, dans lesquels on obtient des résultats très simples.

Ces résultats, ainsi que le théorème fondamental, ont été énoncés dans une Note présentée à l'Académie des Sciences le 28 mai 1962 [5].

2. Nous désignerons par les lettres ξ et η, avec ou sans indices, des variables laplaciennes réduites, et par $r(A, B)$ la distance des deux points A et B.

La *fonction brownienne* X(A) est la *fonction laplacienne* (²) définie à une constante près par la formule

$$X(B) - X(A) = \xi(A, B)\sqrt{r(A, B)}. \tag{2.1}$$

La fonction $\overline{X}(A) = X(A) - X(O)$ a alors pour covariance

$$\Gamma(A, B) = E\{\overline{X}(A)\overline{X}(B)\} = \frac{1}{2}[r(O, A) + r(O, B) - r(A, B)]. \tag{2.2}$$

On remarque que, sur n'importe quelle droite, la fonction ainsi définie est celle du mouvement brownien linéaire, ou fonction de *Bachelier-Wiener*.

On sait qu'une *suite laplacienne* de variables laplaciennes semi-réduites X_h est toujours bien définie par sa covariance $\Gamma_{h,k}$ (³). Mais cette covariance doit vérifier la condition nécessaire et suffisante suivante : quel que soit l'entier n, la forme quadratique

$$Q_n = Q_n(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \sum_{h=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{h,k} u_h u_k \tag{2.3}$$

est non négative. De plus, si, pour une valeur donnée de n, elle est définie positive, il n'y a aucune relation certaine entre $X_1, X_2, \ldots, X_n$; dans le cas

(²) Nous entendons par là que : 1° pour chaque A, X(A) est une variable aléatoire laplacienne; 2° tous les X(A) sont des fonctions linéaires, à coefficients certains, de variables laplaciennes U_ν indépendantes les unes des autres. L'ensemble des U_ν peut être infini non dénombrable; mais, pour chaque point A, X(A) dépend au plus d'une infinité dénombrable de ces variables.

(³) Les suites laplaciennes $\{X_n\}$ sont des fonctions laplaciennes de l'indice n. Le résultat énoncé ne s'étend pas aux suites quelconques de variables laplaciennes semi-réduites. Signalons à ce sujet une question qui ne semble pas actuellement résolue : dans le cas de la fonction $X(t)$ de Bachelier-Wiener, on évite en général d'introduire la notion de fonction laplacienne; on la remplace par la condition qu'à deux intervalles disjoints correspondent des accroissements indépendants. De la formule (2.1), on ne peut déduire que leur orthogonalité. Si l'on ne précise pas que la corrélation entre deux variables laplaciennes semi-réduites est linéaire, l'orthogonalité n'entraîne pas l'indépendance. La question qui se pose est la suivante : l'introduction de la variable continue t, qui fait que chaque accroissement doit être indéfiniment décomposable en accroissements orthogonaux, n'introduit-elle pas un élément nouveau, grâce auquel l'orthogonalité deviendrait (soit dans le cas laplacien, soit même dans des cas plus généraux) équivalente à l'indépendance?

contraire, il y a entre ces variables une relation certaine, de forme linéaire ([4]). Si, d'ailleurs toutes les formes Q_n sont définies positives, cela n'exclut pas la possibilité d'une relation presque sûre entre certaines variables X_n; mais une telle relation doit nécessairement contenir, sinon tous les X_n, du moins une infinité de ces variables.

D'après un théorème de I. J. Schoenberg [6], quelle que soit la suite des points $A_n \in \Omega$, la condition $Q_n \geqq 0$ (et même > 0) est vérifiée, quel que soit l'entier n, pour $\Gamma_{h,k} = \Gamma(A_h, A_k)$. On peut donc déterminer successivement tous les $\overline{X}(A_n)$, donc aussi à une constante près tous les $X_n = X(A_n)$, de manière à vérifier la condition (2.1). S'il est utile de préciser la constante inconnue, on pourra le faire en prenant $X(O) = 0$, ou, si l'on n'a pas choisi une origine O, en supposant $X(A_1)$ donné. La fonction $X(A)$ peut être ainsi définie dans n'importe quel ensemble dénombrable $\mathcal{E}_\omega$. Il reste à la définir comme fonction du point A qui varie d'une manière continue dans Ω.

Pour cela nous choisirons dans Ω un système d'axes orthogonaux Ox_ν, et désignerons par P_N le plan des N premiers axes, par $\mathcal{E}_N$ l'ensemble des points

---

([4]) La définition des fonctions laplaciennes exclut toute idée de relation presque sûre, mais non certaine, entre des $X(A_h)$ qui ne font intervenir qu'un nombre fini de variables X'_ν; elle exclut aussi toute relation sûre non réductible à la forme linéaire.

La nécessité de la condition $Q_n \geqq 0$ résulte de ce que, si $\Gamma_{h,k}$ est la covariance de la suite des X_h, on a

$$Q_n = E\{(u_1 X_1 + u_2 X_2 + \ldots + u_n X_n)^2\} \geqq 0. \tag{2.4}$$

Cela revient d'ailleurs au même de dire qu'il y a une relation linéaire presque sûre (donc sûre) entre ces n variables X_h ou de dire que Q peut s'annuler pour des valeurs non toutes nulles des u_h.

Démontrons maintenant la réciproque : si l'on pose

$$u_h = \sum_{k=1}^{h} a_{h,k} u'_k, \tag{2.5}$$

il vient

$$\sum_1^n u_h X_h = \sum_1^n u'_k X'_k \qquad \left(X'_k = \sum_{h=1}^{n} a_{h,k} X_h\right), \tag{2.6}$$

et l'on peut déterminer les $a_{h,k}$ en fonction des $\Gamma_{h,k}$ de manière que Q se réduise à une somme de carrés $\sum c_h u'^2_h$. Si cette forme est non négative, on peut donc écrire

$$Q = \sum_1^n \sigma'^2_k u'^2_k = E\left\{\left(\sum_1^n u'_k \sigma'_k \xi'_k\right)^2\right\}, \tag{2.7}$$

les ξ'_k étant des variables laplaciennes réduites indépendantes les unes des autres. On peut alors prendre $X'_k = \sigma'_k \xi'_k$, puis remonter des X'_k aux X_h. Si la forme Q n'est pas définie positive, au moins un des σ'_k est nul; donc $X'_k = \sigma'_k \xi'_k$ est nul aussi, et l'on retrouve la relation presque sûre entre les X_h déjà mentionnée. Si la forme Q est définie positive, tous les X_h sont au contraire des fonctions linéairement indépendantes des ξ'_k, et ont bien la covariance donnée.

de P_N à coordonnées toutes rationnelles, et par $\mathcal{E}_\omega$ la réunion de tous les $\mathcal{E}_N$. C'est un ensemble dénombrable partout dense dans Ω.

Si l'on se borne d'abord à définir $X(A)$ dans P_N, il n'y a aucune difficulté. Par une méthode analogue à celle employée dans [1], p. 18-20, pour le cas $N = 1$, c'est-à-dire pour le cas de la fonction Bachelier-Wiener, on démontre aisément que les valeurs de la fonction $X(A)$ obtenues dans $\mathcal{E}_N$ définissent presque sûrement une fonction continue dans P_N (5).

3. Dans le cas de l'espace Ω, les choses sont moins simples. Il n'y a aucune difficulté à ranger les points de $\mathcal{E}_\omega$ en une suite $\{A_n\}$ et à déterminer successivement tous les $X(A_n)$. La fonction $X(A)$ est ainsi déterminée dans tous les plans P_N. Soit maintenant A un point quelconque de Ω; désignons par H_N sa projection sur P_N. La distance $r(A, H_N)$ tendant vers zéro pour N infini, $X(A)$ peut être défini comme limite m. q. (en moyenne quadratique) de $X(A_N)$.

Les différences $X(H_{N+1}) - X(H_N)$ n'étant pas indépendantes, il n'est pas évident que cette convergence entraîne la convergence presque sûre. Mais on peut extraire de la suite des H_N une suite partielle de points H'_ν tels que $r(A, H'_\nu) \leqq \frac{1}{\nu^{2\alpha}}$ $(\alpha > 1)$. Alors

$$E\{|X(H'_{\nu+1}) - X(H'_\nu)|\} \leqq \frac{c}{\nu^\alpha} \qquad \left(c = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\right).$$

La convergence presque sûre de la suite des $X(H'_\nu)$ vers une limite en résulte. Deux suites partielles vérifiant la condition indiquée conduisent presque sûrement à la même limite $X(A)$, qui est ainsi bien déterminée par les expériences qui ont déterminé les $X(A_n)$.

