ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

S. ZAIDMAN

Solutions presque-périodiques des équations hyperboliques

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 79, nº 2 (1962), p. 151-198

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1962_3_79_2_151_0>

Ann. scient. Ec. Norm. Sup.,
3e série, t. 79, 1962, p. 151 à 198.

SOLUTIONS PRESQUE-PÉRIODIQUES DES ÉQUATIONS HYPERBOLIQUES

Par M. S. ZAIDMAN (*).

Introduction. — Ce travail est d'une part, une suite des travaux de Muckenhoupt [16], S. Bochner ([3], [4]), S. Bochner et J. von Neumann [5] et S. Sobolev [21]; d'autre part il poursuit les travaux de l'auteur ([23], [24], [25]) et de L. Amerio ([1], [2]).

Soit Ω un domaine borné de R^n ayant la frontière S suffisamment régulière; $X \equiv (x_1, x_2, \ldots, x_n)$; $H^0(\Omega) \equiv L^2(\Omega)$, l'espace des fonctions complexes de carré sommable en Ω; $H^1(\Omega)$ est l'espace des $u \in H^0(\Omega)$ telles que $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in H^0(\Omega)$ $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right.$ dans le sens des distributions de L. Schwartz$\left.\right)$; la norme dans $H^1(\Omega)$ est donnée par la formule

$$\| u \|^2_{H^1} = \int_\Omega \left(| u(X) |^2 + \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 \right) dX.$$

Puis, soit l'opérateur L qui est défini par la relation

$$L\varphi = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(X) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) - a(X)\varphi,$$

où

$$a(X) \geq 0, \qquad a_{ij}(X) = \overline{a}_{ji}(X), \qquad \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(X)\, t_i \bar{t}_j \geq \alpha \sum_{i=1}^n | t_i |^2, \qquad (\alpha > 0),$$
$$a_{ij}(X) \in C^1(\Omega), \qquad a(X) \in C^0(\Omega).$$

(*) Adresse actuelle : Istituto Matematico del Politecnico di Milano.

Considérons une fonction $u(X, t)$, $X \in \Omega$, $t \in R^1 \equiv [-\infty, +\infty]$, vérifiant

$$(1) \qquad u|_S = 0, \qquad u_{tt}(X, t) = L\,u(X, t).$$

Alors ([1]), le résultat définitif des travaux [4], [16], [21] est que :

Si $u(X, t)$ vérifie (1) alors le vecteur $\vec{u}(t) \equiv \{u(X, t), u_t(X, t)\}$ de R à $H^1(\Omega) \times H^0(\Omega)$ est presque-périodique au sens abstrait de Bochner [3].

D'autres démonstrations de ce résultat ont été données par l'auteur [25] et par L. Amerio [1].

Considérons maintenant une fonction $f(X, t)$ de R à $H^0(\Omega)$, presque-périodique au sens de Bochner, et, toujours comme fonction de R à $H^0(\Omega)$, ayant la dérivée forte continue. Dans les travaux de l'auteur ([23], [24], [25]) on a démontré, en faisant usage essentiel du résultat de Bochner-von Neumann-Sobolev cité plus haut, que, si la fonction $u(X, t)$ vérifie

$$(2) \qquad u|_S = 0, \qquad u_{tt}(X, t) = L\,u(X, t) + f(X, t)$$

et si le vecteur $\vec{u}(t) \equiv \{u(X, t), u_t(X, t)\}$ est contenu dans un compact de $H^1(\Omega) \times H^0(\Omega)$ quant t parcourt R^1, alors le vecteur $\vec{u}(t)$ est aussi presque-périodique de R à $H^1(\Omega) \times H^0(\Omega)$.

Ce résultat a éte démontré par l'auteur en utilisant les méthodes des semi-groupes de Hille-Yosida-Phillips, pour des solutions fortes dans la variable du temps t, et pour ce motif on a fait sur la fonction $f(X, t)$ l'hypothèse de dérivabilité forte en t.

Dans le travail de L. Amerio [1] le même résultat a été démontré pour des solutions plus faibles en t, ce qui avait permis de renoncer à l'hypothèse de l'auteur sur la dérivabilité forte de $f(X, t)$.

Dans le même temps, l'auteur [26] avait annoncé un résultat encore plus général. La fonction $f(X, t)$ était maintenant remplacée par une distribution de L. Schwartz en t (distribution vectorielle), presque-périodique, et le résultat concernant la presque-périodicité des solutions contenues dans un compact était maintenant valable pour des solutions-distributions vectorielles de (2).

Comme il a été remarqué par l'auteur [25], la question sur la presque-périodicité des solutions de (2) qui dans $H^1(\Omega) \times H^0(\Omega)$ ont la trajectoire bornée, mais pas nécessairement contenue dans un compact restait ouverte. Cette question a trouvé une réponse affirmative dans les Notes I, II, III de L. Amerio [2], qui établit pour cela un lemme important sur les suites monotones de fonctions presque-périodiques. Dans le présent travail on donne une variante de la démonstration de ce résultat de Amerio dans l'esprit des

---

[1] Dans le travail [5] de Bochner et von Neumann on considère aussi une situation beaucoup plus générale : précisément on démontre la presque-périodicité des solutions compactes pour une large classe d'équations différentielles homogènes à coefficients opérateurs d'un espace de Hilbert.

travaux précédents de l'auteur [25] et puis la généralisation du résultat de Amerio dans le cas des solutions-distributions vectorielles.

Ainsi, le problème de généralisation à l'équation des ondes non homogène du résultat classique de Bohr et Neugebauer sur la presque-périodicité des solutions bornées de l'équation différentielle

$$y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_n y(t) = f(t), \quad [f(t)\text{-presque-périodique}],$$

nous semble épuisé, du moins dans cet ordre d'idées (*).

La considération des solutions-distributions vectorielles nous permet d'obtenir aussi dans le cas de l'équation des ondes homogène (1) le maximum de généralité. Le théorème de Bochner-Sobolev sur la presque-périodicité des solutions classiques de l'équation (1), et aussi le résultat de Sobolev [21, III] sur la presque-périodicité des solutions généralisées de l'équation (1), reste vrai aussi pour des solutions-distributions vectorielles de (1), qui sont ainsi des distributions presque-périodiques de L. Schwartz ([19], [20]).

En se retournant maintenant à l'équation non homogène, après avoir établi la propriété structurelle de presque-périodicité des solutions bornées, il est nécessaire d'obtenir des critères effectifs pour que les solutions de l'équation non homogène des ondes avec partie droite presque-périodique, soient aussi presque-périodiques.

(Une question sur laquelle J. L. Lions nous a attiré l'attention.)

Une telle condition effective peut être obtenue en imposant certaines relations entre le « spectre » de $f(X, t)$ comme fonction presque-périodique et le spectre de L comme opérateur d'un espace de Hilbert. Dans ce cas aussi, on peut considérer la situation plus générale où $f(X, t)$ est une distribution presque-périodique, et l'on obtient une condition effective analogue pour la presque-périodicité de toutes les solutions-distributions de l'équation (2) non homogène.

Il faut dire que les résultats mentionnés ont aussi un correspondant dans les équations différentielles ordinaires non homogènes à coefficients constants, qui appartient à J. Favard ([7], p. 98-99). Ils sont démontrés chez nous en faisant de nouveau usage des semi-groupes de Hille-Yosida-Phillips, une méthode qui nous semble très suggestive. Mais il est probable qu'on pourrait donner aussi d'autres démonstrations.

Le problème de presque-périodicité se pose non seulement pour l'équation des ondes, mais aussi pour les autres équations de la Physique mathématique. Nous traitons dans ce travail encore l'équation des télégraphistes non homogène, donnée par la formule

$$u_{tt}(X, t) = \mathrm{L}\,u - \mathrm{M}\,u_t(X, t) + f(X, t), \tag{3}$$

(*) Il faudrait démontrer encore que si $\mathrm{U}(X, t)$ est limitée dans $\mathrm{H}^1(\Omega)$, $\mathrm{U}_t(X, t)$ *resulte* limitée dans $\mathrm{H}^0(\Omega)$ (analogue du Lemme d'Esclangon), pour avoir une analogie complète.

où M est une constante positive assez petite pour que l'équation homogène ($f(X, t) \equiv 0$) possède comme solutions des oscillations amorties. Si $f(X, t)$ est presque-périodique de R à $H^0(\Omega)$ on démontre l'existence d'une fonction *unique* $u(X, t)$ vérifiant $u|_S = 0$ et (3), et étant presque-périodique de R à $H^1(\Omega) \times H^0(\Omega)$. Le cas périodique, même non linéaire, a été traité par G. Prodi [18].

On démontre ensuite un résultat similaire dans le cas où l'on remplace la fonction $f(X, t)$ par une distribution vectorielle de R à $H^0(\Omega)$, qui est presque-périodique. On démontre alors l'existence d'une distribution unique « de R à $H^1(\Omega) \times H^0(\Omega)$ », vérifiant (3) et $u|_S = 0$ dans un sens à être précisé dans le travail, qui est presque-périodique.

Comme il est déjà clair d'après les travaux de J. L. Lions ([10], [11], [12]) dans l'étude des problèmes mixtes d'après Hadamard pour les équations d'évolution, les distributions vectorielles de L. Schwartz [20] s'introduisent d'une façon tout à fait naturelle.

Dans ce travail on verra qu'il est tout à fait naturel de considérer des distributions vectorielles presque-périodiques, qui sont solutions généralisées de diverses équations de type hyperbolique. Une théorie des distributions vectorielles presque-périodiques manque dans la littérature; on l'a obtenue ici en suivant de près le cas des distributions scalaires traité par L. Schwartz dans [19] (p. 62-64).

On obtient ainsi les premières applications pratiques des distributions presque-périodiques, ce qui n'est pas sans un certain intérêt vu que L. Schwartz dit dans [19] (p. 6) :

« Nous ignorons si ces distributions peuvent avoir des usages pratiques. »

L'ordre des chapitres est le suivant :

Le premier traite certaines questions concernant les fonctions vectorielles presque-périodiques à valeurs dans un espace de Banach ou de Hilbert. Par rapport à Bochner [3] il y a deux résultats nouveaux et une nouvelle méthode de démonstration du théorème d'unicité et d'approximation. Le premier résultat nouveau concerne l'extension vectorielle d'un théorème de Favard, concernant l'intégrale d'une fonction presque-périodique dont le « spectre » n'a pas l'origine comme point-limite. Le deuxième résultat donne l'extension (*), dans le cas seulement d'un espace de Hilbert, du théorème de Bohr sur la presque-périodicité des intégrales *bornées* d'une fonction presque-périodique. Dans le cas d'un espace de Banach quelconque, Bochner avait obtenu en [3] la presque-périodicité des intégrales *contenues dans un compact*, d'une fonction vectorielle presque-périodique, et avait laissé ouverte la question si l'on peut ou non remplacer « compact » par « borné ».

(*) Due à L. Amerio [2_1]; pour l'extension aux espaces de Banach uniformément convexes, *voir* aussi L. Amerio [2_2].

Il a été facile pour nous de donner une réponse affirmative dans le cas des espaces de Hilbert, si l'on se rend compte que les difficultés essentielles ont été dépassées par Amerio dans [2] (*).

Le deuxième chapitre traite en détail les distributions vectorielles presque-périodiques. Ce chapitre représente un développement de L. Schwartz ([19], p. 62-64), et quoique l'essentiel se trouve dans Schwartz, il se peut que certains lecteurs trouveront notre chapitre d'un accès plus facile.

Le troisième chapitre traitera des solutions fortes presque-périodiques de l'équation des ondes non homogène, le quatrième, des solutions-distributions vectorielles presques-périodiques, pour les équations des ondes homogènes ou non homogènes, le cinquième de l'équation des télégraphistes.

Je tiens à remercier ici MM. J. L. Lions et G. Stampacchia, leurs encouragements ont été pour moi un précieux appui, sans lequel ce travail n'aurait probablement pas pu s'effectuer.

Je remercie également le Professeur L. Amerio qui m'a facilité l'accès à ses derniers travaux dans ce domaine, ce qui m'a permis la rédaction rapide de ce travail.

Je remercie chaleureusement les professeurs S. Bochner, L. Schwartz et S. Sobolev dont les encouragements envers ce genre de recherches, exprimés en diverses occasions, m'ont donné un grand appui, et j'exprime ma reconnaissance à MM. Paul Montel et Jacques Hadamard qui ont bien voulu présenter mes Notes à l'Académie des Sciences de Paris.

CHAPITRE I.

LES FONCTIONS VECTORIELLES PRESQUE-PÉRIODIQUES.

1. Au commencement on reproduit Bochner [3]. Soit E un espace de Banach, E′ son dual fort, $R \equiv [-\infty, +\infty]$, $\vec{f}(t)$ une fonction presque-périodique (p. p.) de R à E. Soit $v_f(t)$ le module de continuité de $\vec{f}(t)$, fonction de R à R donnée par la formule

$$v(t) \equiv v_f(t) = \sup_{s \in R} \left\| \vec{f}(s+t) - \vec{f}(s) \right\|.$$

Comme pour tout module de continuité on a

$$v(t) \geqq 0, \qquad v(0) = 0, \qquad v(-t) = v(t), \qquad v(t_1 + t_2) \leqq v(t_1) + v(t_2),$$

(*) Quand j'ai envoyé le manuscrit de ce travail, je ne connaissais pas encore la Note [2_1] de L. Amerio, où le théorème est démontré (comme on fait aussi chez nous), avec le même procédé donné par Amerio pour l'équation des ondes.

on en déduit

$$-v(-t) \leqq v(s+t) - v(s) \leqq v(t) \qquad \text{et} \qquad |v(s+t) - v(s)| \leqq v(t).$$

Mais $v(s)$ est continue pour $s = 0$, car

$$v(t) = \sup_{s \in \mathrm{R}} \left\| \vec{f}(s+t) - \vec{f}(s) \right\| < \varepsilon \qquad \text{si} \quad |t| < \delta(\varepsilon).$$

On en déduit que $v(t)$ est continue pour tout $t \in \mathrm{R}$. Elle est aussi presque-périodique; car si t est une ε-presque-période de $\vec{f}(s)$, alors $v(t) < \varepsilon$ et $\sup_{s \in \mathrm{R}} |v(s+t) - v(s)| < \varepsilon$.

Soit maintenant la suite $(\mu_n)_1^\infty$ des exposants de Fourier pour $v(s)$; on sait d'après un théorème de Bohr (*voir* par exemple [9], p. 104-105 ou [7], p. 61) que, pour tout $\varepsilon > 0$ il y a un $\mathrm{N}(\varepsilon)$ et un $0 < \delta(\varepsilon) < \frac{\pi}{2}$, tels que toute solution t_0 des N inégalités

$$|t_0 \mu_n| \leqq \delta \pmod{2\pi} \qquad (n = 1, 2, \ldots, \mathrm{N})$$

est une ε-presque-période de $v(s)$. Mais toute ε-presque-période de $v(s)$ est aussi une ε-presque-période de $\vec{f}(s)$. Considérons l'ensemble M des combinaisons linéaires finies rationnelles des nombres $(\mu_n)_1^\infty$, qui est au plus dénombrable. Soit $\lambda \notin \mathrm{M}$. Alors, le système d'inégalités

$$|t_0 \mu_n| \leqq \delta \pmod{2\pi} \qquad (n = 1, 2, \ldots, \mathrm{N}),$$
$$|t_0 \lambda - \pi| \leqq \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$$

a toujours une solution t_0 comme on en déduit d'un théorème connu de Kronecker (*voir* [9], p. 106 ou [7], p. 18).

Il existe donc une ε-presque-période de $\vec{f}(t)$, qui vérifie en plus la relation $|t_0 \lambda - \pi| \leqq \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$ et donc aussi la relation

$$|1 - e^{-it_0\lambda}| = \left| 2 \sin t_0 \frac{\lambda}{2} \right| \geqq 1.$$

Dans ce cas on a

$$\begin{aligned} \vec{a}(\lambda) &= \lim_{\mathrm{T} \to \infty} \frac{1}{\mathrm{T}} \int_{t_0}^{t_0 + \mathrm{T}} \vec{f}(t)\, e^{-i\lambda t}\, dt = e^{-i\lambda t_0} \mathfrak{M}_t\left[\vec{f}(t+t_0)\, e^{-i\lambda t}\right] \\ &= e^{-i\lambda t_0} \vec{a}(\lambda) + e^{-i\lambda t_0} \mathfrak{M}_t\left\{\left[\vec{f}(t+t_0) - \vec{f}(t)\right] e^{-i\lambda t}\right\} \end{aligned}$$

et donc $\left\| \vec{a}(\lambda) \right\| \leqq \frac{\varepsilon}{|1 - e^{-it_0\lambda}|} \leqq \varepsilon$; vu que ε est arbitraire positif, on a $\vec{a}(\lambda) = \theta$ pour tout $\lambda \notin \mathrm{M}$. En conséquence l'ensemble des λ tels que $\vec{a}(\lambda) \neq \theta$ est contenu dans M et il est au plus dénombrable (*). Nommons cet ensemble avec $(\Lambda_n)_1^\infty$; si $\vec{a}(\Lambda_n) = \vec{A}_n$ on attache à chaque fonction $\vec{f}(t)$ presque-périodique de R à E la série de Fourier :

$$\vec{f}(t) \sim \sum_1^\infty \vec{A}n\, e^{i\Lambda_n t}.$$

2. Pour les fonctions p. p. de R à E on va démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME D'UNICITÉ. — *Si $\vec{f}(t)$ et $\vec{g}(t)$, fonctions* p. p. *de* R *à* E *ont la même série de Fourier, alors $\vec{f}(t) = \vec{g}(t)$ pour tout $t \in$* R.

En effet, d'après l'hypothèse on a pour tout λ réel :

$$\mathfrak{M}\left[\vec{f}(t)\, e^{-i\lambda t}\right] = \mathfrak{M}\left[\vec{g}(t)\, e^{-i\lambda t}\right].$$

Alors, pour tout $x' \in E'$, on aura

$$\mathfrak{M}\left[\left\langle x', \vec{f}(t)\right\rangle e^{-i\lambda t}\right] = \mathfrak{M}\left[\left\langle x', \vec{g}(t)\right\rangle e^{-i\lambda t}\right].$$

Vu que $\langle x', \vec{f}(t)\rangle$ et $\langle x', \vec{g}(t)\rangle$ sont des fonctions p. p. de R à R, on a d'après le théorème scalaire d'unicité, l'égalité $\langle x', \vec{f}(t)\rangle = \langle x', \vec{g}(t)\rangle$ pour tout $x' \in E'$; en conséquence le théorème d'unicité dérive du corollaire connu du théorème de Hahn-Banach affirmant que si $x'(x) = x'(y)$ pour tout $x' \in E'$, on a $x = y$ (**).

3. Dans ce paragraphe on démontre le théorème d'aproximation en adaptant au cas vectoriel les raisonnements de Levitan ([9], p. 66-71).

L'exposé sera assez complet pour ne pas obliger le lecteur de consulter Levitan. Le procédé est essentiellement celui de Bochner-Fejer, adapté au cas vectoriel. Quant à Bochner, dans [3], il a adopté un autre procédé, remontant à Bohr. La différence entre la méthode de Bochner et la nôtre est que, tandis que dans la première on utilise des résultats profonds de la théorie des fonctions p. p. et presque rien des espaces de Banach, chez nous la situation est plus ou moins équilibrée (***).

LEMME I.3.1. — *Soit $\{\vec{f}_\alpha(t)\}$ une famille de fonctions de* R *à* E *qui est également continue, également presque-périodique et telle que pour tout $t_0 \in$* R *fixé, l'ensemble $\{\vec{f}_\alpha(t_0)\}$ est contenu dans un compact. Il existe alors une suite*

(*) Autre démonstration dans J. Kopek [27].

(**) J. Kopek [27].

(***) *Voir* aussi Kopek [27] et Bochner-von Neumann [28].

$\{\vec{f}_k(t)\} \subset \{\vec{f}_\alpha(t)\}$ *qui converge uniformément par rapport à* $t \in \mathrm{R}$ *vers une fonction* p. p. *de* R *à* E *dans la topologie forte de* E.

En utilisant le procédé diagonal et la compacité relative on peut trouver une suite $\{\vec{f}_k(t)\}_1^\infty$ qui est convergente sur un ensemble dénombrable partout dense dans R. Puis on voit aisément que cette suite est même uniformément convergente sur R dans la topologie forte de E.

