ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

O. PYLARINOS

Sur les congruences de normales admettant une famille de ∞^1 surfaces applicables sur une même surface réglée avec correspondance des génératrices

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 79, nº 3 (1962), p. 263-298

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1962_3_79_3_263_0>

Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.,
3e série, t. 79, 1962, p. 263 à 298.

SUR LES CONGRUENCES DE NORMALES ADMETTANT UNE FAMILLE DE ∞^1 SURFACES APPLICABLES SUR UNE MÊME SURFACE RÉGLÉE AVEC CORRESPONDANCE DES GÉNÉRATRICES

PAR M. O. PYLARINOS.

Une congruence de droites n'admet pas en général une famille de ∞^1 surfaces applicables sur une même surface réglée avec correspondance des génératrices. L. Bianchi est parvenu à la détermination de deux classes de congruences de normales qui jouissent de cette propriété dans deux Mémoires consacrés à l'étude des congruences de normales dont les droites peuvent être assemblées en familles dépendant d'un paramètre qui engendrent des hyperboloïdes de révolution ou des surfaces applicables sur un hyperboloïde de révolution ([1]). Mais — autant que je sache — une étude systématique des conditions exigées, afin qu'une congruence de droites admette une telle famille de ∞^1 surfaces, n'a pas encore été entreprise.

Dans le présent article — consacré aux congruences de normales — je trouve d'abord les conditions auxquelles doivent satisfaire les coefficients des deux formes fondamentales d'une surface S rapportée au réseau paramétrique (u, v), afin que la surface de la congruence des normales à S, qui passe par une courbe $v=$ Cte du réseau (u, v) soit applicable sur la surface de cette congruence passant par toute autre courbe de la famille $v=$ Cte de manière

([1]) L. BIANCHI, *a. Sulle superficie le cui normali si distribuiscono in una serie* ∞^1 *di iperboloidi rotondi* (*Annali di Mat. p. e appl.*, 1917, p. 199-223). *b. Sulle superficie le cui normali si distribuiscono in una serie* ∞^1 *di rigate applicabili sull' iperboloide rotondo* (*Rend. Acc. Naz. dei Lincei*, 1918, 2e sem., p. 205-214).

que leurs génératrices se correspondent, les génératrices homologues de ces surfaces coupant S le long des courbes $u = \text{Cte}$. Ensuite je parviens, à l'aide de ces conditions, à certains théorèmes établissant des conditions suffisantes, afin qu'une congruence de normales admette une famille au moins de ∞^1 surfaces applicables sur une même surface avec correspondance des génératrices. Une condition suffisante aussi afin qu'une congruence de droites admette une telle famille de ∞^1 surfaces a été donnée par moi dans un article antérieur (2).

Dans la suite, deux surfaces réglées, qui sont applicables l'une sur l'autre de façon que leurs génératrices se correspondent, sont appelées, pour abréger, *directement applicables*.

CHAPITRE I.

1. Considérons sur une surface non sphérique de l'espace ordinaire une portion S dépourvue de points singuliers et désignons par $(\mathcal{N}_S)$ la congruence des normales à S.

Si

$$\bar{r} = \bar{r}(u, v) \tag{1.1}$$

est l'équation vectorielle de S par rapport au système de référence considéré dans l'espace, on peut écrire l'équation vectorielle de la congruence $(\mathcal{N}_S)$ par rapport à ce même système sous la forme

$$\bar{R} = \bar{r}(u, v) + w\,\overline{\mathcal{N}}(u, v), \tag{1.2}$$

où

$$\overline{\mathcal{N}}(u, v) = \frac{\dfrac{\partial \bar{r}}{\partial u} \wedge \dfrac{\partial \bar{r}}{\partial v}}{\left| \dfrac{\partial \bar{r}}{\partial u} \wedge \dfrac{\partial \bar{r}}{\partial v} \right|} \tag{1.3}$$

est le vecteur-unité de la direction positive de la normale à S en son point $P(u, v)$, la valeur du paramètre w, qui correspond à un point M de cette normale étant égale à la valeur algébrique du vecteur $\overline{PM}$ par rapport à la direction définie sur elle par $\overline{\mathcal{N}}$.

L'équation (1.2) détermine aussi la famille des surfaces $v = \text{Cte}$ de la congruence $(\mathcal{N}_S)$ — qui passent par les courbes paramétriques $v = \text{Cte}$ de S — chacune d'elles étant rapportée au réseau paramétrique (u, w) dont les courbes $u = \text{Cte}$ sont les génératrices de cette surface.

(2) O. Pylarinos. *Sur certains réseaux de courbes tracées sur une surface* (*Bull. Sc. Math.*, 84, 1960, p. 128).

Si l'on désigne par E, F, G; L, M, N les coefficients des deux formes fondamentales de la surface S et par E_0, F_0, G_0 les coefficients de la première forme fondamentale de son image sphérique, on a pour les coefficients e, f, g de la première forme fondamentale d'une surface quelconque Σ de la famille $v = \mathrm{Cte}$ de la congruence $(\mathcal{N}_S)$ les expressions

$$e = E(u, v) - 2w\,L(u, v) + w^2 E_0(u, v), \qquad f \equiv 0, \qquad g \equiv 1. \tag{1.4}$$

On parvient à ces expressions en tenant compte que la surface Σ, rapportée au réseau paramétrique (u, w), est définie par l'équation (1.2) et qu'en outre on a

$$\left\{\begin{aligned} &\overline{\mathcal{N}}^2 \equiv 1, && \overline{\mathcal{N}}\,\frac{\partial \overline{\mathcal{N}}}{\partial u} \equiv 0, && L = -\frac{\partial \bar{r}}{\partial u}\,\frac{\partial \overline{\mathcal{N}}}{\partial u}, \\ &E_0 = \left(\frac{\partial \overline{\mathcal{N}}}{\partial u}\right)^2, && F_0 = \frac{\partial \overline{\mathcal{N}}}{\partial u}\,\frac{\partial \overline{\mathcal{N}}}{\partial v}, && G_0 = \left(\frac{\partial \overline{\mathcal{N}}}{\partial v}\right)^2. \end{aligned}\right. \tag{1.5}$$

Il est à noter que — comme l'on sait ([3]) — les coefficients E_0, F_0, G_0 sont liés avec E, F, G; L, M, N par les relations

$$E_0 = 2LH - EK, \qquad F_0 = 2MH - FK, \qquad G_0 = 2NH - GK, \tag{1.6}$$

où K, H sont respectivement la courbure totale et la courbure moyenne de S.

Considérons maintenant une surface Σ_1 de la famille $v = \mathrm{Cte}$ de $(\mathcal{N}_S)$ et supposons que Σ_1 soit directement applicable sur une autre surface Σ de la même famille, les génératrices homologues de ces surfaces coupant S aux points de la même courbe $u = \mathrm{Cte}$.

Soit v_1 la valeur de v qui correspond à la surface Σ_1. Cette surface rapportée au réseau (u, w_1) dont les courbes $u = \mathrm{Cte}$ sont les génératrices, est définie, d'après (1.2), par l'équation

$$\overline{R}_1 = \bar{r}(u, v_1) + w_1\,\overline{\mathcal{N}}(u, v_1) \tag{1.7}$$

et l'on a, en ayant égard aux (1.4), pour les coefficients e_1, f_1, g_1 de sa première forme fondamentale les expressions

$$e_1 = E(u, v_1) - 2w_1\,L(u, v_1) + w_1^2\,E_0(u, v_1), \qquad f_1 \equiv 0, \qquad g_1 \equiv 1. \tag{1.8}$$

Les courbes homologues sur la surface Σ des trajectoires orthogonales $w_1 = \mathrm{Cte}$ des génératrices de Σ_1 seront les trajectoires orthogonales $w = \mathrm{Cte}$ de ses génératrices, ces surfaces étant, par hypothèse, directement applicables. Soit ρ la valeur de w cossespondant à la courbe de la famille $w = \mathrm{Cte}$ de Σ, qui est homologue à la courbe $w_1 = 0$ de Σ_1. En remplaçant w dans l'équation (1.2) de Σ par $w' + \rho$, on la ramène sous la forme

$$\overline{R} = \bar{r}(u, v) + \rho\,\overline{\mathcal{N}}(u, v) + w'\,\overline{\mathcal{N}}(u, v) \tag{1.9}$$

([3]) *Voir* par exemple W. Blaschke, *Vorlesungen über Differentialgeometrie*, vol. I, 1924, p. 71.

et de là, en ayant égard aux (1.5), on obtient pour les coefficients e', f', g' de la première forme fondamentale de Σ, rapportée aux paramètres u, $w' (= w - \rho)$, les expressions

$$(1.10) \quad e' = E - 2\rho L + \rho^2 E_0 + 2w'(-L + \rho E_0) + w'^2 E_0, \qquad f' \equiv 0, \qquad g' \equiv 1.$$

Or, en vertu des hypothèses ci-dessus, les éléments linéaires des surfaces Σ_1, Σ — définies par les équations (1.7) et (1.9) — ou — ce qui revient au même — les coefficients de leurs premières formes fondamentales, doivent coïncider identiquement pour $w_1 = w'$, compte tenu de la signification du paramètre w. On aura donc

$$(1.11) \quad \begin{cases} E_0(u, v) \equiv E_0(u, v_1), \qquad -L(u, v) + \rho E_0(u, v) \equiv -L(u, v_1), \\ E(u, v) - 2\rho L(u, v) + \rho^2 E_0(u, v) \equiv E(u, v_1) \end{cases}$$

pour la valeur de v qui correspond à la surface Σ.

Ces relations, si la surface Σ_1 est directement applicable sur toute autre surface de la famille $v = \mathrm{Cte}$ de $(\mathcal{N}_S)$, leurs génératrices homologues coupant S aux points de la même courbe $u = \mathrm{Cte}$, seront valables pour toute valeur de v correspondant à une courbe de la famille $v = \mathrm{Cte}$ de S, le coefficient ρ, qui y figure, étant une fonction de la seule variable v, puisque la courbe $w_1 = 0$ de Σ_1 a pour homologue sur toute autre surface de la famille $v = \mathrm{Cte}$ une trajectoire orthogonale de ses génératrices.

On aura donc, dans ce cas,

$$(1.12) \quad E_0 = \left(\frac{\partial \mathcal{N}}{\partial u}\right)^2 \equiv a(u), \qquad -L + \rho(v) E_0 \equiv b(u), \qquad E - 2\rho(v) L + \rho^2(v) E_0 \equiv c(u)$$

et, par conséquent, les coefficients E, L seront des fonctions des u, v de la forme

$$(1.13) \quad E = \rho^2(v)\, a(u) - 2\rho(v)\, b(u) + c(u), \qquad L = \rho(v)\, a(u) - b(u),$$

tandis que, d'après (1.6), la courbure totale K et la courbure moyenne H de S seront liées avec E, L et $a(u)$ par la relation

$$(1.14) \quad EK - 2LH + a(u) = 0.$$

D'autre part, si les conditions (1.13) et (1.14) sont remplies, les coefficients e', f', g' de la première forme fondamentale d'une surface quelconque de la famille $v = \mathrm{Cte}$ de $(\mathcal{N}_S)$, rapportée aux paramètres u, $w' (= w - \rho(v))$ sont — comme on le reconnaît aussitôt, en ayant égard aux (1.10) et (1.12) — des fonctions des u, w' de la forme

$$e' = c(u) - 2w'\, b(u) + w'^2\, a(u) \qquad f' \equiv 0, \qquad g' \equiv 1,$$

ce qui montre que les éléments linéaires de toutes ces surfaces, chacune d'elles étant rapportée aux paramètres u, w', coïncident.

Mais pour que les coefficients E, L de S soient des fonctions des u, v de la forme (1.13) et qu'en même temps la courbure totale K et la courbure moyenne H de S soient liées avec E, L par la relation (1.14), il faut et il suffit, comme on le voit aisément, que les coefficients des deux formes fondamentales de S soient des fonctions des u, v satisfaisant aux trois équations aux dérivées partielles

$$(1.15)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial v}(2\mathrm{LH}-\mathrm{EK})=0, \qquad (2\mathrm{LH}-\mathrm{EK})\dfrac{\partial \mathrm{E}}{\partial v}-\dfrac{\partial \mathrm{L}^2}{\partial v}=0, \\ (2\mathrm{LH}-\mathrm{EK})\dfrac{\partial^2 \mathrm{L}}{\partial u\,\partial v}-\dfrac{\partial \mathrm{L}}{\partial v}\dfrac{\partial}{\partial u}(2\mathrm{LH}-\mathrm{EK})=0. \end{cases}$$

On peut donc énoncer le

Théorème 1. — *Afin que les surfaces de la congruence des normales à une surface* S, *rapportée au réseau paramétrique* (u, v), *qui sont définies par les courbes* $v=$ Cte *de ce réseau, soient directement applicables et qu'en outre leurs génératrices homologues rencontrent* S *le long des courbes* $u=$ Cte, *il faut et il suffit que les coefficients des deux formes fondamentales de cette surface soient des fonctions des paramètres* u, v *satisfaisant aux équations aux dérivées partielles* (1.15).

2. Suivant le théorème démontré, pour que la congruence des normales à une surface, rapportée au réseau paramétrique (u', v'), admette une famille de ∞^1 surfaces directement applicables, il faut et il suffit qu'on puisse déterminer les paramètres u', v' en fonction des deux autres variables u, v de telle manière que les coefficients des deux formes fondamentales de la surface rapportée au réseau (u, v) soient des fonctions des u, v vérifiant les équations (1.15). Il faut et il suffit donc que les paramètres u', v' soient des fonctions des u, v satisfaisant aux trois équations aux dérivées partielles, auxquelles on parvient en remplaçant dans les équations (1.15) E, F, G; L, M, N par leurs valeurs en fonction des coefficients des deux formes fondamentales de la surface rapportée au réseau (u', v') et des dérivées premières des u', v' par rapport aux u, v. Ces trois équations n'admettent pas, en général, de solutions communes. Par suite, *une congruence de normales n'admet pas en général une famille de* ∞^1 *surfaces directement applicables*.