Cette fonction vérifie évidemment toutes les conditions de la définition, et pourrait être définie en partant de n'importe quel ensemble dénombrable partout dense dans Ω. On en déduit aisément qu'elle est presque sûrement continue dans tous les plans P_N, et aussi, moyennant certaines conditions de régularité, sur toutes les surfaces qui remplaceraient ces plans si l'on choisissait dans Ω un système de coordonnées curvilignes. Donc, elle est presque sûrement continue sur n'importe quelle surface à un nombre fini de dimensions et suffisamment régulière (6),

---

(5) Pour n assez grand, les n premiers points A_ν de $\mathcal{E}_N$ définissent un polyèdre convexe V' entourant n'importe quel volume fini $V \subset P_N$. Les points A_ν d'indices $\nu > n$ et intérieurs à V', si on les range dans un ordre convenable, permettent de diviser V' en volumes $(N+1)$-édriques partiels, ayant ces points pour sommets, et devenant très petits dans tous les sens. Dans chacun de ces volumes partiels, on définit une fonction linéaire égale pour ces points A_ν à la valeur obtenue pour $X(A_\nu)$, et l'on prend pour approximation de $X(A)$ la fonction égale dans chaque volume partiel à cette fonction linéaire. Alors $X(A)$ est défini comme limite de ces approximations, la convergence étant presque sûrement uniforme dans tout volume fini.

(6) Il semble suffisant qu'elle ait en tout point un plan tangent, et que la courbure des sections normales soit uniformément bornée.

Pourtant la fonction X(A) ainsi définie n'est pas continue ([7]). Pour nous en rendre compte, donnons-nous une suite de nombres a_n positifs et tendant vers zéro, et à chaque point A de Ω, faisons correspondre une suite de points A_n, définis chacun en portant la longueur a_n, à partir du point A, sur la parallèle à Ox_n passant par a (le sens du segment AA_n est indifférent). Si $a_n\sqrt{n\log n}$ tend vers zéro (pour n infini), $X(A_n)$ tend presque sûrement vers X(A). Si ce produit est compris entre deux nombres positifs fixes, $|X(A_n)-X(A)|$ est presque sûrement borné. Mais s'il augmente indéfiniment, il est presque sûr qu'il existe une suite de points A'_p, choisis parmi les A_n, et tels que $X(A'_p)$ augmente indéfiniment avec p. On peut, de plus, joindre ces points par une ligne continue, telle que $X(A')$ augmente indéfiniment, quand A' tend vers A en suivant cette ligne. On peut aussi, presque sûrement, trouver des chemins le long desquels $X(A')$ tendra vers n'importe quelle valeur donnée. Mais ces chemins restent tout à fait exceptionnels, et ne sont pas connus d'avance : il n'existe aucun chemin aboutissant au point A et sur lequel la probabilité que $X(A')$ ait une limite autre que X(A) soit positive. Par contre, on peut définir des chemins s'approchant très lentement de A après des détours dans une infinité de directions différentes, sur lesquels $X(A')$ n'a presque sûrement aucune limite.

4. La méthode par laquelle nous avons démontré au n° 1 l'existence de la fonction X(A) dans P_N est celle utilisée en 1948 dans notre livre [1]. En 1957, N. N. Tchentsov a indiqué une autre méthode, qui offre le double avantage d'éviter l'étude préalable de la forme quadratique Q, et de donner une expression explicite de X(A), en utilisant une représentation de la forme

$$X(A)=\int_{V(A)}\xi(dV)\sqrt{m(aV)}, \tag{4.1}$$

où V(A) est un volume de P_N qui dépend de A; dV désigne un élément de volume; $m(V)$ est une mesure non négative bornée; pour deux volumes V_1 et V_2 disjoints, $\xi(V_1)$ et $\xi(V_2)$ sont indépendants ([8]). Naturellement, cette représentation, en démontrant l'existence de X(A), constitue une nouvelle démonstration du théorème de Schoenberg.

En utilisant l'idée de Tchentsov, je me suis proposé d'étudier la fonction $X^*(A)$ qui, sur la sphère de Riemann, joue le rôle que X(A) joue dans la

---

([7]) Ce fait est déjà connu. Nous allons le préciser par quelques énoncés qui montrent bien l'aspect étrange de cette discontinuité, mais qui ne sont pas assez importants pour la suite pour que nous allongions cet exposé en donnant la démonstration.

([8]) Cette intégrale se définit comme limite presque sûre de sommes riemanniennes. La méthode est absolument analogue à celle employée dans [1], p. 18-20, dans le cas N = 1. Les intégrales de la forme (3.1) apparaissent ainsi comme des sommes d'éléments aléatoires indépendants. Le fait qu'il n'y ait pas à faire intervenir de coefficients de corrélation fait de cette intégrale un outil aisément maniable.

géométrie euclidienne. La formule qui remplace celle de Tchentsov est si simple qu'il en résulte une nouvelle méthode très simple pour démontrer l'existence de $X(A)$ dans le plan, en considérant le plan comme limite d'une sphère de rayon indéfiniment croissant. Je crois utile de le rappeler, parce que le déterminisme dont l'étude est l'objet du présent travail apparaît dans la sphère de Riemann à N dimensions, tandis que, en géométrie euclidienne, il n'apparaît que pour N infini.

Soit donc S_N la sphère de Riemann à N dimensions, c'est-à-dire une sphère de rayon R qu'on peut considérer comme immergée dans P_{N+1}; mais la distance euclidienne $r(A, B)$ est remplacée par la distance $r^\star(A, B)$ comptée sur la sphère. La formule (2.1) est alors remplacée par la formule

$$X^\star(B) - X^\star(A) = \xi(A, B)\sqrt{r^\star(A, B)}. \tag{4.2}$$

Considérons alors l'intégrale

$$I(A) = c_N \int_{S(A)} \xi(ds)\sqrt{ds}, \qquad \left(c_N^2 = \frac{2\pi R}{s_N R^N}\right) \tag{4.3}$$

où $S(A)$ désigne une demi-sphère de pôle A; pour fixer les idées, choisissons celle qui contient A; *ds* est la mesure géométrique de l'élément dS; $s_N R^N$ est la surface de la sphère. On a évidemment

$$\int_{S(B)} \xi(ds)\sqrt{ds} - \int_{S(A)} \xi(ds)\sqrt{ds} = \int_{S(A)\cup S(B) - S(A)\cap S(B)} \xi'(ds)\sqrt{ds}, \tag{4.4}$$

ξ' étant égal à ξ dans la partie de $S(B)$ extérieure à $S(A)$, et à $-\xi$ dans la partie de $S(A)$ extérieure à $S(B)$. On en déduit immédiatement que $I(A)$ vérifie bien les conditions imposées à $X^\star(A)$; l'existence de cette fonction est ainsi établie. On remarque de plus que, si nous posons $X^\star(A) = I(A)$,

$$E\{X^{\star 2}(A)\} = \pi R. \tag{4.5}$$

La constante additive, que la formule (4.1) laissait indéterminée, se trouve ainsi définie de manière que $X^\star(A)$ soit stationnaire ([9]). Cela n'est évidemment pas possible pour $X(A)$.

On remarque que, si A′ et B′ sont les points de S_N diamétralement opposés à A et B, on a

$$X^\star(A) + X^\star(A') = X^\star(B) + X^\star(B') = c_N \int_{S_N} \xi(ds)\sqrt{ds} \quad ({}^{10}). \tag{4.6}$$

([9]) Cette conclusion subsiste si l'on définit $X^\star(A) = I(A) + X$, $X = a\xi + b$ étant une variable laplacienne indépendante de $I(A)$. Mais, si l'on n'a pas $a = b = 0$, on aura pour $E\{X^{\star 2}(A)\}$ une valeur $> \pi R$. C'est en prenant $X^\star(A) = I(A)$ qu'on obtient la fonction stationnaire d'écart type minimal.

([10]) On peut d'ailleurs vérifier cette formule, sans utiliser l'intégrale $I(A)$, en vérifiant que

$$E\{[X(A) + X(A') - X(B) - X(B')]^2 = 0.$$

Le calcul est très simple, en supposant l'origine en B′, et $X(B') = 0$, de manière à utiliser la formule (2.2).

Cette formule montre un caractère déterministe très curieux : si la fonction $X^\star(A)$ est connue en deux points diamétralement opposés, la donnée de sa valeur en un point quelconque B la détermine au point opposé B′. Il n'y a d'ailleurs pas d'autre déterminisme, ni pour $X^\star(A)$, ni pour $X(A)$, quand N est fini. Nous reviendrons sur ce point au chapitre II.

5. Montrons maintenant comment on effectue le passage à la limite, qui permet de déduire l'existence de $X(A)$ de celle de $X^\star(A)$.

Supposons à cet effet S_N immergé dans P_{N+1} et tangent à P_N en O, et, A_1, A_2, ..., A_n étant n points quelconques de P_N, désignons par $A_h^\star (h = 1, 2, \ldots, n)$ un point de S_N qui tende vers A_h quand R augmente indéfiniment. La forme quadratique $Q^\star$, liée aux différences $X^\star(A_h) - X^\star(O)$ comme la forme (1.3) l'est aux $\overline{X}_h$, est non négative. Or, pour R infini, elle tend vers Q. Donc $Q \geqq 0$, ce qui établit le théorème de Schoenberg, et par là même l'existence de $X(A)$. De plus, le résultat énoncé à la fin du n° 3 montre que la forme $Q^\star$ est définie positive (pour R assez grand), et un calcul simple indiqué dans [4] montre que cette propriété subsiste à la limite. Il n'y a donc aucun déterminisme dans le plan, quand N est fini.