Maintenant on construit les polynomes de Bochner-Fejer (*voir* [9], p. 66-71 ou [7], p. 52-54). Soit $\vec{f}(t) \sim \sum_1^\infty \vec{A}_n e^{i\lambda_n t}$ et $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \ldots)$ une base pour la suite $(\lambda_n)_1^\infty$. Soit aussi $r, m, n_1, \ldots, n_r$ des nombres naturels arbitraires. Le noyau de Bochner-Fejer est donné par

$$\mathrm{K}^{(m)}_{\binom{n_1 \ldots n_r}{\beta_1 \ldots \beta_r}} \equiv \mathrm{K}_{\mathrm{B}}^{(m)} = \mathrm{K}_{n_1}\left(\frac{\beta_1 t}{m\,!}\right) \mathrm{K}_{n_2}\left(\frac{\beta_2 t}{m\,!}\right) \ldots \mathrm{K}_{n_r}\left(\frac{\beta_r t}{m\,!}\right),$$

où

$$\mathrm{K}_n(\beta t) = \frac{\sin^2 \dfrac{n\beta t}{2}}{n \sin^2 \dfrac{\beta t}{2}} = \sum_{\nu=-n}^{n} \left(1 - \frac{|\nu|}{n}\right) e^{i\nu\beta t}.$$

On a

$$\mathrm{K}_{\mathrm{B}}^{(m)}(t) \geqq 0, \qquad \mathfrak{M}[\mathrm{K}_{\mathrm{B}}^{(m)}(t)] = 1, \qquad \mathrm{K}_{\mathrm{B}}^{(m)}(t) = \sum k_{n_1 \ldots n_r, \nu_1 \ldots \nu_r} e^{-i\left(\frac{\nu_1}{m\,!}\beta_1 + \ldots + \frac{\nu_r}{m\,!}\beta_r\right)},$$

où $0 \leqq k_{n_1 \ldots n_r, \nu_1 \ldots \nu_r} \leqq 1$, et, pour r et $\nu_1, \ldots, \nu_r$ fixés, les $k_{n_1 \ldots n_r, \nu_1 \ldots \nu_r}$ tendent vers 1 quand $n_1, \ldots, n_r \to \infty$. On définit alors le polynome de Bochner-Fejer par la formule

$$\vec{\mathrm{P}}_{\mathrm{B}}^{(m)}(t) = \mathfrak{M}_s\left[\mathrm{K}_{\mathrm{B}}^{(m)}(s)\, \vec{f}(t+s)\right] = \lim_{\mathrm{S} \to \infty} \frac{1}{\mathrm{S}} \int_0^{\mathrm{S}} \mathrm{K}_{\mathrm{B}}^{(m)}(s)\, \vec{f}(t+s)\, ds.$$

Nous montrons que l'ensemble de *tous* les polynomes $\vec{\mathrm{P}}_{\mathrm{B}}^{(m)}(t)$ qui correspondent à la même fonction $\vec{f}(t)$, vérifie les conditions du lemme I.3.1. On voit sans peine que

$$\left\| \vec{\mathrm{P}}_{\mathrm{B}}^{(m)}(t+h) - \vec{\mathrm{P}}_{\mathrm{B}}^{(m)}(t) \right\| \leqq \sup_{t \in \mathrm{R}} \left\| \vec{f}(t+h) - \vec{f}(t) \right\|,$$

d'où résulte l'égale continuité et presque-périodicité.

Il faut prouver encore que l'ensemble de tous les éléments de E, $\mathrm{P}_{\mathrm{B}}^{(m)}(t)$ où varient B et m, pour chaque $t \in \mathrm{R}$ fixé, est contenu dans un compact. Pour cela on utilise un critérium de compacité relative donné par R. S. Phillips dans [17] (§ 3.1), dont l'énoncé est le suivant :

Pour qu'un ensemble borné A *contenu dans un espace de Banach* E *soit relativement compact, il faut et il suffit que la transformation linéaire* T *de* E' *à* M_A (2) *donnée par* $Tx' = \langle x', x\rangle$, $x \in A$, *soit compacte.*

Donc, pour que $A \subset E$ soit relativement compacte il suffit que, quelle que soit la suite bornée de E', (x'_n), il existe une suite partielle telle que $\langle x'_{k_n}, x\rangle$ soit convergente pour $n \to \infty$, uniformément par rapport à $x \in A$. Dans notre cas, si l'on a la suite bornée (x'_n) alors la suite de fonctions scalaires $\langle x'_n, \vec{f}(t)\rangle$ [pour $\vec{f}(t)$ p. p. de R à E] est également bornée, continue et presque-périodique. En appliquant le lemme I.3.1 dans le cas $E = R$, il résulte l'existence d'une suite partielle $\langle x'_{k_n}, \vec{f}(t)\rangle$ qui est convergente, uniformément par rapport à $t \in R$. Mais dans ce cas il résultera aussi que la suite $\langle x'_{k_n}, \vec{P}_B^{(m)}(t)\rangle$ converge uniformément par rapport à B, m et $t \in R$. En effet, on a

$$\langle x'_{kn}, \vec{P}_B^{(m)}(t)\rangle = \lim_{S\to\infty} \frac{1}{S}\int_t^{S+t} K_B^{(m)}(u-t)\langle x'_{kn}, \vec{f}(u)\rangle\, du.$$

Soit $\varepsilon > 0$ et $N(\varepsilon)$ tel que pour tout $m, n > N(\varepsilon)$, on a

$$\sup_{u\in R} \left|\langle x'_{kn}, \vec{f}(u)\rangle - \langle x'_{km}, \vec{f}(u)\rangle\right| < \varepsilon,$$

on en déduit

$$\begin{aligned}&\left|\langle x'_{kn}, \vec{P}_B^{(m)}(t)\rangle - \langle x'_{km}, \vec{P}_B^{(m)}(t)\rangle\right| \\ &\quad \leqq \varepsilon \lim_{S\to\infty}\frac{1}{S}\int_t^{t+S} K_B^{(m)}(u-t)\, du = \varepsilon \lim_{S\to\infty}\frac{1}{S}\int_0^S K_B^{(m)}(u)\, du = \varepsilon.\end{aligned}$$

Ainsi la compacité relative de l'ensemble des $\vec{P}_B^{(m)}(t)$ (quand varient B, m et *aussi* $t \in R$) est une conséquence du critérium de Phillips.

Choisissons maintenant les nombres $r, m, n_1, \ldots, n_r$ de la manière suivante (*voir* [7], p. 54-55) :

$$r = m, \qquad n_1 = n_2 = \ldots = n_m = \frac{1}{(m!)^2}.$$

Alors, la suite correspondante de polynomes de Bochner-Fejer sera donnée par la formule

$$\vec{P}^{(m)}(t) = \sum_{\substack{|\nu_1| \leqq (m!)^2 \\ |\nu_m| \leqq (m!)^2}} \left(1 - \frac{|\nu_1|}{(m!)^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{|\nu_m|}{(m!)^2}\right)\vec{A}\left(\frac{\nu_1}{m!}\beta_1 + \ldots + \frac{\nu_m}{m!}\beta_m\right) e^{i\left(\nu_1\frac{\beta_1}{m!} + \ldots + \nu_m\frac{\beta_m}{m!}\right)t},$$

(2) M_A est l'espace des fonctions complexes, définies et bornées sur l'ensemble A, avec la topologie de convergence uniforme sur A.

où $\vec{A}\left(\frac{\nu_1}{m!}\beta_1+\ldots+\frac{\nu_m}{m!}\beta_m\right)$ est le coefficient de Fourier qui correspond à l'exposant $\frac{\nu_1}{m!}\beta_1+\ldots+\frac{\nu_m}{m!}\beta_m$ de $\vec{f}(t)$. En appliquant à cette suite le lemme I.3.1, ce qui est possible par les raisonnements ci-dessus, on obtient une suite partielle, qu'on va noter toujours avec $\vec{P}^{(m)}(t)$ et qui sera convergente uniformément sur $t\in R$, dans la topologie forte de E, vers une fonction $\vec{\varphi}(t)$ presque-périodique de R à E. Calculons les coefficients de Fourier de cette fonction $\vec{\varphi}(t)$, on aura

$$\vec{\mathfrak{a}}(\lambda)=\mathfrak{M}\{\vec{\varphi}(t)\,e^{-i\lambda t}\}=\lim_{m\to\infty}\mathfrak{M}\{\vec{P}^{(m)}(t)\,e^{-i\lambda t}\}.$$

Si $\lambda\neq\lambda_n$ pour tout $n=1, 2, \ldots,$ alors $\mathfrak{M}\{\vec{P}^{(m)}(t)\,e^{-i\lambda t}\}=\theta$ pour tout m et donc $\vec{\mathfrak{a}}(\lambda)=\theta$. Soit maintenant $\lambda=\lambda_k$. Si m est assez grand, tous les polynomes $\vec{P}^{(m)}(t)$ contiennent des termes avec $\vec{A}(\lambda_k)$; en effet soit $\lambda_k=r_1\beta_1+r_2\beta_2+\ldots+r_p\beta_p$ avec r_p rationnelles. Si m est plus grand que le produit des dénominateurs des r_i, alors λ_k sera donné par la relation

$$\lambda_k=\frac{\nu_1}{m!}\beta_1+\ldots+\frac{\nu_m}{m!}\beta_m,$$

où

$$\nu_i=r_i m! \quad\text{si } i\leq p \qquad\text{et}\qquad \nu_i=0 \quad\text{si } i>p.$$

Aussi pour m assez grand, on aura encore

$$|\nu_i|=|r_i|\,m!\leq(m!)^2 \qquad (i=1, 2, \ldots, p).$$

Donc, tous les $\vec{P}^{(m)}(t)$ avec m plus grand qu'un certain m_0, contiennent des termes avec $\vec{A}(\lambda_k)$. On a alors, en conséquence

$$\mathfrak{M}\{\vec{P}^{(m)}(t)\,e^{-i\lambda_k t}\}=\left(1-\frac{|\nu_1|}{(m!)^2}\right)\cdots\left(1-\frac{|\nu_m|}{(m!)^2}\right)\vec{A}(\lambda_k),$$

où

$$\nu_i=r_i m! \quad\text{pour } i\leq p \qquad\text{et}\qquad \nu_i=0 \quad\text{pour } i>p.$$

Donc $\frac{|\nu_i|}{(m!)^2}=\frac{|r_i|}{m!}$ pour $i\leq p$ et tend vers zéro avec $\frac{1}{m}$. Alors

$$\vec{\mathfrak{a}}(\lambda_k)=\vec{A}(\lambda_k).$$

On a obtenu ainsi que les séries de Fourier pour les fonctions p. p., $\vec{f}(t)$ et $\vec{\varphi}(t)$, sont les mêmes. Alors, d'après le théorème d'unicité (qui chez nous, par différence de Bochner [3], précède le théorème d'approximation), on a l'égalité $\vec{f}(t)=\vec{\varphi}(t)$, $t\in R$. En conséquence, la suite de polynomes $\vec{P}^{(m)}(t)$ qui a été construite à partir de $\vec{f}(t)$ est convergente vers $\vec{f}(t)$, uniformément par rapport à $t \in \mathrm{R}$, dans la topologie forte de E. On peut donc formuler le

Théorème d'approximation (Bochner. — *Étant donnée une fonction* p. p. $\vec{f}(t)$ *de* R *à* E, *il existe une suite de polynomes abstraits exponentiels de la forme*

$$\vec{\mathrm{P}}^{(m)}(t) = \sum_{n=1}^{\mathrm{N}(m)} r_n^{(m)} \vec{\mathrm{A}}_n e^{i\lambda_n t}$$

qui dans l'intervalle $-\infty < t < +\infty$ *converge uniformément vers* $\vec{f}(t)$ *dans la topologie forte de* E, *lorsque* $m \to \infty$, *les coefficients* $r_n^{(m)}$ *dépendant seulement de* m *et des exposants* λ_n, *mais non des coefficients* $\vec{\mathrm{A}}_n$.

4. Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème suivant :

Théorème vectoriel de Favard. — *Soit* $\vec{f}(t)$ *presque-périodique de* R *à* E. *Si* $\vec{f}(t) \sim \sum_n \vec{\mathrm{A}}_n e^{i\lambda_n t}$ *avec* $|\lambda_n| > \alpha > 0$, *pour tout* n, *alors l'intégrale indéfinie de* $\vec{f}(t)$ *est presque-périodique.*

Pour $\mathrm{E} \equiv \mathrm{R}$, c'est un théorème de Favard. Nous donnons la démonstration pour faciliter la lecture; elle est complètement analogue à celle donnée dans [7] (p. 89) pour le cas scalaire.

Soit la fonction définie par

$$\varphi(\lambda) = \begin{cases} \dfrac{1}{i\alpha^2} & (0 \leqq \lambda < \alpha) \\ \dfrac{1}{i\lambda} & (\lambda \geqq \alpha) \end{cases} \qquad \varphi(-\lambda) = -\varphi(\lambda).$$

On voit qu'elle est dans $\mathrm{L}^2(\mathrm{R})$. En calculant la transformation de Fourier de $\varphi(\lambda)$, nommons-la $\psi(u)$, on peut voir qu'elle appartient à $\mathrm{L}^1(\mathrm{R})$. Considérons maintenant la fonction

$$\vec{\mathrm{F}}(t) = \int_{\mathrm{R}} \vec{f}(t+u)\,\psi(u)\,du.$$

On voit aisément qu'elle est continue et presque-périodique. Puis

$$\mathfrak{M}_t\{\vec{\mathrm{F}}(t)\,e^{-i\lambda t}\} = \int_{\mathrm{R}} \psi(u)\,\mathfrak{M}_t\{\vec{f}(t+u)\,e^{-i\lambda t}\}\,du$$
$$= \mathfrak{M}_t\{\vec{f}(t)\,e^{-i\lambda t}\} \int_{\mathrm{R}} \psi(u)\,e^{i\lambda u}\,du = \vec{\mathrm{A}}(\lambda)\,\varphi(\lambda).$$

Il en résulte

$$\vec{\mathrm{F}}(t) \sim \sum_n \left(\frac{\vec{\mathrm{A}}_n}{i\lambda_n}\right) e^{i\lambda_n t}.$$

Montrons que $\vec{F}(t)$ est l'intégrale indéfinie de $\vec{f}(t)$. Considérons pour cela les polynomes de Bochner-Fejer pour $\vec{f}(t)$ et $\vec{F}(t)$; vu que $\vec{F}(t)$ et $\vec{f}(t)$ ont les mêmes exposants de Fourier, on voit que

$$\vec{P}^{(m)}(t, \vec{f}) = \sum_{1}^{N(m)} r_n^{(m)} \vec{A}_n e^{i\lambda_n t}, \qquad \vec{P}^{(m)}(t, \vec{F}) = \sum_{1}^{N(m)} r_n^{(m)} \left(\frac{\vec{A}_n}{i\lambda_n}\right) e^{i\lambda_n t}.$$

Donc

$$\vec{P}^{(m)}(t, \vec{F}) = \vec{P}^{(m)}(0, \vec{F}) + \int_0^t \vec{P}^{(m)}(t, \vec{f})\, dt$$

et en passant à la limite, on aura l'égalité

$$\vec{F}(t) = \vec{F}(0) + \int_0^t \vec{f}(u)\, du,$$

C. Q. F. D.

5. Le théorème vectoriel de Bohr (*). — Dans ce paragraphe, E sera un espace de Hilbert H. On va démontrer que :

Si $\vec{f}(t)$ *est p. p. de* R *à* H *et si l'intégrale indéfinie* $\vec{F}(t) = \int_0^t \vec{f}(u)\, du$ *est bornée dans* H *quand* t *parcourt* R *alors* $\vec{F}(t)$ *est aussi p. p. de* R *à* H.

Démonstration. — L'ensemble des valeurs de la fonction p. p. $\vec{f}(t)$ est séparable dans R car $\vec{f}(t)$ est continue. Soit $H_1 \subset H$ le plus petit espace linéaire fermé qui contient l'ensemble des valeurs de $\vec{f}(t)$. Il est un espace de Hilbert séparable et nous pouvons supposer donc dès le commencement que H est séparable. Soit alors $(e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots)$ une suite complète orthonormale dans H. On a dans ce cas la relation

$$\vec{f}(t) = \sum_{1}^{\infty} f_n(t)\, e_n, \qquad f_n(t) = (\vec{f}(t), e_n)$$

où par (,) on désigne le produit scalaire dans H. La série $\sum_{1}^{\infty} f_n(t)\, e_n$ est convergente fortement dans H pour chaque $t \in R$ fixé. On a aussi

$$\sum_{1}^{\infty} |f_n(t)|^2 = \|\vec{f}(t)\|_H^2$$

et, vu que $\vec{f}(t)$ est p. p. de R à H, il résulte que les $f_n(t)$ sont toutes des fonctions p. p. de R à R.

(*) Du à L. Amerio [21].

On a le lemme suivant :

LEMME DE AMERIO ([2], II). — *Soit* $\{f_n(t)\}_1^\infty$ *une suite monotone et bornée de fonction* p. p. *de* R *à* R, *c'est-à-dire*

$$f_n(t) \leqq f_{n+1}(t) \leqq \mathrm{M} < +\infty \qquad (t \in \mathrm{R})$$

ou

$$f_n(t) \geqq f_{n+1}(t) \geqq m > -\infty \qquad (t \in \mathrm{R}).$$

Pour chaque suite $\alpha = \{\alpha_k\}_1^\infty$ *de nombres réels telle que* $\lim\limits_{k \to \infty} f_n(t+\alpha_k) = f_{n,\alpha}(t)$ (pour $n = 1, 2, \ldots$) *existe uniformément pour* $t \in \mathrm{R}$ [suite régulière par rapport à $\{f_n(t)\}_1^\infty$], *la suite* $f_{n,\alpha}(t)$ *est aussi monotone et bornée. Soit* $\mathrm{F}_\alpha(t) = \lim\limits_{n \to \infty} f_{n,\alpha}(t)$, *la convergence, ponctuelle en* $t \in \mathrm{R}$. *Alors, si pour chaque suite régulière* $\alpha = \{\alpha_k\}_1^\infty$, *les fonctions* $\mathrm{F}_\alpha(t)$ *sont* p. p. *de* R *à* R, *la suite* $f_n(t)$ *et toutes les suites* $f_{n,\alpha}(t)$ *convergent uniformément pour* $t \in \mathrm{R}$.

Comme dans Amerio ([2], III, lemme I), on en déduit que la série $\sum_1^\infty f_n^2(t) = \|\vec{f}(t)\|^2$ converge uniformément pour $t \in \mathrm{R}$. Puis on a le

LEMME I.5.1. — *Soit* $\vec{f}(t)$ *et* $\vec{g}(t)$ p. p. *de* R *à* H, *et* $\vec{u}(t)$, $\vec{v}(t)$ *deux fonctions de* R *à* H *vérifiant fortement* $\vec{u}'(t) = \vec{f}(t)$, $\vec{v}'(t) = \vec{g}$. *Alors, si* $\vec{u}(t)$ *et* $\vec{v}(t)$ *sont bornées dans* H *la fonction scalaire* $\varphi(t) = \left(\vec{u}(t), \vec{v}(t)\right)$ *est* p. p. de R à R.

[C'est l'analogue du lemme II de [2] (III).]

Preuve. — Soit $\vec{f}(t) = \sum_1^\infty f_n(t)\, e_n$, $\vec{g}(t) = \sum_1^\infty g_n(t)\, e_n$, les fonctions $f_n(t)$ et $g_n(t)$ sont p. p. et les séries $\sum_1^\infty f_n^2(t)$ et $\sum_1^\infty g_n^2(t)$ convergent uniformément sur $t \in \mathrm{R}$. Il résulte évidemment que les séries $\sum_1^\infty f_n(t)\, e_n$ et $\sum_1^\infty g_n(t)\, e_n$ convergent fortement dans H, *uniformément* pour $t \in \mathrm{R}$, On a

$$\vec{u}(t) = \vec{u}(0) + \int_0^t f(\xi)\, d\xi = \vec{u}(0) + \sum_1^\infty \psi_n(t)\, e_n$$

et

$$\vec{v}(t) = \vec{v}(0) + \int_0^t g(\xi)\, d\xi = \vec{v}(0) + \sum_1^\infty \omega_n(t)\, e_n,$$

où l'on a désigné

$$\psi_n(t) = \int_0^t f_n(\xi)\, d\xi, \qquad \omega_n(t) = \int_0^t g_n(\xi)\, d\xi.$$

Les deux séries ainsi formées convergent fortement pour chaque $t \in R$. Mais on a supposé $\vec{u}(t)$ et $\vec{v}(t)$ bornées, donc $\sum_1^\infty \psi_n(t)\, e_n$ et $\sum_1^\infty \omega_n(t)\, e_n$ bornées, et (en multipliant scalairement avec e_i), il résulte $\psi_n(t)$ et $\omega_n(t)$ bornées, donc (théoréme scalaire de Bohr), $\psi_n(t)$ et $\omega_n(t)$ sont p. p.

D'autre part, on a

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{u}(t), \vec{v}(t)\right) = \left(\vec{f}(t), \vec{v}(t)\right) + \left(\vec{u}(t), \vec{g}(t)\right) = \sum_1^\infty f_n(t)\, \omega_n(t) + \sum_1^\infty \psi_n(t)\, g_n(t).$$

Mais $f_n(t)$, $g_n(t)$, $\omega_n(t)$, $\psi_n(t)$ sont p. p. D'autre part les séries $\sum_1^\infty f_n(t)\, \omega_n(t)$ et $\sum_1^\infty g_n(t)\, \psi_n(t)$ convergent uniformément pour $t \in R$, car, par exemple, on a

$$\left|\sum_p^q f_n(t)\, \omega_n(t)\right| \leq \left(\sum_p^q f_n^2(t)\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_p^q \omega_n^2(t)\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left\|\vec{v}(t) - \vec{v}(0)\right\|_H \left(\sum_p^q f_n^2(t)\right)^{\frac{1}{2}}$$

et le résultat est une conséquence du fait que $\vec{v}(t)$ est bornée sur $t \in R$ et la série $\sum_1^\infty f_n^2(t)$ est convergente uniformément sur $t \in R$.