3. De la première équation (1.15) on déduit, si l'on tient compte des (1.6), *que la correspondance entre les images sphériques des courbes* $v=$ Cte *de la surface* S *qu'on obtient en faisant correspondre leurs points situés sur l'image sphérique de la même courbe* $u=$ Cte, *est une correspondance avec égalité des arcs homologues, lorsque les surfaces* $v=$ Cte *de* $(\mathfrak{N}_S)$ *sont directement applicables de façon que leurs génératrices homologues rencontrent* S *le long des courbes* $u=$ Cte.

On peut donc, dans ce cas, remplacer le paramètre u sur S par l'arc des images sphériques des courbes $v=$ Cte sans que le réseau paramétrique soit changé, le nouveau paramètre étant, en vertu des (1.6) et (1.15), une fonction de la seule variable u. Ainsi, si, pour plus de simplicité, on désigne par u le nouveau paramètre, on aura $a(u) \equiv 1$ et les équations (1.15) affectent la forme

$$(3.1) \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial u \partial v} = 0, \qquad \frac{\partial E}{\partial v} - \frac{\partial L^2}{\partial v} = 0, \qquad EK - 2LH + 1 = 0,$$

ce qui montre que, dans ce cas, les coefficients E, L sont des fonctions des u, v de la forme

$$(3.2) \qquad E = \{\rho(v) - b(u)\}^2 + b'^2(u), \qquad L = \rho(v) - b(u).$$

4. L'équation (1.9), lorsque les coefficients E, F, G; L, M, N sont des fonctions des u, v satisfaisant aux équations (1.15), détermine la famille des ∞^1 surfaces — dépendant du paramètre w — engendrées par les trajectoires orthogonales homologues des génératrices des surfaces $v = \text{Cte}$ de la congruence $(\mathfrak{N}_S)$, qui, dans ce cas, sont directement applicables.

Or, pour que la surface S appartienne à cette famille ou, ce qui revient au même, pour que les courbes $v = \text{Cte}$ de S soient des courbes homologues des surfaces $v = \text{Cte}$ de la congruence $(\mathfrak{N}_S)$, il faut et il suffit que le coefficient ρ, qui figure dans l'équation (1.9), soit constant. S'il en est ainsi, les coefficients E, L — d'après (1.13) — seront des fonctions de la seule variable u:

$$(4.1) \qquad E \equiv E(u), \qquad L \equiv L(u).$$

On en déduit que, dans ce cas, la correspondance entre les courbes $v = \text{Cte}$ de S, qu'on obtient en faisant correspondre leurs points situés sur la même courbe $u = \text{Cte}$ est une correspondance avec égalité des arcs homologues et en outre — en ayant égard au fait que la courbure normale $\varkappa_{n_1}$ des courbes $v = \text{Cte}$ est $\varkappa_{n_1} = \frac{L}{E}$ — que ces courbes admettent la même courbure normale à leurs points correspondants.

D'autre part, si les coefficients E, L sont des fonctions de la seule variable u et que la courbure totale et la courbure moyenne de S soient liées avec E, L par une relation de la forme (1.14), les conditions (1.15) sont évidemment remplies. On peut donc, en tenant compte de ce qui est exposé au paragraphe précédent, énoncer le

THÉORÈME 2. — *Les surfaces de la congruence des normales à une surface* S, *qui sont définies par une famille de ∞^1 courbes de* S, *sont directement applicables, lorsque la correspondance entre les courbes de cette famille, qu'on obtient en faisant correspondre les points de ces courbes auxquels elles admettent la même courbure normale, ainsi que l'homologue de cette correspondance entre les images sphériques de ces courbes, sont des correspondances avec égalité des arcs homologues.*

CHAPITRE II.

5. Supposons en premier lieu que *les courbes* $v = \text{Cte}$ *soient des lignes asymptotiques de la surface* S, c'est-à-dire qu'on ait identiquement

$$L = 0. \tag{5.1}$$

Si les surfaces $v = \text{Cte}$ de la congruence $(\mathfrak{N}_S)$ sont directement applicables de façon que leurs génératrices homologues rencontrent S le long des courbes $u = \text{Cte}$, les coefficients E, L de S — d'après ce qui est exposé au paragraphe 1 — sont des fonctions des (u, v) de la forme (1.13) :

$$E = \rho^2(v)\,a(u) - 2\,\rho(v)\,b(u) + c(u), \qquad L = \rho(v)\,a(u) - b(u).$$

On aura donc, en vertu de (5.1), ou bien $\rho = \text{Cte}$ ou bien $a(u) = 0$, $b(u) = 0$. Par suite, le coefficient E est nécessairement une fonction de la seule variable u :

$$E \equiv E(u). \tag{5.2}$$

En outre K, H seront liées avec E, L par la relation (1.14). On en déduit, si l'on tient compte des (5.1) et (5.2), que, dans le cas envisagé, la courbure totale K de S sera aussi une fonction de la seule variable u :

$$K \equiv K(u). \tag{5.3}$$

D'autre part, les conditions (1.15) — comme on le voit aussitôt — sont identiquement remplies, lorsqu'on a $E \equiv E(u)$, $L \equiv 0$, $K \equiv K(u)$. On a donc le

Théorème 3. — *Pour que les surfaces de la congruence des normales à une surface* S, *qui sont définies par l'une des deux familles de ses lignes asymptotiques, soient directement applicables, il faut et il suffit que la correspondance entre les asymptotiques de cette familles, qu'on obtient en faisant correspondre les points de ces courbes où la surface* S *admet la même courbure totale, soit une correspondance avec égalité des arcs homologues.*

6. Supposons maintenant qu'on ait $L \equiv 0$, $M \not\equiv 0$, $N \equiv 0$, c'est-à-dire que le réseau paramétrique (u, v), considéré sur la surface non développable S, soit le réseau de ses lignes asymptotiques.

Dans ce cas, on a

$$K = -\frac{M^2}{EG - F^2}, \qquad H = -\frac{FM}{EG - F^2} \tag{6.1}$$

et, comme l'on sait [4], les équations de Codazzi affectent la forme

$$\frac{\partial}{\partial u}\log K = -4\,\frac{E\dfrac{\partial G}{\partial u} - F\dfrac{\partial E}{\partial v}}{EG - F^2}, \qquad \frac{\partial}{\partial v}\log K = -4\,\frac{G\dfrac{\partial E}{\partial v} - F\dfrac{\partial G}{\partial u}}{EG - F^2}. \tag{6.2}$$

[4] *Voir* par exemple V. Hlavaty, *Differentialgeometrie*, Groningen, 1939, p. 421.

Si les conditions (5.2) et (5.3) sont remplies, la seconde équation (6.2) se réduit à $F \frac{\partial G}{\partial u} = 0$, On aura donc ou bien $F \equiv 0$, ou bien $\frac{\partial G}{\partial u} = 0$.

Si $F \equiv 0$, le réseau (u, v) sera orthogonal et les asymptotiques $v = \text{Cte}$ de S, d'après (5.2), seront en même temps des géodésiques de cette surface. Par suite elles sont des droites. En outre, dans ce cas, S est *une surface minimale*. Elle sera donc *un helicoïde droit à plan directeur*. D'autre part, si S est un helicoïde droit à plan directeur et qu'on la rapporte au réseau orthogonal (u, v) dont les courbes $v = \text{Cte}$ sont les génératrices, les conditions (5.1), (5.2) et (5.3) sont — on le voit aisément — vérifiées.

Si F est $\not\equiv 0$, on aura $\frac{\partial G}{\partial u} \equiv 0$. On en déduit, en ayant égard aux (5.2), (5.3) et (6.2), que la courbure totale K de S est, dans ce cas, nécessairement constante.

D'autre part, si S est une surface à courbure totale constante ($\not\equiv 0$), le réseau de ses lignes asymptotiques — comme l'on sait [5] — est un réseau de Tchebyschef. On aura donc, si l'on rapporte S au réseau u, v de ses lignes asymptotiques.

$$E \equiv E(u), \qquad L \equiv 0, \qquad G \equiv G(v), \qquad N \equiv 0, \qquad K \equiv \text{Cte}.$$

On en déduit, en ayant égard au théorème 3, que les surfaces de la congruence $(\mathfrak{N}_S)$, qui sont définies par chaque famille des lignes asymptotiques de S sont directement applicables, leurs génératrices homologues coupant S le long des asymptotiques de l'autre famille. On peut donc énoncer le

THÉORÈME 4. — *Les surfaces de la congruence des normales à une surface* S *non développable, qui sont définies par l'une des familles de ses lignes asymptotiques, ne sont directement applicables de façon que leurs génératrices homologues rencontrent* S *le long des asymptotiques de l'autre famille, que dans le cas où* S *est ou bien un hélicoïde droit à plan directeur ou bien une surface à courbure totale constante. Dans le dernier cas chacune des familles des lignes asymptotiques de* S *jouit de la propriété ci-dessus, tandis que dans le premier cas les asymptotiques qui jouissent de cette propriété sont les génératrices.*

7. Si S est une surface réglée non développable, l'équation vectorielle de cette surface, rapportée à un réseau paramétrique (u, v) dont les courbes $v = \text{Cte}$ sont les génératrices, peut s'écrire sous la forme

$$\bar{r} = \bar{r}_1(v) + u\,\bar{a}(v), \tag{7.1}$$

où v est l'arc de la courbe définie par l'équation vectorielle

$$\bar{r}_1 = \bar{r}_1(v) \tag{7.2}$$

et $\bar{a}(v)$ est le vecteur-unité qui définit la direction positive des génératrices.

(5) *Voir* par exemple V. HLAVATY, *loc. cit.*, p. 423.

On aura donc, en vertu de ces suppositions,

$$\bar{a}^2 \equiv 1, \qquad \bar{a}\frac{d\bar{a}}{dv} \equiv 0, \qquad \left(\frac{d\bar{r}_1}{dv}\right)^2 \equiv 1, \left\{\frac{d\bar{r}_1}{dv} \wedge \bar{a}\right\}^2 = 1 - \left\{\frac{d\bar{r}_1}{dv}\bar{a}\right\}^2. \tag{7.3}$$

En faisant usage de ces relations, on trouve aisément pour les coefficients E, F, G; L, M de la surface S — définie par l'équation (7.1) — les expressions

$$\left\{\begin{array}{lll} E \equiv 1, & F = \bar{a}\dfrac{d\bar{r}_1}{dv}, & G = 1 + 2u\dfrac{d\bar{r}_1}{dv}\dfrac{d\bar{a}}{dv} + u^2\left(\dfrac{d\bar{a}}{dv}\right)^2, \\ L = 0, & M = -\dfrac{\dfrac{d\bar{r}_1}{dv}\left(\bar{a} \wedge \dfrac{d\bar{a}}{dv}\right)}{\sqrt{u^2\left(\dfrac{d\bar{a}}{du}\right)^2 + 2u\dfrac{d\bar{r}_1}{dv}\dfrac{d\bar{a}}{dv} + \left(\dfrac{d\bar{r}_1}{dv} \wedge \bar{a}\right)^2}} & \end{array}\right. \tag{7.4}$$

et à l'aide des (7.4) on obtient pour la courbure totale K de S l'expression

$$K = -\frac{\left\{\dfrac{d\bar{r}_1}{dv}\left(\bar{a} \wedge \dfrac{d\bar{a}}{dv}\right)\right\}^2}{\left\{u^2\left(\dfrac{d\bar{a}}{dv}\right)^2 + 2u\dfrac{d\bar{r}_1}{dv}\dfrac{d\bar{a}}{dv} + \left(\dfrac{d\bar{r}_1}{dv} \wedge \bar{a}\right)^2\right\}^2}. \tag{7.5}$$

En outre, d'après des formules connues, la ligne de striction de la surface S est définie par l'équation vectorielle

$$\bar{r}_S = \bar{r}_1(v) + u_S(v)\,\bar{a}(v) \tag{7.6}$$

avec

$$u_S = -\frac{\dfrac{d\bar{r}_1}{dv}\dfrac{d\bar{a}}{dv}}{\left(\dfrac{d\bar{a}}{dv}\right)^2}, \tag{7.7}$$

tandis que le paramètre de distribution p de cette surface est

$$p = \frac{\dfrac{d\bar{r}}{dv}\left(\bar{a} \wedge \dfrac{d\bar{a}}{dv}\right)}{\left(\dfrac{d\bar{a}}{dv}\right)^2}. \tag{7.8}$$

En dérivant (7.6) par rapport à v et en tenant compte des (7.3), (7.7) et (7.8), on parvient aux relations connues

$$\frac{d\bar{r}_S}{dv}\frac{d\bar{a}}{dv} = 0, \qquad \frac{d\bar{r}_S}{dv} \wedge \bar{a} = p\frac{d\bar{a}}{dv} \tag{7.9}$$

et, en faisant usage des (7.9), on obtient la relation

$$\left\{\frac{d\bar{r}_1}{dv} \wedge \bar{a}\right\}^2 = \left\{\frac{d\bar{r}_S}{dv} \wedge \bar{a}\right\}^2 + u_S^2\left\{\frac{d\bar{a}}{dv}\right\}^2, \tag{7.10}$$

ce qui conduit, à l'aide de la seconde relation (7.9), à

$$(7.11)\qquad \frac{\left(\frac{d\bar{r}_1}{dv}\wedge\bar{a}\right)^2}{\frac{d\bar{r}_1}{dv}\left(\bar{a}\wedge\frac{d\bar{a}}{dv}\right)}=p+\frac{u_S^2}{p}.$$

Supposons maintenant que les surfaces de la congruence ($\mathfrak{N}_S$), qui passent par les génératrices de S soient directement applicables, leurs génératrices homologues coupant S le long des courbes $u=$ Cte. Dans ce cas, d'après le théorème 3, la courbure totale K de S sera une fonction de la seule variable u, la correspondance entre les courbes $v=$ Cte de cette surface, qu'on obtient en faisant correspondre leurs points situés sur la même courbe $u=$ Cte étant — comme il résulte des (7.4) — une correspondance avec égalité des arcs homologues. On aura donc, en ayant égard à l'expression (7.5) de K,

$$(7.12)\qquad \frac{\left(\frac{d\bar{a}}{dv}\right)^2}{\frac{d\bar{r}_1}{dv}\left(\bar{a}\wedge\frac{d\bar{a}}{dv}\right)}=c_1,\qquad \frac{\frac{d\bar{r}_1}{dv}\frac{d\bar{a}}{dv}}{\frac{d\bar{r}_1}{dv}\left(\bar{a}\wedge\frac{d\bar{a}}{dv}\right)}=c_2,\qquad \frac{\left(\frac{d\bar{r}_1}{dv}\wedge\bar{a}\right)^2}{\frac{d\bar{r}_1}{dv}\left(\bar{a}\wedge\frac{d\bar{a}}{dv}\right)}=c_3,$$

où c_1, c_2, c_3 sont des constantes dont la première et la troisième — puisque S n'est pas développable — sont $\neq 0$.