On ne peut parler de convergence presque sûre de $X^\star(A_h^\star)$ vers $X(A_h)$ qu'en établissant une corrélation convenable entre les $X^\star(A)$ qui correspondent à différentes valeurs de R. Une telle corrélation donnerait une définition constructive de $X(A)$. Elle ne serait d'ailleurs pas plus simple que celle de Tchentsov.

Une fois l'existence de $X^\star(A)$ et celle de $X(A)$ établies pour N fini, le passage à la limite de P_N à Ω, et de S_N à la sphère S_ω de Ω, s'effectue comme au n° 2. On peut d'ailleurs appliquer directement à S_ω la méthode que nous venons d'indiquer pour S_N, et considérer ensuite Ω comme limite pour R infini de la sphère S

$$(x_1 - R)^2 + \sum_2^\infty x_\nu^2 = R^2.$$

Nous n'insisterons pas ici sur cette méthode qui présente d'assez grandes difficultés.

II. — Quelques lemmes.

6. Lemme 1. — *Quel que soit le sous-ensemble $\mathcal{E}$ de Ω, on peut trouver un sous-ensemble dénombrable $\mathcal{E}_\omega \subset \mathcal{E}$ qui soit partout dense sur $\mathcal{E}$.*

Soit, en effet, un ensemble dénombrable $\mathcal{F}$ partout dense dans Ω (nous en avons défini un au n° 2). A chaque point $A_n \in \mathcal{F}$ faisons correspondre le point A'_n de la fermeture $\overline{\mathcal{E}}$ de $\mathcal{E}$ le plus voisin de A_n (s'il y en a plusieurs, nous en choisirons un). L'ensemble $\mathcal{F}'$ des points A'_n est dénombrable et partout dense dans $\overline{\mathcal{E}}$ [en effet, pour tout $B \in \overline{\mathcal{E}}$, on a $r(B, A'_n) \leqq 2r(B, A_n)$; il existe donc des A'_n rendant cette distance arbitrairement petite]. A chaque point A'_n, faisons correspondre une suite de points $B_{n,p}$ de $\mathcal{E}$ qui tendent vers lui. La suite des $B_{n,p}$ est un sous-ensemble $\mathcal{E}_\omega$ de $\mathcal{E}$, dénombrable et partout dense dans $\mathcal{E}$.

7. Probabilités conditionnelles. Sous-ensembles minimisants et suites minimisantes. — 1° Nous considérerons dans la suite des probabilités conditionnelles, la fonction X(A) étant supposée connue dans un ensemble non vide $\mathcal{E}$. La valeur en un point quelconque $B \in \Omega$ prend alors la forme, que nous appellerons *canonique*,

$$X(B) = \mu + \sigma\xi, \tag{7.1}$$

μ [ou $\mu(B)$, ou $\mu(B \mid \mathcal{E})$] étant la *la valeur probable conditionnelle;* σ[ou $\sigma(B)$, ou $\sigma(B \mid \mathcal{E})$] est l'*écart type conditionnel*, toujours ≥ 0]. Les données ne sont pas quelconques; elles sont censées provenir d'une expérience effectivement faite, donc, vérifier certaines conditions presque sûres, dont certaines vont être précisées. C'est en vertu de ces conditions qu'on peut considérer μ comme presque sûrement bien défini.

Nous dirons que : *un sous-ensemble* $\mathcal{E}$ *d'un ensemble* $\mathcal{E}'$ *est minimisant pour* $\sigma(B)$ si $\sigma(B \mid \mathcal{E}) = \sigma(B \mid \mathcal{E}')$ (ou plus simplement, $\sigma = \sigma'$). De même : *une suite de sous-ensembles* $\mathcal{E}_n$ *de* $\mathcal{E}'$ *est minimisante pour* $\sigma(B)$ si, pour n infini, $\sigma_n = \sigma(B \mid \mathcal{E}_n)$ tend vers σ' (comme en tout cas $\sigma \geq \sigma'$, ces définitions sont naturelles).

Considérons un des ensembles $\mathcal{E}_\omega$, dénombrable et partout dense dans $\mathcal{E}'$, dont l'existence résulte du lemme 1. Une fois X(A) connu dans $\mathcal{E}_\omega$, la donnée de ses valeurs dans $\mathcal{E} - \mathcal{E}_\omega$ ne donne aucune information nouvelle, et elle ne peut pas changer $\sigma(B)$. Donc $\sigma(B \mid \mathcal{E}) = \sigma(B \mid \mathcal{E}_\omega)$, c'est-à-dire que $\mathcal{E}_\omega$ est, quel que soit B, un sous-ensemble de $\mathcal{E}$ minimisant pour $\sigma(B)$.

Si l'on range en une suite $\{A_n\}$ les points de $\mathcal{E}_\omega$, et que $\mathcal{E}_n$ désigne l'ensemble des n premiers, $\sigma(B \mid \mathcal{E}_\omega)$ est la limite, pour n infini, de $\sigma(B \mid \mathcal{E}_n)$. En effet, la fonction laplacienne $X(B) - X(A_1)$ étant bien définie par sa covariance, la loi conditionnelle de X(B), quand tous les $X(A_n)$ sont donnés, est définie par la donnée des $E\{[X(B) - X(A_n)][X(B) - X(A_p)]\}$. Les données sucessives des $X(A_n)$ ne peuvent que réduire l'écart type conditionnel de X(B), et sa valeur finale est

$$\sigma(B \mid \mathcal{E}_\omega) = \sigma(B \mid \mathcal{E}).$$

Par suite :

Lemme 2. — *Quels que soient l'ensemble* $\mathcal{E}$ *et le point* B, *il existe des sous-ensembles dénombrables* $\mathcal{E}_\omega$, *minimisants pour* $\sigma(B)$, *et il existe des suites minimisantes formées d'ensembles finis* $\mathcal{E}_n$. $\sigma(B \mid \mathcal{E})$ *peut donc être défini comme borne inférieure des valeurs de* $\sigma(B \mid \mathcal{E}_n)$ *pour des sous-ensembles finis* $\mathcal{E}_n$.

Nous verrons d'ailleurs qu'il peut exister des sous-ensembles minimisants pour $\sigma(B)$ qui ne sont pas partout denses dans $\mathcal{E}'$.

Remarquons, d'autre part, que les valeurs des écarts types conditionnels déduites de la formule (2.1) ne sont pas intervenues dans le raisonnement précédent. Les propriétés de l'espace Ω ne sont intervenues que pour donner un exemple concret de suite minimisante formée d'ensembles finis. Mais on peut voir autrement que de telles suites existent toujours. Considérons, en effet, une suite de points A_n définis de la manière suivante : l'ensemble $\mathcal{E}_n$ des n premiers points étant choisi, nous imposerons au choix de A_{n+1} la seule condition que la connaissance de $X(A_{n+1})$ donne une information nouvelle sur $X(B)$, c'est-à-dire que

$$\sigma(B \mid \mathcal{E}_{n+1}) < \sigma(B \mid \mathcal{E}_n).$$

Nous continuerons ainsi indéfiniment, et, s'il y a lieu, transfiniment [11], jusqu'à ce qu'il n'existe plus aucun point A de $\mathcal{E}'$ tel que $X(A)$ donne une information nouvelle sur $X(B)$; σ aura atteint à ce moment la valeur σ'. Or il ne peut y avoir qu'une infinité dénombrable de sauts de la fonction non croissante $\sigma(B \mid \mathcal{E}_n)$. L'ensemble des points choisis, qui est évidemment minimisant, est donc dénombrable. On peut alors ranger ses points en une suite simplement infinie $\{A'_\nu\}$, et, $\mathcal{E}'_n$ étant l'ensemble des n premiers points de cette suite, la suite des ensembles finis $\mathcal{E}'_n$ est minimisante. Donc : *la conclusion du lemme 2 s'applique à n'importe quel ensemble laplacien de variables aléatoires.*

8. Définition de $\mu(B \mid \mathcal{E})$. — Cette définition résulte du

Lemme 3. — *Si des sous-ensembles $\mathcal{E}_n$ de $\mathcal{E}$ forment une suite minimisante, $\mu = \mu(B \mid \mathcal{E})$ peut être défini comme limite m. q.* (en moyenne quadratique) *de $\mu_n = \mu(B \mid \mathcal{E}_n)$.*