En conséquence, la fonction $\left(\vec{f}(t), \vec{v}(t)\right) + \left(\vec{u}(t), \vec{g}(t)\right)$ est p. p. D'autre part, la fonction scalaire $\left(\vec{u}(t), \vec{v}(t)\right)$ est bornée sur R. Du théorème de Bohr, il résulte encore la presque-périodicité de $\left(\vec{u}(t), \vec{v}(t)\right)$.

C. Q. F. D.

En prenant $\vec{u}(t) = \vec{v}(t)$, il résulte que $\left\|\vec{u}(t)\right\|_H^2$ est aussi p. p. Maintenant nous terminons la démonstration du théorème vectoriel de Bohr.

Soit donc $\vec{F}(t)$ vérifie $\vec{F}'(t) = \vec{f}(t)$, $\vec{f}(t)$ p. p. de R à H, $\vec{F}(t)$ bornée de R à H. On a

$$\vec{f}(t) = \sum_1^\infty f_n(t)\, e_n,$$

la série étant convergente fortement dans H, uniformément pour $t \in R$, et la série $\sum_1^\infty f_n^2(t) = \left\|\vec{f}(t)\right\|^2$ est uniformément convergente. On a

$$\vec{F}(t) = \vec{F}(0) + \int_0^t \vec{f}(\xi)\, d\xi = \vec{F}(0) + \sum_1^\infty \psi_n(t)\, e_n,$$

où

$$\psi_n(t) = \int_0^t f_n(\xi)\, d\xi.$$

On voit comme plus haut que les $\psi_n(t)$ sont p. p., et donc pour prouver la presque-périodicité de $\vec{F}(s)$, il sera suffisant de montrer que la suite $\sum_1^\infty \psi_n(t) e_n$ est convergente uniformément pour $t \in R$, fortement dans H. Mais pour cela il est suffisant de prouver la convergence uniforme sur R de la série $\sum_1 \psi_n^2(t)$. Considérons la suite monotone $\sigma_n(t) = \sum_1^n \psi_i^2(t)$. Comme on a

$$\sum_1^\infty \psi_i^2(t) = \left\| \vec{F}(t) - \vec{F}(0) \right\|_H^2$$

et comme par hypothèse $\vec{F}(t)$ est bornée, il résulte que la suite $\sigma_n(t)$ est croissante et bornée, formée de fonctions p. p. Nous allons voir que cette suite vérifie encore les autres conditions du lemme de Amerio, d'où il résultera la convergence uniforme cherchée.

Soit pour cela $\alpha = \{\alpha_k\}$ une suite régulière pour la suite $\sigma_n(t)$, c'est-à-dire telle que $\sigma_n(t + \alpha_k)$ tend vers $\sigma_{n,\alpha}(t)$, avec $k \to \infty$, uniformément pour $t \in R$. Il existe alors une suite partielle, notée toujours avec $\{\alpha_k\}$, qui est régulière pour la suite $\psi_n(t)$ et pour $\vec{f}(t)$, et soient $\psi_{n,\alpha}$ et $\vec{f}_\alpha(t)$ les limites uniformes sur $t \in R$ de $\psi_n(t + \alpha_k)$ et $\vec{f}(t + \alpha_k)$. On a évidemment

$$\sigma_{n,\alpha}(t) = \sum_1^n \psi_{n,\alpha}^2(t).$$

Ce qu'il faut encore montrer, pour pouvoir appliquer le lemme de Amerio est que la fonction $\sigma_\alpha(t) = \sum_1^\infty \psi_{n,\alpha}^2(t)$ est aussi p. p.

J'affirme que la fonction $\vec{u}_\alpha(t) = \sum_1^\infty \psi_{n,\alpha}(t) e_n$ (qui existe évidemment), est l'intégrale indéfinie de $\vec{f}_\alpha(t)$. Considérons les composantes; on a

$$\begin{aligned}\psi_n(t + \alpha_k) &= \int_0^{t+\alpha_k} f_n(\sigma)\, d\sigma = \int_0^{\alpha_k} f_n(\sigma)\, d\sigma + \int_{\alpha_k}^{t+\alpha_k} f_n(\sigma)\, d\sigma \\ &= \psi_n(\alpha_k) + \int_0^t f_n(\tau + \alpha_k)\, d\tau.\end{aligned}$$

Vu que les $\psi_n(t)$ sont bornées pour chaque n, on peut choisir une suite partielle de $\{\alpha_k\}$ (toujours $\{\alpha_k\}$, telle que $\psi_n(\alpha_k)$ soit convergente avec $k \to \infty$. En passant à la limite, qui est uniforme sur $t \in R$ [pour $\varphi_n(t + \alpha_k$ et $f_n(\tau + \alpha_k$]), on obtient

$$\psi_{n,\alpha}(t) = a_n + \int_0^t f_{n,\alpha}(\tau)\, d\tau.$$

Mais vu que $\sum_1^\infty \psi_{\alpha,n}^2(t) < \infty$, il résulte pour $t = 0$ que $\sum_1^\infty a_n^2 < \infty$. Considérons $\vec{a} = \sum_1^\infty a_n e_n$, et soit

$$\vec{v}_\alpha(t) = \vec{a} + \int_0^t \vec{f}_\alpha(t)\, dt.$$

En prenant les composantes, on a

$$\begin{aligned}\left(\vec{v}_\alpha(t),\, e_n\right) &= a_n + \left(\int_0^t \vec{f}_\alpha(\sigma)\, d\sigma,\, e_n\right) = a_n + \int_0^t \left(\vec{f}_\alpha(\sigma),\, e_n\right) d\sigma \\ &= a_n + \int_0^t f_{n,\alpha}(\sigma)\, d\sigma = \psi_{n,\alpha}(t),\end{aligned}$$

comme on voit, vu que $\left(\vec{f}_\alpha(t),\, e_n\right) = f_{n,\alpha}(t)$, donc

$$\vec{u}_\alpha(t) = \sum_1^\infty \psi_{n,\alpha}(t)\, e_n = \vec{v}_\alpha(t) = \vec{a} + \int_0^t \vec{f}_\alpha(t)\, dt.$$

Mais $\vec{f}_\alpha(t)$ est p. p. tandis que $\vec{u}_\alpha(t)$ est bornée sur $t \in \mathrm{R}$ comme on le voit aisément. Alors, du lemme I.5.1 il résulte que

$$\|\vec{u}_\alpha(t)\|^2 = \sum_1^\infty \psi_{n,\alpha}^2(t) = \sigma_\alpha(t) \quad \text{est p. p.}$$

C. Q. F. D.

Le théorème vectoriel de Bohr est ainsi complètement démontré.

CHAPITRE II.

Les distributions vectorielles presque-périodiques (*).

1. Une distribution vectorielle « à valeurs » dans un espace de Banach E, est, d'après L. Schwartz [20] une application linéaire continue de l'espace $\mathcal{D}$ des fonctions indéfiniment dérivables sur R à support compact, muni de la topologie de Schwartz, à E. On dit : un élément de $\mathcal{L}(\mathcal{D}, \mathrm{E})$ ou un élément de $\mathcal{D}'(t, \mathrm{E})$. Dans l'espace $\mathcal{D}'(t, \mathrm{E})$ on introduit la topologie de convergence uniforme sur les parties bornées de $\mathcal{D}$. Si K est une application linéaire continue de E dans F, F étant un deuxième espace de Banach [on dit $\mathrm{K} \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$] et si $\mathrm{T} \in \mathcal{D}'(t, \mathrm{E})$, alors, on peut définir la distribution vectorielle $\mathrm{KT} \in \mathcal{D}'(t, \mathrm{F})$ par la formule

$$\langle \mathrm{K},\, \mathrm{T},\, \varphi \rangle = \mathrm{K} \langle \mathrm{T},\, \varphi \rangle \qquad \text{pour chaque } \varphi \in \mathcal{D}.$$

(*) Une exposition un peu diverse dans Zaidman [26_1].

Puis, la dérivée d'une distribution $T \in \mathcal{D}'(t, E)$ sera définie par

$$\left\langle \frac{dT}{dt}, \varphi \right\rangle = -\left\langle T, \frac{d}{dt}\varphi \right\rangle \qquad (\varphi \in \mathcal{D})$$

et cette dérivée appartient aussi à $\mathcal{D}'(t, E)$.

Considérons aussi un nouvel espace introduit par Schwartz dans [19] (p. 55) et qui sera d'usage fondamental dans la suite. Il s'agit de l'espace $\mathcal{D}_{L^1}$, formé des fonctions $\varphi(t)$ définies sur $t \in R$, indéfiniment dérivables, et telles que $\varphi^{(p)}(t) \in L^1(R)$ pour chaque $p \geqq 0$.

Une suite $\varphi_n(t)$ convergera vers zéro dans $\mathcal{D}_{L^1}$ si pour chaque $p \geqq 0$ la suite $\varphi_n^{(p)}$ tend vers zéro dans $L^1(R)$. On voit que $\mathcal{D}_{L^1}$ est un espace localement convexe, métrisable et complet. Ce dernier fait résulte de ce que la convergence dans $L^1(R)$ des $\varphi^{(p)}(t)$ vers zéro a pour conséquence la convergence vers zéro, uniforme sur R, des fonctions $\varphi^{(p-1)}(t)$.

On observe que l'espace $\mathcal{D}$ est dense dans $\mathcal{D}_{L^1}$, dans la topologie de ce dernier. Alors, on appelle distribution vectorielle *bornée* à valeurs dans E, tout élément de $\mathcal{L}(\mathcal{D}_{L^1}, E)$. L'ensemble des distributions vectorielles bornées sera désigné par $\mathcal{D}'_{L^\infty}(t, E) \equiv \mathcal{L}(\mathcal{D}_{L^1}, E)$. On le munit de la topologie de convergence uniforme sur les parties bornées de $\mathcal{D}_{L^1}$. Si maintenant T n'est pas simplement une application linéaire bornée de $\mathcal{D}_{L^1}$ dans E, mais aussi une application linéaire compacte, on dira que T est une distribution vectorielle à valeurs dans E, « contenue dans un compact ». L'ensemble de ces distributions sera désigné par $\mathcal{D}'_{L^\infty_c}(t, E)$. On a les inclusions

$$\mathcal{D}'(t, E) \supset \mathcal{D}'_{L^\infty}(t, E) \supset \mathcal{D}'_{L^\infty_c}(t, E).$$

Comme la translatée $\tau_h\varphi = \varphi(t+h)$ est définie pour chaque $\varphi \in \mathcal{D}$ ou $\varphi \in \mathcal{D}_{L_1}$ et appartient aussi à ces espaces, on peut définir la translatée d'une distribution $T \in \mathcal{D}'(t, E)$ ou d'une distribution $T \in \mathcal{D}'_{L^\infty}(t, E)$ par la formule

$$\langle \tau_h T, \varphi \rangle = \langle T, \tau_{-h}\varphi \rangle = \langle T, \varphi(t-h) \rangle$$

et l'on voit que si $T \in \mathcal{D}'(t, E)$ ou à $\mathcal{D}'_{L^\infty}(t, E)$ la translatée $\tau_h T$ est dans le même espace.

On dira qu'une distribution vectorielle $T \in \mathcal{D}'_{L^\infty}(t, E)$ est presque-périodique [appartient à $\mathcal{D}'_{L^\infty_{p.p.}}(t, E)$] si elle est bornée, et toute suite de nombres réels $(h_n)_1^\infty$ contient une suite partielle $(h_{k_n})_1^\infty$ telle que la suite d'éléments de $\mathcal{D}'_{L^\infty}(t, E) - (\tau_{h_{k_n}} T)_1^\infty$ soit convergente dans cet espace.

2. L'étude des distributions vectorielles introduites dans le paragraphe précédent, bornées, contenues dans un compact, ou presque-périodiques, peut être réduite, par convolution avec $\alpha \in \mathcal{D}$, à l'étude des fonctions appar-

tenant aux classes $B^\infty(R, E)$, $B^\infty_C(R, E)$, $B^\infty_{p.p.}(R, E)$ [3], qui sont indéfiniment dérivables et appartiennent à ces espaces avec toutes leurs dérivées.

On définit, pour chaque $\alpha \in \mathcal{D}$, et, pour toute distribution $T \in \mathcal{D}'(t, E)$ la « régularisée » $T \star \alpha$, distribution aussi de $\mathcal{D}'(t, E)$, donnée par la formule

$$\langle T \star \alpha, \varphi \rangle = \langle T, \psi \rangle; \qquad \psi(t) = \int_R \alpha(s)\, \varphi(t+s)\, ds$$

pour toute $\varphi \in \mathcal{D}$.

On démontre aisément que si $T \in \mathcal{D}'(t, E)$ et $\alpha \in \mathcal{D}$, alors

$$\frac{dT}{dt} \star \alpha = \frac{d}{dt}(T \star \alpha)$$

et aussi que, si $K \in \mathcal{L}(E, F)$, F étant un deuxième espace de Banach, on a

$$(KT) \star \alpha = K(T \star \alpha).$$

En effet, pour cette dernière :

$$\langle (KT) \star \alpha, \varphi \rangle = \langle (KT), \psi \rangle = K \langle T, \psi \rangle = K \langle (T \star \alpha), \varphi \rangle = \langle K(T \star \alpha), \varphi \rangle.$$

On sait bien (*voir* par exemple [20]) que la distribution régularisée $T \star \alpha$ est une distribution donnée par une fonction indéfiniment dérivable de R à E, par la formule

$$\langle T \star \alpha, \varphi \rangle = \int_R T_\alpha(s)\, \varphi(s)\, ds,$$

où $T_\alpha(s) = \langle T_t, \alpha(s-t) \rangle$. Le premier résultat important est le

LEMME II.2.1. — *Si* T *appartient à* $\mathcal{D}'_{L^\infty}(t, E)$) *ou à* $\mathcal{D}'_{L^\infty_C}(t, E)$ *ou à* $\mathcal{D}'_{L^\infty_{p.p.}}(t, E)$ *alors, pour toute fonction* $\alpha \in \mathcal{D}$, *la fonction indéfiniment dérivable* $T_\alpha(s)$ *est respectivement, pour* $s \in R$: *contenue dans un borné de* E, *contenue dans un compact de* E, *presque-périodique de* R *à* E.

Démonstration. — 1° Soit $T \in \mathcal{D}'_{L^\infty}(t, E)$ et B l'ensemble des $\varphi \in \mathcal{D}$, telles que $\int_R |\varphi(s)\, ds| \leqq 1$; B est un ensemble dense dans la boule unité de $L^1(R)$. L'opération $T \star \alpha$ de $\mathcal{D}$ à E, définie par la formule

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle T \star \alpha, \varphi \rangle = \int_R T_\alpha(s)\, \varphi(s)\, ds, \qquad \psi(t) = \int_R \alpha(s)\, \varphi(t+s)\, ds$$

---

(3) $B^\infty(R, E)$ est l'espace de Bochner des fonctions $\vec{f}(t)$ de R à E, fortement mesurables, avec $\operatorname{vrai\,max}_{t \in R} \|\vec{f}(t)\| < \infty$; $B^\infty_C(R, E)$ est le sous-espace de $B^\infty(R, E)$ composé des fonctions pour lesquelles l'ensemble des valeurs est un ensemble de mesure nulle près, contenu dans un compact de E; $B_{p.p.}(R, E)$ est composé de fonctions de $B^\infty(R, E)$, telles que, pour chaque $\varepsilon > 0$, l'ensemble des τ ainsi que

$$\operatorname{vrai\,max}_{t \in R} \|\vec{f}(t+\tau) - \vec{f}(t)\| < \varepsilon$$

est relativement dense.

applique B dans un ensemble borné de E car si φ parcourt B, les

$$\psi(t)=\int_{\mathrm{R}} \alpha(s)\,\varphi(t+s)\,ds,$$

parcourent un ensemble borné de $\mathcal{D}_{\mathrm{L}^1}$, et donc les $\langle \mathrm{T}, \psi\rangle$ parcourent, vu que $\mathrm{T}\in\mathcal{D}'_{\mathrm{L}^\infty}(t, \mathrm{E})$, un ensemble borné de E. Donc, l'opération $\mathrm{T}\star\alpha$ de $\mathcal{D}$ à E est bornée aussi comme opération de B à E; elle peut être donc prolongée par continuité à un opérateur de $\mathcal{L}(\mathrm{L}^1(\mathrm{R}), \mathrm{E})$. Soit alors l'ensemble des fonctions appartenant à la boule unité de $\mathrm{L}^1(\mathrm{R})$:

$$\varphi_{\xi,\eta}(s)=\begin{cases}\dfrac{1}{\eta-\xi} & (\xi\leqq s\leqq\eta),\\ 0 & (s\notin[\xi, \eta]).\end{cases}$$

On a alors, si $\mathrm{M}=\|\mathrm{T}\star\alpha\|_{\mathcal{L}(\mathrm{L}^1;\mathrm{E})}$, la relation

$$\|\langle \mathrm{T}\star\alpha, \varphi_{\xi,\eta}\rangle\|_{\mathrm{E}}=\left\|\frac{1}{\eta-\xi}\int_{\xi}^{\eta}\mathrm{T}_\alpha(s)\,ds\right\|_{\mathrm{E}}\leqq \mathrm{M},$$

pour tout couple $\xi,\eta\in\mathrm{R}$. Vu que $\mathrm{T}_\alpha(s)$ est une fonction continue de R à E, en faisant $\xi\to\eta$, on obtient que

$$\|\mathrm{T}_\alpha(\eta)\|_{\mathrm{E}}\leqq \mathrm{M}\qquad \text{pour tout } \eta\in\mathrm{R},$$

C. Q. F D.

2° Soit maintenant de plus $\mathrm{T}\in\mathcal{D}'_{\mathrm{L}^\infty_c}(\mathrm{T}, \mathrm{E})$; on obtient comme plus haut que l'ensemble $\mathcal{E}$ des éléments de E de la forme $\dfrac{1}{\eta-\xi}\displaystyle\int_{\xi}^{\eta}\mathrm{T}_\alpha(s)\,ds$ est contenu dans un compact de E, quand ξ, η parcourent R. Mais, l'ensemble des valeurs de la fonction continue $\mathrm{T}_\alpha(s)$ est contenu dans l'adhérence de $\mathcal{E}$, donc dans un compact de E.

3° Soit enfin $\mathrm{T}\in\mathcal{D}'_{\mathrm{L}^\infty_{\mathrm{p.p.}}}(t, \mathrm{E})$ et $(h_n)_1^\infty$ une suite quelconque de nombres réels. On voit aisément que

$$\tau_h\mathrm{T}_\alpha(s)=\mathrm{T}_\alpha(s+h)=\tau_h(\mathrm{T}\star\alpha)=(\tau_h\mathrm{T})\star\alpha.$$

Par l'hypothèse, la suite $(h_n)_1^\infty$ contient une suite partielle $(h_{k_n})_1^\infty$ ainsi que la suite des distributions bornées $(\tau_{h_{k_n}}\mathrm{T})_1^\infty$ est convergente dans $\mathcal{D}'_{\mathrm{L}^\infty}(t, \mathrm{E})$. C'est-à-dire, si φ parcourt un ensemble borné de $\mathcal{D}_{\mathrm{L}^1}$, alors $(\tau_{h_{k_n}}\mathrm{T}, \varphi)$ est convergente dans E, uniformément par rapport à φ. On voit aisément que si φ parcourt l'ensemble B défini plus haut, alors, pour tout $\alpha\in\mathcal{D}$, l'ensemble des fonctions ψ données par la formule

$$\psi(t)=\int_{\mathrm{R}}\alpha(s)\,\varphi(t+s)\,ds$$

parcourt un ensemble borné dans $\mathcal{D}_{\mathrm{L}^1}$. En tenant compte de la relation

$$\langle \tau_{h_{k_n}}(\mathrm{T}\star\alpha), \varphi\rangle=\langle(\tau_{h_{k_n}}\mathrm{T})\star\alpha, \varphi\rangle=\langle(\tau_{h_{k_n}}\mathrm{T}, \psi)\rangle$$

et des observations ci-dessus, on voit que pour chaque $\varepsilon > 0$, on trouve un $N(\varepsilon)$ ainsi que

$$\| (T_\alpha(s+h_{k_n}) - T_\alpha(s+h_{k_m})), \varphi \|_E < \varepsilon \qquad \text{pour tout } m, n > N(\varepsilon) \quad \text{et} \quad \varphi \in B.$$

Mais si $A \in \mathcal{L}(E, F)$ et B est dense dans la boule unité de E, alors

$$\| A \|_{\mathcal{L}(E,F)} = \sup_{e \in B} \|A e\|_F.$$

Dans notre cas, on a

$$\| \tau_{h_{k_n}}(T \star \alpha) - \tau_{h_{k_m}}(T \star \alpha) \|_{\mathcal{L}(L^1;E)} \leq \varepsilon \qquad \text{si} \quad m, n > N(\varepsilon).$$

D'autre part nous avons obtenu plus haut que

$$\sup_{s \in R} \| T_\alpha(s) \|_E \leq \| T \star \alpha \|_{\mathcal{L}(L^1;E)}.$$

En conséquence il résulte que

$$\sup_{s \in R} \| T_\alpha(s+h_{k_n}) - T_\alpha(s+h_{k_m}) \|_E \leq \varepsilon \qquad [n, m > N(\varepsilon)]$$

et donc $T_\alpha(s) = (T \star \alpha)(s)$ est presque périodique de R à E.