On en déduit, en tenant compte des (7.7) et (7.8), que, dans ce cas, le paramètre de distribution p de S est partout constant et qu'en outre la ligne de striction de cette surface appartient à la famille des courbes $u=$ Cte, On a, en effet, $p=\frac{1}{c_1}$, $u_S=\frac{c_2}{c_1}$.

D'autre part, si le paramètre de distribution p de la surface réglée définie par l'équation (7.1) est constant et que la courbe définie par l'équation (7.2) soit la ligne de striction de cette surface, les deux premières conditions (7.12), grâce aux (7.8) et (7.9), sont vérifiées. Cela étant, la troisième condition (7.12), comme il résulte de la relation (7.11), est aussi vérifiée. Par suite la courbure totale K de S est une fonction de la seule variable u et les conditions (5.1), (5.2) et (5.3) sont remplies.

Il est à noter que ces conditions sont remplies — on le voit aussitôt — même dans le cas où S est une développable, rapportée à un réseau paramétrique (u, v) dont les courbes $v=$ Cte sont les génératrices, c'est-à-dire dans le cas où S est une surface réglée à paramètre de distribution nul. On a donc le

THÉORÈME 5. — *Les surfaces de la congruence des normales à une surface réglée, qui passent par ses génératrices, ne sont directement applicables que dans le cas où le paramètre de distribution de cette surface est partout constant.*

CHAPITRE III.

8. Supposons, en second lieu, que *le réseau paramétrique* (u, v) *considéré sur la surface* S *soit orthogonal, différent du réseau de ses lignes de courbure*, c'est-à-dire qu'on ait

$$F \equiv 0, \qquad M \not\equiv 0. \tag{8.1}$$

Dans ce cas, on a

$$K = \frac{LN - M^2}{EG}, \qquad H = \frac{1}{2}\left\{\frac{L}{E} + \frac{N}{G}\right\}, \tag{8.2}$$

l'équation de Gauss, comme l'on sait, affecte la forme

$$LN - M^2 = -\sqrt{EG}\left\{\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right)\right\} \tag{8.3}$$

et les équations de Codazzi, on le reconnaît sans peine, peuvent être ramenées sous la forme

$$\left\{\begin{aligned} &E\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{M^2 G}{E}\right) - 2MG\left\{\frac{\partial L}{\partial v} - \frac{1}{2}\left(\frac{L}{E} + \frac{N}{G}\right)\frac{\partial E}{\partial v}\right\} = 0 \\ &G\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{M^2 E}{G}\right) - 2ME\left\{\frac{\partial N}{\partial u} - \frac{1}{2}\left(\frac{L}{E} + \frac{N}{G}\right)\frac{\partial G}{\partial u}\right\} = 0. \end{aligned}\right. \tag{8.4}$$

Supposons maintenant que les surfaces de la congruence $(\mathfrak{N}_S)$, qui passent par les courbes $v =$ Cte de S, soient directement applicables, leurs génératrices homologues coupant S le long des courbes $u =$ Cte. Dans ce cas — d'après ce qui est exposé au paragraphe 3 — on peut choisir le paramètre u de telle manière que les coefficients E, L soient des fonctions des u, v de la forme

$$E = \{\rho(v) - b(u)\}^2 + b'^2(u), \qquad L = \rho(v) - b(u) \tag{8.5}$$

liées avec la courbure totale K et la courbure moyenne H de S par la relation

$$EK - 2LH + 1 = 0. \tag{8.6}$$

Cette relation, en vertu des (8.2) et (8.5), se réduit à

$$\frac{M^2}{G} = \frac{b'^2(u)}{E} = \frac{b'^2(u)}{\{\rho(v) - b(u)\}^2 + b'^2(u)}. \tag{8.7}$$

On en déduit, compte tenu des (8.1), que, dans le cas envisagé, on a nécessairement

$$b'(u) \not\equiv 0. \tag{8.8}$$

En outre, à l'aide de la relation (8.7), la seconde équation (8.4) devient

$$\frac{\partial N}{\partial u} = H\frac{\partial G}{\partial u}. \tag{8.9}$$

Si l'on remplace E, L, M^2 dans l'équation (8.3) par leurs valeurs tirées des (8.5) et (8.7), on peut exprimer le coefficient N en fonction des $\rho(v)$, $b(u)$, $b'(u)$, de leurs dérivées par rapport à v et à u, de G et de ses dérivées du premier et du second ordre par rapport aux u, v. En remplaçant ensuite dans la première équation (8.4) et dans l'équation (8.9) N par l'expression trouvée et E, L, M par leurs valeurs tirées des (8.5) et (8.7), on parvient à deux relations entre le coefficient G et ses dérivées du premier, du second et du troisième ordre par rapport aux u, v, des $\rho(v)$, $b(u)$, $b'(u)$ et de leurs dérivées, qui — d'après notre hypothèse — doivent être identiquement vérifiées.

D'autre part, si les fonctions $\rho(v)$, $b(u)$, $b'(u)$ sont telles qu'il y ait des fonctions $G(u, v)$ vérifiant identiquement ces deux équations, à chacune de ces fonctions on peut faire correspondre deux surfaces dont chacune — définie à un déplacement près — est rapportée à un réseau orthogonal (u, v) tel que les surfaces $v = \text{Cte}$ de la congruence des normales à elle, soient directement applicables, leurs génératrices homologues la coupant le long des courbes $u = \text{Cte}$.

On peut, en effet, à l'aide de cette fonction $G(u, v)$ déterminer, en faisant usage des (8.3), (8.5) et (8.7), E, L, M^2 en fonction des u, v de façon que, si l'on pose $F \equiv 0$ les conditions (3.1) ainsi que les équations (8.3) et (8.4) soient vérifiées.

9. Dans le cas spécial où la surface S qui jouit de la propriété ci-dessus, est *une surface minimale* rapportée à un réseau orthogonal (u, v) on a, compte tenu des (8.2),

$$\frac{L}{E} + \frac{N}{G} = 2H = 0 \tag{9.1}$$

et l'on peut choisir le paramètre u de telle manière que les coefficients E, L soient des fonctions des u, v de la forme (8.5).

Supposons d'abord que *le réseau* (u, v) *soit le réseau des lignes de courbure de* S.

Dans ce cas, comme l'on sait, les équations de Codazzi affectent la forme

$$\frac{\partial L}{\partial v} = H\frac{\partial E}{\partial v}, \qquad \frac{\partial N}{\partial u} = H\frac{\partial G}{\partial u}. \tag{9.2}$$

La première de ces équations, grâce aux (8.5) et (9.1), se réduit à $\frac{d\rho}{dv} = 0$. On en déduit, compte tenu des (8.5), que le coefficient E est une fonction de la seule variable u, ce qui montre que *les courbes* $v = \text{Cte}$ *sont des géodésiques de* S, le réseau (u, v) étant orthogonal.

Supposons en second lieu que *le réseau* (u, v) *soit le réseau des lignes asymptotiques de* S.

Dans ce cas, on a $L = N = 0$ et l'on en déduit, compte tenu des (8.5), que le coefficient E est une fonction de la seule variable u, ce qui montre que *les* *asymptotiques* $v =$ Cte *sont en même temps des géodésiques de* S, le réseau (u, v) étant orthogonal. Elles sont donc nécessairement des droites et la surface S est un hélicoïde droit à plan directeur.

Supposons enfin que le réseau orthogonal (u, v) ne coïncide avec aucun des réseaux précédents. On a alors

$$L \neq 0, \qquad M \neq 0, \qquad N \neq 0 \tag{9.3}$$

et la seconde équation (8.4) affecte la forme (8.9). On en déduit, en ayant égard à (9.1), que le coefficient N est une fonction de la seule variable v :

$$N \equiv N(v). \tag{9.4}$$

En outre la première équation (8.4), si l'on y remplace E, L, M^2, N, G par leurs valeurs tirées des (8.5), (8.7), (9.1) et (9.4), donne

$$b'(u)\frac{\partial}{\partial u}\left\{\frac{b'(u)}{\rho(v)-b(u)}\right\} = -\frac{M}{N}\frac{d\rho}{dv},$$

ou, finalement,

$$\frac{\left\{\dfrac{db'}{du}(\rho-b)+b'\dfrac{db}{du}\right\}^2}{(\rho-b)^3} = -\frac{1}{N^2(v)}\left\{\frac{d\rho(v)}{dv}\right\}^2. \tag{9.5}$$

Cette équation, dans le cas envisagé doit être identiquement vérifiée. On doit donc avoir identiquement aussi

$$\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{\left\{\dfrac{db'}{du}(\rho-b)+b'\dfrac{db}{du}\right\}^2}{(\rho-b)^3}\right] = 0, \tag{9.6}$$

ou bien

$$(\rho-b)^2\left\{\frac{db'}{du}(\rho-b)+b'\frac{db}{du}\right\}\left[2\left\{\frac{d^2b'}{du^2}(\rho-b)+b'\frac{d^2b}{du^2}\right\}(\rho-b)\right.$$
$$\left.+3\frac{db}{du}\left\{\frac{db'}{du}(\rho-b)+b'\frac{db}{du}\right\}\right] = 0.$$

Par suite, l'un au moins des trois facteurs du premier membre de cette équation doit s'annuler identiquement.

a. Soit $\rho(v)-b(u)=0$. — Dans ce cas ρ et b sont nécessairement des constantes et le coefficient E est, d'après (8.5), une fonction de la seule variable u. *Les courbes* $v =$ Cte *seront donc des géodésiques de* S, le réseau (u, v) étant orthogonal.

b. Soit $\dfrac{db'}{du}(\rho-b)+b'\dfrac{db}{du}=0$. — On aura alors ou bien $\rho =$ Cte ou bien $\dfrac{db}{du}=0$, $\dfrac{db'}{du}=0$. Dans le premier cas E est, d'après (8.5), une fonction de la seule variable u et, en conséquence, *les courbes* $v =$ Cte *sont des géodésiques de* S. Dans le second cas E, L sont, d'après (8.5), des fonctions de la seule variable v ainsi que le coefficient G, comme il résulte des (9.1) et (9.4). Par suite, dans ce cas, *les courbes* $u =$ Cte *sont des géodésiques de la surface* S, le réseau (u, v) étant orthogonal.

c. Soit enfin

$$(9.7)\qquad 2\left\{\frac{d^2b'}{du^2}(\rho - b) + b'\frac{d^2b}{du}\right\}(\rho - b) + 3\frac{db}{du}\left\{\frac{db'}{du}(\rho - b) + b'\frac{db}{du}\right\} = 0.$$

On en déduit que, dans ce cas, on doit avoir ou bien $\rho =$ Cte ou bien, si $\frac{d\rho}{dv} \not\equiv 0$, $\frac{d^2b'}{du^2} \equiv 0$, le premier membre de cette équation, qui doit être identiquement vérifiée, étant un polynome du second degré par rapport à $\rho(v)$ dont le coefficient de ρ^2 est $2\frac{d^2b'}{du^2}$.

Si $\rho =$ Cte, E est, d'après (8.5), une fonction de la seule variable u et *les courbes* $v =$ Cte *sont des géodésiques de* S. Si $\frac{d\rho}{dv} \not\equiv 0$, $\frac{d^2b'}{du^2} \equiv 0$, l'identité (9.7) devient

$$2b'\frac{d^2b}{du^2}(\rho - b) + 3\frac{db}{du}\left\{\frac{db'}{du}(\rho - b) + b'\frac{db}{du}\right\} = 0.$$

On en tire qu'on aura identiquement

$$2b'\frac{d^2b}{du^2} + 3\frac{db'}{du}\frac{db}{du} = 0, \qquad b'\left(\frac{db}{du}\right)^2 = 0$$

et de là, puisque, en vertu des (8.7) et (9.3), on a $b' \not\equiv 0$,

$$(9.8)\qquad b' = c_1 u + c_2, \qquad b = c,$$

où c_1, c_2, c sont des constantes dont les deux premières ne s'annulent pas simultanément.

En outre, les fonctions $\rho(u)$, $b'(u)$, b, $N(v)$ doivent vérifier identiquement l'équation

$$(9.9)\qquad \begin{aligned} &\{(\rho - b)^2 + b'^2\}^2\sqrt{\frac{N}{b-\rho}} \\ &\quad - (\rho - b)\{(\rho - b)^2 + b'^2\}\frac{d\rho}{dv}\frac{d}{dv}\sqrt{\frac{b-\rho}{N}} \\ &\quad - \sqrt{\frac{b-\rho}{N}}\left\{(\rho - b)^3\frac{d^2\rho}{dv^2} - (\rho - b)^2\left(\frac{d\rho}{dv}\right)^2\right. \\ &\qquad\qquad\qquad \left. + (\rho - b)b'\frac{d^2\rho}{dv^2} + b'^2\left(\frac{d\rho}{dv}\right)^2\right\} \\ &\qquad\qquad\qquad - \sqrt{\frac{N}{b-\rho}}\left\{(\rho - b)^2 b'^2 - b'^2\left(\frac{db'}{du}\right)^2\right\} = 0, \end{aligned}$$

à laquelle on parvient en remplaçant E, L, M, N, G dans l'équation (8.3) de Gauss par leurs valeurs tirées des (8.5), (8.7), (9.4), (9.1) et en tenant compte des (9.8).