Considérons, en effet, les représentations canoniques

$$X(B) = \mu_n + \sigma_n \xi_n = \mu_p + \sigma_p \xi_p \tag{8.1}$$

qui correspondent respectivement aux données de $X(A)$ sur les ensembles $\mathcal{E}_n$ et $\mathcal{E}_p$. Posons

$$\begin{cases} U = \sigma_p \xi_p - \sigma_n \xi_n = \mu_n - \mu_p, \\ V = \sigma_n \xi_p + \sigma_p \xi_n. \end{cases} \tag{8.2}$$

On a alors

$$\xi_p = \frac{\sigma_p U + \sigma_n V}{\sigma_n^2 + \sigma_p^2}, \tag{8.3}$$

et, par suite, compte tenu de (8.1),

$$X(B) = \mu_p + \frac{\sigma_p^2 U}{\sigma_n^2 + \sigma_p^2} + \frac{\sigma_n \sigma_p}{\sigma_n^2 + \sigma_p^2} V. \tag{8.4}$$

---

[11] On peut d'ailleurs éviter l'intermédiaire des nombres transfinis en opérant de la manière suivante : l'ensemble $\mathcal{E}_n$ étant choisi, σ_n est connu, et σ_{n+1} a une borne inférieure m_{n+1}. Si elle n'est atteinte pour aucun choix de A_{n+1}, on peut du moins choisir ce point de manière que $\sigma_{n+1} \geqq \frac{1}{2}(\sigma_n + m_{n+1})$. En opérant ainsi on ne risque pas que σ_n ait, pour n infini, une limite $\sigma_\omega > \sigma'$.

Les deux premiers termes étant connus quand $X(A)$ est donné dans $\mathcal{E}_n \cup \mathcal{E}_p \subset \mathcal{E}$, le dernier a une valeur quadratique moyenne $m \geqq \sigma$ ([12]). Or, on a

$$(8.5) \qquad m^2 = \frac{\sigma_n^2 \sigma_p^2}{(\sigma_n^2 + \sigma_p^2)^2} (\sigma_n^2 + 2\rho\sigma_n\sigma_p + \sigma_p^2) \qquad [\rho = E(\xi_n \xi_p) \leqq 1].$$

Par hypothèse, quand n et p augmentent indéfiniment, σ_n et σ_p tendent vers σ. L'inégalité $m \geqq \sigma$ implique alors que ρ tende vers 1, et par suite

$$(8.6) \qquad E(U^2) = \sigma_n^2 - 2\rho\sigma_n\sigma_p + \sigma_p^2 \to 0.$$

Comme $U = \mu_n - \mu_p$, il résulte du théorème de Fischer et Riesz que μ_n tend en moyenne quadratique vers une limite μ,

C. Q. F. D.

On peut d'ailleurs aussi définir μ comme une limite presque sûre. Si, en effet,

$$(8.7) \qquad E\{(\mu - \mu_n)^2\} = o\left(\frac{1}{n \log n}\right),$$

il y a convergence presque sûre de μ_n vers μ. Or cette condition peut toujours être réalisée pour une suite partielle extraite de la suite des μ_n. Si elle est réalisée pour deux suites partielles différentes, on a presque sûrement la même limite.

Comme on peut former une suite minimisante formée d'ensembles finis $\mathcal{E}_n$, pour lesquels le calcul de μ_n est classique, *on a ainsi défini* μ, *dans tous les cas, comme limite presque sûre de nombres qu'on sait calculer.*

Remarquons encore qu'il résulte du lemme 3 que : *si* $\mathcal{E}'$ *est un sous-ensemble minimisant de* $\mathcal{E}$, *on a presque sûrement* $\mu = \mu'$.

9. Application a la sphère. — 1° Rappelons d'abord comment se présente la moyenne d'une fonction $f(A)$ sur la sphère $S = S(t)$ de l'espace Ω, de centre O et de rayon t. Les définitions des intégrales de Riemann ou de Lebesgue ne peuvent pas s'étendre à cette sphère, parce qu'il n'existe pas de mesure finie, et positive pour tous les sous-ensembles ouverts de S. R. Gâteaux a alors défini la moyenne m comme limite, pour n infini, de la moyenne m_n sur la section S_n de S par le plan P_n (plan des $x_1, x_2, \ldots, x_n$).

Mais cette limite n'existe pas toujours. Tout ce qu'on peut affirmer, c'est que, si la fonction $f(A)$ est uniformément continue sur S, les différences $m_{n+1} - m_n$

([12]) L'écart type de V est, en effet, dans les conditions indiquées, $\leqq m$ et $\geqq \sigma$. Remarquons aussi que l'ensemble des deux premiers termes peut s'écrire sous la forme

$$\frac{\mu_p \sigma_n^2 + \mu_n \sigma_p^2}{\sigma_n^2 + \sigma_p^2}$$

dans laquelle les deux indices jouent le même rôle.

tendent vers zéro pour n infini. Cela résulte du fait, découvert par Émile Borel, que, quel que petit que soit $\varepsilon > 0$, la partie de la sphère S_{n+1} située à une distance de S_n inférieure à ε, représente une fraction de la surface totale qui tend vers l'unité. Mais il n'en résulte pas que m_n ait une limite. Ainsi, pour

$$(9.1)\qquad f(A) = \sum_{1}^{\infty} a_n x_n^2, \qquad \text{on a} \quad m_n = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}.$$

Si les $|a_n|$ sont bornés, cette fonction est uniformément continue. Mais, si les a_n oscillent assez lentement entre deux limites, les m_n ont les mêmes oscillations. Ainsi, pour

$$(9.2)\qquad a_n = \sin\sqrt{\log n}, \qquad \text{on a} \quad \liminf_{n\to\infty} m_n = -1, \quad \limsup_{n\to\infty} m_n = 1.$$

2* Lemme 4. — *La moyenne* M(t) *de* X(A) *sur la sphère* S(t) *est presque sûrement bien définie.*

D'après le lemme 3 et les remarques finales du n° 8, $\mu = \mu(O\,|\,S)$ est bien défini comme limite m. q. de $\mu(O\,|\,S_n)$; on voit même aisément que

$$(9.3)\qquad E\{(\mu_{n+1} - \mu_n)^2\} = O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

de sorte qu'il y a convergence presque sûre. Par raison de symétrie, μ ne peut être que la moyenne des valeurs de X(A), invariante par un changement d'axes. Il est bien naturel de penser que cette moyenne est bien celle définie par Gâteaux. Pour le démontrer, il n'y a qu'à observer que, pour n fini, $m_n = \mu_n$, et que la suite des sous-ensembles S_n de S est minimisante pour $\sigma(0)$.

En effet, $\mathfrak{M}(\,.\,)$ désignant la moyenne sur une sphère, et tenant compte de la formule (2.2)

$$(9.4)\qquad \begin{cases} E\{[\mathfrak{M}(\overline{X}(A))]^2\} = \mathfrak{M}\{E[\overline{X}(A)X(B)]\} \\ \qquad\qquad = \mathfrak{M}\left[t - \frac{1}{2}r(A, B)\right]. \end{cases}$$

Or la moyenne de r(A, B) sur la sphère ne change pas si l'on fixe un point. Si l'on place A au « pôle », la prépondérance du voisinage de « l'équateur » (découverte par Émile Borel), fait que la moyenne de r(P, B), égale pour la sphère S à $t\sqrt{2}$, tend vers cette limite s'il s'agit des sphères S_n et que n augmente indéfiniment.

On voit ainsi que, pour S,

$$(9.5)\qquad \sigma^2 = E\{[m - X(O)]^2\} = E\{[\mathfrak{M}(X(A))]^2\} = t\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

tandis que $\sigma_n^2 = \sigma^2(O \mid S_n)$ tend vers cette limite ([13]). La suite des S_n est donc bien minimisante, et $\mu_n = m_n$ donne à la limite la formule presque sûre $m = \mu$,

C. Q. F. D.

3° Lemme 5. — *Si* Ω_1 *et* Ω_2 *sont deux plans à une infinité de dimensions, contenus dans* Ω *et contenant* O, *et si* S_1 *et* S_2 *sont leurs intersections avec* S, *on a presque sûrement*

$$\mathfrak{M}\{X(O) \mid S_1\} = \mathfrak{M}\{X(O) \mid S\} = \mathfrak{M}\{X(O) \mid S_2\}. \tag{9.6}$$

En effet, la géométrie de P'_ω et celle de P''_ω sont identiques à celle de O. Donc $\sigma(O \mid S)$ ne change pas si l'on remplace S par S_1 ou S_2. Donc, d'après le lemme 3, on a presque sûrement.

$$\mu(O \mid S') = \mu(O \mid S) = \mu(O \mid S''). \tag{9.7}$$

Ce lemme fait apparaître un déterminisme assez remarquable. Si, pour fixer les idées, Ω est l'espace produit $\Omega_1 \times \Omega_2$ de deux espaces de Hilbert perpendiculaires entre eux, et ayant O comme seul point commun, et si B est un point de S_2, la donnée de X(A) sur S_1 ne détermine pas X(B); mais il y a un déterminisme moyen : bien que la distance de ces deux sphères soit $t\sqrt{2}$, *la moyenne* X(A) *sur* S_1 *et celle de* X(B) *sur* S_2 *sont presque sûrement égales.*

10. Lemme 6. — *Si une fonction laplacienne* M(*t*) *a une covariance* $\Gamma(t, t')$ *analytique pour tous les points de l'intervalle* $a < t < b$ *de la droite* $t = t'$, *elle est presque sûrement analytique dans* (a, b). *La covariance est alors analytique dans* $(a, b) \times (a, b)$.