Un résultat plus simple dont on aura besoin est le

Lemme II.2.2. — *Si* $T \in \mathcal{D}'_{L^\infty}(t, E)$ *ou* $T \in \mathcal{D}'_{L^\infty_c}(t, E)$ *ou* $T \in \mathcal{D}'_{L^\infty_{p.p.}}(t, E)$, *alors pour tout* $p \geq 0$, *la dérivée* $\frac{d^p T}{dt^p}$ *appartient aussi à* $\mathcal{D}'_{L^\infty}(t, E)$ *ou à* $\mathcal{D}'_{L^\infty_c}(t, E)$ *ou à* $\mathcal{D}'_{L^\infty_{p.p.}}(t, E)$.

Que la dérivée de toute distribution bornée ou contenue dans un compact conserve les mêmes propriétés résulte immédiatement, si l'on observe que par dérivation tout ensemble borné de $\mathcal{D}_{L^1}$ reste borné. Pour le cas presque-périodique on raisonne ainsi :

Soit $T \in \mathcal{D}'_{L^\infty_{p.p.}}(t, E)$; donc, de toute suite $(h_n)_1^\infty$ on peut tirer une suite partielle $(h_{k_n})_1^\infty$ telle que la suite $(\tau_{h_{k_n}} T, \varphi)$ soit convergente uniformément pour φ parcourant un borné de $\mathcal{D}_{L^1}$. Mais

$$\left\langle \tau_{h_{k_n}} \frac{d^p}{dt^p} T, \varphi \right\rangle = \left\langle \frac{d^p}{dt^p} \tau_{h_{k_n}} T, \varphi \right\rangle = \langle \tau_{h_{k_n}} T, (-1)^p \varphi^{(p)} \rangle,$$

le résultat est déjà clair.

Maintenant on passe à un lemme réciproque du lemme II.2.1, et qui sera fondamental dans ce qui suit. Il s'agit du

Lemme II.2.3. — *Si* $E \in \mathcal{D}'(t, E)$ *a la propriété que pour toute fonction* $\alpha \in \mathcal{D}$, *la régularisée* $T \star \alpha = T_\alpha(s)$ *est une fonction :*

a. contenue dans un borné de E : *b. contenue dans un compact de* E : *c. presque-périodique de* R *à* E : *alors*

$$(a) \quad T \in \mathcal{D}'_{L^\infty_c}(t, E); \qquad (b) \quad T \in \mathcal{D}'_{L^\infty_c}(t, E); \qquad (c) \quad T \in \mathcal{D}'_{L^\infty_{p.p.}}(t, E).$$

Démonstration. — Comme pour les distributions scalaires on peut démontrer les faits essentiels suivants :

1° Sur tout compact de R, T est une distribution d'ordre fini (dépendant du compact). C'est-à-dire, pour tout compact K de R il existe un $m \geq 0$, $m = m(\mathrm{K})$, tel que si des $(\varphi_n) \in \mathcal{D}$ ont leur support contenu dans K et les $\varphi_n^{(p)}(t)$, $0 \leq p \leq m$, convergent uniformément vers zéro, alors $\langle \mathrm{T}, \varphi_n \rangle \to 0$.

2° Pour tout compact $\mathrm{K} \subset \mathrm{R}$, on désigne par $\mathcal{D}_{\mathrm{K}}$ l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables à support compact dans K, et avec $\mathcal{D}_{\mathrm{K}}^m$ la fermeture de $\mathcal{D}_{\mathrm{K}}$ dans la norme $p_m(\varphi) = \sup\limits_{\substack{0 \leq q \leq m \\ t \in \mathrm{K}}} |\varphi^{(q)}(t)|$.

Si maintenant $\mathcal{B}$ est un ensemble des distributions vectorielles $\{\mathrm{T}\} \subset \mathcal{D}'(t, \mathrm{E})$, ayant la propriété que pour chaque $\varphi \in \mathcal{D}$ il existe un $l(\varphi)$ tel que

$$\sup_{\mathrm{T} \in \mathcal{B}} \| \langle \mathrm{T}, \varphi \rangle \| \leq l(\varphi),$$

alors on peut démontrer que pour chaque compact $\mathrm{K} \subset \mathrm{R}$ il y a un $m \geq 0 = m(\mathrm{K})$ tel que tous les T de $\mathcal{B}$ appartiennent à $\mathcal{L}(\mathcal{D}_{\mathrm{K}}^m, \mathrm{E})$ et aussi, pour chaque $\varphi \in \mathcal{D}_{\mathrm{K}}^m$ il existe un $l'(\varphi)$ tel que

$$\sup_{\mathrm{T} \in \mathcal{B}} \| \langle \mathrm{T}, \varphi \rangle \|_{\mathrm{E}} \leq l'(\varphi).$$

Maintenant nous démontrons le lemme.

a. Soit donc $\mathrm{T} \in \mathcal{D}'(t, \mathrm{E})$ tel que pour chaque $\alpha \in \mathcal{D}$, la régularisée $\mathrm{T} \star \alpha$ appartienne à $\mathrm{B}^\infty(\mathrm{R}, \mathrm{E})$. Si B est l'ensemble défini plus haut (dans le lemme II.2.1) on a évidemment

$$\sup_{\varphi \in \mathrm{B}} \| \langle \mathrm{T} \star \alpha, \varphi \rangle \|_{\mathrm{E}} \leq l(\alpha).$$

Mais d'autre part, on a

$$\langle \mathrm{T} \star \alpha, \varphi \rangle = \left\langle \mathrm{T}_t, \int_{\mathrm{R}} \alpha(s)\varphi(t+s)\, ds \right\rangle = \int_{\mathrm{R}} \langle \mathrm{T}_t, \varphi(t+s) \rangle \alpha(s)\, ds.$$

Comme la fonction régularisée de T par α a été définie par

$$(\mathrm{T} \star \alpha)(s) = \langle \mathrm{T}_t, \alpha(s-t) \rangle,$$

il en résulte que $\langle \mathrm{T}_t, \varphi(t+s) \rangle$ est la régularisée de T par $\check{\varphi}$ $[\check{\varphi}(t) = \varphi(-t)]$. En conséquence on a obtenu que

$$\langle \mathrm{T} \star \alpha, \varphi \rangle = \langle \mathrm{T} \star \check{\varphi}, \alpha \rangle$$

et donc il résulte

$$\sup_{\varphi \in \mathrm{B}} \| \langle \mathrm{T} \star \check{\varphi}, \alpha \rangle \| \leq l(\alpha) \qquad \text{pour chaque } \alpha \in \mathcal{D}.$$

On peut donc appliquer 2° à l'ensemble $\{T \star \check{\varphi}\} \subset \mathcal{D}(t, E)$. Il résulte que pour un compact K_0 fixé contenant l'origine il existe un $m_0 \geqq 0$, tel que les $T \star \check{\varphi}$ appartiennent à $\mathcal{L}(\mathcal{D}^{m_0}_{K_0}, E)$ et de plus

$$\sup_{\varphi \in B} \| \langle T \star \check{\varphi}, \alpha \rangle \| \leqq l'(\alpha) \qquad \text{pour chaque } \alpha \in \mathcal{D}^{m_0}_{K_0}.$$

Nous avons défini plus haut seulement la régularisée de $T \in \mathcal{D}'(t, E)$ par une fonction $\alpha \in \mathcal{D}$. Pour une fonction $\alpha \in \mathcal{D}^m_K$ $(m \geqq 0,\ K \subset R)$, on peut définir le produit de composition $T \star \alpha$, par la même formule

$$\langle T \star \alpha, \varphi \rangle = \langle T, \psi \rangle; \qquad \psi(t) = \int_R \alpha(s)\, \varphi(s+t)\, ds$$

car ψ appartient à $\mathcal{D}$ si $\varphi \in \mathcal{D}$ et $\alpha \in \mathcal{D}^m_K$. (Mais on ne peut dire maintenant que $T \star \alpha$ est une fonction indéfiniment dérivable de R à E.) On vérifie aisément que, pour $\varphi \in \mathcal{D}$ et $\alpha \in \mathcal{D}^m_K$, on a aussi

$$\langle T \star \alpha, \varphi \rangle = \langle T \star \check{\varphi}, \alpha \rangle$$

[par définition $\langle T \star \check{\varphi}, \alpha \rangle$ pour $\alpha \in \mathcal{D}^m_K$ est donnée par la formule

$$\left.\int_R \langle T_t, \varphi(t+s) \rangle\, \alpha(s)\, ds \right].$$

On voit maintenant que

$$\sup_{\varphi \in B} \| \langle T \star \alpha, \varphi \rangle \| \leqq l'(\alpha) \qquad \text{pour} \quad \alpha \in \mathcal{D}^{m_0}_{K_0}.$$

Alors, pour toute $\alpha \in \mathcal{D}^{m_0}_{K_0}$, la distribution vectorielle $T \star \alpha \in \mathcal{D}'(t, E)$ est aussi une opération linéaire bornée de $L^1(R)$ à E, donc aussi de $\mathcal{D}_{L^1}$ à E, et appartient donc à $\mathcal{D}'_{L^\infty}(t, E)$.

On choisit maintenant la fonction $\alpha \in \mathcal{D}^{m_0}_{K_0}$ de la manière suivante :

Soit : $\mu(t)$ la solution de l'équation en distributions; $\mu^{(2k)}(t) = \delta$ la fonction de Dirac (facile à construire dans une seule dimension).

On a soin de choisir k suffisamment grand pour que la fonction $\mu(t)$ soit m_0 fois dérivable, à dérivées continues. Puis soit $\gamma(t)$ une fonction de $\mathcal{D}$, égale à 1 dans $(-\varepsilon, +\varepsilon)$ (ε petit) avec le support contenu dans K. Considérons maintenant la fonction $\alpha(t) = \mu(t)\gamma(t)$. Elle appartient évidemment à $\mathcal{D}^{m_0}_{K_0}$. On a les relations

$$(T \star \mu\gamma)^{(2k)} = T \star (\mu\gamma)^{(2k)} = T \star \zeta + T \star \delta = T \star \zeta + T,$$

où ζ est une fonction de $\mathcal{D}$ et $T \star \delta$ est défini par la formule

$$\langle T \star \delta, \varphi \rangle = \langle T_t \langle \delta_s, \varphi(t+s) \rangle \rangle = \langle T_t, \varphi(t) \rangle = \langle T, \varphi \rangle$$

(pour les détails concernant le produit de composition pour les distributions scalaires, on peut consulter [19]; pour les distributions vectorielles, [20]; d'autre part, les cas que nous considérons sont assez simples, et l'on pourrait refaire simplement quelques détails que j'avais omis, pour ne pas allonger outre mesure.)

On a donc obtenu la formule importante

$$T = (T \star \mu\gamma)^{(2k)} - T \star \zeta.$$

Comme on a démontré plus haut, vu que $\alpha = \mu\gamma \in \mathcal{D}_{K_0}^{m_0}$, on a $T \star \alpha \in \mathcal{D}'_{L^\infty}(t, E)$. D'après le lemme II.2.2 la dérivée $(T \star \alpha)^{(2k)}$ appartient aussi à $\mathcal{D}'_{L^\infty}(t, E)$. D'autre part, vu que $\zeta \in \mathcal{D}$, la régularisée $T \star \zeta$ appartient à $D'_{L^\infty}(t, E)$ d'après l'hypothèse du lemme. En conséquence $T \in \mathcal{D}'_{L^\infty}(t, E)$, c'est-à-dire ($a$) est démontré.

b. Soit maintenant $T \star \alpha \in B_C^\infty(R, E)$, pour chaque $\alpha \in \mathcal{D}$. En utilisant (a) on voit que $T \in \mathcal{D}'_{L^\infty}(t, E)$. Vu que $\mathcal{D}_{L^1}$ est un espace de Fréchet, donné par une infinité dénombrable de semi-normes, on peut voir aisément que toute distribution vectorielle bornée $T \in \mathcal{D}'_{L^\infty}(t, E)$ est d'ordre fini (dépendant de T) *sur tout* R. C'est-à-dire, il y a un $m = m(T)$ tel que si des $\varphi_n \in \mathcal{D}_{L^1}$, tendent vers zéro dans $L^1(R)$ avec toutes leurs dérivées *jusqu'à l'ordre m*, cela est suffisant pour que les $\langle T, \varphi_n \rangle$ tendent vers θ dans E.

Soit maintenant, pour tout compact $K \subset R$, une fonction $\alpha \in \mathcal{D}_K^m$. On va montrer que $T \star \alpha$ est aussi de $B^\infty(R, E)$. Vu que T est d'ordre m et $\alpha \in \mathcal{D}_{L^1}^m$, on voit que $T \star \alpha$ est une *fonction* de R à E, continue. Mais $T \star \alpha$ appartient aussi à $B^\infty(R, E)$. En effet, rappelons que B est l'ensemble des $\varphi \in \mathcal{D}$ telles que $\int_R |\varphi(s)|\,ds \leq 1$. L'opération de B à E définie par $\langle T \star \alpha, \varphi \rangle$ est bornée. Car, si $\varphi \in B$, on a

$$\langle T \star \alpha, \varphi \rangle = \langle T, \psi \rangle, \qquad \psi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(s)\,\varphi(t+s)\,ds = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(v-t)\,\varphi(v)\,dv.$$

Vu que T est une distribution bornée, d'ordre m, il sera suffisant de montrer que si φ parcourt B alors les ψ parcourent un ensemble borné de $\mathcal{D}_{L^1}^m$. Mais cela résulte de

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} |\psi^{(p)}(t)|\,dt \\
&\quad = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \alpha^{(p)}(v-t)\,\varphi(v)\,dv \right| dt \leq \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} |\alpha^{(p)}(v-t)|.|\varphi(v)|\,dv \\
&\quad = \int_{-\infty}^{\infty} dv \int_{-\infty}^{\infty} |\alpha^{(p)}(v-t)|.|\varphi(v)|\,dt \\
&\quad = \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(v)|\,dv \int_{-\infty}^{\infty} |\alpha^{(p)}(u)|\,du \leq \operatorname{mes}(K) \max_{u \in K} |\alpha^{(p)}(u)|.
\end{aligned}$$

Vu que B est dense dans la sphère unité de $L^1(R)$, on prolonge $T \star \alpha$ dans un opérateur borné de $L^1(R)$ à E. Puis, aussi comme dans la démonstration du lemme II.2.1 on voit que $T \star \alpha$ est une fonction de $B^\infty(R, E)$.

Enfin, on peut montrer que $T\star\alpha$ appartient aussi à $B^\infty_C(R, E)$. Pour cela, vu que $\alpha \in \mathcal{D}^m_K$, on trouve une suite $\alpha_n \in \mathcal{D}$, à support compact commun, $K_1 \supset K$, telle que les $\alpha_n^{(p)}(t)$ convergent vers $\alpha^{(p)}(t)$ pour $0 \leqq p \leqq m$, uniformément dans le support K_1 des $\alpha_n(t)$. Par l'hypothèse $T\star\alpha_n$ sont de $B^\infty_C(R, E)$. Alors, il sera suffisant de montrer que les fonctions $(T\star\alpha_n)(s)$ convergent vers $(T\star\alpha)(s)$, uniformément par rapport à $s \in R$. Cela est équivalent, comme on le voit aisément, avec la convergence des $\langle T\star\alpha_n, \varphi\rangle$ vers $\langle T\star\alpha, \varphi\rangle$ uniformément par rapport à φ de la boule unité de $L^1(R)$. Mais on a

$$\langle T\star\alpha_n, \varphi\rangle - \langle T\star\alpha, \varphi\rangle = \langle T, \psi_n\rangle; \qquad \psi_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} [\alpha_n(s) - \alpha(s)]\,\varphi(t+s)\,ds$$

et donc, vu que T est d'ordre m, il sera suffisant de montrer que les $\psi_n(t)$ convergent vers zéro dans $\mathcal{D}^m_{L^1}$, uniformément par rapport à $\varphi \in L^1(R)$ avec $\int_R |\varphi(s)|\,ds \leqq 1$; mais cela résulte des $(0 \leqq p \leqq m)$;

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_n^{(p)}(t)| &= \int_{-\infty}^{\infty} dt \left| \int_{-\infty}^{\infty} [\alpha_n^{(p)}(u-t) - \alpha^{(p)}(u-t)]\,\varphi(u)\,du \right| \\
&\leqq \int_{-\infty}^{\infty} du \left| \int_{-\infty}^{\infty} [\alpha_n^{(p)}(u-t) - \alpha^{(p)}(u-t)|.|\varphi(u)|\,dt \right. \\
&\leqq \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(u)|\,du \int_{-\infty}^{\infty} \alpha_n^{(p)}(u-t) - \alpha^{(p)}(u-t)\,|\,dt \\
&\leqq \int_{-\infty}^{\infty} |\alpha_n^{(p)}(s) - \alpha^{(p)}(s)|\,ds \leqq \operatorname{mes}(K_1) \max_{K_1} |\alpha_n^{(p)}(s) - \alpha^{(p)}(s)|.
\end{aligned}$$

On a donc, pour tout $\alpha \in \mathcal{D}^m_K$, K arbitraire, mais m fixé, que $T\star\alpha \in B^\infty_C(R, E)$. Si l'on choisit $\alpha = \mu(t)\gamma(t)$ comme dans le point précédent, avec m au lieu de m_0, on arrive au résultat cherché de la même manière.

c. Soit maintenant $T\star\alpha \in B^\infty_{p.p.}(R, E)$, pour chaque $\alpha \in \mathcal{D}$. On voit alors comme au point (*b*) que pour $\alpha \in \mathcal{D}^m_K$, $T\star\alpha$ est limite uniforme sur R de fonctions appartenant à $B^\infty_{p.p.}(R, E)$, $T\star\alpha_n$. Donc $T\star\alpha$ est p. p. Puis on choisit $\alpha = \mu\gamma$ et l'on a le résultat cherché, T étant la somme entre une dérivée d'ordre p au sens des distributions d'une fonction de $B^\infty_{p.p.}(R, E)$ et une fonction de $B^\infty_{p.p.}(R, E)$.

3. Ce paragraphe est consacré à l'analyse harmonique des distributions vectorielles p. p. On a besoin du

Lemme II.3.1. — *Si* $T \in \mathcal{D}'_{L^\infty_{p.p.}}(t, E)$ *elle est limite en* $\mathcal{D}'_{L^\infty}(t, E)$ *d'une suite de fonctions p. p. de* R *à* E.

Démonstration. — On a vu plus haut que $T \in \mathcal{D}'_{L^\infty_{p.p.}}(t, E)$ a pour conséquence $T = \vec{f}^{(k)} + \vec{g}$, $\vec{f}$ et $\vec{g}$ étant de $B^\infty_{p.p.}(R, E)$ et les dérivées au sens des distributions. Soit la « suite » régularisante $\varphi_\delta \in \mathcal{D}$ définie par

$$\varphi_\delta(s) = \begin{cases} C_\delta\, e^{-\frac{\delta^2}{\delta^2 - s^2}} & (|s| < \delta), \\ 0 & (|s| > \delta). \end{cases}$$

On a

$$(T\star\varphi_\delta)(s) = \langle T_t, \varphi_\delta(s-t)\rangle = \left\langle \vec{f}^{(k)}(t), \varphi_\delta(s-t)\right\rangle + \left\langle \vec{g}(t), \varphi_\delta(s-t)\right\rangle.$$

Mais

$$\left\langle \vec{g}(t), \varphi_\delta(s-t)\right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \vec{g}(t)\,\varphi_\delta(s-t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \vec{g}(s-u)\,\varphi_\delta(u)\,du.$$

On voit alors que $\vec{g}_\delta(s) = \left\langle \vec{g}(t), \varphi_\delta(s-t)\right\rangle$ est aussi de $B^\infty_{\text{p.p.}}(R, E)$, pour chaque $\delta > 0$. Puis on voit que $\vec{g}_\delta(s)$ tend vers $\vec{g}(s)$ avec $\delta \to 0$, uniformément pour $s \in R$, c'est-à-dire dans $\mathcal{D}'_{L^\infty}(t, E)$. Après on a

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{d^k}{at^k}\vec{f}(t), \varphi_\delta(s-t)\right\rangle &= \left\langle \frac{d^k}{dt^k}\vec{f}(t), \varphi_\delta(t-s)\right\rangle \\ &= (-1)^k \left\langle \vec{f}(t), \frac{d^k}{dt^k}\varphi_\delta(t-s)\right\rangle = \left\langle \vec{f}(t), \frac{d^k}{ds^s}\varphi_\delta(t-s)\right\rangle = \frac{d^k}{ds^k}\left\langle \vec{f}(t), \varphi_\delta(t-s)\right\rangle.\end{aligned}$$

Les $\left\langle \vec{f}(t), \varphi_\delta(t-s)\right\rangle$ sont de $B^\infty_{\text{p.p.}}(R, E)$ et tendent vers $\vec{f}(s)$ dans $\mathcal{D}'_{L^\infty}(t, E)$. Alors les $\frac{d^k}{ds^s}\left\langle \vec{f}(t), \varphi_\delta(t-s)\right\rangle$ tendent vers $\frac{d^k}{ds^s}\vec{f}$ dans $\mathcal{D}'_{L^\infty}(t, E)$ et

$$\frac{d^k}{ds^k}\left\langle \vec{f}(t), \varphi_\delta(t-s)\right\rangle$$

sont toujours des fonctions p. p. de R à E.