Le premier membre de l'identité (9.9) est, en vertu des (9.8), un polynome du quatrième degré par rapport à u dont les coefficients sont des fonctions de la seule variable v. Ces coefficients doivent, en conséquence, s'annuler identiquement. Or de la nullité du coefficient de u^4 — compte tenu que, d'après (9.3), $\frac{N}{\rho - b}$ est $\not\equiv 0$ — résulte $c_1 = 0$. Par suite b, b' seront, dans ce cas, des constantes et les coefficients E, L ainsi que le coefficient G sont, en vertu des (8.5), (9.1) et (9.4), des fonctions de la seule variable v, ce qui montre que *les courbes* $u =$ Cte *sont des géodésiques de* S.

On peut donc énoncer le

THÉORÈME 6. — *Les surfaces de la congruence des normales à une surface minimale* S, *qui sont définies par une famille de* ∞^1 *courbes* (Γ) *de cette surface, ne sont directement applicables de façon que leurs génératrices homologues rencontrent* S *le long des trajectoires orthogonales des courbes* (Γ) *que dans le cas où les courbes* (Γ) *ou leurs trajectoires orthogonales sont des géodésiques de* S.

10. Supposons maintenant que *l'une des familles des courbes paramétriques* $v =$ Cte $u =$ Cte *soit une famille de* ∞^1 *géodésiques de la surface* S, *le réseau* (u, v) *étant orthogonal.*

Si les courbes $v =$ Cte sont des géodésiques de S, on aura

$$E \equiv E(u), \qquad F \equiv 0. \tag{10.1}$$

Si l'on désigne, en outre, par $\varkappa_{n_1}$, $\varkappa_{n_2}$, σ_{g_1}, σ_{g_2} les courbures normales et les torsions géodésiques des courbes $v =$ Cte $u =$ Cte et par $\varkappa_1$, σ_1 la courbure et la torsion des courbes $v =$ Cte et qu'on tienne compte que ces courbes sont des géodésiques de S, on a, d'après des formules connues,

$$\varkappa_1 = |\varkappa_{n_1}| = \left|\frac{L}{E}\right|, \qquad \varkappa_{n_2} = \frac{N}{G}, \qquad \sigma_1 = \sigma_{g_1} = \frac{M}{\sqrt{EG}} = -\sigma_{g_2} \tag{10.2}$$

et, en faisant usage de ces formules, on obtient pour la courbure totale et la courbure moyenne de S les expressions

$$K = \varkappa_{n_1}\varkappa_{n_2} - \sigma_1^2, \qquad H = \frac{1}{2}\left\{\varkappa_{n_1} + \varkappa_{n_2}\right\}. \tag{10.3}$$

Si les surfaces $v =$ Cte de la congruence ($\mathfrak{N}_S$) sont directement applicables de façon que leurs génératrices homologues rencontrent S le long des courbes $u =$ Cte, on peut, d'après ce qui est exposé au paragraphe 3, choisir le paramètre u de telle manière que les coefficients E, L, M, N, G soient des fonctions des u, v satisfaisant aux conditions (3.1).

On en déduit, si l'on tient compte des (10.1), que L sera une fonction de la seule variable u. On aura donc :

$$L \equiv L(u), \qquad E(u)K - 2L(u)H + 1 = 0 \tag{10.4}$$

et de là, en ayant égard aux (10.1), (10.2) et (10.3), $\varkappa_1 \equiv \varkappa_1(u)$, $\sigma_1 \equiv \sigma_1(u)$, ce qui montre que les géodésiques $v =$ Cte admettent la même courbure et la même torsion à leurs points situés sur la même courbe $u =$ Cte. Mais, d'après (10.1), la correspondance entre les courbes $v =$ Cte, qu'on obtient en faisant correspondre leurs points situés sur la même courbe $u =$ Cte, est une correspondance avec égalité des arcs homologues. Par suite les géodésiques $v =$ Cte de S sont nécessairement les positions diverses d'une courbe — invariable de forme — qui se meut de façon que les trajectoires de ces points coïncident avec les trajectoires orthogonales de ses positions.

D'autre part, si S est engendrée par les positions diverses d'une courbe qui se meut de la manière ci-dessus, les positions diverses de cette courbe sont des géodésiques de S ([6]) et les surfaces de la congruence ($\mathcal{N}_S$), qui passent par ces géodésiques, sont évidemment les positions diverses de la surface engendrée par les normales principales de la courbe mobile, qui se meut avec la courbe. Ces surfaces sont évidemment superposables, leurs génératrices homologues coupant S le long des trajectoires des points de la courbe mobile. On a donc le

Théorème 7. — *Les surfaces de la congruence des normales à une surface* S, *qui sont définies par une famille de ∞^1 géodésiques de cette surface, ne sont directement applicables de manière que leurs génératrices homologues coupent* S *le long des trajectoires orthogonales de ces géodésiques, que dans le cas où ces géodésiques sont les positions diverses d'une courbe qui se meut de façon que les trajectoires de ses points se confondent avec les trajectoires orthogonales de ses positions.*

11. *Si les courbes* $u =$ Cte *sont des géodésiques de la surface* S, *le réseau* (u, v) *étant toujours orthogonal,* on a

$$F \equiv 0, \qquad G \equiv G(v). \tag{11.1}$$

Si de plus les surfaces $v =$ Cte de la congruence ($\mathcal{N}_S$) sont directement applicables et que leurs génératrices homologues rencontrent S le long des géodésiques $u =$ Cte, on peut choisir le paramètre u — d'après ce qui est exposé au paragraphe 3 — et le paramètre v, grâce aux (11.1), de telle manière qu'on ait

$$\begin{cases} E \equiv \{\rho(v) - b(u)\}^2 + b'^2(u), \qquad F \equiv 0, \qquad G \equiv 1; \\ L \equiv \rho(v) - b(u), \qquad EK - 2LH + 1 = 0. \end{cases} \tag{11.2}$$

La dernière de ces relations, on le voit aisément, se réduit à

$$M^2 = \frac{b'^2(u)}{E} = \frac{b'^2}{(\rho - b)^2 + b'^2} \tag{11.3}$$

et l'on peut distinguer deux cas suivant que M est ou non $\equiv 0$.

([6]) O. Pylarinos, *loc. cit.*, p. 135.

a. Soit $M \equiv 0$. — Le réseau (u, v) est, dans ce cas, le réseau des lignes de courbure de S et, par suite, les équations de Codazzi peuvent s'écrire sous la forme (9.2). La première de ces équations, grâce aux (11.2) ainsi qu'au fait que, d'après (11.3), on a $b'(u) \equiv 0$, se réduit à

$$N \frac{\partial E}{\partial v} = 0. \tag{11.4}$$

On aura donc ou bien $N \equiv 0$ ou bien $\frac{\partial E}{\partial v} \equiv 0$.

Si $N \equiv 0$, les géodésiques $u = \text{Cte}$, qui sont des lignes de courbure de S, sont en même temps des asymptotiques de cette surface. Par conséquent, elles sont des droites et *la surface est nécessairement développable.*

Si $\frac{\partial E}{\partial v} \equiv 0$, les courbes $v = \text{Cte}$ sont aussi des géodésiques de S — le réseau (u, v) étant orthogonal — et, d'après un théorème connu [7] *la surface* S *est une développable.* On aura donc $K = 0$ et de là [si l'on tient compte que, grâce à la dernière des (11.2), on a $L \not\equiv 0$] $N \equiv 0$, ce qui montre que même dans ce cas les géodésiques $u = \text{Cte}$ sont nécessairement les génératrices de S.

Par conséquent, si $M \equiv 0$, *la surface* S *est développable et les géodésiques* $u = \text{Cte}$ *sont ses génératrices.*

b. Soit $M \not\equiv 0$. — Dans ce cas, grâce à (11.3), on a

$$b(u) \not\equiv 0 \tag{11.5}$$

et l'on peut ramener les équations de Codazzi sous la forme (8.4). De la seconde de ces équations, en tenant compte des (11.2), on déduit que le cœfficient N est nécessairement une fonction de la seule variable v :

$$N \equiv N(v). \tag{11.6}$$

En outre, l'équation (8.3) de Gauss, si l'on y remplace E, G, L, M, N par leurs valeurs tirées des (11.2), (11.3) et (11.6), devient

$$\left\{ N(v) + \frac{d^2\rho}{dv^2} \right\} \left\{ (\rho - b)^3 + b'^2(\rho - b) \right\} + b'^2 \left\{ \left(\frac{d\rho}{dv} \right)^2 - 1 \right\} = 0. \tag{11.7}$$

Cette équation doit être identiquement vérifiée, *les deux fonctions* $N(v) + \frac{d^2\rho}{dv^2}$, $\left(\frac{d\rho}{dv} \right)^2 - 1$ *de* v, *puisque* b' *est,* $\not\equiv 0$, *étant* $\not\equiv 0$.

En effet, si $N + \frac{d^2\rho}{dv^2} \equiv 0$, l'identité (11.7), grâce à (11.5), se réduit à $\left(\frac{d\rho}{dv} \right)^2 - 1 = 0$. On aura donc $\rho = \pm v + c$ et, en vertu de notre hypothèse, $N \equiv 0$.

([7]) *Voir* par exemple L. Eisenhart, *An introduction to Differential geometry*, 1947, p. 178.

Mais, dans ce cas, à l'aide des (11.2), la première équation (8.4) de Codazzi se réduit à

$$(11.8)\quad b'^4\{(\rho-b)^2+b'^2\} - \left\{\frac{db'}{du}(\rho-b)^2+2b'\frac{db}{du}(\rho-b)-b'^2\frac{db'}{du}\right\}^2=0, \qquad \text{avec} \quad \rho=\pm v+c.$$

Le premier membre de l'équation (11.8) — qui doit être aussi identiquement vérifiée — est un polynome du quatrième dégré par rapport à v, dont les coefficients doivent s'annuler identiquement. De la nullité de ces coefficients on déduit aisément $b'\equiv 0$, ce qui est contraire à (11.5).

Si $N+\frac{d^2\rho}{dv^2}\not\equiv 0$, $\left(\frac{d\rho}{dv}\right)^2-1\equiv 0$, l'équation (11.7) devient

$$(\rho-b)^3+b'^2(\rho-b)=0, \qquad \text{avec} \quad \rho=\pm v+c.$$

Le premier membre de cette identité est un polynome du troisième degré par rapport à v et de la nullité de ces coefficients on tire $b'\equiv 0$, ce qui est contraire à (11.5).

On peut donc, puisque b', $N+\frac{d^2\rho}{dv}$, $\left(\frac{d\rho}{dv}\right)^2-1$ sont $\not\equiv 0$, écrire l'identité (8.7) sous la forme

$$(11.9)\qquad \frac{(\rho-b)^3+b'^2(\rho-b)}{b'^2}=-\frac{\left(\frac{d\rho}{dv}\right)^2-1}{N+\frac{d^2\rho}{dv^2}}.$$

On en déduit qu'on doit avoir identiquement aussi

$$\frac{\partial}{\partial u}\left\{\frac{(\rho-b)^3+b'^2(\rho-b)}{b'^2}\right\}=0,$$

ou bien

$$(11.10)\quad b'^2\left\{-3\frac{db}{du}(\rho-b)^2+2b'\frac{db'}{du}(\rho-b)-b'^2\frac{db}{du}\right\} -2b'\frac{db'}{du}\{(\rho-b)^3+b'^2(\rho-b)\}=0.$$

Pour que cette équation — dont le premier membre est un polynome du troisième degré par rapport à $\rho(v)$ — soit identiquement vérifiée, il est nécessaire qu'on ait ou bien $b'=$ Cte, $b=$ Cte, ou bien $\rho=$ Cte.

a. Soient $b=$ Cte, $b'=$ Cte. — Dans ce cas, les coefficients E, F, G; L, M, N de S — comme il résulte des (11.2), (11.3) et (11.6) — sont des fonctions de la seule variable v et la première équation (8.4) de Codazzi devient

$$(11.11)\qquad N=\frac{b'^2}{EL}$$

ou bien, grâce à (11.3),

$$NL-M^2=0,$$

ce qui montre que *la surface* S *est nécessairement développable.*

On en déduit, en faisant usage de l'équation (8.3) de Gauss et en tenant compte qu'on a $G \equiv 1$, que le coefficient E est une fonction de la variable v de la forme

$$E = (Av + B)^2, \tag{11.12}$$

où A, B sont des constantes.

Par suite, les coefficients E, F, G; L, M, N — d'après (11.2), (11.3), (11.11) et (11.12) — sont des fonctions de la seule variable v de la forme

$$\left\{\begin{array}{lll} E = (Av + B)^2, & F = 0, & G = 1; \\ L = \pm\sqrt{(Av + B)^2 - b'^2}, & M = \dfrac{b'}{Av + B}, & N = \pm \dfrac{b'^2}{(Av+B)^2\sqrt{(Av + B)^2 - b'^2}}, \end{array}\right. \tag{11.13}$$

où A, B, b' sont des constantes dont la troisième est $\neq 0$ et les deux premières ne s'annulent pas simultanément.

Les courbes $u = \mathrm{Cte}$ sont des géodésiques de S. Par suite la courbure $\varkappa_2$ et la torsion σ_2 de ces courbes sont respectivement égales à la valeur absolue de leur courbure normale $\varkappa_{n_2} = \frac{N}{G} = N$ et à leur torsion géodésique $\sigma_{g_2} = -\frac{M}{\sqrt{EG}} = -\frac{M}{\sqrt{E}}$, puisqu'on a $G \equiv 1$.