Considérons, en effet, un point τ de (a, b). La fonction $\Gamma(t, t')$ étant analytique au point $t = t' = \tau$, l'est dans un carré $i \times i$ du plan des tt' ayant ce point pour centre. D'après un théorème de M. Loève [1], p. 316, th. 8), M(*t*) est analytique m. q. dans l'intervalle *i*. Cela veut dire qu'il existe presque sûrement une série de Taylor, convergente dans un cercle de diamètre *i*, dont les sommes successives convergent *m. q.* vers M(*t*). Donc, pour chaque $t \in i$, sa somme est presque sûrement M(*t*).

Sans autre hypothèse que l'analyticité de $\Gamma(t, t')$, on ne pourrait pas conclure que ce qui est presque sûrement vrai pour chaque $t \in i$ le soit presque sûrement dans tout l'intervalle. Mais la fonction M(*t*) est laplacienne, donc bien définie par sa covariance. Or la somme de la série de Taylor considérée est une fonction

---

([13]) On trouvera dans [3], formule (2.2.7), la valeur de σ_n^2, qui est

$$\sigma_n^2 = t - \frac{2^{n-2}}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma^2\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(n - \frac{1}{2}\right)} t,$$

$\Gamma(.)$ désignant la fonction eulérienne.

laplacienne de covariance $\Gamma(t, t')$; elle coïncide donc avec $M(t)$, dont l'analyticité est ainsi prouvée dans i, et par suite [τ étant un point quelconque de (a, b)], dans tout l'intervalle (a, b). La covariance est alors évidemment analytique dans $(a, b) \times (a, b)$, ce qui achève la démonstration du lemme 6.

III. — Le déterminisme de X(A).

11. — Une formule préliminaire. — Désignons respectivement par S_1 et S_2 les deux sphères

$$x_1 = h, \qquad \sum_2^\infty x_n^2 = a^2, \tag{11.1}$$

$$x_1 = h', \qquad \sum_2^\infty x_n^2 = a'^2, \tag{11.2}$$

et par $M_1(a)$ et $M_2(a')$ les moyennes de $\overline{X}(A)$ sur ces sphères (notation du n° 2). D'après la formule (2.2), on a

$$E\{M_1(a) M_2(a')\} = \frac{1}{2}\mathfrak{M}\{r(O, A) + r(O, A') - r(A, A')\}, \tag{11.3}$$

$\mathfrak{M}$ désignant la moyenne de l'expression entre crochets, quand A et A' décrivent respectivement les sphères S_1 et S_2. D'après les propriétés déjà indiquées des sphères de l'espace Ω (ou des plans $x_1 = \mathrm{Cte}$), les projections de OA et OA' sur le plan $x_1 = 0$ font un angle infiniment voisin de $\frac{\pi}{2}$, sauf sur des fractions négligeables de l'espace produit $S_1 \times S_2$; la moyenne de $r(A, A')$ est donc $\sqrt{a^2 + a'^2 + (h' - h)^2}$, et il vient

$$E\{M_1(a) M_2(a')\} = \frac{1}{2}\left[\sqrt{a^2 + h^2} + \sqrt{a'^2 + h'^2} - \sqrt{a^2 + a'^2 + (h' - h)^2}\right]. \tag{11.4}$$

12. Théorème 1. — *Si la fonction* X(A) *est connue dans l'intérieur d'une sphère, si petite soit-elle, elle est déterminée dans tout l'espace.*

Prenons pour origine le centre O de la sphère où X(A) est supposé connu. Soit B un point quelconque de Ω. Désignons par $\mathfrak{S}$ la sphère de diamètre OB, par R son rayon, et par S_1 et S_2 ses intersections avec les plans

$$x_1 = R(1 - \cos\theta) \qquad \text{et} \qquad x_1 = R(1 - \cos\theta'),$$

l'axe des x_1 étant OB, orienté de O vers B. Nous pouvons alors appliquer la formule (11.4), en prenant

$$\left\{\begin{aligned} a &= R\sin\theta, & h &= R(1 - \cos\theta), \\ a' &= R\sin\theta', & h' &= R(1 - \cos\theta'). \end{aligned}\right. \tag{12.1}$$

$M_1(a)$ et $M_2(a')$ sont alors les valeurs d'une même fonction aléatoire $M(\theta)$ pour les valeurs θ et θ' de la variable, de sorte que $E\{M_1(a)M_2(b)\}$ devient la covariance $\Gamma(\theta, \theta')$ de cette fonction, Il vient ainsi

$$\Gamma(\theta, \theta') = R\left(\sin\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta'}{2} - \sqrt{\frac{1-\cos\theta\cos\theta'}{2}}\right). \tag{12.2}$$

Or cette covariance est analytique dans $(0, \pi) \times (0, \pi)$. Il résulte alors du lemme 6 que $M(\theta)$ est presque sûrement analytique dans $(0, \pi)$. Or, $X(A)$ étant, par hypothèse, connu dans un voisinage de O, $M(\theta)$ est connu pour les valeurs très petites de θ. Cette fonction est donc déterminée dans $(0, \pi)$, et sa valeur limite $M(\pi) = X(B)$ est aussi déterminée,

C. Q. F. D.

13. Remarques. — Le théorème précédent généralise le résultat déjà indiqué dans [3], où j'avais étudié le cas où $h = k = 0$. La géométrie du plan $x_1 = 0$ étant identique à celle de l'espace Ω, la formule (11.4) se réduit alors à

$$E\{M_1(a)\,M_1(a')\} = \frac{1}{2}\left(a + a' - \sqrt{a^2 + a'^2}\right). \tag{13.1}$$

Cette fonction étant analytique, il résulte du théorème de Loève que la moyenne $M(a)$ est presque sûrement analytique.

J'avais établi ce résultat par une méthode plus compliquée, basée sur l'étude préalable de la moyenne de $X(A)$ sur la sphère de rayon a dans un espace euclidien à $2n+1$ dimensions, et par un passage à la limite, pour n infini.

En janvier 1961, H. P. Mc Kean m'a indiqué une autre méthode remarquable, basée sur la formule

$$M'_1(a) = c\int_0^\infty \frac{u}{a^2} e^{-\frac{u^2}{2a^2}} \xi_u \sqrt{du} \qquad \left(c^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right). \tag{13.2}$$

On vérifie aisément cette formule par le calcul de la covariance, qui, d'après la formule (13.1), doit être

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial a\,\partial a'}\left(a + a' - \sqrt{a^2 + a'^2}\right) = \frac{1}{2} aa'(a^2 + a'^2)^{-\frac{3}{2}}. \tag{13.3}$$

La fonction $M'_1(a)$ étant analytique, non seulement pour a réel > 0, mais dans l'angle $|\theta| < \frac{\pi}{4}$ du plan complexe (en posant $a = re^{i\theta}$), il en est de même de $M_1(a)$ [14].

De l'analyticité de $M_1(a)$ résulte que, si $X(A)$ est connu dans un voisinage de la surface d'une sphère de centre O, $X(O)$ est déterminé. J'en avais déduit

---

[14] Cette formule de Mc Kean rectifie une formule de [3], où j'avais indiqué $|\theta| < \frac{\pi}{6}$ comme domaine de régularité de cette fonction.

simplement que $X(A)$ est déterminé dans tout le volume intérieur à cette sphère. Il en résultait aussi, à l'extérieur, un déterminisme en moyenne, la moyenne de $X(A)$ étant déterminée pour toute sphère ayant son centre dans le volume en question. Mais le théorème 1 va beaucoup plus loin.