Le résultat est maintenant clair.

On passe maintenant à construire les séries de Fourier des distributions vectorielles p. p. en suivant toujours Schwartz [19], p. 63-64).

Soit $C_{\text{p.p.}}(R, E)$ l'espace des fonctions p. p. de R à E, muni de la topologie de convergence uniforme sur R, fortement dans E. On sait (comme dans le cas $E \equiv R$) que si $\vec{f}(t) \in C_{\text{p.p.}}(R, E)$ il existe la moyenne

$$\mathcal{M}(\vec{f}) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \vec{f}(t)\,dt$$

qui est une opération linéaire continue de $C_{\text{p.p.}}(R, E)$ à E. On peut prolonger l'opération $\mathcal{M}$ jusqu'à tout l'espace $\mathcal{D}'_{L^\infty_{\text{p.p.}}}(t, E)$ des distributions vectorielles presque-périodiques, et d'une telle manière qu'elle reste continue de $\mathcal{D}'_{L^\infty_{\text{p.p.}}}(t, E)$ avec la topologie de $\mathcal{D}'_{L^\infty}(t, E)$ à E. Pour cela on a besoin du

LEMME II.3.2. — *L'opération* $\mathcal{M}(\vec{f})$ *de* $C_{\text{p.p.}}(R, E)$ *à* E *est continue aussi sur* $C_{\text{p.p.}}(R, E)$ *muni de la topologie de l'espace* $\mathcal{D}'_{L^\infty}(t, E)$.

Démonstration. — On montre que si des $\vec{f}_n(t)$ de $C_{\text{p.p.}}(R, E)$ forment une suite convergente vers zéro dans $\mathcal{D}'_{L^\infty}(t, E)$, alors, pour chaque $\alpha \in \mathcal{D}$, la suite des régularisées

$$(\vec{f}_n\star\alpha)(x) = \left\langle \vec{f}_n(t), \alpha(x-t)\right\rangle$$

est convergente vers zéro uniformément par rapport à $x \in \mathrm{R}$. En effet, si l'on désigne par B la boule unité de $\mathrm{L}^1(\mathrm{R})$ alors, si φ parcourt B les

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(t)\, \varphi(x+t)\, dt$$

parcourent un ensemble borné dans $\mathcal{D}_{\mathrm{L}^1}$. Vu que

$$\left\langle \left(\vec{f}_n \star \alpha\right)(x),\, \varphi(x) \right\rangle = \left\langle \vec{f}_n,\, \psi \right\rangle,$$

il résulte que $\left\langle \left(\vec{f}_n \star \alpha\right)(x),\, \varphi(x) \right\rangle$ tend vers θ, uniformément par rapport à $\varphi \in \mathrm{B}$. On en déduit la convergence uniforme sur R de la suite $\left\langle \vec{f}_n(t),\, \alpha(x-t) \right\rangle$ de la manière habituelle, en considérant les fonctions de B de la forme

$$\varphi_{\xi,\eta}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\eta - \xi} & (\xi \leq x \leq \eta), \\ 0 & (x \notin [\xi, \eta]). \end{cases}$$

D'autre part, en calculant $\mathfrak{M}\left(\vec{f} \star \alpha\right)$, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\mathrm{T}} \int_{-\mathrm{T}}^{\mathrm{T}} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \vec{f}(t)\, \alpha(x-t \right] dx &= \frac{1}{2\mathrm{T}} \int_{-\mathrm{T}}^{\mathrm{T}} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \vec{f}(x-s)\, \alpha(s)\, ds \right] dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\alpha(s) \frac{1}{2\mathrm{T}} \int_{-\mathrm{T}}^{\mathrm{T}} \vec{f}(x-s)\, dx \right] ds. \end{aligned}$$

Mais on sait que si $\vec{f}(t) \in \mathrm{C}_{\text{p.p.}}(\mathrm{R}, \mathrm{E})$, alors la limite

$$\lim_{\mathrm{T} \to \infty} \frac{1}{2\mathrm{T}} \int_{-\mathrm{T}}^{\mathrm{T}} \vec{f}(x-s)\, dx$$

existe fortement, uniformément par rapport à $s \in \mathrm{R}$, et a pour valeur $\mathfrak{M}\left(\vec{f}\right)$.

On arrive donc au résultat

$$\mathfrak{M}\left(\vec{f} \star \alpha\right) = \mathfrak{M}\left(\vec{f}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(s)\, ds.$$

On choisit $\alpha(s) \in \mathcal{D}$ ainsi qu'on a $\int_{-\infty}^{\infty} \alpha(s)\, ds \neq 0$. Alors, si la suite $\vec{f}_n \in \mathrm{C}_{\text{p.p.}}(\mathrm{R}, \mathrm{E})$ tend vers θ dans $\mathcal{D}'_{\mathrm{L}^\infty}(t, \mathrm{E})$, la suite $\vec{f}_n \star \alpha$ tend vers θ uniformément sur R, donc $\mathfrak{M}\left(\vec{f}_n \star \alpha\right)$ tend vers θ, et ainsi $\mathfrak{M}\left(\vec{f}_n\right) \to \theta$. C. Q. F. D.

Observation. — Les deux lemmes qui précèdent donnent la possibilité évidente de prolonger par continuité l'opération $\mathfrak{M}$ de $\mathrm{C}_{\text{p.p.}}(\mathrm{R}, \mathrm{E})$ à $\mathcal{D}'_{\mathrm{L}^\infty_{\text{p.p.}}}(t, \mathrm{E})$.

LEMME II.3.3. — *Si* $\mathrm{T} \in \mathcal{D}'_{\mathrm{L}^\infty_{\text{p.p.}}}(t, \mathrm{E})$, $\varphi(t)$ *est indéfiniment dérivable, presque-périodique avec toutes ses dérivées* (4), *alors la distribution* $\varphi\mathrm{T}$ *appartient aussi à* $\mathcal{D}'_{\mathrm{L}^\infty_{\text{p.p.}}}(t, \mathrm{E})$.

Démonstration. — On voit aisément que la distribution φT, définie par la formule

$$\langle \varphi, T, \psi \rangle = \langle T, \varphi\psi \rangle \qquad \text{pour} \quad \psi \in \mathcal{D}_{L^1}$$

appartient à $\mathcal{D}'_{L^\infty}(t, E)$. Puis on a

$$\begin{aligned} \langle \tau_h(\varphi T), \psi \rangle &= \langle \varphi T, \tau_{-h}\psi \rangle = \langle T, \varphi\tau_{-h}\psi \rangle = \langle T, \tau_{-h}(\tau_h\varphi\psi) \rangle \\ &= \langle \tau_h T, (\tau_h\varphi)\psi \rangle = \langle \tau_h\varphi\tau_h T, \psi \rangle. \end{aligned}$$

Donc $\tau_h(\varphi T) = (\tau_h\varphi)\tau_h T$; maintenant on choisit une suite $(h_n)_1^\infty$ telle que la suite $(\tau_{h_n}T)_1^\infty$ soit convergente dans $\mathcal{D}'_{L^\infty}(t, E)$, et que la suite $(\tau_{h_n}\varphi^{(p)}(t))_1^\infty$ soit, pour chaque $p \geq 0$, convergente uniformément sur R. On obtient la suite $(h_n)_1^\infty$ cherchée en appliquant le procédé diagonal, tenant compte que $\varphi^{(p)}(t)$ est pour chaque $p \geq 0$, une fonction p. p. Maintenant, pour terminer, il suffit de prouver la convergence de la suite $(\tau_{h_n}\varphi)(\tau_{h_n}T)_1^\infty$ dans $\mathcal{D}'_{L^\infty}(t, E)$. Considérons pour cela un ensemble A borné dans $\mathcal{D}_{L^1}$ et soit $\psi \in A$. On a alors

$$\begin{aligned} &\langle (\tau_{h_n}\varphi)\tau_{h_n}T - (\tau_{h_m}\varphi)\tau_{h_m}T, \psi \rangle = \langle (\tau_{h_n}\varphi)[\tau_{h_n}T - \tau_{h_m}T], \psi \rangle \\ &\quad + \langle [\tau_{h_n}\varphi - \tau_{h_m}\varphi]\tau_{h_m}T, \psi \rangle = \langle \tau_{h_n}T - \tau_{h_m}T, (\tau_{h_n}\varphi)\psi \rangle \\ &\quad + \langle \tau_{h_m}T, [\tau_{h_n}\varphi - \tau_{h_m}\varphi]\psi \rangle. \end{aligned}$$

On voit que si ψ parcourt A, les $(\tau_{h_n}\varphi)\psi$ parcourent aussi un ensemble borné dans $\mathcal{D}_{L^1}$. Puis $[\tau_{h_n}\varphi - \tau_{h_m}\varphi]\psi$ est convergente vers zéro dans $\mathcal{D}_{L^1}$, uniformément pour $\psi \in A$. D'autre part $(\tau_{h_m}T)$ est un ensemble borné dans $\mathcal{D}'_{L^\infty}(t, E)$ donc équicontinu. Alors, le lemme est immédiat.

Observons que la fonction $e^{-i\lambda t}$, pour λ réel, appartient à $\mathcal{B}_{\text{p.p.}}$ (4). Alors, $e^{-i\lambda t}T$, pour $T \in \mathcal{D}'_{L^\infty_{\text{p.p.}}}(t, E)$ est aussi de $\mathcal{D}'_{L^\infty_{\text{p.p.}}}(t, E)$. Soit (lemme II.3.1 et II.3.2), $\vec{a}(T) = \mathfrak{M}[e^{-i\lambda t}T]$. Évidemment, $\vec{a}_\lambda(T)$ est une opération linéaire continue de $\mathcal{D}'_{L^\infty_{\text{p.p.}}}(t, (E)$ à E. On montre que $\vec{a}_\lambda(T) \neq \theta$, seulement pour un ensemble $\sigma(T)$ de valeurs qui est au plus dénombrable. Soit en effet (lemme II.3.1), une suite $\vec{f}_n(t)$ de fonctions p. p. de R à E, convergente vers T dans $\mathcal{D}'_{L^\infty}(t, E)$. Alors on a

$$\vec{a}_\lambda(T) = \lim \vec{a}_\lambda(\vec{f}_n);$$

soit σ_n le « spectre » de $\vec{f}_n$, $\sigma(\vec{f}_n)$. On sait (chap. I) qu'il est au plus dénombrable. Alors, si $\lambda \notin \mathfrak{S} = \bigcup_1^\infty \sigma_n$, on a $\vec{a}_\lambda(\vec{f}_n) = \theta$ pour chaque n, et $\vec{a}_\lambda(T) = \theta$. Mais $\mathfrak{S}$ est un ensemble au plus dénombrable. Donc, le $\sigma(T)$ est contenu dans un ensemble au plus dénombrable. C. Q. F. D.

LEMME II.3.4. — *Si* $T \in \mathcal{D}'_{L^\infty_{\text{p.p.}}}(t, E)$, *alors, pour chaque* $\alpha \in \mathcal{D}$, *on a* $\sigma(T \star \alpha) \subset \sigma(T)$.

(4) On dira que $\varphi \in \mathcal{B}_{\text{p.p.}}$.

Démonstration. — On voit sans difficulté que

$$e^{-i\lambda t}(\mathrm{T}\bigstar\alpha)=e^{-i\lambda t}\mathrm{T}\bigstar e^{-i\lambda t}\alpha.$$

D'autre part, on a déjà vu que

$$\mathfrak{M}(e^{-i\lambda t}\mathrm{T}\bigstar e^{-i\lambda t}\alpha)=\mathfrak{M}(e^{-i\lambda t}\mathrm{T})\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\lambda t}\alpha(t)\,dt$$

pour le cas où T est une *fonction* p. p. de R à E. On peut donc démontrer que cette relation est vraie même si $\mathrm{T}\in\mathcal{D}'_{\mathrm{L}^{\infty}_{\mathrm{p.p.}}}(t,\mathrm{E})$. On a donc

$$\vec{a}_\lambda(\mathrm{T}\bigstar\alpha)=\vec{a}_\lambda(\mathrm{T})\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\lambda t}\alpha(t)\,dt.$$

En conséquence, si $\vec{a}_\lambda(\mathrm{T})=\theta$, il résulte $\vec{a}_\lambda(\mathrm{T}\bigstar\alpha)=\theta$. C. Q. F. D.

CHAPITRE III.

Solutions fortes presque-périodiques de l'équation non homogène des ondes.

1. Dans ce chapitre on aura besoin des résultats obtenus dans notre travail antérieur [25] (*voir* aussi [21], [23] et [12]).

Quoiqu'on pourrait moderniser l'exposition des résultats déjà acquis, tant pour la partie « elliptique » que pour la partie « mixte » d'après [12] et [14], nous préférons garder essentiellement le procédé de [25] pour conserver l'unité des notations et définitions dans les problèmes spéciaux que nous traitons. Pour les notations préliminaires, *voir* l'Introduction.

L'opération L est définie sur l'ensemble M des fonctions complexes $\varphi(\mathrm{X})$ de $\mathrm{C}^2(\overline{\Omega})$ qui sont nulles sur $\mathrm{S}=\mathrm{Fr.}\,\Omega$. Sur cet ensemble de définition, l'opérateur $-\mathrm{L}$ est positivement défini et symétrique. On le prolonge d'après Friedrichs à $-\tilde{\mathrm{L}}$, autoadjoint, positivement défini sur $\mathrm{D}_{\tilde{\mathrm{L}}}$. On obtient l'espace $\mathrm{H}_{-\mathrm{L}}$ en complétant M dans la métrique.

$$[\varphi,\varphi]=(-\mathrm{L}\varphi,\varphi)=\int_{\Omega}\left\{\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(\mathrm{X})\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial x_j}+a(\mathrm{X})\,|\,\varphi^2\,|\right\}d\mathrm{X}.$$

On a vu que $\mathrm{D}_{\tilde{\mathrm{L}}}$ est contenu dans $\mathrm{H}_{-\mathrm{L}}$ et que $\mathrm{H}_{-\mathrm{L}}$ est contenu dans H^0; puis, si $\varphi\in\mathrm{D}_{\tilde{\mathrm{L}}}$, $\psi\in\mathrm{H}_{-\mathrm{L}}$, on a la relation

$$(-\tilde{\mathrm{L}}\varphi,\psi)=[\varphi,\psi],$$

où par (,) on dénote le produit scalaire dans H^0 et par [,] le produit scalaire dans H_{-L}.

On cherche des fonctions $u(X, t)$, définies sur $t \in R$, à valeurs dans $D_{\tilde{L}}$ pour lesquelles existent $\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{v}$ dans H_{-L}, $\frac{d\vec{v}}{dt} = \tilde{L}.\vec{u}$ dans H^0, c'est-à-dire des vecteurs $\vec{u}(t) = \{u(X, t), v(X, t)\}$ de R à $D_{\tilde{L}} \times H_{-L}$ vérifiant la relation

$$\frac{d\vec{u}(t)}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \tilde{L} & 0 \end{pmatrix} \vec{u}(t) = A\vec{u}(t),$$

le domaine de l'opérateur A, D_A étant défini par $D_A = D_{\tilde{L}} \times H_{-L}$, tandis que $A(D_A) \subset H_{-L} \times H^0 = \mathcal{H}$ et la dérivée $\frac{d\vec{u}(t)}{dt}$ étant forte dans $\mathcal{H}$. On a démontré, en utilisant le théorème de Hille-Yosida ([8] et [22], *voir* aussi [6]) l'existence de ces solutions. *Voir* par exemple [12], [23], [25].

Précisément, il existe un *groupe* $T_t \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ fortement continu pour $t \subset R$, ayant A comme générateur infinitésimal, tel que pour chaque $\vec{u}_0 \in D_A$, la fonction $\vec{u}(t) = T_t \vec{u}_0$ est justement la solution cherchée, et même l'unique solution avec $\vec{u}(0) = \vec{u}_0$ et $\vec{u}'(t)$ continue. Mais de plus, dans notre cas spécial avec Ω borné, on en déduit que T_t est un groupe fortement presque-périodique (c'est-à-dire $T_t \vec{u}_0$ est, pour chaque $\vec{u}_0$ fixé, une fonction p. p. de R à $\mathcal{H}$), et qu'il a la représentation suivante (*voir* [25], p. 379) :

Soit $(\lambda_i)_1^\infty$ la suite de valeurs propres de $\tilde{L}$, $\lambda_i < 0$, $i = 1, 2, \ldots$ et soit U_i la suite de fonctions propres correspondantes. Elle est complète dans $H_{-L}(\Omega)$ et dans $H^0(\Omega)$ (*voir* [15] et [14]). Maintenant si $u_0 = \left\{ \sum_1^\infty a_i U_i, \sum_1^\infty b_i U_i \right\}$ les deux suites étant convergentes respectivement dans H_{-L} et H^0, alors on a

$$T_t \vec{u}_0 = \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\sum_{i=1}^\infty a_i U_i \cos\sqrt{|\lambda_i|}\, t \\ \displaystyle\quad + \sum_{i=1}^\infty \frac{1}{\sqrt{|\lambda_i|}} b_i U_i \sin\sqrt{|\lambda_i|}\, t, \sum_{i=1}^\infty -\sqrt{|\lambda_i|}\, a_i U_i \sin\sqrt{|\lambda_i|}\, t + \sum_{i=1}^\infty b_i U_i \cos\sqrt{|\lambda_i|}\, t \end{array} \right\},$$

les deux suites étant convergentes respectivement dans H_{-L} et H^0, uniformément pour $t \in R$.

En partant de ce résultat essentiel que toutes les solutions de l'équation homogène des ondes $\frac{d\vec{u}(t)}{dt} = A\vec{u}(t)$ sont des fonctions presque-périodiques de R à $\mathcal{H}$, on peut naturellement considérer le cas de l'équation non homogène :

$$\frac{d\vec{u}(t)}{dt} = A\vec{u}(t) + \vec{f}(t), \tag{1}$$

$\vec{f}(t)$ étant de R à $\mathcal{H}$ et p. p. $\left[\text{précisément } \vec{f}(t) = \{\theta, \vec{f}_1(t)\}, \vec{f}_1(t) \text{ est p. p. de R à } H^0\right]$.

On peut alors se poser les questions suivantes :

1° Si toutes les solutions de (1) sont ou non p. p. de R à $\mathcal{H}$. Ici une réponse négative est facile à donner. En effet (*voir* par exemple [25], p. 381) si le « spectre » de $\vec{f}_1(t)$ est en résonance avec le $\pm\sqrt{|\text{spectre}|}$ de l'opérateur autoadjoint $\tilde{\text{L}}$, il existe des solutions qui ne sont même pas bornées pour $t \subset \text{R}$.

2° Quelle est la structure des solutions $\vec{u}(t)$ de (1) qui sont bornées dans $\mathcal{H}$? Nous allons donner une variante de démonstration pour le

Théorème III.1.1 (de Amerio). — *Toute solution $\vec{u}(t)$ de* (1) *qui a la trajectoire bornée de $\mathcal{H}$, est presque-périodique de* R *à $\mathcal{H}$.*

Démonstration. (*) — Comme nous considérons ici des solutions fortes, on suppose que $\vec{f}_1(t)$ à dérivée forte continue, une hypothèse qui sera éliminée dans le chapitre suivant où il sera question des solutions-distributions vectorielles.