On aura donc, en ayant égard aux (11.13),

$$\varkappa_2 = \frac{b'^2}{(Av + B)^2\sqrt{(Av + B)^2 - b'^2}}, \qquad \sigma_2 = -\frac{b'}{(Av + B)^2}. \tag{11.14}$$

On en déduit, si l'on tient compte que la correspondance entre les courbes $u = \mathrm{Cte}$, qu'on obtient en faisant correspondre leurs points situés sur la même courbe $v = \mathrm{Cte}$, est, d'après (11.13), une correspondance avec égalité des arcs homologues, que ces courbes sont les positions diverses d'une courbe — invariable de forme — qui se meut de façon que les trajectoires de ces points se confondent avec les trajectoires orthogonales de ses positions.

D'autre part, si la courbure $\varkappa_2$ et la torsion σ_2 d'une courbe c sont des fonctions de son arc v de la forme (11.14), cette courbe peut se mouvoir de la manière ci-dessus, ces deux fonctions vérifiant, on le voit aussitôt, l'équation différentielle

$$\left\{\varkappa_2 + \frac{\sigma_2^2}{\varkappa_2} - \frac{\sqrt{\sigma_2}}{\varkappa_2}\frac{d^2}{dv^2}\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma_2}}\right)\right\}\frac{d}{dv}\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma_2}}\right) = \sqrt{\sigma_2}\,\frac{d}{dv}\left\{\frac{\sigma_2 - \dfrac{1}{\sqrt{\sigma_2}}\dfrac{d^2}{dv^2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{\sigma_2}}\right)}{\varkappa_2}\right\},$$

qui exprime la condition exigée pour cela ([8]).

Or, si l'on rapporte la surface S engendrée par les positions diverses de la courbe c qui se meut de la manière ci-dessus, au réseau orthogonal (u, v) dont les courbes $u = \mathrm{Cte}$ sont les positions de c — le paramètre v étant l'arc de cette

([8]) O. Pylarinos, *loc. cit.*, p. 136.

courbe — les courbes $u = \text{Cte}$ seront des géodésiques de S. Par suite, la valeur absolue de la courbure normale $\varkappa_{n_2}$ et la torsion géodésique σ_{g_2} de ces courbes seront respectivement égales à la courbure $\varkappa_2$ et à la torsion σ_2 de c. On aura donc

$$
(11.15) \qquad \left\{ \begin{aligned} & \mathrm{F} \equiv 0, \qquad \mathrm{G} \equiv 1, \\ & \varkappa_{n_2} = \mathrm{N} = \pm \varkappa_2 = \pm \frac{b'^2}{(\mathrm{A}v + \mathrm{B})^2 \sqrt{(\mathrm{A}v + \mathrm{B})^2 - b'^2}}, \\ & \sigma_{g_2} = \sigma_2 = -\frac{\mathrm{M}}{\sqrt{\mathrm{E}}} = -\frac{b'}{(\mathrm{A}v + \mathrm{B})^2} \end{aligned} \right.
$$

En faisant usage des (11.15), on déduit de la seconde équation (8.4) de Codazzi, que $\mathrm{M}^2\mathrm{E}$ est nécessairement une fonction de la seule variable u :

$$
(11.16) \qquad \mathrm{M}^2 \mathrm{E} \equiv \varphi(u).
$$

En éliminant ensuite M entre (11.16) et la dernière des (11.15), on trouve

$$
(11.17) \qquad \mathrm{E} = \frac{\varphi(u)}{b'} (\mathrm{A}v + \mathrm{B})^2
$$

et en remplaçant E, G dans l'équation (8.3) de Gauss par leurs valeurs (11.15) et (11.17), on a $\mathrm{LN} - \mathrm{M}^2 = 0$, ce qui montre que S est une surface développable. On a donc $\mathrm{L} = \frac{\mathrm{M}^2}{\mathrm{N}}$, ou bien, si l'on tient compte des (11.15), (11.16) et (11.17),

$$
\mathrm{L} = \pm \frac{\varphi(u)}{b'} \sqrt{(\mathrm{A}v + \mathrm{B})^2 - b'^2}.
$$

Si l'on remplace maintenant le paramètre u par la variable u' liée avec u par la relation $du' = du \sqrt{\frac{\varphi(u)}{b'}}$, on trouve pour les coefficients des deux formes fondamentales de S, rapportée aux paramètres (u', v), les expressions

$$
(11.18) \qquad \left\{ \begin{aligned} & \mathrm{E}' = (\mathrm{A}v + \mathrm{B})^2, && \mathrm{F}' = 0, && \mathrm{G}' = 1, \\ & \mathrm{L}' = \pm \sqrt{(\mathrm{A}v + \mathrm{B})^2 - b'^2}, && \mathrm{M}' = \frac{b'}{\mathrm{A}v + \mathrm{B}}, && \mathrm{N}' = \pm \frac{b'^2}{(\mathrm{A}v + \mathrm{B})^2 \sqrt{(\mathrm{A}v + \mathrm{B})^2 - b'^2}}, \end{aligned} \right.
$$

qui — on le reconnaît aussitôt — vérifient les conditions (3.1).

On peut donc énoncer le

THÉORÈME 8. — *Une courbe, dont la courbure et la torsion sont des fonctions de son arc v de la forme* (11.14), *peut se mouvoir de façon que les trajectoires de ses points se confondent avec les trajectoires orthogonales de ses positions. La surface* S *engendrée par les positions de cette courbe — lorsqu'elle se meut ainsi — est développable et les surfaces de la congruence* $(\mathfrak{N}_S)$, *qui passent par* *les trajectoires des points de la courbe mobile, sont directement applicables, leurs génératrices homologues coupant* S *le long des positions de cette courbe.*

Il est à noter que, dans ce cas, les surfaces de la congruence $(\mathfrak{N}_S)$, qui passent par les positions diverses de la courbe mobile, sont les positions diverses de la surface engendrée par les normales principales de cette courbe, ces courbes étant des géodésiques de S. Ces surfaces sont, donc, évidemment directement applicables, leurs génératrices homologues coupant S le long des trajectoires des points de la courbe mobile. Par conséquent, *la surface* S, *engendrée par les positions diverses de cette courbe, admet un réseau orthogonal tel que les surfaces de la congruence* $(\mathfrak{N}_S)$, *qui sont définies par chaque famille de ce réseau, soient directement applicables, leurs génératrices homologues coupant* S *le long des courbes de l'autre famille.*

b. Soit $\rho = \text{Cte}$. — Dans ce cas, on déduit aussitôt de l'identité (11.7) que N — qui, d'après (11.6), est une fonction de la seule variable v — est nécessairement constant :

$$N \equiv c. \tag{11.19}$$

En outre, grâce aux (11.2), E, L sont des fonctions de la seule variable u. On en déduit, en faisant usage de l'équation (8.3) de Gauss, qu'on a $LN - M^2 = 0$, ce qui montre que S est une développable. On en tire, si l'on tient compte de (11.19), que M est aussi une fonction de la seule variable u. D'autre part, grâce à ces faits, la première équation (8.4) de Codazzi affecte la forme $2E\dfrac{\partial M}{\partial u} - M\dfrac{\partial E}{\partial u} = 0$, ce qui conduit, en intégrant et en tenant compte que E, M sont des fonctions de la seule variable u, à

$$\frac{M^2}{E} = c', \tag{11.20}$$

où c' est une constante, qui, d'après (11.5), est $\neq 0$.

En éliminant M entre (11.3) et (11.20), on trouve

$$E^2 \equiv \{(\rho - b)^2 + b'^2\}^2 = \frac{b'^2}{c'^2}. \tag{11.21}$$

Mais les fonctions $b(u)$, $b'(u)$ vérifient en même temps identiquement l'équation (11.7), qui, puisqu'on a $\rho = \text{Cte}$ $N = c$, se réduit à

$$(\rho - b)\{(\rho - b)^2 + b'^2\} = \frac{b'^2}{c}.$$

On en déduit, en ayant égard à (11.21), que $\rho - b$, b' sont nécessairement des constantes : $\rho - b = c_1$, $b' = c_2 \neq 0$.

Si l'on remplace maintenant $\rho - b, b'$ dans (11.2) et (11.3) par ces constantes et qu'on tienne compte de (11.19), on trouve pour les coefficients E, F, G; L, M, N de S les expressions

$$(11.22) \quad E = c_1^2 + c_2^2, \quad F = 0, \quad G = 1, \quad L = \pm c_1, \quad M = \pm \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}}, \quad N = c,$$

où c, c_1, c_2 sont des constantes dont les deux dernières sont $\neq 0$.

Les expressions (11.22) des coefficients E, F, G; L, M, N montrent que les courbes de chaque famille $v = \text{Cte}$, $u = \text{Cte}$ sont des géodésiques de S admettant la même courbure constante et la même torsion constante. Elles sont donc les positions diverses d'une hélice circulaire et la surface S est nécessairement un cylindre de révolution dont les génératrices coupent les hélices de chacune de ces familles sous le même angle.

D'autre part, les surfaces de la congruence des normales à un cylindre de révolution, qui sont définies par une famille d'hélices coupant les génératrices sous le même angle, sont, évidemment, directement applicables de façon que leurs génératrices homologues rencontrent le cylindre le long des trajectoires orthogonales de ces hélices.

On peut donc, si l'on tient compte, en outre, qu'on obtient pour les coefficients E, F, G; L, M, N les expressions (11.22) en posant $A = 0$ dans les expressions (11.18) de ces mêmes coefficients, énoncer le

Théorème 9. — *Les surfaces de la congruence des normales à une surface* S, *qui passent par les trajectoires orthogonales d'une famille de* ∞^1 *géodésiques de cette surface, ne sont directement applicables de façon que leurs génératrices homologues rencontrent* S *le long de ces géodésiques que dans le cas où* S *est une surface développable et les géodésiques sont ou bien ses génératrices ou bien les positions diverses d'une courbe — dont la courbure et la torsion sont des fonctions de son arc* v *de la forme* (11.14) *— qui se meut de manière que les trajectoires de ses points se confondent avec les trajectoires orthogonales de ses positions.*

Les théorèmes 6, 7, et 9 permettent de déterminer les surfaces minimales dont chacune admet une famille de ∞^1 courbes telles que les surfaces de la congruence des normales à cette surface passant par ces courbes soient directement applicables de façon que leurs génératrices homologues rencontrent la surface le long des trajectoires orthogonales de ces courbes. Il suit, en effet, de ces théorèmes qu'*une surface minimale ne jouit de cette propriété, que dans le cas où elle est engendrée par les positions diverses d'une courbe qui se meut de façon que les trajectoires de ses points coïncident avec les trajectoires orthogonales de ses positions. La courbe mobile est alors une hélice* *dont la courbure* $\varkappa$ *et la torsion* σ *sont des fonctions de son arc* v *satisfaisant aux équations*

$$\varkappa - c\sigma = 0, \qquad \frac{d^2}{dv^2}\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma}}\right) = \sigma^{\frac{3}{2}}(1 + c^2),$$

où c est une constante (9).

CHAPITRE IV.

12. Supposons enfin que les courbes $v = \mathrm{Cte}$ soient *des lignes de courbure de la surface* S.

Dans ce cas, les surfaces $v = \mathrm{Cte}$ de la congruence $(\mathcal{N}_S)$ sont développables, mais elles ne sont pas, en général, directement applicables.

S'il en est ainsi et que les génératrices homologues de ces surfaces rencontrent S le long des courbes $u = \mathrm{Cte}$, on peut choisir le paramètre u — d'après ce qui est exposé au paragraphe 3 — de telle manière que les coefficients des deux formes fondamentales de S soient des fonctions des u, v satisfaisant aux conditions (3.1).

La troisième de ces conditions, grâce aux (1.5) et (1.6), affecte, à l'aide des formules connues (10), la forme

$$\mathrm{E}\{\varkappa_{n_1}^2 + \sigma_{g_1}^2\} = 1, \tag{12.1}$$

où $\varkappa_{n_1}$, σ_{g_1} sont la courbure normale et la torsion géodésique des courbes $v = \mathrm{Cte}$. Mais, en vertu de notre hypothèse, on a $\sigma_{g_1} \equiv 0$. La condition (12.1) se réduit donc à $\varkappa_{n_1}^2 = \frac{1}{\mathrm{E}}$, ou bien, puisque $\varkappa_{n_1} = \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{E}}$, à

$$\mathrm{L}^2 = \mathrm{E}. \tag{12.2}$$

On en déduit, si l'on tient compte que les coefficients E, L sont des fonctions des u, v de la forme (3.2), que la fonction $b'(u)$ qui figure dans la première de ces expressions, est nécessairement identiquement nulle. Par suite les coefficients E, L sont nécessairement, dans le cas envisagé, des fonctions des u, v de la forme

$$\mathrm{E} = \{\rho(v) - b(u)\}^2, \qquad \mathrm{L} = \rho(v) - b(u). \tag{12.3}$$

En outre, on a

$$\mathrm{FL} - \mathrm{EM} = 0, \tag{12.4}$$

les courbes $v = \mathrm{Cte}$ étant des lignes de courbures de S.

(9) O. Pylarinos, *loc. cit.*, p. 143.
(10) *Voir* par exemple G. Valiron, *Équations fonctionnelles et ses applications*, 1950, p. 454.

On peut donc, dans ce cas, choisir le paramètre u de manière que les coefficients E, F, L, M de S soient les fonctions des u, v satisfaisant aux équations

$$\frac{\partial^2 L}{\partial u\, \partial v} = 0, \qquad L^2 = E, \qquad F = LM. \tag{12.5}$$

D'autre part, les conditions (3.1) se vérifient — comme on le voit aussitôt — lorsque E, F, L, M sont des fonctions des u, v satisfaisant aux (12.5). *Les conditions* (12.5) *sont, donc, suffisantes pour que les courbes* $v =$ Cte *soient des lignes de courbure de* S *et qu'en outre les surfaces* $v =$ Cte *de la congruence* $(\mathfrak{N}_S)$ *soient directement applicables de façon que leurs génératrices homologues rencontrent* S *le long des courbes* $u =$ Cte.

