Annales scientifiques de l'É.N.S.

EDWIN J. AKUTOWICZ

Sur l'approximation par distributions à support discret

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 79, nº 1 (1962), p. 71-91

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1962_3_79_1_71_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
3e série, t. 79, 1962, p. 71 à 91.

SUR L'APPROXIMATION PAR DISTRIBUTIONS A SUPPORT DISCRET

PAR M. EDWIN J. AKUTOWICZ.

I. INTRODUCTION. — On connaît l'intérêt de la théorie des distributions, ou fonctions généralisées, dans plusieurs domaines de la Mathématique. Dans le présent travail on étudie un problème de quasi-analyticité au sens de Serge Bernstein dans le cadre des distributions. Il est donc évident que la topologie d'espace fonctionnel jouera un rôle important; dans le cas qui nous occupe elle est donnée par un *ensemble* de normes de Banach.

Ces premières lignes sont consacrées à un rappel, d'ailleurs très sommaire, de certaines généralités et définitions sur les espaces vectoriels topologiques constituant le point de départ. Pour un exposé plus détaillé on renvoie le lecteur aux traités [1], [2] et [7].

1° Tous les espaces vectoriels topologiques seront localement convexes. Dans un espace vectoriel topologique E un ensemble $\mathfrak{B}$ est dit *borné* si pour tout voisinage U de O il existe un nombre $\lambda > 0$ tel que $\lambda\mathfrak{B} \subset U$. L'espace dual E' de E est l'espace des formes linéaires continues sur E. On munit E' d'une topologie τ' (la topologie forte) de la manière suivante. L'ensemble polaire A^0 d'un ensemble $A \subset E$ se compose des $\varphi \in E'$ tels que $|\langle \varphi, f \rangle| \leqq 1$ pour tout $f \in A$. Lorsque A parcourt l'ensemble de toutes les parties bornées de E, les ensembles A^0 forment un système fondamental de voisinages de O pour la topologie τ' sur E' de la convergence uniforme dans les ensembles bornés de E.

Soit $E_1 \subset E_2 \subset \ldots$ une suite strictement croissante d'espaces de Fréchet [1] telle que la topologie de E_n coïncide avec celle induite par la topologie de E_{n+1}. On munit la réunion

$$E = \bigcup_n E_n$$

d'une topologie τ qui est la plus fine des topologies sur E qui induisent sur chaque E_n une topologie moins fine que la topologie donnée sur E_n. On appelle E muni de la topologie τ la limite inductive des E_n. Lorsque les E_n sont des espaces de Banach, alors E est un espace de Fréchet. Pour qu'un ensemble $A \subset E$ soit borné, il faut et il suffit qu'il existe un entier n tel que $A \subset E_n$ et que A soit borné dans E_n.

2° Supposons que l'espace E se compose de fonctions définies sur la droite réelle. La transformée de Fourier $\mathcal{F} f (f \in E)$ est donnée par

$$\mathcal{F} f(t) = \int e^{itx} f(x)\, dx.$$

Supposons que $\mathcal{F} E = F$ soit un espace vectoriel topologique, par exemple encore E lui-même. La transformée de Fourier de $\varphi \in E'$ est alors l'élément $\Phi = \mathcal{F} \varphi \in F'$ qui est défini par la relation de Parseval,

$$\langle \mathcal{F} \varphi, \mathcal{F} f \rangle = 2\pi \langle \varphi, f \rangle \qquad (f \in E).$$

Donc les transformées de Fourier des dérivées de la mesure de Dirac en le point a sont (si elles existent dans l'espace considéré)

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \delta_a^{(2m)} &= (-1)^m s^{2m} e^{ias}, \\ \mathcal{F} \delta_a^{(2m+1)} &= (-1)^{m+1} i s^{2m+1} e^{ias}. \end{aligned}$$