Dans ces conditions, comme on sait [25], toute solution forte ayant la condition initiale $\vec{u}_0$ est donnée par la formule

$$\vec{u}(t) = \text{T}_t\vec{u}_0 + \int_0^t \text{T}(t-s)\vec{f}(s)\,ds.$$

Ici $\text{T}_t\vec{u}_0$ est p. p. de R à $\mathcal{H}$. Vu que $\vec{u}(t)$ est supposée bornée il résulte que l'intégrale

$$\vec{z}(t) = \int_0^t \text{T}(t-s)\vec{f}(s)\,ds = \text{T}(t)\int_0^t \text{T}(-s)\vec{f}(s)\,ds$$

est fonction bornée de R à $\mathcal{H}$. Alors l'intégrale $\int_0^t \text{T}(-s)\vec{f}(s)\,ds = \text{T}(-t)\vec{z}(t)$ est aussi bornée de R à $\mathcal{H}$, vu que $\|\text{T}(t)\| \leqq 1$, $t \in \text{R}$. Mais on sait que $\text{T}(-s)\vec{f}(s)$ est presque-périodique de R à $\mathcal{H}$, vu que $\text{T}(t)$ est fortement presque-périodique et $\vec{f}(t)$ est presque-périodique (*voir* [24]) (**). En appliquant le théorème

(*) Autre démonstration, dans Amerio [23].

(**) Une autre simple démonstration de ce fait s'obtient en aproximant la fonction p. p., $\vec{f}(t)$ par des polynomes de Bochner-Fejer.

vectoriel de Bohr (chap. I) il résulte que l'intégrale bornée $\int_0^t \mathrm{T}(-s)\vec{f}(s)\,ds$ est p. p. de R à $\mathcal{H}$. Alors

$$\vec{z}(t) = \mathrm{T}(t)\int_0^t \mathrm{T}(-s)\vec{f}(s)\,ds = \int_0^t \mathrm{T}(t-s)\vec{f}(s)\,ds$$

est p. p. de R à $\mathcal{H}$. C. Q. F. D.

3° Peut-on trouver des conditions effectives sur $\vec{f}(t)$ presque-périodiques pour que toutes les solutions $\vec{u}(t)$ de (1) soient presque-périodiques? (ou pour l'existence au moins d'une solution p. p., c'est la même chose). C'est à Bucarest, en septembre 1959, que J.-L. Lions m'a attiré l'attention sur cette question. La réponse est affirmative et sera donnée dans le paragraphe qui suit.

2. On commence avec une

DÉFINITION. — *Deux ensembles de nombres réels ou complexes*, Σ_1, Σ_2 *sont dits en résonance approximative, si l'on trouve des nombres dans* $\Sigma_i (i=1, 2)$ *appartenant à l'adhérence de* $\Sigma_j (j=2, 1)$.

Considérons maintenant une fonction $f(\mathrm{X}, t)$ de R à H^0, presque-périodique, à dérivée forte continue de R à H^0. Soit le développement de Fourier :

$$f(\mathrm{X}, t) \sim \sum_1^\infty \mathrm{A}_n(\mathrm{X})\, e^{i\Lambda_n t} \qquad [(\Lambda_n)_1^\infty \equiv \sigma f(\mathrm{X}, t)].$$

Alors la fonction $\vec{f}(t)$ de R à $\mathcal{H}$, donnée par $\vec{f}(t) = \{0, f(\mathrm{X}, t)\}$ est aussi presque-périodique et l'on a encore

$$\vec{f}(t) \sim \sum_1^\infty \vec{\mathrm{B}}_n e^{i\Lambda_n t}, \qquad \vec{\mathrm{B}}_n = \{0, \vec{\mathrm{A}}_n\}.$$

Si maintenant $(\lambda_i)_1^\infty$ est l'ensemble des valeurs propres de $\tilde{\mathrm{L}}$ ayant $-\infty$ comme unique point-limite, on désigne par Σ_1 l'ensemble des $\{\pm\sqrt{|\lambda_i|}\}_1^\infty$ et par Σ_2 le « spectre » de $\vec{f}(t)$ formé des nombres $(\Lambda_n)_1^\infty$. Observons que, pour éviter la résonance approximative des Σ_1 et Σ_2 il suffit que Σ_1 ne contienne pas des points qui sont adhérents à Σ_2, l'autre condition, dans ce cas particulier, est automatiquement remplie.

Nous sommes maintenant en mesure de prouver le

THÉORÈME III.2.1. — *Soit* $f(\mathrm{X}, t)$, $t \in \mathrm{R}$, $\mathrm{X} \in \Omega$, *et, comme fonction de* R *à* H^0, *est à dérivée forte continue, presque-périodique, et son « spectre »* $\sigma(f) \equiv \Sigma_2$ *n'est pas en résonance approximative avec l'ensemble* Σ_1.

Alors, si $u(\mathrm{X}, t)$ *de* R *à* $\mathrm{D}_{\tilde{\mathrm{L}}}$ *vérifie* $\frac{d\vec{u}(t)}{dt} = \vec{v}(t)$ *dans* $\mathrm{H}_{-\mathrm{L}}$, $\frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \tilde{\mathrm{L}}\vec{u}(t) + \vec{f}(t)$, *dans* H^0, *il résulte que* $\vec{u}(t)$ *est* p. p. *de* R *à* $\mathrm{H}_{-\mathrm{L}}$ *et* $\vec{v}(t)$ *est* p. p. *de* R *à* H^0.

Démonstration. — Comme on a déjà vu dans [25] et dans le paragraphe 1, on aura nécessairement

$$(\vec{u}(t), \vec{v}(t)) = \mathrm{T}_t(\vec{u}(0), \vec{v}(0)) + \int_0^t \mathrm{T}(t-s)\vec{f}(s)\,ds,$$

$$\vec{f}(s) = (0, f(\mathrm{X}, s)), \qquad \vec{u}(t) \equiv u(\mathrm{X}, t), \qquad \vec{v}(t) \equiv v(\mathrm{X}, t).$$

Comme plus haut, il sera suffisant de montrer que la fonction de R à $\mathcal{H}$,

$$\vec{y}(t) = \int_0^t \mathrm{T}(t-s)\vec{f}(s)\,ds = \mathrm{T}(t)\int_0^t \mathrm{T}(-s)\vec{f}(s)\,ds$$

est presque-périodique. Pour cela, on va montrer que la fonction $\vec{z}(s) = \mathrm{T}(-s)\vec{f}(s)$ de R à $\mathcal{H}$, est une fonction presque-périodique, dont le « spectre » $(\mu_n)_1^\infty$ n'est pas en résonance approximative avec $\{0\}$ (c'est-à-dire qu'il y a un $\alpha > 0$, tel que $|\mu_n| > \alpha$, $n = 1, 2, \ldots$). En effet, nous savons déjà que $\vec{f}(s) \sim \sum_1^\infty \vec{\mathrm{B}}_n e^{i\Lambda_n s}$, $(\Lambda_n)_1^\infty$ étant le « spectre » de $f(\mathrm{X}, t)$. En appliquant le théorème d'approximation de Bochner-Fejer (chap. I), on obtient une suite de polynomes

$$\vec{\mathrm{P}}^{(m)}(s) = \sum_{n=1}^{\mathrm{N}(m)} r_n^m \vec{\mathrm{B}}_n e^{i\Lambda_n s}$$

qui est convergente vers $\vec{f}(s)$ uniformément sur $s \in \mathrm{R}$. Dans ce cas, tenant compte de la relation $\|\mathrm{T}(t)\| \leqq 1$, on arrive à la conclusion que les fonctions $\mathrm{T}(-s)\vec{\mathrm{P}}^{(m)}(s)$ convergent vers $\vec{z}(s)$, uniformément par rapport à $s \in \mathrm{R}$. Mais on a les relations

$$\mathrm{T}(-s)\vec{\mathrm{P}}^{(m)}(s) = \sum_{n=1}^{\mathrm{N}(m)} r_n^m e^{i\Lambda_n s}\mathrm{T}(-s)\vec{\mathrm{B}}_n.$$

Rappelons que les $\vec{\mathrm{B}}_n$ sont définis par $\vec{\mathrm{B}}_n = \{0, \vec{\mathrm{A}}_n\}$. En utilisant la représentation du groupe $\mathrm{T}(s)$ donnée dans le paragraphe 1, on a, si

$$\vec{\mathrm{A}}_n = \sum_1^\infty a_n^i \mathrm{U}_i \qquad \text{(convergente dans } \mathrm{H}^0\text{)},$$

la formule suivante :

$$\mathrm{T}(-s)\vec{\mathrm{B}}_n = \left\{-\sum_1^\infty \frac{1}{\sqrt{|\lambda_i|}} a_n^i \mathrm{U}_i(\mathrm{X}) \sin\sqrt{|\lambda_i|}\,s,\ \sum_{i=1}^\infty a_n^i \mathrm{U}_i(\mathrm{X}) \cos\sqrt{|\lambda_i|}\,s\right\},$$

les deux séries étant convergentes respectivement dans H_{-L} et H^0, et uniformément pour $s \in R$. En conséquence, on obtient

$$
\begin{aligned}
T(-s)\vec{P}^{(m)}(s) &= \sum_{n=1}^{N(m)} r_n^m e^{i\Lambda_n s} T(-s) B_n \\
&= \left\{ \left(\sum_{n=1}^{N(m)} r_n^m e^{i\Lambda_n s} \right) \left(-\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{|\lambda_i|}} a_n^i U_i(X) \sin\sqrt{|\lambda_i|}\, s \right), \left(\sum_{n=1}^{N(m)} r_n^m e^{i\Lambda_n s} \right) \right. \\
&\qquad \left. \times \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_n^i U_i(X) \cos\sqrt{|\lambda_i|}\, s \right) \right\} \\
&= \left\{ \left(\sum_{n=1}^{N(m)} r_n^m e^{i\Lambda_n s} \right) \left(\sum_{i=1}^{\infty} \vec{D}_n^i \sin\sqrt{|\lambda_i|}\, s \right), \left(\sum_{n=1}^{N(m)} r_n^m e^{i\Lambda_n s} \right) \left(\sum_{i=1}^{\infty} \vec{E}_n^i \cos\sqrt{|\lambda_i|}\, s \right) \right\} \\
&= \left\{ \sum_{i=1,\, n=1}^{\infty,\, N(m)} \vec{D}_n^i r_n^m e^{i\Lambda_n s} \sin\sqrt{|\lambda_i|}\, s, \sum_{i=1,\, n=1}^{\infty,\, N(m)} r_n^m \vec{E}_n^i e^{i\Lambda_n s} \cos\sqrt{|\lambda_i|}\, s \right\} \\
&= \left\{ \sum_{i,n} \frac{r_n^m}{2i} \vec{D}_n^i e^{i\Lambda_n s}\left[e^{i\sqrt{|\lambda_i|}\, s} - e^{-i\sqrt{|\lambda_i|}\, s} \right], \sum_{i,n} \frac{r_n^m}{2} \vec{E}_n^i e^{i\Lambda_n s}\left[e^{i\sqrt{|\lambda_i|}\, s} + e^{-i\sqrt{|\lambda_i|}\, s} \right] \right\} \\
&= \left\{ \sum_{p=1}^{\infty} \vec{F}_p^{(m)} e^{i\mu_p s}, \sum_{p=1}^{\infty} \vec{G}_p^{(m)} e^{i\mu_p s} \right\},
\end{aligned}
$$

les deux dernières séries étant convergentes respectivement dans H_{-L} et H_0 uniformément pour $s \in R$, et les μ_p étant des nombres de la forme

$$\Lambda_n \pm \sqrt{|\lambda_i|}.$$

Vu que les ensembles Σ_1 et Σ_2 ne sont pas en résonance approximative il existe un nombre $\alpha > 0$, tel que $|\mu_p| > \alpha > 0$, pour tout p, le nombre α ne dépendant pas de m. Dans ce cas la fonction $T(-s)\vec{f}(s)$ est la limite uniforme sur R d'une suite de fonctions $\vec{f}_m(t)$ de R à $\mathcal{H}$, presque-périodiques et telles que $\mathfrak{M}_s\left[\vec{f}_m(s)e^{-i\lambda s}\right] = 0$, pour $|\lambda| < \alpha$, quel que soit m. En conséquence $\vec{z}(s) = T(-s)\vec{f}(s)$ est p. p. de R à $\mathcal{H}$ et de plus on a $\mathfrak{M}_s\left[\vec{z}(s)e^{-i\lambda s}\right] = 0$ si $|\lambda| < \alpha$. Donc, $\vec{z}(s)$ vérifie le théorème vectoriel de Favard (chap. I) et il résulte que la fonction $\int_0^t T(-s)\vec{f}(s)\,ds$ est aussi p. p. de R à $\mathcal{H}$. Alors il résulte aussi que $T(t)\int_0^t T(-s)\vec{f}(s)\,ds$ est aussi presque-périodique de R à $\mathcal{H}$; cela peut être démontré comme on a fait plus haut pour $T(-s)\vec{f}(s)$, ou l'on peut utiliser le lemme 2.3 de [24]. En conséquence, la fonction $\vec{y}(t)$ de R à $\mathcal{H}$ est presque-périodique, et le théorème est démontré.

Observation. — Nous avons vu (dans [25]) que si le « spectre » de $\vec{f}(t)$ est en résonance effective avec les $\pm\sqrt{|\lambda_i|}$, il y a des solutions de l'équation non homogène qui ne sont pas même bornées. Nous allons voir que si l'on a la résonance *approximative* entre le « spectre » de $\vec{f}(t)$ et les $\pm\sqrt{|\lambda_i|}$, l'apparition des solutions non presque-périodiques est encore possible.

Considérons pour cela la fonction scalaire

$$\varphi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{it\left(\frac{1}{n^2}-\pi\right)}.$$

Elle est presque-périodique. Montrons que l'intégrale $\int_0^t \sin\pi(t-s)\,\varphi(s)\,ds$ n'est pas même bornée pour $s \in \mathrm{R}$. En effet, on a la relation

$$\int_0^t \sin\pi(t-s)\,\varphi(s)\,ds = \frac{1}{2i} e^{i\pi t} \int_0^t e^{-i\pi s}\varphi(s)\,ds + \frac{1}{2i} e^{-i\pi t} \int_0^t e^{i\pi s}\varphi(s)\,ds.$$

Il est facile de voir, en appliquant le théorème de Favard pour $\mathrm{E} \equiv \mathrm{R}$, que l'intégrale $\int_0^t e^{-i\pi s}\varphi(s)\,ds$ est bornée et presque-périodique. Dans ce cas la fonction $e^{i\pi t}\int_0^t e^{-i\pi s}\varphi(s)\,ds$ est aussi p. p. et bornée. Maintenant, si l'on suppose par l'absurde que l'intégrale $\int_0^t \sin\pi(t-s)\,\varphi(s)\,ds$ est bornée et p. p., il en résulterait que la fonction $e^{-i\pi t}\int_0^t e^{i\pi s}\varphi(s)\,ds$ est bornée et p. p. et donc aussi que l'intégrale $\int_0^t e^{i\pi s}\varphi(s)\,ds = \int_0^t \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{\frac{is}{n^2}}\,ds$ est bornée et p. p., ce qui n'est pas vrai (*voir* [9], p. 44) (5).

Considérons maintenant l'équation

$$u_{tt}(x, t) = u_{xx}(x, t) + \pi \sin\pi x\,\varphi(t),$$

avec les conditions initiales et aux limites

$$u(0, t) = u(1, t) = u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0 \qquad \text{pour} \quad 0 \leqq x \leqq 1, \qquad t \in \mathrm{R}.$$

(5) Car il résulterait

$$\int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \exp\left(\frac{is}{n^2}\right) ds \sim \mathrm{C} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{i} \exp\left(\frac{it}{n^2}\right),$$

ce qui contredit le fait que, d'après l'inégalité de Bessel, les coefficients de Fourier d'une fonction p. p. tendent vers zéro.

On peut voir sans peine que la fonction

$$u_0(x, t) = \int_0^t \sin \pi x \sin \pi (t-s)\, \varphi(s)\, ds$$

est une solution vérifiant les conditions imposées. Considérée comme fonction de R à $H^1[0, 1]$ elle n'est pas bornée ni p. p.

Les valeurs propres de $\frac{d^2}{dx^2}$ sont ici $-n^2\pi^2$, $n = 1, 2, \ldots$. L'ensemble Σ_1 est donc formé des nombres $(\pm n\pi)_1^\infty$ tandis que Σ_2 est formé des nombres $\Lambda_n = \frac{1}{n^2} - \pi$. Il n'y a pas de résonance proprement dite, mais il y a la résonance approximative, vu que $-\pi$ est point-limite des Λ_n.

On voit aussi qu'aucune solution $v(x, t)$ de l'équation considérée ici ne peut être presque-périodique. Dans le cas contraire la fonction $v(x, t) - u_0(x, t)$ serait solution de l'équation homogène et donc p. p. Il en résulterait que $u_0(x, t)$ est p. p. absurde.

Il ne faut pas croire toutefois que le manque de résonance approximative est condition nécessaire pour l'existence des solutions p. p. de l'équation des ondes non homogène. En voilà un exemple :

Considérons la fonction

$$\varphi_1(t) = \sum_1^\infty \frac{1}{n^4} e^{it\left(\frac{1}{n^2} - \pi\right)},$$

elle est p. p. L'intégrale $\int_0^t \sin \pi (t-s)\, \varphi_1(s)\, ds$ est aussi p. p., ce qu'on voit aisément vu que l'intégrale $\int_0^t \sum_1^\infty \frac{1}{n^4} e^{\frac{it}{n^2}}\, dt$ est p. p. Dans ce cas la fonction

$$u_0(x, t) = \int_0^t \sin \pi x \sin \pi (t-s)\, \varphi_1(s)\, ds$$

est solution de l'équation considérée ci-dessus, et aussi p. p. de R à $H^1(0, 1)$, quoique les $\Lambda_n = \frac{1}{n^2} - \pi$ sont en résonance approximative avec $-\pi$.

CHAPITRE IV.

Solutions-distributions presque-périodiques de l'équation des ondes homogène ou non homogène.

1. L'équation homogène. — Considérons l'équation

$$\frac{d^2}{dt^2} \vec{u}(t) = \tilde{L}\, \vec{u}(t). \tag{1}$$

Les solutions fortes de cette équation sont des fonctions $u(X, t)$ de R à $D_{\tilde{L}}$, vérifiant $\frac{d\vec{u}(t)}{dt} = \vec{v}(t)$ dans H_{-L} et $\frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \tilde{L}\, \vec{u}(t)$ dans H^0.

Pour considérer des solutions-distributions vectorielles de cette équation il faut introduire sur $D_{\tilde{L}}$ une topologie, dans laquelle $D_{\tilde{L}}$ soit un espace de Banach complet. Pour cela on n'a qu'à poser, pour $\varphi \in D_{\tilde{L}}$:

$$\|\varphi\|^2_{D_{\tilde{L}}} = \|\varphi\|^2_{H_{-L}} + \|\tilde{L}\varphi\|^2_{H^0}.$$

Vu que $\tilde{L}$ est auto adjoint, donc fermé, dans cette norme $D_{\tilde{L}}$ est un espace de Hilbert complet et $\tilde{L} \in \mathcal{L}(D_{\tilde{L}}, H^0)$. Nous considérons des distributions vectorielles $T \in \mathcal{D}'(t, D_{\tilde{L}})$ vérifiant l'équation

$$\frac{d^2}{dt^2} T = \tilde{L}\, T,$$

où vu que $\tilde{L} \in \mathcal{L}(\mathcal{D}_{\tilde{L}}, H^0)$ il résulte $\tilde{L}\, T \in \mathcal{D}'(t, H^0)$.

Une telle distribution T sera dite solution-distribution vectorielle de l'équation des ondes non homogène ([1]). Notre premier résultat sera le

THÉORÈME IV 1.1. — *Toute distribution vectorielle* T *solution de l'équation des ondes homogène appartient à* $\mathcal{D}'_{L^\infty_{\text{p.p.}}}(t, H_{-L})$, *tandis que* $\frac{dT}{dt}$ *appartient à* $\mathcal{D}'_{L^\infty_{\text{p.p.}}}(t, H^0)$.

Observation. — Comparer cela avec la Note III de Sobolev [21].

Démonstration. — Soit une fonction $\alpha \in \mathcal{D}$ arbitraire. La régularisée $T \star \alpha$ appartient aussi à $D_{\tilde{L}}$ et vérifie l'équation

$$\frac{d}{dt}(T \star \alpha) = \frac{dT}{dt} \star \alpha = \vec{v}_\alpha(t),$$

où la dérivée $\frac{d}{dt}(T \star \alpha)$ est forte dans $D_{\tilde{L}}$, donc aussi forte dans H_{-L}. Puis, on a aussi

$$\frac{d\vec{v}_\alpha(t)}{dt} = \frac{d^2 T}{dt^2} \star \alpha = (\tilde{L}\, T \star \alpha) = \tilde{L}(T \star \alpha)$$

ou

$$\frac{d^2}{dt^2}(T \star \alpha) = \tilde{L}(T \star \alpha),$$

les dérivées étant fortes dans $D_{\tilde{L}}$, donc aussi dans H_{-L} et H^0. En conséquence $T \star \alpha$ est solution forte de l'équation des ondes homogène. Alors on sait (*voir* par exemple [25]) que $T \star \alpha$ est p. p. de R à H_{-L}. D'autre part $T \in \mathcal{D}'(t, D_{\tilde{L}})$ a pour conséquence facile, $T \in \mathcal{D}'(t, H_{-L})$. D'après le lemme II.2.3 (*c*), il résulte que $T \in \mathcal{D}'_{L^\infty_{\text{p.p.}}}(t, H_{-L})$. Maintenant, on a $\frac{dT}{dt} \star \alpha = \frac{d}{dt}(T \star \alpha)$. On sait, toujours d'après [25] que $\vec{v}_\alpha(t) = \frac{d}{dt}(T \star \alpha)$

est p. p. de R à H^0. D'autre part $\frac{dT}{dt} \in \mathcal{D}'(t, H_{-L})$ donc aussi $\frac{dT}{dt} \in \mathcal{D}'(t, H^0)$. En utilisant le même lemme, on obtient $\frac{dT}{dt} \in \mathcal{D}'_{L^\infty_{p.p.}}(t, H)$, C. Q. F. D.