13. Rapportons maintenant la surface S, dont les courbes $v =$ Cte sont des lignes de courbure qui jouissent de la propriété ci-dessus, à deux nouveaux paramètres u', v' liés avec u, v par des relations de la forme

$$u = u(u', v'), \qquad v = v', \tag{13.1}$$

avec

$$\frac{\partial u'}{\partial u} > 0 \tag{13.2}$$

pour toutes les valeurs des u, v, qui correspondent aux points de S.

Soient E′, F′, G′; L′, M′, N′ les coefficients des deux formes fondamentales de S rapportée au réseau paramétrique (u', v'). Si l'on tient compte des (13.1), on a, d'après des formules connues,

$$\left\{\begin{aligned} &E' = E\left(\frac{\partial u}{\partial u'}\right)^2, \quad F' = E\frac{\partial u}{\partial u'}\frac{\partial u}{\partial v'} + F\frac{\partial u}{\partial u'}, \quad G' = E\left(\frac{\partial u}{\partial v'}\right)^2 + 2F\left(\frac{\partial u}{\partial v'}\right) + G.\\ &L' = L\left(\frac{\partial u}{\partial u'}\right)^2, \quad M' = L\frac{\partial u}{\partial u'}\frac{\partial u}{\partial v'} + M\frac{\partial u}{\partial u'}, \quad N' = L\left(\frac{\partial u}{\partial v'}\right)^2 + 2M\left(\frac{\partial u}{\partial v'}\right) + N.\end{aligned}\right. \tag{13.3}$$

Les courbes $v' =$ Cte, en vertu des (13.1), coïncident avec les lignes de courbure $v =$ Cte de S. Or, si les courbes $u' =$ Cte sont aussi des lignes de courbure de S, on aura $F' \equiv 0$, $M' \equiv 0$. On aura, donc, en ayant égard aux (13.3) et (13.2),

$$F = -E\frac{\partial u}{\partial v'}, \qquad M = -L\frac{\partial u}{\partial v'}. \tag{13.4}$$

Les coefficients E, L par le choix convenable du paramètre u peuvent être ramenés sous la forme (12.3) :

$$E \equiv \{\rho(v) - b(u)\}^2, \qquad L = \rho(v) - b(u).$$

En outre, les coefficients E′, G′, L′, N′ doivent satisfaire à l'équation (8.3) de Gauss et aux équations (9.2) de Codazzi, le réseau (u', v') étant le réseau orthogonal des lignes de courbure de S.

La première équation (9.2) de Godazzi, si l'on y remplace E, L et E', G'; L', N' par leurs valeurs (12.3) et (13.3), affecte la forme

$$(13.5)\qquad 2(\rho-b)\frac{\partial u}{\partial u'}\frac{\partial^2 u}{\partial u'\,\partial v'}+\left(\frac{d\rho}{dv}-\frac{db}{du}\frac{\partial u}{\partial v'}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial u'}\right)^2$$
$$=2\mathrm{H}(\rho-b)\left(\frac{d\rho}{dv}-\frac{db}{du}\frac{\partial u}{\partial v'}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial u'}\right)^2+2(\rho-b)^2\mathrm{H}\frac{\partial u}{\partial u'}\frac{\partial^2 u}{\partial u'\,\partial v'}$$

Cette équation, lorsque les courbes $u=\mathrm{Cte}$ se confondent avec les courbes $u'=\mathrm{Cte}$, ou — ce qui revient au même — lorsque u est une fonction de la seule variable u', se réduit à

$$(13.6)\qquad \frac{d\rho}{dv}\{2\mathrm{H}(\rho-b)-1\}=0.$$

On aura donc, dans ce cas, ou bien $\frac{d\rho}{dv}\equiv 0$, ou bien $2\mathrm{H}(\rho-b)-1\equiv 0$.

a. Soit $\frac{d\rho}{dv}\equiv 0$. — Alors les lignes de courbures $v=\mathrm{Cte}$ — comme il résulte des (12.3) — sont des géodésiques de S. Elles sont, donc, des courbes planes qui, en outre, d'après le théorème 7, sont les positions diverses d'une courbe plane qui se meut de façon que les trajectoires de ses points coïncident avec les trajectoires orthogonales de ses positions. Dans le cas spécial où la courbe mobile est une droite, la surface S est nécessairement développable, les positions diverses de cette droite étant — d'après notre hypothèse — des lignes de courbure de cette surface.

b. Soit

$$(13.7)\qquad 2\mathrm{H}\{\rho(v)-b(u)\}-1\equiv 0.$$

Cette relation, si l'on tient compte que — en vertu de nos hypothèses — les coefficients E, L sont les fonctions (12.3) des u, v et que les courbures principales k_1, k_2 de S sont respectivement égales aux courbures normales $\varkappa_{n_1}$, $\varkappa_{n_2}$ des courbes $v=\mathrm{Cte}$, $u=\mathrm{Cte}$, en d'autres termes, si l'on tient compte qu'on a

$$\mathrm{E}=\mathrm{L}^2=\{\rho(v)-b(u)\}^2,\qquad \varkappa_{n_1}=k_1=\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{E}},$$
$$\varkappa_{n_2}=k_2=\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{G}},\qquad 2\mathrm{H}=k_1+k_2=\varkappa_{n_1}+\varkappa_{n_2},$$

se réduit à

$$k_2=0.$$

ce qui montre que S est, dans ce cas, nécessairement une surface développable dont les courbes $u=\mathrm{Cte}$ sont les génératrices.

On peut donc énoncer le

THÉORÈME 10. — *Les surfaces de la congruence des normales à une surface* S *qui sont définies par l'une des familles de ses lignes de courbure, ne sont directement* *applicables de manière que leurs génératrices homologues rencontrent* S *le long des lignes de courbure de l'autre famille, que dans le cas où* S *est une surface développable ou elle est engendrée par les positions diverses d'une courbe plane, qui se meut de façon que les trajectoires de ses points se confondent avec les trajectoires orthogonales de ses positions.*

Il est à noter que, lorsque S est une surface développable, les surfaces de la congruence $(\mathcal{N}_s)$, qui passent par ses génératrices, jouissent évidemment de la propriété ci-dessus. Il n'en est pas de même, en général, s'il s'agit des surfaces de $(\mathcal{N}_s)$, qui passent par les trajectoires orthogonales des génératrices. Dans la suite nous allons donner les conditions qui sont exigées pour cela.

14. Supposons que S *soit une surface développable dont les courbes* $v=$ Cte *sont les trajectoires orthogonales des génératrices* et en outre que les surfaces $v=$ Cte de $(\mathcal{N}_s)$, soient directement applicables, leurs génératrices homologues coupant S le long des courbes $u=$ Cte.

On peut choisir, dans ce cas, le paramètre u de façon que les coefficients E, L soient des fonctions des u, v de la forme (12.3) :

$$\text{(14.1)} \qquad E = \{\rho(v) - b(u)\}^2, \qquad L = \rho(v) - b(u).$$

En outre, d'après nos hypothèses, l'une des courbures principales k_1, k_2 de S — par exemple k_2 — s'annule identiquement, tandis que l'autre — k_1 — est égale à la courbure normale $\varkappa_{n_1}$ des courbes $v=$ Cte. On aura donc, en ayant égard aux (14.1),

$$\text{(14.2)} \qquad k_1 = \varkappa_{n_1} = \frac{1}{\rho - b}, \qquad k_2 = 0, \qquad K = k_1 k_2 = 0, \qquad 2H = k_1 = \frac{1}{\rho - b}.$$

Si l'on rapporte maintenant la surface S aux paramètres u', v' liés avec u, v par des relations de la forme (13.1) et qu'on suppose que les courbes $u'=$ Cte sont des lignes de courbure de S, u doit être — d'après ce qui est exposé au paragraphe précédent — une fonction des u', v' satisfaisant à l'équation (13.5). Cette équation, à l'aide des (14.1) et (14.2), se réduit à

$$\frac{\partial^2 u}{\partial u' \partial v'} = 0,$$

ce qui montre que, *dans le cas envisagé, le paramètre u doit être une fonction des* u', $v' (\equiv v)$ *de la forme*

$$\text{(14.3)} \qquad u = \varphi(u') + f(v') \equiv \varphi(u') + f(v).$$

En outre, si E', F', G'; L', M', N' sont les coefficients des deux formes fondamentales de S rapportée au réseau (u', v') on a

$$\text{(14.4)} \qquad F' \equiv 0, \qquad N' \equiv 0, \qquad G' \equiv G'(v'),$$

les courbes $u' = \mathrm{Cte}$ du réseau orthogonal (u', v') étant les génératrices de S, et l'on peut choisir $v' (\equiv v)$ de façon qu'on ait

$$G' \equiv 1. \tag{14.5}$$

Il s'ensuit que, dans ce cas, on peut choisir les paramètres u, v de telle manière que les coefficients des deux formes fondamentales de S, rapportée au réseau initial (u, v), soient des fonctions des u, v de la forme

$$\tag{14.6} \left\{ \begin{array}{l} E = \{\rho(v) - b(u)\}^2, \qquad F = -\{\rho(v) - b(u)\}^2 \dfrac{df}{dv}, \\ \qquad G = 1 + \{\rho(v) - b(u)\}^2 \left(\dfrac{df}{dv}\right)^2, \\ L = \rho(v) - b(u), \qquad M = -\{\rho(v) - b(u)\} \dfrac{df}{dv}, \\ \qquad N = \{\rho(v) - b(u)\} \left(\dfrac{df}{dv}\right)^2. \end{array} \right.$$

On parvient à ces expressions en tenant compte que E, L sont des fonctions des u, v de la forme (14.1) et en faisant usage des (13.3), (13.4), (14.3), (14.4) et (14.5).

Les fonctions (14.6) — on le constate aisément — vérifient les deux équations de Codazzi, quelles que soient les fonctions $\rho(v)$, $b(u)$, $f(v)$. Mais pour que ces fonctions satisfassent à l'équation de Gauss, il est nécessaire — comme on le reconnaît sans peine — qu'on ait identiquement

$$\frac{d^2\rho}{dv^2} - 2\frac{db}{du}\frac{d^2f}{dv^2} - \frac{d^2b}{du^2}\left(\frac{df}{dv}\right)^2. \tag{14.7}$$

Il en résulte que les fonctions $\rho(v)$, $f(v)$ et $b(u)$ doivent satisfaire respectivement aux équations différentielles

$$\frac{d^2\rho}{dv^2} = c_1\left(\frac{df}{dv}\right)^2, \qquad \frac{d^2f}{dv^2} = c_2\left(\frac{df}{dv}\right)^2 \tag{14.8}$$

et

$$c_1 - 2c_2\frac{db}{du} - \frac{d^2b}{du^2} = 0 \tag{14.9}$$

où c_1, c_2 sont des constantes.

D'autre part, si les fonctions $\rho(v)$, $f(v)$ et $b(u)$, qui figurent dans les expressions (14.6), vérifient les équations (14.8) et (14.9), ces expressions sont des fonctions des u, v satisfaisant aux équations de Godazzi et de Gauss ainsi qu'aux conditions (12.5). En outre les trois dernières sont liées par la relation $LN - M^2 = 0$. On a donc le

Théorème 11. — *A chaque système de fonctions* $\rho(v)$, $f(v)$, $b(u)$ *satisfaisant respectivement aux équations différentielles* (14.8) *et* (14.9), *on peut faire correspondre une surface développable* S — *définie à un déplacement près — rapportée* *à un réseau paramétrique* (u, v), *tel que les courbes* $v =$ Cte *soient les trajectoires orthogonales des génératrices de* S *et que les surfaces* $v =$ Cte *de la congruence* $(\mathfrak{N}_s)$ *soient directement applicables de façon que leurs génératrices homologues rencontrent* S *le long des courbes* $u =$ Cte.

15. Supposons maintenant que la surface développable S soit engendrée par les tangentes à la courbe gauche c définie par l'équation vectorielle

$$\bar{r} = \bar{r}(u'). \tag{15.1}$$

le paramètre u' étant l'arc de cette courbe.

Si l'on désigne par $\bar{t}$, $\bar{n}$, $\bar{b}$ les vecteurs-unités des directions positives de la tangente, de la normale principale et de la binormale de c en un de ses points ordinaires et par $\varkappa$, σ la courbure et la torsion de cette courbe, on a, d'après des formules connues,

$$\frac{d\bar{r}}{du'} = \bar{t}, \qquad \frac{d\bar{t}}{du'} = \varkappa\bar{n}, \qquad \frac{d\bar{n}}{du'} = -\varkappa\bar{t} - \sigma\bar{b}, \qquad \frac{d\bar{b}}{du'} = \sigma\bar{n}. \tag{15.2}$$

L'équation vectorielle de la surface S rapportée au réseau orthogonal (u', v'), dont les courbes $u' =$ Cte sont les génératrices, peut s'écrire sous la forme

$$\overline{\mathrm{R}} = \bar{r}(u') + (v' - u')\,\bar{t}(u'), \tag{15.3}$$

les courbes $v' =$ Cte étant les trajectoires orthogonales des génératrices $u' =$ Cte. c'est-à-dire les développantes de la courbe c [11], et le vecteur-unité $\overline{\mathfrak{N}}(u', v')$ de la direction positive de la normale à S en un de ses points ordinaires, est, on le reconnaît aisément en ayant égard aux (15.2),

$$\overline{\mathfrak{N}} = \varepsilon\bar{b}, \tag{15.4}$$

où ε est égal à $+1$ ou -1 suivant qu'en ce point on a $v' - u' <$ ou > 0.