2. L'espace fondamental $\mathfrak{A}$. — Parmi tous les espaces fondamentaux possibles nous avons opté pour un qui est particulièrement symétrique, et qui avait été déjà signalé par G. Doetsch [13]. Soient a, b, C trois paramètres positifs et $B(b)$ la bande horizontale $|y| < b$ dans le plan de la variable $z = x + iy$. Désignons par $\mathfrak{A}_{a,b}$ l'espace vectoriel de toutes les fonctions $f(z)$ holomorphes dans $B(b)$ et telles que

$$(2.1) \qquad |f(z)| \leq C e^{-a|x|} \qquad [z \in B(b)],$$

pour une constante $C = C(f)$. Posons

$$(2.2) \qquad \|f\|_{a,b} = \sup_{z \in B(b)} e^{a|x|} |f(z)|$$

pour a, b fixés. Muni de cette norme, $\mathfrak{A}_{a,b}$ est un espace de Banach. On considère l'espace vectoriel

$$\mathfrak{A} = \bigcup_{a,b} \mathfrak{A}_{a,b}$$

(1) C'est-à-dire, métrisables et complets.

comme une limite inductive des espaces $\mathfrak{A}_{a,b}$. L'espace dual $\mathfrak{A}'$ (dual fort) est formé de certaines distributions. La transformation de Fourier s'applique parfaitement dans $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{A}'$, étant un automorphisme dans ces espaces [13].

Un ensemble borné $\mathfrak{B}$ dans $\mathfrak{A}$ est constitué par des fonctions $f(z)$ qui satisfont à l'inégalité (2.1) avec a, b, C fixés. La convergence dans la topologie de $\mathfrak{A}'$ de S vers T alors veut dire que

$$\sup_{f\in\mathfrak{B}} |\langle \mathrm{S}-\mathrm{T}, f\rangle| \to 0$$

pour un ensemble borné $\mathfrak{B}$ arbitraire dans $\mathfrak{A}$.

On sait que les conditions qui définissent l'espace fondamental $\mathfrak{A}$ peuvent être remplacées par les suivantes :

$f\in\mathfrak{A}$ si et seulement si f est indéfiniment dérivable sur la droite réelle $-\infty < x < \infty$ et l'on a

$$(2.3)\qquad |x^p f^{(q)}(x)| \leq c h^p k^q p!\, q! \qquad (p, q = 0, 1, 2, \ldots),$$

où c, h, k peuvent dépendre de f.

Cependant les inégalités (2.3) ne sont pas indépendantes. En effet, on peut se borner aux couples d'indices p, q de la forme p, 0 et 0, q. La proposition suivante va être utile pour la suite.

Proposition 1. — *Une fonction $f(x)$ indéfiniment dérivable définie sur la droite réelle appartient à la classe $\mathfrak{A}$ si et seulement s'il existe des constantes c, h, k, telles que les inégalités suivantes aient lieu :*

$$(2.4)\qquad |x^n f(x)| \leq c h^n n!$$

et

$$(2.5)\qquad |f^{[n]}(x)| \leq c k^n n! \qquad (n = 0, 1, \ldots).$$

Démonstration. — Une conséquence immédiate de (2.5) est que $f(x)$ possède un prolongement en une fonction holomorphe, bornée dans la bande $\mathrm{B}\left(\frac{1}{k}\right)$. On va utiliser les inégalités (2.4) pour démontrer qu'on a la décroissance requise,

$$|f(x+iy)| \leq \mathrm{C}\, e^{-a|x|} \quad (\mathrm{C}>0,\ a>0) \qquad \text{dans } \mathrm{B}\left(\frac{1}{k}\right).$$

De (2.4) on tire

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq \mathrm{Cte} \inf_n \left(\frac{h}{|x|}\right)^n n! \\ &\leq \mathrm{Cte}\, e^{-\mathrm{H}|x|} \qquad \left(\mathrm{H} < \frac{1}{h}\right), \end{aligned}$$

sur l'axe réel. C'est-à-dire,

$$(2.6)\qquad |f(z)\, ch\, \mathrm{H} z| \leq \mathrm{Cte} \quad \text{sur l'axe réel.}$$

On est ainsi contraint à démontrer que (2.6) reste valable dans une bande horizontale pour un H positif. Dans ce but on considère la représentation conforme sur le disque unité $|\zeta| \leqq 1$ de la bande $0 \leqq y \leqq \pi H$, H étant choisi inférieur à $\frac{1}{\pi k}$ afin que $f(z)$ y reste holomorphe :

(2.7) $$\zeta = th \frac{1}{2}\left(\frac{z}{H} - i\frac{\pi}{2}\right).$$

Pour la fonction $F(\zeta) = f(z)$ la condition (2.6) se transcrit par

(2.8) $$\left|\frac{F(\zeta)}{1-\zeta^2}\right| \leqq \text{Cte} \quad \text{sur la moitié inférieure ouverte de } |\zeta| = 1.$$