14. Extension au cas de la géométrie riemannienne. — Désignons par $\Omega^\star$ la sphère de Riemann-Hilbert, que nous considérerons comme une sphère immergée dans l'espace de Hilbert Ω; mais la distance de deux points A et A′ sera comptée sur la surface; si donc θ est l'angle des rayons aboutissant aux points A et A′, leur distance sera $r^\star(A, A') = R\theta$ (R désignant le rayon), et non $r(A, A') = 2r\sin\frac{\theta}{2}\cdot$ D'après la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique, si, à partir du pôle P, et dans deux directions rectangulaires, nous portons deux longueurs $R\theta$ et $R\theta'$, la distance des points A et A′ ainsi obtenus est

$$r^\star(A, A') = R\,\mathrm{Arc}\cos(\cos\theta\cos\theta'). \tag{14.1}$$

C'est une fonction analytique, sans autres points singuliers que ceux pour lesquels

$$\cos\theta = \cos\theta' = \pm 1.$$

Nous désignerons par $X^\star(A)$ la fonction brownienne définie dans $\Omega^\star$. On la définit, en partant de celle étudiée au n° 4, par un passage à la limite analogue à celui qui nous a permis pour $X(A)$ de passer du plan P_N à l'espace Ω. Si A′ et B′ sont diamétralement opposés à A et B, on a toujours

$$X^\star(A) + X^\star(A') = X^\star(B) + X^\star(B'). \tag{14.2}$$

Théorème 2. — *Si la fonction $X^\star(A)$ est connue dans l'intérieur d'une sphère, si petite soit-elle, elle est déterminée dans tout l'espace $\Omega^\star$.*

La démonstration est analogue à celle du théorème 1. Désignons par O le centre de la sphère où $X^\star(A)$ est supposé connu, et par B un point quelconque de $\Omega^\star$. La sphère S de diamètre OB située dans Ω coupe $\Omega^\star$ suivant une sphère $S^\star$, qu'on peut considérer comme située dans un espace de Hilbert $\Omega_1 \subset \Omega$; on peut donc lui appliquer la formule (14.1), en remplaçant R par le rayon r de S (qui n'est pas le rayon riemannien de $S^\star$).

Désignons par $M^\star(\theta)$ la moyenne de $X^\star(A)$ sur la sphère de centre O et de rayon riemannien $r\theta$. Un calcul analogue à celui qui nous a conduits à la formule (13.2) donne pour la covariance de $M^\star(\theta)$

$$\Gamma^\star(\theta, \theta') = \frac{r}{2}[\theta + \theta' - \mathrm{Arc}\cos(\cos\theta\cos\theta')]. \tag{14.3}$$

Cette covariance est analytique dans $(0, \pi)\times(0, \pi)$. La fonction $M^\star(\theta)$ est donc analytique, et, comme elle est connue dans un voisinage de l'origine, $X^\star(B) = M^\star(\pi)$ est déterminé au point B.

C. Q. F. D.

IV. — La géométrie des éléments conjugés.

15. Définitions et remarques préliminaires. — Nous dirons que *deux points* A et B sont *conjugués* par rapport à un ensemble $\mathcal{E}$ si, quand la fonction X(.) est connue dans $\mathcal{E}$, les probabilités conditionnelles de X(A) et X(B) sont indépendantes. Deux *ensembles* $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ sont *conjugués* si tous les points A de $\mathcal{F}$ sont conjugués de tous les points de $\mathcal{F}'$.

Compte tenu de la formule (7.1), on voit que deux points A et B sont conjugués si et seulement si

$$\sigma(A)\,\sigma(B)\,E\{\xi(A)\,\xi(B)\}=0. \tag{15.1}$$

Cette condition peut être remplie de deux manières, soit qu'un des facteurs $\sigma(A)$ et $\sigma(B)$ soit nul (et dans ce cas le troisième facteur est indéterminé), soit si $\xi(A)$ et $\xi(B)$ sont orthogonaux, donc indépendants.

Examinons d'abord la première éventualité : $\sigma(A)$ est évidemment nul si $A\in\overline{\mathcal{E}}$ (fermeture de $\mathcal{E}$). Il résulte du théorème 1 que, dans l'espace de Hilbert, $\sigma(A)$ peut s'annuler dans un ensemble $\mathcal{K}(\mathcal{E})$ dont $\overline{\mathcal{E}}$ n'est qu'une partie, et qui peut comprendre tout l'espace Ω. Il peut arriver aussi que $\mathcal{K}(\mathcal{E})$ ne soit qu'un sous-ensemble de Ω sans se réduire à $\overline{\mathcal{E}}$. Un tel cas résulte évidemment du théorème 1, appliqué à un espace de Hilbert Ω_1 qui ne soit qu'un sous-ensemble de Ω. Plus généralement, on peut considérer plusieurs plans Ω_n analogues à Ω_1 ; si $\mathcal{E}$ comprend un ouvert de chaque Ω_n, $\mathcal{K}(\mathcal{E})$ comprend leur réunion, et, si ces plans sont en nombre fini, se réduit à cette réunion. S'il y en a une infinité, tendant pour n infini vers une limite Ω', $\mathcal{K}(E)$ comprend aussi Ω'. Dans le cas d'une infinité dénombrable de plans Ω_n disposés d'une manière quelconque, $\mathcal{K}(\mathcal{E})$ comprend évidemment la réunion de tous les Ω_n, la fermeture de cette réunion, ainsi que tout hyperplan contenant un ensemble ouvert dans lequel cette fermeture serait partout dense.

Un autre exemple est celui d'une sphère S de l'espace Ω. Si $\mathcal{E}$ est un ensemble ouvert de sa surface, $\mathcal{K}(\mathcal{E})$ comprend toute la surface S. Si en effet B est un point quelconque de S, le raisonnement fait au n° 12 sur la sphère $\mathfrak{S}$ de diamètre $OB(O\in\mathcal{E})$ s'applique ici sans changement à l'intersection des sphères S et $\mathfrak{S}$.

Par contre, dans un plan P_N à N dimensions $(N<\infty)$, $\mathcal{K}(\mathcal{E})$ se réduit toujours à $\overline{\mathcal{E}}$. Soit, en effet, $O\notin\overline{\mathcal{E}}$, et $M_N(r)$ la moyenne de X(A) sur la sphère de centre O et de rayon r. L'étude de $M_N(r)$ effectuée dans [3], pour le cas où N est impair, montre que cette fonction n'est pas déterministe : si elle est connue pour $r\geqq r_0$, elle reste indéterminée dans $(0, r_0)$. Prenons alors pour r_0 la distance de O à $\overline{\mathcal{E}}$. Même si l'on complète les données par celle de X(A) dans toute la portion de P_N pour laquelle $r\geqq r_0$, ces données ne peuvent influer sur

$X(O) = M_N(o)$ que par l'intermédiaire des valeurs de $M_N(r)$ dans (r_0, ∞), de sorte que $X(O)$ reste indéterminé.

Le résultat subsiste évidemment si N est pair; il n'y a dans ce cas qu'à considérer $\mathcal{E}$ comme un ensemble d'un plan P_{N+1} contenant P_N.

16. Dans la fin de ce chapitre, nous nous occuperons de la relation entre deux points conjugués n'appartenant pas à $\mathcal{K}(\mathcal{E})$. Nous désignerons par $\mathcal{F}(A)$ le lieu de tous les points B conjugués de A, y compris ceux de $\mathcal{K}(\mathcal{E})$; c'est l'*ensemble conjugué maximal*, contenant tous les autres ensembles conjugués de A. C'est en général une surface analytique, ne pouvant avoir de points singuliers que dans $\overline{\mathcal{E}}$, qui sépare la région où la corrélation de $X(A)$ et $X(B)$ est positive de celle où elle est négative. La première de ces régions existe toujours, puisque la corrélation de $X(A)$ et $X(B)$ est positive si B est assez voisin de A. La seconde semble exister dans le cas général. Je ne connais qu'un cas d'exception : c'est celui où $\mathcal{E}$ est situé sur une demi-droite D issue de A. Alors $\mathcal{K}(\mathcal{E})$ se réduit à la portion D′ de D commençant au point $O \in \overline{\mathcal{E}}$ le plus voisin de A. Si $\mathcal{E}$ se réduit à un point O, cette circonstance se produit pour tout $A \in \Omega$ et distinct de O. En tout cas, si $\mathcal{E}$ est sur la demi-droite D′, et que B lui soit extérieur, la corrélation entre $X(A)$ et $X(B)$ est positive.

Quand $\mathcal{E}$ comprend un nombre fini de points, la surface $\mathcal{F}(A)$ est algébrique. Cela résulte évidemment du fait que la fonction de corrélation conditionnelle de $X(B)$ est une fonction rationnelle des distances des points de E, et des deux points A et B extérieurs à $\mathcal{K}(\mathcal{E})$ qu'on considère, deux à deux. Peut-être l'étude de ces surfaces algébriques est-elle intéressante. Mais elle n'est pas simple, à en juger par le cas où $\mathcal{E}$ se réduit à deux points A_1 et A_2.