Si les surfaces $v' =$ Cte de la congruence $(\mathfrak{N}_s)$ sont directement applicables, leurs génératrices homologues coupant S le long des courbes d'une famille (Γ) et qu'on rapporte S au réseau paramétrique (u, v) dont les courbes $v =$ Cte, $u =$ Cte sont respectivement les courbes $v' =$ Cte et les courbes (Γ), on peut choisir — d'après ce qui est exposé au paragraphe précédent — les nouveaux paramètres u, v de façon que les deux premiers coefficients E, L des deux formes fondamentales de S, rapportée au réseau (u, v) soient des fonctions des u, v de la forme (14.1), tandis qu'en même temps, d'après (1.5), (1.6) et (3.1), on a $\left(\dfrac{\partial\overline{\mathfrak{N}}}{\partial u}\right)^2 \equiv 1$.

---

(11) *Voir* par exemple L. EISENHART, *loc. cit.*, p. 35.

Les nouveaux paramètres u, v, d'après (13.1) et (14.3), seront liés avec u', v' par des relations de la forme

$$v = v', \qquad u = \varphi(u') + f(v'). \tag{15.5}$$

On aura donc

$$u' = u'(\lambda) \tag{15.6}$$

avec

$$\lambda = u - f(v') \equiv u - f(v). \tag{15.7}$$

En outre en dérivant (15.4) par rapport à u et en tenant compte des (15.2), (15.6) et (15.7), on trouve

$$\frac{\partial \overline{\mathfrak{N}}}{\partial u} = \varepsilon \frac{d\bar{b}}{du'}\frac{du'}{d\lambda} = \varepsilon\sigma \frac{du'}{d\lambda}\bar{n} \tag{15.8}$$

et l'on déduit de là que *u' doit être une fonction de λ satisfaisant à l'équation différentielle*

$$\frac{du'}{d\lambda} = \frac{\varepsilon'}{\sigma(u')}, \tag{15.9}$$

le paramètre u étant choisi de façon qu'on ait $\left(\frac{\partial \overline{\mathfrak{N}}}{\partial u}\right)^2 = 1$, *où* $\varepsilon' = +1$ *ou* -1.

En dérivant ensuite l'équation (15.3) de la surface S par rapport à u resp. v et en faisant usage des (15.2), (15.6), (15.7) et (15.9), on trouve

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial \overline{R}}{\partial u} = \varepsilon'(v - u')\frac{\varkappa}{\sigma}\bar{n}, \qquad \frac{\partial \overline{R}}{\partial v} = \bar{t} - \varepsilon'(v - u')\frac{\varkappa}{\sigma}\frac{df}{dv}\bar{n},\\
&\frac{\partial^2 \overline{R}}{\partial u^2} = -(v-u')\frac{\varkappa^2}{\sigma^2}\bar{t} + \varepsilon'\frac{\partial}{\partial u}\left\{(v-u')\frac{\varkappa}{\sigma}\right\}\bar{n} - (v-u')\frac{\varkappa}{\sigma}\bar{b},\\
&\frac{\partial^2 \overline{R}}{\partial u\,\partial v} = (v-u')\frac{\varkappa^2}{\sigma^2}\frac{df}{dv}\bar{t} + \varepsilon'\frac{\partial}{\partial v}\left\{(v-u')\frac{\varkappa}{\sigma}\right\}\bar{n} + (v-u')\frac{\varkappa}{\sigma}\frac{\partial f}{dv}\bar{b},\\
&\frac{\partial^2 \overline{R}}{\partial v^2} = -(v-u')\frac{\varkappa^2}{\sigma^2}\left(\frac{df}{dv}\right)^2\bar{t}\\
&\qquad - \varepsilon'\left\{\frac{\varkappa}{\sigma}\frac{df}{dv} + \frac{\partial}{\partial v}\left[(v-u')\frac{\varkappa}{\sigma}\frac{df}{dv}\right]\right\}\bar{n} - (v-u')\frac{\varkappa}{\sigma}\left(\frac{df}{dv}\right)^2\bar{b},
\end{aligned}\right. \tag{15.10}$$

et, à l'aide des (15.10) et (15.4), on obtient pour les coefficients des deux formes fondamentales de S rapportée au réseau (u, v) les expressions

$$\left\{\begin{aligned}
&\mathrm{E} = (v-u')^2\frac{\varkappa^2}{\sigma^2}, \qquad \mathrm{F} = -(v-u')^2\frac{u^2}{\sigma^2}\frac{df}{dv},\\
&\qquad \mathrm{G} = 1 + (v-u')^2\frac{\varkappa^2}{\sigma^2}\left(\frac{df}{dv}\right)^2,\\
&\mathrm{L} = -\varepsilon(v-u')\frac{\varkappa}{\sigma}, \qquad \mathrm{M} = \varepsilon(v-u')\frac{\varkappa}{\sigma}\frac{df}{dv},\\
&\qquad \mathrm{N} = -\varepsilon(v-u')\frac{\varkappa}{\sigma}\left(\frac{df}{dv}\right)^2.
\end{aligned}\right. \tag{15.11}$$

Ces coefficients doivent vérifier — d'après nos hypothèses — les conditions (12.5). Par suite L doit être une fonction des u, v satisfaisant à l'équation aux dérivées partielles (12.5), qui, grâce aux (15.11), affecte la forme

$$\frac{\partial^2}{\partial u\, \partial v}\left\{(v-u')\frac{\varkappa}{\sigma}\right\}=0$$

et qui — en vertu des (15.6), (15.7) et (15.9) — se réduit à

$$A_1(u') + \varepsilon' A_2(u')\frac{df}{dv} - \varepsilon' A_3(u')v\frac{df}{dv} = 0 \tag{15.12}$$

avec

$$\left\{\begin{aligned} A_1(u') &= \frac{1}{\sigma}\frac{d}{du'}\left(\frac{\varkappa}{\sigma}\right), \\ A_2(u') &= \frac{1}{\sigma}\frac{d}{du'}\left(\frac{\varkappa}{\sigma^2}\right) + \frac{1}{\sigma^2}\frac{d}{du'}\left(\frac{\varkappa}{\sigma}\right) + \frac{u'}{\sigma}\frac{d}{du'}\left\{\frac{1}{\sigma}\frac{d}{du'}\left(\frac{\varkappa}{\sigma}\right)\right\}, \\ A_3(u') &= \frac{1}{\sigma}\frac{d}{du'}\left\{\frac{1}{\sigma}\frac{d}{du'}\left(\frac{\varkappa}{\sigma}\right)\right\}, \end{aligned}\right. \tag{15.13}$$

u' étant une fonction de $\lambda = u - f(v)$ vérifiant l'équation différentielle (15.9).

D'autre part, si $\varkappa(u')$, $\sigma(u')$, $f(v)$ vérifient identiquement l'équation (15.12), u' étant une fonction de $\lambda = u - f(v)$ satisfaisant à l'équation (15.9), les conditions (12.5) — comme on le voit aussitôt — sont identiquement remplies.

Dans le cas spécial où $A_1(u) = \frac{1}{\sigma}\frac{d}{du'}\left(\frac{\varkappa}{\sigma}\right) \equiv 0$, on a $\frac{\varkappa}{\sigma} = \text{Cte}$, et l'équation (15.12), compte tenu des (15.13), devient $\frac{d}{du'}\left(\frac{1}{\sigma}\right)\frac{df}{dv} = 0$. Or, pour que cette équation soit identiquement vérifiée, il faut qu'on ait ou bien $\frac{d}{du'}\left(\frac{1}{\sigma}\right) \equiv 0$, ou bien $\frac{df}{dv} \equiv 0$. Si $\frac{d}{du}\left(\frac{1}{\sigma}\right) \equiv 0$, la courbe c est une hélice circulaire, puisque en même temps on a $\frac{d}{du'}\left(\frac{\varkappa}{\sigma}\right) = 0$. Dans ce cas — comme il résulte des (15.13) — l'équation (15.12) est identiquement vérifiée, quelle que soit la fonction $f(v)$ et, par conséquent, même si l'on a $f(v) = \text{Cte}$. Si $\frac{d}{du}\left(\frac{1}{\sigma}\right)$ est $\not\equiv 0$ et que l'équation (15.12) soit identiquement vérifiée, on a nécessairement $\frac{df}{dv} \equiv 0$. Mais $f(v)$ n'est pas constante — comme il résulte des (15.6) et (15.7) — que dans le cas où les courbes $u = \text{Cte}$ coïncident avec les génératrices $u' = \text{Cte}$ de S.

On a donc le :

Théorème 12. — *Pour que les surfaces de la congruence des normales à la surface* S *engendrée par les tangentes à une courbe gauche c, qui passent par les développantes de c, soient directement applicables de façon que leurs génératrices homologues rencontrent* S *le long de ses génératrices, il faut et il suffit que la courbe c soit une hélice.*

Si l'équation (15.12) est identiquement vérifiée, lorsque c n'est pas une hélice, l'un au moins des coefficients A_2, A_3 ainsi que la dérivée $\frac{df}{dv}$ sont $\not\equiv 0$, puisque, d'après (15.13), A_1 est $\not\equiv 0$. Dans ce cas les dérivées du premier membre de (15.12) par rapport à u et à v doivent aussi s'annuler identiquement.

On aura donc identiquement, en ayant égard aux (15.7) et (15.9),

$$(15.14)\qquad \frac{dA_1}{du'} + \varepsilon' \frac{dA_2}{du'}\frac{df}{dv} - \varepsilon' \frac{dA_3}{du'} v \frac{df}{dv} = 0, \qquad A_2 \frac{d^2 f}{dv^2} - A_3 \frac{d}{dv}\left(v\frac{df}{dv}\right) = 0.$$

On voit aussitôt que les seules solutions communes des équations différentielles $\frac{d^2 f}{dv^2} = 0$, $\frac{d}{dv}\left(v\frac{df}{dv}\right) = 0$ sont les constantes. Mais $f(v)$ *n'est pas constante*, la courbe c n'étant pas une hélice. Cela étant, pour que l'équation (15.2) soit identiquement satisfaite, le coefficient A_1 étant $\not\equiv 0$, il faut qu'on ait — comme il résulte de la seconde équation (15.14) — ou bien $A_3 \equiv 0$, $\frac{d^2 f}{dv^2} \equiv 0$, ou bien $A_2 \equiv 0$, $\frac{d}{dv}\left(v\frac{df}{dv}\right) \equiv 0$, ou enfin, si A_2, A_3 sont $\not\equiv 0$, $A_3 - cA_2 \equiv 0$, $\frac{d^2 f}{dv^2} - c\frac{d}{dv}\left(v\frac{df}{dv}\right) = 0$, où c est une constante $\not\equiv 0$. On en déduit que, dans ce cas, les coefficients A_1, A_2, A_3 doivent satisfaire identiquement à deux équations de la forme

$$(15.15)\qquad c_1 A_3 - c_3 A_1 = 0, \qquad c_1 A_2 - c_2 A_1 = 0,$$

tandis que $f(v)$ est une solution de l'équation différentielle

$$(15.16)\qquad c_1 + \varepsilon'(c_2 - c_3 v)\frac{df}{dv} = 0,$$

où c_1, c_2, c_3 sont des constantes, dont la première et l'une au moins des deux autres sont $\not\equiv 0$.

Par suite, pour que l'équation (15.12) soit identiquement vérifiée, lorsque c n'est pas une hélice, il faut que $\varkappa(u')$, $\sigma(u')$ soient des fonctions de u' satisfaisant aux équations différentielles

$$(15.17)\qquad \begin{cases} c_1 \dfrac{d}{du'}\left\{\dfrac{1}{\sigma}\dfrac{d}{du'}\left(\dfrac{\varkappa}{\sigma}\right)\right\} = c_3 \dfrac{d}{du'}\left(\dfrac{\varkappa}{\sigma}\right), \\ c_1\left[\dfrac{d}{du'}\left(\dfrac{\varkappa}{\sigma^2}\right) + \dfrac{1}{\sigma}\dfrac{d}{du'}\left(\dfrac{\varkappa}{\sigma}\right) + u'\dfrac{d}{du'}\left\{\dfrac{1}{\sigma}\dfrac{d}{du'}\left(\dfrac{\varkappa}{\sigma}\right)\right\}\right] = c_2 \dfrac{d}{du'}\left(\dfrac{\varkappa}{\sigma}\right), \end{cases}$$

qu'on obtient en remplaçant A_1, A_2, A_3 dans (15.15) par leurs valeurs (15.13). Le système (15.17), on le reconnaît sans peine, est équivalent au système

$$(15.18)\qquad \begin{cases} c_1 \dfrac{d}{du'}\left(\dfrac{\varkappa}{\sigma}\right) = c_3\varkappa + c_4\sigma, \\ c_1^2 \varkappa \dfrac{d}{du'}\left(\dfrac{1}{\sigma}\right) = (c_3\varkappa + c_4\sigma)(c_2\sigma - c_3\sigma u' - 2c_1), \end{cases}$$

où c_4 est aussi une constante,

D'autre part, lorsque la courbure $\varkappa$ et la torsion σ de la courbe c, définie par l'équation (15.1), sont des fonctions de son arc u' satisfaisant à deux équations différentielles de la forme (15.18), l'équation (15.12) est identiquement vérifiée pour toute solution $f(v)$ de l'équation (15.16). Si, donc, la surface S engendrée par les tangentes à c est donnée par l'équation (15.3) et qu'on la rapporte à deux paramètres u, v liés avec u', v' par les relations $v'=v$, $u'=u'(\lambda)=u'(u-f(v))$, où $u'(\lambda)$, $f(v)$ sont respectivement des solutions des équations différentielles (15.9) et (15.16), les coefficients des deux formes fondamentales de S rapportée aux paramètres u, v seront des fonctions de la forme (15.11) vérifiant identiquement les conditions (12.5).