Désignons par $\omega(\zeta)$ la mesure harmonique de la moitié inférieure de $|\zeta| = 1$ par rapport à $|\zeta| < 1$, et par $\theta(\zeta) = \omega(\zeta) + i\tilde{\omega}(\zeta)$ la fonction holomorphe définie à une constante additive imaginaire près par ω. Posons

(2.9) $$F_t(\zeta) = F(\zeta^{e^{-2t}}).$$

Notre hypothèse (2.8) entraîne alors que

(2.10) $$e^{2t} F_t(\zeta) = \mathcal{O}(1)$$

lorsque $t \to +\infty$, uniformément en $\zeta = e^{i\beta}$, $-\pi < \beta < 0$. D'autre part il résulte de la formule de Cauchy :

$$e^{2t\theta(\zeta)} F_t(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=1} \frac{e^{2t\theta(\xi)} F_t(\xi)}{\xi - \zeta}\, d\xi.$$

Pour ζ fixé sur la ligne de niveau $\omega = \omega_0$, $0 < \omega_0 < 1$, on a donc, vu (2.10),

(2.11) $$e^{2t\omega_0} F_t(\zeta) = \mathcal{O}(1) \qquad (t \to +\infty).$$

Un calcul élémentaire montre que, en vertu de (2.9) et (2.11),

$$e^{2t\omega_0} f(Ht + iy_0) = \mathcal{O}(1) \qquad (t \to +\infty),$$

où la ligne $\operatorname{Im} z = y_0$ est l'image de la ligne de niveau $\omega = \omega_0$ par la transformation (2.7). Autrement dit,

$$e^{2\frac{\omega_0}{H}t} |f(t + iy_0)| \leqq \text{Cte}.$$

Une étude pareille vaut pour $t \to -\infty$. De cette manière on voit que (2.6) reste valable dans une bande horizontale, symétrique en l'axe réel.

C. Q. F. D.

3. Un problème de quasi-analyticité dans $\mathfrak{A}'$. — Soit $\varphi(z)$ une fonction holomorphe dans le demi-plan supérieur telle que la limite, prise au sens de la topologie de $\mathfrak{A}'$ (*voir in fine* § 8),

(3.1) $$\lim_{y \to 0} \varphi(x + iy)$$

existe. Elle définit donc un élément φ de $\mathfrak{A}'$. Donc φ est la transformée de Fourier d'un élément $\Phi \in \mathfrak{A}'$. Notre hypothèse est alors que le support de Φ se trouve sur la partie non négative de l'axe réel ([2]).

Désignons par

$$a_1 < a_2 < \ldots \tag{3.2}$$

une suite de nombres positifs. On considère l'ensemble $\mathfrak{D}_N$ des distributions d'ordre inférieur où égal à N dont les supports sont contenus dans l'ensemble

$$\mathcal{A}_N = \{\pm a_1, \pm a_2, \ldots, \pm a_N\}.$$

Ainsi une distribution appartenant à $\mathfrak{D}_N$ est de la forme

$$D_N = \sum_{\substack{a \in \mathcal{A}_N \\ 0 \leq \nu \leq N}} \beta_{a\nu} \delta_a^{(\nu)} \qquad (\beta_{a\nu} \text{ complexe}),$$

où $\delta_a^{(\nu)}$ désigne la dérivée $\nu^{\text{ième}}$ de la mesure de Dirac en a. Une partie de ce travail est consacrée à l'étude de l'approximation d'un élément φ satisfaisant lesdites conditions par les éléments de $\mathfrak{D}_N$ lorsque $N \to \infty$. La mesure d'approximation, où la meilleure approximation, sera par définition

$$\mathcal{E}_N = \mathcal{E}_N(\mathfrak{B}, \varphi) = \inf_{D_N \in \mathfrak{D}_N} \sup_{f \in \mathfrak{B}} |\langle \varphi - D_N, f \rangle|, \tag{3.3}$$

où $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(a, b, C)$ désigne un ensemble borné arbitraire de l'espace $\mathfrak{A}$. Notons par $\mathfrak{B}_N = \mathfrak{B}_N(a, b, C)$ le sous-ensemble de $\mathfrak{B}$ annulant tout élément de $\mathfrak{D}_N$.