Observation 1. — Le problème concernant l'existence des solutions-distributions vectorielles de l'équation (1) du type envisagé, n'est pas difficile, tenant compte que des solutions fortes ont été déjà construites. Précisément : Soit $\vec{u}(t)$ la solution forte de $\frac{d^2\vec{u}(t)}{dt^2} = \tilde{L}\vec{u}(t)$, construite dans [25]. On voit aisément qu'elle est continue de R à H^0 et aussi que $\frac{d^2\vec{u}(t)}{dt^2} = \tilde{L}\vec{u}(t)$ est continue de R à H^0, Dans ce cas il résulte que $\vec{u}(t)$ est continue de R à $D_{\tilde{L}}$, et en conséquence on peut définir la distribution vectorielle $T \in \mathcal{D}'(t, D_{\tilde{L}})$, pour chaque $\varphi \in \mathcal{D}$ par l'intégrale forte dans $D_{\tilde{L}}$:

$$\langle T, \varphi \rangle = (D_{\tilde{L}}) \int_{-\infty}^{\infty} \vec{u}(t)\varphi(t)\, dt.$$

Mais cette distribution vectorielle vérifie l'équation $\frac{d^2T}{dt^2} = \tilde{L}T$, c'est-à-dire pour chaque $\varphi \in \mathcal{D}$,

$$\langle T, \varphi'' \rangle = \tilde{L}\langle T, \varphi \rangle.$$

En effet, on a

$$\langle T, \varphi'' \rangle = (D_{\tilde{L}}) \int_{-\infty}^{\infty} \vec{u}(t)\varphi''(t)\, dt = (H_L) \int_{-\infty}^{\infty} -\frac{d\vec{u}(t)}{dt}\varphi'(t)\, dt$$

vu que $\frac{d\vec{u}(t)}{dt}$ est continue de R à H_{-L}. Après, on a aussi

$$(H_{-L}) \int_{-\infty}^{\infty} -\frac{d\vec{u}(t)}{dt}\varphi'(t)\, dt = (H^0) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2\vec{u}(t)}{dt^2}\varphi(t)\, dt$$

vu que $\frac{d^2\vec{u}(t)}{dt^2}$ est continue de R à H^0. On a donc

$$\begin{aligned}\langle T, \varphi'' \rangle &= (H^0) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2\vec{u}(t)}{dt^2}\varphi(t)\, dt = (H^0) \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{L}\vec{u}(t)\varphi(t)\, dt \\ &= \tilde{L}(H^0) \int_{-\infty}^{\infty} \vec{u}(t)\varphi(t)\, dt = \tilde{L}(D_{\tilde{L}}) \int_{-\infty}^{\infty} \vec{u}(t)\varphi(t)\, dt\end{aligned}$$

comme on voit aisément vu que $\tilde{L}$ est fermé. En conséquence

$$\left\langle \frac{d^2T}{dt^2}, \varphi \right\rangle = \langle T, \varphi'' \rangle = \tilde{L}\langle T, \varphi \rangle = \langle \tilde{L}T, \varphi \rangle, \qquad \varphi \in \mathcal{D},$$

C. Q. F. D.

Observation 2. — Nous savons que toute solution forte de l'équation homogène est donnée par la série de Fourier :

$$\vec{u}(t) = \sum_1^\infty a_i U_i \cos\sqrt{|\lambda_i|}\, t + \sum_1^\infty \frac{1}{\sqrt{|\lambda_i|}} b_i U_i \sin\sqrt{|\lambda_i|}\, t,$$

la série étant convergente dans H_{-L} fort, uniformément pour $t \in R$. Alors $\vec{u}(t) \in \mathcal{D}'_{L^\infty_{p.p.}}(t, H_{-L})$. En dérivant cette égalité p fois, $p \geqq 0$ quelconque, on obtient une distribution de $\mathcal{D}'_{L^\infty_{p.p.}}(t, H_{-L})$, donnée par la formule

$$\vec{u}^{(p)}(t) = \sum_1^\infty a_i U_i (\sqrt{|\lambda_i|})^p \cos\left(\sqrt{|\lambda_i|}\, t + \frac{p\pi}{2}\right)$$
$$+ \sum_1^\infty b_i U_i (\sqrt{|\lambda_i|})^{p-1} \sin\left(\sqrt{|\lambda_i|}\, t + \frac{p\pi}{2}\right).$$

Cette distribution est aussi solution de l'équation des ondes. En effet

$$\left\langle \frac{d^2}{dt^2} \frac{d^p}{dt^p} \vec{u}(t), \varphi(t) \right\rangle = \left\langle \frac{d^p}{dt^p} \frac{d^2 \vec{u}(t)}{dt^2}, \varphi \right\rangle$$
$$= \left\langle \frac{d^2 \vec{u}(t)}{dt^2}, (-1)^p \varphi^{(p)}(t) \right\rangle = \langle \tilde{L}\, \vec{u}(t), (-1)^p \varphi^{(p)}(t) \rangle$$
$$= \tilde{L} \langle \vec{u}(t), (-1)^p \varphi^{(p)}(t) \rangle = \tilde{L} \left\langle \frac{d^p \vec{u}}{dt^p}, \varphi \right\rangle = \left\langle \tilde{L} \frac{d^p \vec{u}(t)}{dt^p}, \varphi \right\rangle.$$

Pour p assez grand ce n'est plus une distribution donnée par une fonction.

2. L'ÉQUATION NON HOMOGÈNE. — On généralise le théorème de Amerio [2] (*voir* aussi le chapitre III, th. III.1.1), au cas des solutions-distributions vectorielles. Précisément on a le

THÉORÈME IV.2.1. — *Soit* $U \in \mathcal{D}'_{L^\infty_{p.p.}}(t, H^0)$ *et* $T \in \mathcal{D}'(t, D_{\tilde{L}})$, *vérifiant l'équation* $\frac{d^2 T}{dt^2} = \tilde{L}\, T + U$. *Alors, si* $T \in \mathcal{D}'_{L^\infty}(t, H_{-L})$ *et* $\frac{dT}{dt} \in \mathcal{D}'_{L^\infty}(t, H^0)$, *on a aussi* $T \in \mathcal{D}'_{L^\infty_{p.p.}}(t, H_{-L})$ *et* $\frac{dT}{dt} \in \mathcal{D}'_{L^\infty_{p.p.}}(t, H^0)$.

Cela veut dire que toute distribution bornée, qui est solution de l'équation des ondes non homogène à partie droite distribution p. p., est aussi une distribution p. p.

Démonstration. — Soit $\alpha \in \mathcal{D}$ quelconque. La distribution $T \star \alpha$, vérifie, comme on voit sans peine, l'équation

$$\frac{d^2}{dt^2}(T \star \alpha) = \tilde{L}(T \star \alpha) + U \star \alpha.$$

Mais on sait (lemme II.2.1) que $U \star \alpha$ est fonction indéfiniment dérivable presque-périodique de R à H^0. Du même lemme, vu que $T \in \mathcal{D}'_{L^\infty}(t, H_{-L})$, il résulte que $T \star \alpha$ est une fonction bornée de R à H_{-L}. En appliquant le théorème de Amerio, il résulte que pour chaque $\alpha \in \mathcal{D}$, $T \star \alpha$ est p. p. de R à H_{-L}. D'après le lemme II.2.3 il résulte que $T \in \mathcal{D}'_{L^\infty_{p.p.}}(t, H_{-L})$. En ce qui concerne la dérivée $\frac{dT}{dt}$, on a $\frac{dT}{dt} \star \alpha = \frac{d}{dt}(T \star \alpha)$ qui est aussi (th. III.1.1), presque-périodique de R à H^0. Vu que $\frac{dT}{dt} \in \mathcal{D}'(t, D_{\tilde{L}})$ on a aussi $\frac{dT}{dt} \in \mathcal{D}'(t, H^0)$; alors, le lemme II.2.3, donne aussi que $\frac{dT}{dt} \in \mathcal{D}'_{L^\infty_{p.p.}}(t, H^0)$, C. Q. F. D.

Maintenant on généralise le théorème III.2.1. Précisément, on a le

THÉORÈME IV.2.2. — *Soit* $U \in \mathcal{D}'_{L^\infty_{p.p.}}(t, H^0)$ *avec le « spectre »* $\sigma(U)$ *qui n'est pas en résonance approximative avec l'ensemble* Σ_1 *du théorème* III.2.1. *Soit* $T \in \mathcal{D}'(t, D_{\tilde{L}})$, *vérifiant l'équation* $\frac{d^2T}{dt^2} = \tilde{L}T + U$. *Alors on a que* $T \in \mathcal{D}'_{L^\infty_{p.p.}}(t, H_{-L})$ *et que* $\frac{dT}{dt} \in \mathcal{D}'_{L^\infty_{p.p.}}(t, H^0)$.

Démonstration. — Soit $\alpha \in \mathcal{D}$. La fonction indéfiniment dérivable $T \star \alpha$ vérifie l'équation

$$\frac{d^2}{dt^2}(T \star \alpha) = \tilde{L}(T \star \alpha) + U \star \alpha.$$

Mais $U \star \alpha$ est aussi une fonction p. p. de R à H^0. On a vu que (lemme II.3.4), on a $\sigma(U \star \alpha) \subset \sigma(U)$. Ce dernier n'est pas en résonance approximative avec l'ensemble Σ_1. Donc la même chose est vraie pour $\sigma(U \star \alpha)$. On peut donc appliquer le théorème III.2.1 et l'on obtient que $T \star \alpha$ est p. p. de R à H_{-L} tandis que $\frac{dT}{dt} \star \alpha = \frac{d}{dt}(T \star \alpha)$ est p. p. de R à H^0, pour chaque $\alpha \in \mathcal{D}$. D'où, $T \in \mathcal{D}'_{L^\infty_{p.p.}}(t, H_{-L})$ et $\frac{dT}{dt} \in \mathcal{D}'_{L^\infty_{p.p.}}(t, H^0)$.

CHAPITRE V.

L'ÉQUATION DES TÉLÉGRAPHISTES.

1. L'ÉQUATION HOMOGÈNE. — Ce paragraphe sera consacré à l'intégration de l'équation (*)

$$u_{tt}(X, t) = \tilde{L}u(X, t) - M u_t(X, t), \tag{1}$$

M étant une constante positive. On obtiendra aussi l'allure asymptotique des solutions quand $t \to +\infty$ (pour des solutions faibles en t, *voir* Prodi [18]).

(*) La complète continuité de $\vec{L}^{-1}$ n'est pas utilisée dans ce chapitre.

Considérons alors l'équation

$$v_{tt}(X, t) = \left(\tilde{L} + \frac{M^2}{4} I\right) v(X, t) \tag{2}$$

[on suppose toujours dans ce chapitre que $\frac{M^2}{4} < -\mu$, μ étant le plus grand nombre tel que $(\tilde{L}\varphi, \varphi) \leqq \mu(\varphi, \varphi)$, pour chaque $\varphi \in D_{\tilde{L}}$]. C'est le cas des oscillations amorties. Soit $\frac{M^2}{4} + \mu = \beta < 0$. Dans ce cas l'opérateur défini par

$$\tilde{L}_1 \varphi = \tilde{L}\varphi + \frac{M^2}{4}, \qquad D_{\tilde{L}_1} = D_{\tilde{L}}$$

vérifie $(\tilde{L}_1 \varphi, \varphi) \leqq \beta(\varphi, \varphi)$, pour chaque $\varphi \in D_{\tilde{L}_1}$.

Considérons sur l'espace H_{-L} la nouvelle métrique donnée par la formule

$$\| \varphi \|^2_{H_{-L_1}} = (-\tilde{L}_1 \varphi, \varphi) = \| \varphi \|^2_{H_{-L}} - \frac{M^2}{4} \| \varphi \|^2_{H^0}.$$

On a évidemment

$$\| \varphi \|^2_{H_{-L_1}} \leqq \| \varphi \|^2_{H_{-L}}.$$

D'autre part on a

$$\| \varphi \|^2_{H^0} \leqq \frac{1}{|\mu|} \| \varphi \|^2_{H_{-L}},$$

$$\Rightarrow \quad \| \varphi \|^2_{H_{-L_1}} \geqq \| \varphi \|^2_{H_{-L}} + \frac{M^2}{4\mu} \| \varphi \|^2_{H_{-L}} = \left(1 + \frac{M^2}{4\mu}\right) \| \varphi \|^2_{H_{-L}} = \gamma \| \varphi \|^2_{H_{-L}};$$

$$1 > \gamma = 1 + \frac{M^2}{4\mu} > 0.$$

On a obtenu donc en définitif :

$$\sqrt{\gamma} \| \varphi \|_{H_{-L}} \leqq \| \varphi \|_{H_{-L_1}} \leqq \| \varphi \|_{H_{-L}} \tag{3}$$

et sur l'espace H_{-L} les deux normes sont équivalentes.

Considérons maintenant l'opération

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \tilde{L}_1 & 0 \end{pmatrix},$$

I étant l'opération unité dans H_{-L}.

Elle est définie sur $D_A = D_{\tilde{L}} \times H_{-L}$. En appliquant à l'opérateur A les raisonnements de [25] dans l'espace H_{-L} muni de la norme $\| \varphi \|_{H_{-L_1}}$ on arrive, avec le théorème de Hille-Yosida, à construire un groupe $T_t \in \mathcal{L}(H_{-L_1} \times H^0, H_{-L_1} \times H^0)$, avec la majoration

$$\| T(t) \|_{\mathcal{L}(H_{-L_1} \times H^0, H_{-L_1} \times H^0)} \leqq 1$$

ayant A comme générateur infinitésimal. Vu que les deux topologies introduites sont équivalentes, $T(t)$ a pour générateur infinitésimal A aussi dans la norme initiale. Seulement la majoration est un peu différente :

précisément, soit $\mathcal{H} = H_{-L} \times H^0$ dans la norme initiale et $\mathcal{H}_1 = H_{-L} \times H^0$ dans la deuxième norme. On a alors, si $\varphi = \{\varphi_1, \varphi_2\}$:

$$\|\varphi\|^2_{\mathcal{H}} = \|\varphi_1\|^2_{H_{-L}} + \|\varphi_2\|^2_{H^0}; \qquad \|\varphi\|^2_{\mathcal{H}_1} = \|\varphi_1\|^2_{H_{-L_1}} + \|\varphi_2\|^2_{H^0}.$$

D'après (3)

$$\|\varphi\|^2_{\mathcal{H}} \leq \frac{1}{\gamma}\|\varphi_1\|^2_{H_{-L_1}} + \|\varphi_2\|^2_{H^0} \leq \frac{1}{\gamma}\left(\|\varphi_1\|^2_{H_{-L_1}} + \|\varphi_2\|^2_{H^0}\right) = \frac{1}{\gamma}\|\varphi\|^2_{\mathcal{H}_1}.$$

Donc, pour $\varphi \in \mathcal{H}$, on a

$$\|\varphi\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\|\varphi\|_{\mathcal{H}_1}$$

et en conséquence

$$\|T(t)\varphi\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\|T(t)\varphi\|_{\mathcal{H}_1} \leq \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\|T(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_1)}\|\varphi\|_{\mathcal{H}_1},$$

$$\frac{\|T(t)\varphi\|_{\mathcal{H}}}{\|\varphi\|_{\mathcal{H}}} \leq \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\|T(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_1)}\frac{\|\varphi\|_{\mathcal{H}_1}}{\|\varphi\|_{\mathcal{H}}} \leq \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\|T(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_1)}.$$

On a donc la majoration

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H})} \leq \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\|T(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_1)} \leq \frac{1}{\sqrt{\gamma}}.$$

Maintenant il est facile de construire un groupe $G(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ donnant une solution forte de l'équation des télégraphistes. A savoir, posons

$$G(t) = \begin{pmatrix} e^{-\frac{M}{2}t} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{M}{2}t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{M}{2} & 1 \end{pmatrix} T(t) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{M}{2} & 1 \end{pmatrix},$$

une famille de transformations linéaires, dépendant du paramètre $t \in R$. Par des calculs très simples on vérifie que $G(t+s) = G(t)G(s)$ pour chaque $t, s \in R$. Considérons maintenant l'opération

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} \theta & I \\ \tilde{L} & -MI \end{pmatrix}$$

définie sur $D_{\tilde{L}} \times H_{-L}$ à valeurs dans $\mathcal{H}$. Montrons que si $\varphi \in D_{\mathfrak{A}}$, alors

$$\frac{d}{dt}G(t)\varphi = \mathfrak{A}G(t)\varphi \quad \text{dans } \mathcal{H}, \text{ pour chaque } t \in R.$$

On voit que si $\varphi = \{\varphi_1, \varphi_2\} \in D_{\mathfrak{A}}$, alors

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{M}{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$$

appartient aussi à $D_{\mathfrak{A}}$. Après cela il est facile de voir que

$$\frac{d}{dt}G(t)\varphi|_{t=0}=\begin{pmatrix}-\frac{M}{2} & 0\\ 0 & -\frac{M}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{-\frac{M}{2}t} & 0\\ 0 & e^{-\frac{M}{2}t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I & 0\\ -\frac{M}{2} & I\end{pmatrix}T(t)\begin{pmatrix}I & 0\\ \frac{M}{2} & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix}\Bigg|_{t=0}$$

$$+\begin{pmatrix}e^{-\frac{M}{2}t} & 0\\ 0 & e^{-\frac{M}{2}t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I & 0\\ -\frac{M}{2} & I\end{pmatrix}A\,T(t)\begin{pmatrix}I & 0\\ \frac{M}{2} & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix}\Bigg|_{t=0}$$

$$=\begin{pmatrix}\theta & I\\ \tilde{L} & -MI\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix}=\mathfrak{A}\varphi.$$

Puis, en utilisant la relation $G(t+s)=G(t)G(s)$, on arrive au fait que $\frac{d}{dt}G(t)\varphi=\mathfrak{A}\,G(t)\varphi$, dans $\mathcal{H}$, pour $\varphi\in D_{\mathfrak{A}}$ et $t\in R$. Mais cela veut dire que si

$$\begin{pmatrix}\vec{u}_1(t)\\ \vec{u}_2(t)\end{pmatrix}=G(t)\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix}$$

on a

$$\mathfrak{A}\,G(t)\varphi=\begin{cases}\vec{u}_2(t),\\ \tilde{L}\vec{u}_1(t)-M\vec{u}_2(t)\end{cases}$$

et

$$\frac{d\vec{u}_1(t)}{dt}=\vec{u}_2(t)\quad\text{dans } H_{-L},\qquad \frac{d\vec{u}_2(t)}{dt}=\tilde{L}\vec{u}_1(t)-M\vec{u}_2(t)\quad\text{dans } H^0,$$

c'est-à-dire que

$$\frac{d^2\vec{u}_1(t)}{dt^2}=\tilde{L}\vec{u}_1(t)-M\frac{d\vec{u}_1(t)}{dt}\quad\text{dans } H^0,$$

$\vec{u}_1(t)$ de R à $D_{\tilde{L}}$ et continue de R à $D_{\tilde{L}}$, une fois continûment différentiable de R à H_{-L}, deux fois continûment différentiable de R à H^0.