Si l'on tient compte, en outre, que la courbure et la torsion d'une hélice peuvent être considérées comme des fonctions de son arc u' vérifiant un système d'équations de la forme (15.17), dans lequel la constante c_1 est nulle, tandis que l'une au moins des constantes c_2, c_3 est $\neq 0$, on peut énoncer le

THÉORÈME 13. — *Afin que les surfaces de la congruence des normales à la surface engendrée par les tangentes à une courbe gauche c, qui passent par les développantes de c, soient directement applicables, il faut et il suffit que la courbure et la torsion de la courbe c soient des fonctions de son arc u' satisfaisant à deux équations différentielles de la forme* (15.17), *où* c_1, c_2, c_3 *sont des constantes dont les deux dernières ne s'annulent pas simultanément.*

16. Supposons enfin que la surface développable S soit *une surface conique.* On peut écrire, dans ce cas, l'équation vectorielle de S, rapportée au réseau orthogonal (u', v') dont les courbes $u'=$ Cte sont les génératrices, sous la forme

$$\bar{r}=\bar{\rho}+v'\,\bar{a}(u'). \tag{16.1}$$

où $\bar{\rho}$ est le rayon vecteur du sommet et $\bar{a}(u')$ le vecteur-unité de la direction positive des génératrices de cette surface, u' étant l'arc de son indicatrice sphérique c définie par l'équation vectorielle

$$\bar{r}'=\bar{a}(u'). \tag{16.2}$$

On a donc, en vertu de ses hypothèses,

$$\bar{a}^2\equiv 1,\qquad \bar{a}\frac{d\bar{a}}{du'}\equiv 0,\qquad \left(\frac{d\bar{a}}{du'}\right)^2\equiv 1,\qquad \left|\frac{d\bar{a}}{du'}\wedge\bar{a}\right|\equiv 1,\qquad \frac{d\bar{a}}{du'}\,\frac{d^2\bar{a}}{du'^2}\equiv 0 \tag{16.3}$$

et, en faisant usage des (16.3), on obtient pour le vecteur-unité $\overline{\mathfrak{N}}$ de la direction positive de la normale à S en un de ses points ordinaires l'expression

$$\overline{\mathfrak{N}}=\varepsilon\frac{d\bar{a}}{du'}\wedge\bar{a}, \tag{16.4}$$

où ε est $+1$ ou -1 suivant qu'en ce point est $v'>$ ou <0.

En dérivant (16.4) par rapport à u' on trouve

$$\frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial u'} = \varepsilon \frac{d^2 \overline{a}}{du'^2} \wedge \overline{a} \tag{16.5}$$

et, puisque S n'est pas une surface plane, on a

$$\left| \frac{d^2 \overline{a}}{\partial u'^2} \wedge \overline{a} \right| \equiv \frac{1}{\mu} \neq 0. \tag{16.6}$$

Les vecteurs-unités $\frac{d\overline{a}}{du'}$, $\overline{a}$ sont respectivement parallèles à la tangente à la courbe c et à la normale à la surface sphérique sur laquelle c est tracée. On en déduit, en tenant compte que — comme l'on sait — la torsion géodésique d'une courbe sphérique est identiquement nulle, que la valeur absolue du vecteur (16.5) — d'après des formules connues ([12]) — est égale à $|\varkappa_g|$, où $\varkappa_g$ est la courbure géodésique de c; on a donc

$$\frac{1}{\mu} \equiv \left| \frac{d^2 \overline{a}}{du'^2} \wedge \overline{a} \right| = \left| \frac{d\mathfrak{N}}{du'} \right| = |\varkappa_g|. \tag{16.7}$$

En outre, on a

$$\frac{d^2 \overline{a}}{du'^2} \left(\frac{d\overline{a}}{du'} \wedge \overline{a} \right) = - \frac{d\overline{a}}{du'} \left(\frac{d^2 \overline{a}}{du'^2} \wedge \overline{a} \right) = \varepsilon' \left| \frac{d^2 \overline{a}}{du'^2} \wedge \overline{a} \right| \equiv \frac{\varepsilon'}{\mu}, \tag{16.8}$$

où $\varepsilon' = +1$ ou -1. On parvient à cette relation, si l'on tient compte que, d'après (16.3), les vecteurs $\frac{d\overline{a}}{du'}$, $\frac{d^2 \overline{a}}{du'^2} \wedge \overline{a}$ sont parallèles et qu'on a $\left| \frac{d\overline{a}}{du'} \right| \equiv 1$.

Si les surfaces $v = \text{Cte}$ de la congruence $(\mathfrak{N}_s)$ sont directement applicables, leurs génératrices homologues coupant S le long des courbes d'une famille (Γ) et qu'on rapporte S au réseau paramétrique (u, v) dont les courbes $v = \text{Cte}$, $u = \text{Cte}$ sont respectivement les courbes $v' = \text{Cte}$ et les courbes (Γ), on peut choisir — d'après ce qui est exposé au paragraphe 14 — les nouveaux paramètres u, v de telle manière que les coefficients E, L de S, rapportée au réseau (u, v), soient des fonctions des u, v de la forme (14.1), tandis qu'on a $\left(\frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial u} \right)^2 \equiv 1$. Les nouveaux paramètres u, v seront, alors, liés avec u', v' par des relations de la forme

$$v' = v, \qquad u' = u'(\lambda), \tag{16.9}$$

avec

$$\lambda = u - f(v), \tag{16.10}$$

$u'(\lambda)$ étant une solution de l'équation différentielle

$$\frac{du'}{d\lambda} = \varepsilon'' \mu \equiv \frac{\varepsilon''}{\left| \frac{d^2 \overline{a}}{du'^2} \wedge \overline{a} \right|}, \tag{16.11}$$

([12]) *Voir* par exemple, G. Valiron, *loc. cit.*, p. 454.

où ε'' est $+1$ ou -1, qu'on obtient, à l'aide des (16.9) et (16.10), en dérivant (16.4) par rapport à u et en tenant compte qu'on a $\left(\frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial u}\right)^2 \equiv 1$.

En outre, en dérivant l'équation (16.1) de S par rapport à u, v et en faisant usage des (16.9), (16.10) et (16.11), on a

$$(16.12)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \overline{r}}{\partial u} = \varepsilon'' v\mu \frac{d\overline{a}}{du'}, \qquad \frac{\partial \overline{r}}{\partial v} = \overline{a} - \varepsilon'' v\mu \frac{df}{dv}\frac{d\overline{a}}{du'}, \\ &\frac{\partial^2 \overline{r}}{\partial u^2} = \varepsilon'' \frac{\partial(v\mu)}{\partial u}\frac{d\overline{a}}{du'} + v\mu^2 \frac{d^2\overline{a}}{du'^2}, \\ &\frac{\partial^2 \overline{r}}{\partial u\, \partial v} = \varepsilon'' \frac{\partial(v\mu)}{\partial v}\frac{d\overline{a}}{du'} - v\mu^2 \frac{df}{dv}\frac{d^2\overline{a}}{du'^2}, \\ &\frac{\partial^2 \overline{r}}{\partial v^2} = -\varepsilon'' \left\{ \mu\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial\left(v\mu\frac{\partial f}{\partial v}\right)}{\partial v} \right\} \frac{d\overline{a}}{du'} + v\mu^2\left(\frac{df}{dv}\right)^2 \frac{d^2\overline{a}}{du'^2} \end{aligned}\right.$$

et de là, en ayant égard aux (16.4) et (16.8), on obtient pour les coefficients des deux formes fondamentales de S rapportée au réseau (u, v) les expressions

$$(16.13)\quad \left\{\begin{aligned} &E = v^2\mu^2, \qquad F = -v^2\mu^2\frac{df}{dv}, \qquad G = 1 + v^2\mu^2\left(\frac{df}{dv}\right)^2, \\ &L = \varepsilon\varepsilon' v\mu, \qquad M = -\varepsilon\varepsilon' v\mu\frac{df}{dv}, \qquad N = \varepsilon\varepsilon' v\mu\left(\frac{df}{dv}\right)^2. \end{aligned}\right.$$

Les coefficients E, F, L, M, d'après nos hypothèses, doivent satisfaire aux conditions (12.5), dont la première — si l'on tient compte de la valeur (16.13) de L — affecte la forme $\frac{\partial^2(v\mu)}{\partial u\,\partial v} = 0$ et, à l'aide des (16.9) et (16.10), se ramène à

$$(16.14)\qquad \frac{d\mu}{d\lambda} - v\frac{df}{dv}\frac{d^2\mu}{d\lambda^2} = 0.$$

Par suite, lorsque u' est une fonction de $\lambda = u - f(v)$ vérifiant l'équation différentielle (16.11), μ et $f(v)$ doivent être des fonctions des u', v telles que l'équation (16.14) soit identiquement vérifiée.

D'autre part, s'il en est ainsi, les expressions (16.13) des E, F, L, M vérifient, comme on le voit aisément, les conditions (12.5).

Pour que l'équation (16.14) soit identiquement vérifiée et qu'on ait, en même temps, $\frac{df}{dv} \equiv 0$, il faut et il suffit qu'on ait $\mu(\lambda) = \text{Cte}$, ou, d'après (16.7), que la courbure géodésique de l'indicatrice sphérique c de S soit constante et, par conséquent, que c soit un cercle. Dans ce cas, S est un cône de révolution, les surfaces de la congruence $(\mathfrak{N}_s)$, qui passent par les trajectoires orthogonales de ses génératrices sont les positions diverses d'un même cône de révolution et l'équation (16.14) est identiquement vérifiée quelle que soit la fonction $f(v)$ et, par conséquent, pour $f(v) = \text{Cte}$.

Si $\frac{d\mu}{d\lambda} \neq 0$, pour que l'équation (16.14) soit identiquement vérifiée, $\mu(\lambda)$ et $f(v)$ doivent être respectivement des fonctione de $\lambda = u - f(v)$ et de v satisfaisant, on le reconnaît aisément, à deux équations différentielles de la forme

$$c_1 \frac{d^2\mu}{d\lambda^2} - \frac{d\mu}{d\lambda} = 0, \qquad v\frac{df}{dv} = c_1, \tag{16.15}$$

où c_1 est une constante $\neq 0$.

La première de ces équations, compte tenu que μ est une fonction de l'arc u' de la courbe c et que u' est une fonction de λ satisfaisant à l'équation différentielle (16.11), affecte la forme $c_1 \varepsilon'' \frac{d}{du'}\left(\mu \frac{d\mu}{du'}\right) = \frac{d\mu}{du'}$, ce qui, en intégrant, conduit à $c_1 \varepsilon'' \frac{d\mu^2}{du'} = 2(\mu + c_2)$, ou bien, en vertu de (16.7), à

$$c_1 \varepsilon'' \frac{d}{du'}\left(\frac{1}{\varkappa_g}\right)^2 = 2\left(c_2 + \frac{1}{|\varkappa_g|}\right), \tag{16.16}$$

où $\varkappa_g$ est la courbure géodésique de c, $\varepsilon'' = \pm 1$ et c_2 est une constante,

On en déduit, en ayant égard au fait que la valeur absolue de la courbure normale de la courbe sphérique c est égale à 1, que la courbure $\varkappa$ de cette courbe, dans le cas envisagé, doit être une fonction de son arc u' vérifiant l'équation différentielle

$$c_1 \varepsilon'' \frac{d}{du'}\left(\frac{1}{\varkappa^2 - 1}\right) = 2\left(c_2 + \frac{1}{\sqrt{\varkappa^2 - 1}}\right). \tag{16.17}$$

D'autre part, si une surface conique S rapportée au réseau orthogonal (u', v') dont les courbes $u' = \text{Cte}$ sont les génératrices, u' étant l'arc de l'indicatrice sphérique c de S, est définie par une équation de la forme (16.1) et qu'on la rapporte à deux nouveaux paramètres u, v liés avec u', v' par des relations de la forme $v' = v$, $u' = u'(\lambda) = u'(u - f(v))$, où $u'(\lambda)$ est une solution de l'équation différentielle (16.11), les coefficients E, F, G; L, M, N des deux formes fondamentales de cette surface rapportée au réseau (u, v) affectent la forme (16.13). Si de plus la courbure $\varkappa$ de la courbe c est une fonction de son arc u' vérifiant l'équation différentielle (16.17), les coefficients E, F, G; L, M, N, on le reconnaît aisément, sont des fonctions des u, v satisfaisant aux conditions (12.5) lorsque $f(v)$ est une solution de l'équation différentielle $v\frac{df}{dv} = c_1$.

On peut donc, si l'on tient compte qu'une courbe sphérique, dont la courbure est une fonction de son arc u' satisfaisant à une équation de la forme (16.17), est un cercle, lorsqu'on a $c_1 = 0$ dans cette équation, énoncer le

Théorème 14. — *Afin que les surfaces de la congruence des normales à une surface conique* S *qui passent par les trajectoires orthogonales de ses génératrices, soient directement applicables, il faut et il suffit que la courbure de l'indicatrice sphérique de* S *soit une fonction de son arc* u' *satisfaisant à l'équation différen-*

tielle (16.17), *où* c_1, c_2 *sont des constantes et* $\varepsilon'' = \pm 1$. *Les génératrices homologues de ces surfaces ne rencontrent* S *le long de ses génératrices que dans le cas où* S *est un cône de révolution.*

Si l'on tient compte, en outre, que les surfaces de la congruence des normales à une surface développable S, qui passent par ses génératrices, sont évidemment directement applicables de façon que leurs génératrices homologues rencontrent S le long des trajectoires orthogonales de ses génératrices, on parvient, en ayant égard à ce qui est exposé dans les paragraphes 13, 15 et 16, au

THÉORÈME 15. — *Si les surfaces de la congruence des normales à une surface non sphérique* S *qui sont définies par chaque famille de ses lignes de courbure, sont directement applicables de façon que leurs génératrices homologues rencontrent* S *le long des lignes de courbure de l'autre famille, la surface* S *est nécessairement développable. Les surfaces développables qui jouissent de cette propriété sont les cylindres, les cônes de révolution et les surfaces engendrées par les tangentes aux hélices.*