Théorème 1. — *S'il existe* a, b, C *tels qu'on a pour une valeur de* z_0, $1 + b < \operatorname{Im} z_0 < 2 + b$,

$$\varliminf_{N \to \infty} \sqrt[N]{\mathcal{E}_N(\mathfrak{B}(a, b, C), \varphi)} < \varlimsup_{N \to \infty} \sqrt[N]{\sup_{f \in \mathfrak{B}_N(a, 2+b, C)} |f(z_0)|}, \tag{3.4}$$

alors $\varphi \equiv 0$.

Dans le cas où la suite a_k coïncide avec les entiers naturels on a un résultat plus direct :

Théorème 2. — *Si, pour un ensemble borné* $\mathfrak{B}$,

$$\varliminf_{N \to \infty} \sqrt[N^2]{\mathcal{E}_N(\mathfrak{B}, \varphi)} < \frac{3}{e^2},$$

alors $\varphi \equiv 0$.

([2]) Il existe des résultats inédits de Beurling, exposés dans une conférence à l'Université de Brandeis en mai 1958, où il s'agit des classes quasi analytiques au sens de S. Bernstein. Beurling considère la bande $0 < y < 1$ et une suite M_n de nombres positifs. Étant donné une fonction φ continue sur l'axe réel, il étudie alors l'approximation

$$\sup_x |\varphi(x) - \varphi_n(x)| \leq A_n,$$

où les φ_n sont holomorphes dans la bande, continues sur la frontière et $|\varphi_n| \leq M$

Remarquons que la racine $(N^2)^{\text{ième}}$ est l'analogue naturelle de la racine $N^{\text{ième}}$ qui intervient dans le théorème célèbre de S. Bernstein sur l'approximation polynomiale ([3]).

C'est un phénomène très connu dans la théorie classique de l'approximation que si les valeurs d'une fonction sont nulles, ou presque nulles dans un sens ou un autre, sur un ensemble assez étendu, alors il existe une minoration de la meilleure approximation à cette fonction par polynomes. C'est-à-dire, la précision de l'approximation polynomiale ne peut être trop élevée que si la fonction est identiquement nulle. La quasi-analyticité au sens de S. Bernstein est un exemple ([3]) de ce phénomène où la mesure d'approximation est celle de Tchebichef. On doit plusieurs théorèmes profonds dans cette direction à M. S. Mandelbrojt [11], [12].

Une étude distributionnelle de cette question fait ressortir les raisons tout à fait simples qui empêchent une approximation trop précise. Malgré certains détails, il est aisé de voir que ce qui nuit à une bonne approximation de φ dans $\mathfrak{A}'$ par des éléments de $\mathfrak{D}_N$ c'est l'écart entre les supports respectifs ; autrement dit, vu l'invariance de la question vis-à-vis de la transformation de Fourier, c'est l'écart entre les spectres respectifs : la transformée de Fourier Φ de φ est nulle sur l'axe négatif, tandis que les transformées de Fourier des éléments $D_N \in \mathfrak{D}_N$ sont

$$\mathcal{F}\, D_N = \sum_{\nu, k} \beta_{\nu k}\, t^{\nu}\, e^{i a_k t}.$$

Dans la dernière partie les points a_k se confondent en l'origine ; on a donc affaire, après une transformation de Fourier, à l'approximation polynomiale. Les remarques précédentes restent valables.

Le lecteur observera le rôle fondamental de la transformation de Fourier dans ce sujet, rôle prévu dans une certaine mesure par la démonstration fort élégante aux pages 182-183 de la monographie [8] signalée à l'auteur par M. S. Mandelbrojt, et dont s'inspire l'origine de ce travail.

4. L'EXISTENCE D'UNE MEILLEURE APPROXIMATION DANS $\mathfrak{D}_N$. — Le but de cette section est d'éliminer la condition extrémale

$$\inf_{D_N \in \mathfrak{D}_N} \qquad (\text{N fixé})$$

([3]) Étant donné une courbe γ et une suite infinie n_ν d'entiers positifs, les classes quasi analytiques $C(\gamma, n_\nu)$ de S. Bernstein se composent des fonctions f définies et continues sur γ et y admettant une approximation polynomiale

$$\sup_x |f(x) - P_{n_\nu}(x)| \leqq \rho^{n_\nu} \qquad (0 < \rho < 1),$$

P_{n_ν} étant un polynome de degré n_ν.