Pour étudier ce cas, supposons que A_1 et A_2 soient les points d'abscisses $-a$ et $+a$ sur l'axe des x, et désignons par x et y les coordonnées de B (l'orientation du plan OAB n'important pas pour le moment, il suffit de deux axes). Un calcul élémentaire donne, pour les coefficients μ et σ qui figurent dans l'expression (7.1) de $X(B)$, les expressions

$$(16.1)\qquad \left\{\begin{aligned} &\mu(B) = \frac{X_1+X_2}{2} + \frac{r_2-r_1}{r_0}\,\frac{X_2-X_1}{2},\\ &\sigma^2(B) = \frac{(r_0+r_1+r_2)^2 - 2(r_0^2+r_1^2+r_2^2)}{4r_0}\\ &[r_0 = 2a,\ r_i = r(A_i, B),\ X_i = X(A_i)\ (i=1, 2)].\end{aligned}\right.$$

Le seul résultat simple est donné par la valeur de μ : dans Ω, *le lieu des points* B *pour lesquels* μ *a une valeur donnée, est une nappe d'un hyperboloïde de révolution d'axe* Ox *et de foyers* A_1 *et* A_2. Ce résultat a déjà été indiqué dans [2] sous la forme suivante : *pour que* $X(B_2) - X(B_1)$ *soit indépendant de* $X(A_2) - X(A_1)$, *il faut et il suffit que* B_1 *et* B_2 *soient sur une même nappe d'un hyperboloïde de révolution de foyers* A_1 *et* A_2. Naturellement, cette condition ne change pas si l'on échange les lettres A et B, La surface $\sigma(\mathrm{B}) = \mathrm{Cte}$ est beaucoup moins simple. Son équation est de la forme

$$r^8 + a^2 r^4 \mathrm{P}_1(x^2, y^2) + a^4 \mathrm{Q}(x^2, y^2) + a^6 \mathrm{P}_2(x^2, y^2) = \mathrm{Cte}, \tag{16.2}$$

r désignant $r(\mathrm{O}, \mathrm{B})$, P_1 et P_2 des formes linéaires, et Q_1 une forme quadratique. La seule remarque simple qu'on puisse faire sur la surface analogue dans le cas où $\mathcal{E}$ comprend n points est que, en raison du rôle que jouent les distances, le terme de degré le plus élevé est une puissance de r^2, et que les termes suivants contiendront de telles puissances en facteurs. Je n'ai pas cherché à pousser plus loin cette étude ([15]).

L'équation de la surface $\mathcal{F}(\mathrm{A})$ semble plus compliquée encore. Dans le cas où $\mathcal{E}$ est l'ensemble des deux points A_1 et A_2, la condition pour que A et B soient conjugués est

$$\mathrm{E}\{[\mu(\mathrm{B}) - \mu(\mathrm{A})]^2 + \sigma^2(\mathrm{A}) + \sigma^2(\mathrm{B}) = r(\mathrm{A}, \mathrm{B}). \tag{16.3}$$

On déduit de la première des formules (16.1)

$$\left\{\begin{aligned} \mathrm{E}\{[\mu(\mathrm{B}) - \mu(\mathrm{A})]^2\} &= \left(\frac{r'_2 - r'_1 - r_2 + r_1}{r_0}\right)^2 \mathrm{E}\left\{\left(\frac{\mathrm{X}_2 - \mathrm{X}_1}{2}\right)^2\right\} \\ &= \frac{(r'_2 - r'_1 - r_2 + r_1)^2}{4 r_0} \end{aligned}\right. \tag{16.4}$$

(r'_1 et r'_2 désignant les distances de A à A_1 et A_2). La seconde des formules (16.1) donne $\sigma^2(\mathrm{B})$ et $\sigma^2(\mathrm{A})$. On ainsi, A étant fixe, une équation relativement simple pour définir la surface $\mathcal{F}(\mathrm{A})$ dans le système de coordonnées tripolaires $r(\mathrm{A}, \mathrm{B})$, $r(\mathrm{A}_1, \mathrm{B})$, $r(\mathrm{A}_2, \mathrm{B})$. Mais l'équation cartésienne de cette surface est de degré 16 (puisque l'équation en r, r'_1 et r'_2 est du second degré et qu'il y a trois radicaux à éliminer). Son degré s'élève rapidement en fonction du nombre des points de $\mathcal{E}$.

L'étude générale de la relation entre les éléments conjugués par rapport à un ensemble infini est *a fortiori* très difficile, et nous n'approfondirons que quelques cas assez particuliers. Faisons seulement d'abord une remarque générale. La relation entre deux points conjugués définit dans Ω une transformation de contact de la première classe. Dans cette transformation, à une $(\omega - n)$-surface (lieu de points défini par n relations) correspond une $(n-1)$-surface (lieu de points dépendant de $n-1$ paramètres). Mais, dans le cas qui nous occupe, l'élément conjugué d'une surface S n'est pas l'enveloppe des $\mathcal{F}(\mathrm{A})$ conjugués des points de S; il est leur intersection, et cette intersection sera souvent vide, ou du moins réduite à la partie fixe $\mathcal{K}(\mathcal{E})$. Naturellement, si S est un sous-ensemble d'une surface $\mathcal{F}(\mathrm{B})$, ou de l'intersection de plusieurs surfaces $\mathcal{F}(\mathrm{B}_n)$,

---

([15]) Depuis que ces lignes ont été écrites, j'ai pu démontrer que, pour tout ensemble $\mathcal{E} = \mathrm{c}(\mathrm{A}_i)$ fini ou dénombrable, $\sigma^2(\mathrm{B})$, considéré comme une fonction des $r(\mathrm{A}_i, \mathrm{B})$ est un polynôme du second degré. Je publierai ultérieurement la démonstration.

le conjugué de S ne sera pas vide et pourra même coïncider avec son conjugué dans la transformation de contact dont nous venons de parler.

Les cas particuliers dont nous allons parler présentent le caractère suivant : l'ensemble $\mathcal{F}$ dont on cherche le conjugué par rapport à $\mathcal{E}$ contient $\mathcal{E}$. Dire qu'un point B est conjugué de $\mathcal{F}$, c'est alors dire que $\mathcal{E}$ est un sous-ensemble de $\mathcal{F}$ minimisant pour $\sigma(B)$; la donnée des valeurs de $X(A)$ dans $\mathcal{F} - \mathcal{E}$ n'apporte, en effet, dans ce cas aucune information qui ne soit pas déjà contenue dans celle de ses valeurs dans $\mathcal{E}$. On n'a donc qu'à calculer $\sigma(B \mid \mathcal{E})$ et $\sigma(B \mid \mathcal{F})$ et comparer ces deux nombres. Nous allons faire ce calcul dans trois cas particuliers. Nous n'aurons ensuite qu'à énoncer les conséquences qui en résultent.

17. Formules préliminaires. — Nous considérerons l'espace Ω comme l'espace produit d'un espace de Hilbert Ω_1 et d'un espace Ω_2 qui peut être un espace euclidien à N dimensions ($N \geqq 1$) ou un espace de Hilbert. Ces deux espaces sont supposés orthogonaux et sans autre point commun que l'origine O. Nous supposerons choisi dans Ω_1 un système d'axes rectangulaires Ox_n, et dans Ω_2 un système d'axes rectangulaires Oy_n. Nous désignerons par A_n le point $x_n = a$ de l'axe Ox_n, par B_n le point $y_n = b$ de l'axe Oy_n, par B un point quelconque de Ω_2 tel que $r(O, B) = b$, par S_1, ou $S_1(a)$, la sphère de centre O et de rayon a dans Ω_1, par S_2, ou $S_2(b)$, la sphère de centre O et de rayon b dans Ω_2, par $\mathcal{E}_\omega$ l'ensemble de tous les A_n, et par $\mathcal{E}_n$ le sous-ensemble formé par les n premiers de ces points.

1° *Calcul de* $\sigma(B \mid \mathcal{E}_\omega)$. — Commençons par calculer $\sigma(B \mid \mathcal{E}_n)$. Par raison de symétrie, on a

$$\mu_n = \mu(B \mid \mathcal{E}_n) = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} \qquad [X_h = X(A_h)]. \tag{17.1}$$

$\sigma_n = \sigma(B \mid \mathcal{E}_n)$ est donc l'écart quadratique moyen de $X(B) - \mu_n$. Pour le calculer, on peut supposer $X(B) = 0$. Alors

$$\sigma_n^2 = \left\{ E\left(\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}\right)^2 \right\} = \frac{1}{n} E(X_1^2) + \left(1 - \frac{1}{n}\right) E(X_1 X_2). \tag{17.2}$$

Or, d'après les formules (2.1) et (2.2),

$$E(X_1^2) = c, \qquad E(X_1 X_2) = c - \frac{a}{\sqrt{2}} \qquad (c = \sqrt{a^2 + b^2}). \tag{17.3}$$

Il vient donc

$$\sigma_n^2 = c - \left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{a}{\sqrt{2}}, \tag{17.4}$$

et, pour n infini,

$$\sigma^2(B \mid \mathcal{E}_\omega) = c - \frac{a}{\sqrt{2}}. \tag{17.5}$$

Dans le cas particulier où $b = a$, cette formule se réduit à

$$\sigma^2(\mathrm{B} \mid \mathcal{E}_\omega) = \frac{a}{\sqrt{2}}. \tag{17.6}$$

2° *Calcul de* $\sigma(\mathrm{B} \mid \mathrm{S}_1)$. — Le calcul est tout à fait analogue au précédent : σ^2 apparaît comme la moyenne de

$$\mathrm{E}\{\mathrm{X}(\mathrm{A})\,\mathrm{X}(\mathrm{A}')\} = c - \frac{1}{2} r(\mathrm{A}, \mathrm{A}') \tag{17.7}$$

lorsque A et A′ décrivent indépendamment la surface S_1. Or, comme nous l'avons déjà vu, la moyenne de $r(\mathrm{A}, \mathrm{A}')$ est $a\sqrt{2}$, On a donc encore

$$\sigma^2(\mathrm{B} \mid \mathrm{S}_1) = c - \frac{a}{\sqrt{2}}. \tag{17.8}$$

Nous voyons donc que : *quel que soit* $\mathrm{B} \in \Omega_2$, $\mathcal{E}_\omega$ *est un sous-ensemble de* S_1 *minimisant pour* $\sigma(\mathrm{B})$.