On a donc obtenu une solution forte de l'équation des « télégraphistes ». Elle est aussi l'unique solution forte d'après le théorème 23.8.1 de [8]. L'allure asymptotique de ces solutions est obtenue de la manière suivante :

On a

$$G(t)=e^{-\frac{M}{2}t}\begin{pmatrix}I & 0\\ -\frac{M}{2} & I\end{pmatrix}T(t)\begin{pmatrix}I & 0\\ \frac{M}{2} & I\end{pmatrix}.$$

Calculons la norme de $G(t)$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$. On a

$$\varphi = (\varphi_1, \varphi_2), \qquad \|\varphi\|_{\mathcal{H}}^2 = \|\varphi_1\|_{\mathrm{H}_{-\mathrm{L}}}^2 + \|\varphi_2\|_{\mathrm{H}^0}^2; \begin{pmatrix} \mathrm{I} & \mathrm{o} \\ \frac{\mathrm{M}}{2} & \mathrm{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \left(\varphi_1, \frac{\mathrm{M}}{2}\varphi_1 + \varphi_2\right),$$

$$\begin{aligned}\left\|\left(\varphi_1, \frac{\mathrm{M}}{2}\varphi_1 + \varphi_2\right)\right\|_{\mathcal{H}}^2 &= \|\varphi_1\|_{\mathrm{H}_{-\mathrm{L}}}^2 + \left\|\frac{\mathrm{M}}{2}\varphi_1 + \varphi_2\right\|_{\mathrm{H}^0}^2 \\ &\leq \|\varphi_1\|_{\mathrm{H}_{-\mathrm{L}}}^2 + 2\left(\left\|\frac{\mathrm{M}}{2}\varphi_1\right\|_{\mathrm{H}^0}^2 + \|\varphi_2\|_{\mathrm{H}^0}^2\right) \\ &= \|\varphi_1\|_{\mathrm{H}_{-\mathrm{L}}}^2 + \frac{\mathrm{M}}{2}\|\varphi_1\|_{\mathrm{H}^0}^2 + 2\|\varphi_2\|_{\mathrm{H}^0}^2 \\ &\leq \|\varphi_1\|_{\mathrm{H}_{-\mathrm{L}}}^2 + \left(\frac{\mathrm{M}^2}{2}|\mu|\right)\|\varphi_1\|_{\mathrm{H}_{-\mathrm{L}}}^2 + 2\|\varphi_2\|_{\mathrm{H}^0}^2 \\ &\leq 3(\|\varphi_1\|_{\mathrm{H}_{-\mathrm{L}}}^2 + \|\varphi_2\|_{\mathrm{H}^0}^2) = 3\|\varphi\|_{\mathcal{H}}^2.\end{aligned}$$

Donc

$$\left\|\begin{pmatrix} \mathrm{I} & \mathrm{o} \\ \frac{\mathrm{M}}{2} & \mathrm{I} \end{pmatrix}\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H})} \leq \sqrt{3}, \qquad \left\|\begin{pmatrix} \mathrm{I} & \mathrm{o} \\ -\frac{\mathrm{M}}{2} & \mathrm{I} \end{pmatrix}\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H})} \leq \sqrt{3} \qquad \text{et} \qquad \|\mathrm{T}(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H})} \leq \frac{\mathrm{I}}{\sqrt{\gamma}}$$

donne

$$\|\mathrm{G}(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H})} \leq \frac{3}{\sqrt{\gamma}} \exp\left(-\frac{\mathrm{M}}{2}t\right).$$

Cela montre que les solutions fortes de l'équation des télégraphistes sont convergentes vers θ quand $t \to \infty$, ce qui reflète l'amortissement des oscillations (*).

2. L'ÉQUATION NON HOMOGÈNE. — Soit $f(\mathrm{X}, t) \in \mathrm{C}^1[\mathrm{R}, \mathrm{H}^0]$ (c'est-à-dire une fonction de R à H^0 à dérivée forte continue). L'équation non homogène des télégraphistes

$$u_{tt}(\mathrm{X}, t) = \tilde{\mathrm{L}}\, u(\mathrm{X}, t) - \mathrm{M}\, u_t(\mathrm{X}, t) + f(\mathrm{X}, t)$$

est équivalente avec l'équation

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{u}(t), \vec{v}(t)\right) = \mathfrak{A}\left(\vec{u}(t), \vec{v}(t)\right) + \left(\theta, \vec{f}(t)\right).$$

La solution générale de cette équation est donnée, d'après un résultat de R. S. Phillips, par la formule de Cauchy :

$$\left(\vec{u}(t), \vec{v}(t)\right) = \mathrm{G}(t)\,(u_0, v_0) + \int_0^t \mathrm{G}(t-s)\left(\theta, \vec{f}(s)\right) ds,$$

l'intégrale étant prise dans $\mathcal{H}$.

(*) On en déduit facilement que sauf la solution banale $\mathrm{U}(t) \equiv \mathrm{o}$ il n'y a pas d'autres solutions de (1) qui soient bornées pour $-\infty < t < +\infty$ dans l'espace $\mathcal{H}$.

Si $f(X, t)$ est presque-périodique de R à H^0, on voit aisément que l'intégrale dans $\mathcal{H}$, $\int_{-\infty}^{t} G(t-s)(0, \vec{f}(s))\,ds$ existe fortement, est solution forte de l'équation non homogène, et en même temps représente l'unique solution presque-périodique de cette équation (*). Les démonstrations, même dans un cas plus général sont données dans le lemme III.1 de [22].

3. Solutions-distributions vectorielles. — Considérons une distribution $U \in \mathcal{D}'_{L^\infty_{p.p.}}(t, H_{-L})$ et l'on va démontrer le

Théorème V.3.1. — *Il existe une distribution unique* $T \in \mathcal{D}'(t, D_{\tilde{L}})$, $T \in \mathcal{D}'_{L^\infty_{p.p.}}(t, H_{-L})$, $\dfrac{dT}{dt} \in \mathcal{D}'_{L^\infty_{p.p.}}(t, H^0)$, *vérifiant l'équation des « télégraphistes »*

$$\frac{d^2T}{dt^2} = \tilde{L}\,T - M\,\frac{dT}{dt} + U.$$

Démonstration de l'unicité. — En supposant l'existence de deux distributions T_1, T_2, vérifiant les conditions du théorème, il en résulte l'existence d'une distribution $T = T_1 - T_2 \in \mathcal{D}'(t, D_{\tilde{L}})$, $T \in \mathcal{D}'_{L^\infty_{p.p.}}(t, H_{-L})$, $\dfrac{dT}{dt} \in \mathcal{D}'_{L^\infty_{p.p.}}(t, H^0)$, vérifiant l'équation homogène $\dfrac{d^2T}{dt^2} = \tilde{L}T - M\,\dfrac{dT}{dt}$. Dans ce cas, pour tout $\alpha \in \mathcal{D}$, la régularisée $T \star \alpha$, vérifie l'équation des télégraphistes homogène (fortement), et donc tend vers 0, avec $t \to \infty$, dans la norme de H_{-L}. D'autre part, vu que $T \in \mathcal{D}'_{L^\infty_{p.p.}}(t, H_{-L})$, il résulte $T \star \alpha$ presque-périodique de R à H_{-L}. Cela est absurde.

Démonstration de l'existence. — Considérons une suite $(\alpha_n)_1^\infty$ de fonctions de $\mathcal{D}$, telle que la suite des régularisées $(U \star \alpha_n)_1^\infty$ soit convergente vers U dans l'espace $\mathcal{D}'_{L^\infty}(t, H^0)$, ce qui est possible vu le lemme II.3.1. Les fonctions $U \star \alpha_n$ sont indéfiniment dérivables et p. p. de R à H^0. Désignons alors par $\vec{u}_n(t)$ l'unique solution presque-périodique de R à H_{-L}, de l'équation

$$\frac{d^2\vec{u}_n(t)}{dt} = \tilde{L}\,\vec{u}_n(t) - M\,\frac{d\vec{u}_n(t)}{dt} + U \star \alpha_n \qquad (\textit{voir } \S\ 2).$$

Notre but maintenant est de montrer que :

a. La suite $\vec{u}_n(t)$ est convergente dans $\mathcal{D}'(t, D_{\tilde{L}})$ vers une distribution $T \in \mathcal{D}'(t, D_{\tilde{L}})$ qui est solution de l'équation des « télégraphistes ».

(*) On voit aussi sans difficulté que toute solution de (a) qui est bornée de $(-\infty < t < +\infty)$ à $\mathcal{H}$, résulte presque-périodique dans $\mathcal{H}$.

b. La suite $\vec{u}_n(t)$ est convergente vers T aussi dans $\mathcal{D}'_{L^\infty}(t, H_{-L})$, qui va donner que $T \in \mathcal{D}'_{L^\infty_{p.p.}}(t, H_{-L})$ [6].

c. La suite $\frac{d\vec{u}_n(dt)}{dt}$ est convergente vers $\frac{dT}{dt}$ dans $\mathcal{D}'_{L^\infty}(t, H^0)$, ce qui va donner que $\frac{dT}{dt} \in \mathcal{D}'_{L^\infty_{p.p.}}(t, H)$ [6].

Pour cela considérons les fonctions $\vec{F}_1(t)$ et $\vec{F}_2(t)$ de R à H^0 presque-périodiques, la première ayant la dérivée forte continue, la deuxième indéfiniment dérivable, vérifiant $U = D^p \vec{F}_1 + \vec{F}_2$, pour un certain $p \geq 0$, les dérivées dans $\mathcal{D}'(t, H^0)$. On aura donc

$$\frac{d^2 \vec{u}_n(t)}{dt^2} = \tilde{L}\, \vec{u}_n(t) - M \frac{d\vec{u}_n(t)}{dt} + D^p\left(\vec{F}_1 \star \alpha_n\right) + \vec{F}_2 \star \alpha_n,$$

$\vec{u}_n(t)$ étant l'unique solution p. p. de cette équation.

Désignons par $\vec{u}_{n,2}(t)$ l'unique solution presque-périodique de l'équation

$$\frac{d^2 \vec{u}_{n,2}(t)}{dt^2} = \tilde{L}\, \vec{u}_{n,2}(t) - M \frac{d\vec{u}_{n,2}(t)}{dt} + \vec{F}_2 \star \alpha_n.$$

Alors la fonction $\vec{u}_{n,1}(t) = \vec{u}_n(t) - \vec{u}_{n,2}(t)$ vérifie l'équation

$$\frac{d^2 \vec{u}_{n,1}(t)}{dt^2} = \tilde{L}\, \vec{u}_{n,1}(t) - M \frac{d\vec{u}_{n,1}(t)}{dt} + D^p\left(\vec{F}_1 \star \alpha_n\right)$$

comme on voit facilement. Elle est de plus l'unique solution p. p. de cette équation vu que $\vec{u}_n(t)$ et $\vec{u}_{n,2}(t)$ sont p. p.

Vu que $\vec{F}_2(t)$ est p. p., la suite des régularisées $\vec{F}_2 \star \alpha_n$ tend avec $n \to \infty$ vers $\vec{F}_2(t)$, uniformément sur $t \in R$. Mais les solutions presque-périodiques $\vec{u}_{n,2}(t)$ sont obtenues par la formule

$$\left(\vec{u}_{n,2}(t), \frac{d\vec{u}_{n,2}(t)}{dt}\right) = \int_{-\infty}^{t} G(t-s)\left(\theta, \left(\vec{F}_2 \star \alpha_n\right)(s)\right) ds.$$

Il résulte aisément que la suite $\vec{u}_{n,2}(t)$ converge fortement dans H_{-L}, uniformément sur $t \in R$ vers une fonction $\vec{u}_2(t)$, presque-périodique de R à H_{-L}, tandis que la dérivée $\frac{d\vec{u}_{n,2}(t)}{dt}$ converge uniformément sur $t \in R$ dans H^0 fort, vers $\frac{d\vec{u}_2(t)}{dt}$.

---

[6] On utilise ici le résultat suivant : si $(T_n)_1^\infty$ est une suite de distributions p. p. convergente dans $\mathcal{D}'_{L^\infty}(t, E)$ vers une distribution T alors cette distribution est aussi p. p. La démonstration est facile, très analogue à celle classique pour les fonctions p. p.

Maintenant on va montrer que la suite $\vec{u}_{n,1}(t)$ est convergente vers une distribution $T_1 \in \mathcal{D}'_{L^\infty_{p.p.}}(t, H_{-L})$, dans l'espace $\mathcal{D}'_{L^\infty}(t, H_{-L})$. Les fonctions $\vec{u}_{n,1}(t)$ sont données par la formule

$$\left(\vec{u}_{n,1}(t), \frac{d\vec{u}_{n,1}(t)}{dt}\right) = \int_{-\infty}^{t} G(t-s)\left(0, D^p\left(\vec{F}_1 \star \alpha_n\right)(s)\right) ds.$$

Considérons maintenant les fonctions $\vec{U}_{n,1}(t)$ données par

$$\left(\vec{U}_{n,1}(t), \frac{d\vec{U}_{n,1}(t)}{dt}\right) = \int_{-\infty}^{t} G(t-s)\left(0, \left(\vec{F}_1 \star \alpha_n\right)(s)\right) ds.$$

Comme plus haut on établit que la suite $\vec{U}_{n,1}(t)$ est convergente vers une fonction $\vec{U}_1(t)$, uniformément sur $t \in R$ dans H_{-L} fort; une chose analogue pour $\frac{d\vec{U}_{n,1}(t)}{dt}$; les fonctions $\vec{U}_1(t)$ et $\frac{d\vec{U}_1(t)}{dt}$ sont p. p. de R à (H_{-L} resp. H^0).

On voit assez facilement que $\vec{u}_{n,1}(t) = D^p \vec{U}_{n,1}(t)$ (7), et une chose analogue pour les dérivées. Il résulte aisément que la suite $\vec{u}_{n,1}(t)$ est convergente dans $\mathcal{D}'_{L^\infty}(t, H_{-L})$ vers la distribution p. p. $D^p \vec{U}_1$, et que la suite $\frac{d\vec{u}_{n,1}(t)}{dt}$ est convergente dans $\mathcal{D}'_{L^\infty}(t, H^0)$ vers $D^p\left(\frac{d\vec{U}_1(t)}{dt}\right)$.

Considérons enfin la distribution p. p. $T = \vec{u}_2(t) + \mathcal{D}^p \vec{U}_1$.

Il nous faut montrer qu'elle est de $\mathcal{D}'(t, D_{\tilde{L}})$ et vérifie l'équation des « télégraphistes »

$$\frac{d^2 T}{dt^2} = \tilde{L}\, T - M \frac{dT}{dt} + U.$$

Mais $\vec{u}_2(t)$ est solution forte de l'équation

$$\frac{d^2 \vec{u}_2(t)}{dt^2} = \tilde{L}\, \vec{u}_2(t) - M \frac{d\vec{u}_2(t)}{dt} + \vec{F}_2(t)$$

et comme dans l'Observation 1 du théorème IV.1.1 elle définit une distribution de $\mathcal{D}'(t, D_{\tilde{L}})$ solution de la même équation.

(7) En effet, cela résulte du fait suivant :

Si $G(t)$ est un groupe $\in \mathcal{L}(E, E)$ avec $\|G(t)\| < K \exp(-at)$, $a > 0$ et si $\vec{f}(s)$ de R à E, a la dérivée forte uniformément continue sur R, alors on a

$$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{t} G(t-s)\vec{f}(s)\, ds = \int_{-\infty}^{t} G(t-s)\vec{f}'(s)\, ds.$$

La démonstration est facile avec le changement de variable $t - s = \sigma$, tenant compte que les régularisées $\vec{F} \star \alpha_n$ sont presque-périodiques avec toutes leurs dérivées.

D'autre part la fonction $U_1(t)$ est solution forte de l'équation

$$\frac{d^2\vec{U}_1(t)}{dt^2} = \tilde{L}\vec{U}_1(t) - M\frac{d\vec{U}_1(t)}{dt} + \vec{F}_1(t)$$

et définit une distribution de $\mathcal{D}'(t, D_{\tilde{L}})$, solution de la même équation.

En dérivant p fois au sens des distributions, on obtient que

$$\left(\frac{d^2}{dt^2}\right) D^p U_1 = \tilde{L} D^p U_1 - M\left(\frac{d}{dt}\right) D^p U_1 + D^p F_1.$$

Alors la distribution $T = u_2 + D^p U_1^\star$ est bien de $\mathcal{D}'(t, D_{\tilde{L}})$ et vérifie l'équation donnée

$$\frac{d^2 T}{dt^2} = \tilde{L} T - M\frac{dT}{dt} + U,$$

C. Q. F. D.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] L. Amerio, *Problema misto e quasi-periodicità per l'equazione delle onde non omogenea* [*Ann. di Matem.*, (IV), vol. 49, 1960, p. 393-416].

[2] L. Amerio, *Quasi-periodicità degli integrali ad energia limitata dell'equazione delle onde, con termine note quasi-periodico*. Nota I, II, III (*Accademia Nazionale dei Lincei*, série VIII, vol. 38, fasc. 2, 3, 4, 1960).

[3] S. Bochner, *Abstrakte Fast-Periodische Funktionen* (*Acta Math.*, vol. 61, 1933, p. 149-184).

[4] S. Bochner, *Fast-Periodische Losungen der Wellen-Gleichung* (*Acta Math.*, vol. 62, 1934, p. 227-237).

[5] S. Bochner et J. von Neumann, *On compact solutions of operational-differential equations*, I (*Ann. of Math.*, vol. 36, 1935, p. 255-290).

[6] N. Dunford et J. T. Schwartz, *Linear operators;* Part I ; *General Theory*, Interscience Publishers Inc., New-York, 1958.

[7] J. Favard, *Leçons sur les fonctions presque-périodiques*, Paris, 1933.

[2_1] L. Amerio, *Sull. integrazione delle funzioni quasi-periodiche a valori. in uno spazio hilbertiano* (*Acc. Naz. dei Lincei*, série VIII, vol. 28, 5, 1960).

[2_2] L. Amerio, *Sull. integrazione delle funzioni quasi-periodiche astratte*, *Ann. di Matem.*, vol. LIII, (1961, p. 371-382).

[2_3] L. Amerio, *Sull. equazione delle onde con termine noto quasi-periodico*, *Rend. di Matem*, Roma, (nos 3-4, vol. 19, 1960).

[4_1] S. Bochner, *Almost-periodic solutions of the inhomogeneous wave equation*, *Proc. Nat. Acad. Sciences*, (sept. 1960).

[8] E. Hille et R. S. Philipps, *Functional Analysis and Semi-Groups*, American mathematical Society, 1957.

[9] B. M. Levitan, *Fonctions presque-périodiques* (en russe), Moscou, 1953.

[10] J. L. Lions, *Problèmes aux limites en théorie des distributions*, (*Acta Math.*, vol. 94, 1955, p. 13-153.)

[11] J. L. Lions, *Boundary value problems*, Techn. Report. Lawrence, 1957.

[12] J. L. Lions, *Une remarque sur les applications du théorème de Hille-Yosida* (*J. Math. Soc. Japan*, vol. 9, 1957, p. 62-70).

[13] J. L. Lions, *Problèmes aux limites de type mixte*, C. B. R. M., Bruxelles, 1954.

[14] E. Magenes et G. Stampacchia, *I problemi al contorno per le equazioni differenziali di tipo ellitico* (*Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa*, vol. 12, 1958, p. 247-358).

[15] S. G. Mihlin, *Le problème de minimum pour la fonctionnelle quadratique* (en russe), Moscou-Leningrad, 1952.

[16] C. F. Muckenhoupt, *Almost periodic functions and vibrating systems* (*J. Math. and Phys.*, vol. 8, 1929, p. 163-198).

[17] R. S. Phillips, *On linear transformations* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 48, 1940, p. 516-541).

[18] G. Prodi, *Soluzioni periodiche di equazioni a derivati parziali di tipo iperbolico non lineári* (*Ann. di Matem.*, vol. 42, 1956, p. 25-49).

[19] L. Schwartz, *Théorie des distributions*, Paris, Herman, vol. II, 1951.

[20] L. Schwartz, *Théorie des distributions à valeurs vectorielles*, I, II (*Ann. Inst. Fourier*, t. 7, 1957, p. 1-141).

[21] S. L. Sobolev, *Sur la presque-périodicité des solutions de l'équation des ondes* (en russe), D. A. N., S. S. S. R., 1945, I, II, III.

[22] K. Yosida, *On the differentiability and the representation of one-parameter semi-group of linear operators* (*J. Math. Soc. Japan*, vol. 1, 1948, p. 15-21).

[23] S. Zaidman, *Les théorèmes qualitatifs pour les équations aux dérivées partielles* (en roumain) (*Studii si Cerc. Matem.*, vol. 6, 1955, p. 645-666).

[24] S. Zaidman, *Sur la perturbation presque-périodique des groupes et semi-groupes de transformations d'un espace de Banach* (*Rend. Matem e sue appl.*, série V, vol. 16, 1957, p. 197-206).

[25] S. Zaidman, *Sur la presque-périodicité des solutions de l'équation non homogène des ondes* (*C. R. Acad., Sc.*, t. 247, 1958, p. 2276-2278 et *J. Math. and Mech.*, vol. 8, 1959, p. 369-382).

[26] S. Zaidman, *Solutions presque-périodiques des équations hyperboliques* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 250, 1960, p. 2112-2114).

[26_1] S. Zaidman, *Distribuzioni quasi-periodiche e applicazioni*, (C. I. M. E.), Sept. 1961 (cyclostilé).

[26_2] S. Zaidman, *Solutions presque-périodiques dans le problème de Cauchy, pour l'équation non homogène des ondes* (*Acc. Naz. dei Lincei*, série VIII, vol. 30, n^os^ 5-6) (I, II).

[26_3] S. Zaidman, *Soluzioni limitate e quasi-periodiche dell'equazione del calore non omogenea*, (I, II) (*Acc. Naz. dei Lincei*, série VIII, vol. 31, 6, vol. 32, 1).

[27] J. Kopek, *Ann. Polon. Math.*, 1952.

[28] S. Bochner, J. von Neumann, *Trans, Amer. Math. Soc.*, 37, n^os^ 21-50, 1935.