3° *Calcul de* $\sigma(\mathrm{B} \mid \Omega_1)$. — Nous allons d'abord établir une inégalité relative à $\sigma = \sigma(\mathrm{B} \mid \mathcal{E})$, $\mathcal{E}$ étant un sous-ensemble quelconque de Ω_1. A cet effet, désignons par B_h le point $y_h = b$ de l'axe $\mathrm{O}y_h$. Par raison de symétrie, $\mu(\mathrm{B}_h) = \mu(\mathrm{B})$, $\sigma(\mathrm{B}_h) = \sigma(\mathrm{B})$, et le coefficient de corrélation $\rho = \mathrm{E}\{\xi(\mathrm{B}_h)\,\xi(\mathrm{B}_k)\}$ est indépendant de h et k. On a alors

$$\mathrm{E}\left\{\left[\frac{1}{n}\sum_1^n \xi(\mathrm{B}_h)\right]^2\right\} = \frac{1}{n} + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\rho \geqq 0. \tag{17.9}$$

Si Ω_2 est un espace de Hilbert, n peut être pris arbitrairement grand. Donc $\rho \geqq 0$. La forme de la figure formée par $\mathcal{E}$, B_1 et B_2 étant indépendante du nombre de dimensions de Ω_2 (pourvu qu'il soit $\geqq 2$; sinon on ne peut pas parler de B_2), cette inégalité subsiste de toute façon.

On a alors

$$\mathrm{E}\{[\mathrm{X}(\mathrm{B}_2) - \mathrm{X}(\mathrm{B}_1)]^2\} = \sigma^2 \mathrm{E}\{[\xi(\mathrm{B}_2) - \xi(\mathrm{B}_1)]^2\} = 2\sigma^2(1 - \rho) \leqq 2\sigma^2, \tag{17.10}$$

et, comme le premier membre est $r(\mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2) = b\sqrt{2}$,

$$\sigma^2 \geqq \frac{b}{\sqrt{2}}. \tag{17.11}$$

Or si, laissant b fixe, nous supposons $a = b$, le second membre est précisément, d'après la formule (17.6), égal à $\sigma^2(\mathrm{B} \mid \mathcal{E}_\omega)$, la borne inférieure trouvée pour σ^2 est ainsi atteinte, si $a = b$, pour $\mathcal{E}_\omega$, et par suite pour tous les sous-ensembles $\mathcal{E}$ de Ω_1 qui contiennent $\mathcal{E}_\omega$, et pour l'ensemble Ω_1 lui-même. Donc :

Si $a = b$, $\mathcal{E}_\omega$ *et* S_1 *sont des sous-ensembles de* Ω_1 *minimisants pour* $\sigma(\mathrm{B})$.

Ce résultat subsiste évidemment même si Ω_2 se réduit à la droite OB. Il subsiste aussi, malgré la diminution apparente de l'information, si l'on remplace $\mathcal{E}_\omega$

par n'importe lequel de ses sous-ensembles infinis; la figure formée par un tel sous-ensemble et B est, en effet, identique à celle formée par $\mathcal{E}_\omega$ et B. Par contre, en comparant l'expression (17.5) de $\sigma^2(B \mid S_1)$ à la valeur $\frac{b}{\sqrt{2}}$ que nous venons de trouver pour $\sigma^2(B \mid \Omega_1)$, on voit qu'il ne subsiste pas si $a \neq b$.

18. Conséquences des formules du n° 17. — Nous n'avons maintenant qu'à tenir compte des remarques finales du n° 16 pour déduire de ces formules deux théorèmes relatifs aux relations entre des éléments conjugués :

Théorème 3. — *La sphère* S_1 *du sous-espace de Hilbert* Ω_1 *et* Ω_2 *sont conjugués par rapport à* $\mathcal{E}_\omega$ (donc aussi par rapport à n'importe quel ensemble $\mathcal{E} \subset S_1$ qui contienne un sous-ensemble superposable à $\mathcal{E}_\omega$, même s'il est dans un plan qui ne soit qu'une partie de Ω_1; l'essentiel est que ce plan ait une infinité de dimensions).

Théorème 4. — *Si* $a = b$, S_2 *et* Ω_1 *sont conjugués par rapport à* $\mathcal{E}_\omega$ (donc aussi par rapport à S_1).

19. Remarques finales. — Dans les calculs du n° 17, nous avons supposé OB perpendiculaire à Ω_1. La symétrie des données nous permettait alors d'écrire sans calcul la valeur de μ. Dans le cas général, $\mu(B \mid \mathcal{E}_\omega)$ est une moyenne de la forme

$$\sum_1^\infty \alpha_n X_n \qquad \left(\sum \alpha_n = 1\right),$$

et il faut déterminer les α_n de manière à rendre minimale l'expression

$$E\left\{\left[X(B) - \sum_1^\infty \alpha_n X_n\right]^2\right\}.$$

Pour le calcul de $\mu(B \mid S_1)$, le problème se pose d'une manière analogue. La symétrie permet de n'introduire qu'une fonction arbitraire $\varphi(\theta)$ d'une variable, et il faut appliquer les méthodes du calcul des variations pour déterminer cette fonction. Les calculs ne semblent pouvoir conduire à aucun résultat simple. Seule l'expression $\frac{b}{\sqrt{2}}$ de $\sigma^2(B \mid \Omega_1)$ reste inchangée, b désignant, non la distance $r(O, B)$, mais la distance de B à Ω_1.

Les calculs du n° 17 ne nous permettent donc pas d'affirmer que, dans les énoncés des théorèmes 3 et 4, Ω_2 et S_2 soient respectivement les ensembles conjugués maximaux de S_1 et Ω_1, et inversement. Mais un raisonnement heuristique très simple permet de penser que ce sont, en effet, des ensembles conjugués maximaux : c'est que l'un de ces ensembles est une $(\omega - n)$-surface, et l'autre une $(n - 1)$-surface. D'après le n° 16, il n'y a pas lieu de prévoir un plus grand nombre de dimensions.

Naturellement, si Ω_2 est, comme Ω_1, un espace de Hilbert, il faudra remplacer ω par $\omega_1 + \omega_2$, et considérer qu'on a, d'une part une ω_1-surface, et d'autre part une $(\omega_2 - 1)$- surface (ou, inversement, $\omega_1 - 1$ et ω_2). Dans le cas où, au contraire, Ω_2 se réduit à une droite, il faut bien préciser que S_2 est l'ensemble de B et de son symétrique B' par rapport à O ([16]).

BIBLIOGRAPHIE.

[1] P. Lévy, *Processus stochastiques et mouvement brownien*, suivi d'une étude de M. Loève sur *les fonctions aléatoires du second ordre*, Gauthier-Villars, Paris, 1948, p. 1-364.

[2] P. Lévy, *Le mouvement brownien* (*Mém. Sc. math.*, fasc., **126**, 1954, p. 1-84).

[3] P. Lévy, *A special problem of Brownian motion and a general theory of Gaussian random functions* (*Proc. of the third Berkeley Symposium on mathematical Statistics and Probability*, **2**, 1955, p. 133-175),

[4] P. Lévy, *Le mouvement brownien fonction d'un point de la sphère de Riemann* (*Rend. circ. mat. Palermo*, 2e série, t. 8, 1959. p. 1-14).

[5] P. Lévy, *Le déterminisme de la fonction brownienne d'un point de l'espace de Hilbert* (*C. R, Acad. Sc.*, t. **254**, 1962, p. 3962).

[6] I. J. Schoenberg, *Metric spaces and positive definite functions*, (*Trans. Amer. math. Soc.*, t. **44**, 1938, p. 522-536).

[7] N. N. Tchentsov, *Le mouvement brownien à plusieurs paramètres de M. Lévy et le bruit blanc généralisé* [*Théorie des probabilités et de leurs applications* (Veroya...), Moscou, **2**, 1957, p. 281-288].

([16]) Une remarque qui peut être utile aux lecteurs qui voudraient approfondir l'étude de ces questions est la suivante. Pour $n < \infty$, l'ensemble $\mathcal{E}_n$ du n° 17 est dans un plan qui n'est qu'une partie du plan des n premiers axes. Sa distance à l'origine est $\frac{1}{\sqrt{n}}$. Pour n infini, cette distance tend vers zéro, et le plan de $\mathcal{E}_\omega$ est Ω_1.