Si $f \in C(\gamma, n_\nu)$ s'évanouit sur $\gamma_0 \subset \gamma$ pour un ensemble γ_0 de capacité positive, alors f est identiquement nulle.

qui intervient dans la définition (3.3) de la meilleure approximation. En effet, on établira l'existence des constantes $\beta_{\nu a}$ extrémales.

LEMME 1. — *Étant donné un ensemble borné $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$, l'application*

$$(\beta_{\nu a}) \to \sup_{f \in \mathfrak{B}} |\langle D_N, f \rangle|,$$

où

$$D_N = \sum_{a \in \mathfrak{A}_N} \beta_{\nu a} \delta_a^{(\nu)}, \qquad (\beta_{\nu a}) \in \mathbf{C}^{N^2},$$

est une fonction continue sur $\mathbf{C}^{N^2}$.

Posons, pour abréger,

$$\beta = (\beta_{\nu a}), \qquad \gamma = (\gamma_{\nu a}), \qquad \beta + \gamma = (\beta_{\nu a} + \gamma_{\nu a})$$

et

$$I_\beta(f) = \langle D_N, f \rangle = \sum \beta_{\nu a} f^{(\nu)}(a).$$

On a alors

$$\left| \sup_{f \in \mathfrak{B}} |I_\beta(f)| - \sup_{f \in \mathfrak{B}} |I_{\beta+\gamma}(f)| \right| \leq \sup_{f \in \mathfrak{B}} |I_\beta(f) - I_{\beta+\gamma}(f)| \leq N^2 \operatorname{Max}_{\nu, a} |\gamma_{\nu a}| \sup_{f \in \mathfrak{B}} \operatorname{Max}_{\nu, a} |f^{(\nu)}(a)|,$$

ce qui permet de conclure.

LEMME 2. — *Étant donné un ensemble borné $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$, un entier $N > 0$, un point $a_{k_0} \in \mathfrak{A}_N$, un entier ν_0 $(0 \leq \nu_0 \leq N)$, il existe une fonction $f(z) \in \mathfrak{B}$ remplissant les conditions interpolatoires suivantes :*

$$f^{(\nu)}(a) = 0, \qquad a \in \mathfrak{A}_N, \qquad a \neq a_{k_0}, \qquad 0 \leq \nu \leq N, \tag{4.1}$$

$$f^{(\nu)}(a_{k_0}) = 0, \qquad 0 \leq \nu \leq \nu_0 - 1, \tag{4.2}$$

$$f^{(\nu_0)}(a_{k_0}) > 0. \tag{4.3}$$

Soient α, β, Γ les paramètres définissant l'ensemble $\mathfrak{B}$. Posons

$$\begin{aligned} Q_0(z) &= (z - a_{k_0})^{\nu_0} \prod_{\substack{a \in \mathfrak{A}_N \\ a \neq a_{k_0}}} (z - a)^{N+1} \\ &= q_0 (z - a_{k_0})^{\nu_0} + q_1 (z - a_{k_0})^{\nu_0 + 1} + \ldots \qquad (q_0 \neq 0). \end{aligned}$$

Notons par A un paramètre positif, et considérons la fonction

$$g_A(z) = e^{-A\beta^2} Q_0(z) \exp\left(-\frac{A}{2}(z - a_{k_0})^2\right).$$

La fonction $g_A(z)$ remplit (4.1) et (4.2). Dans le rectangle R_0 : $|y| \leq \beta$, $|x - a_{k_0}| \leq 1$, on a

$$e^{\alpha |x|} |Q_0(z)| \leq K_0$$

pour une constante K_0. Donc, pourvu que A soit supérieur ou égal à $2\beta^{-2}\operatorname{Log}\frac{K_0}{\Gamma}$, on a

$$\begin{aligned} e^{\alpha|x|}|g_A(z)| &\leqq e^{-A\beta^2}K_0 \exp\left(-\frac{A}{2}(x-a_{k_0})^2+\frac{A}{2}y^2\right) \\ &\leqq K_0\, e^{-\frac{A}{2}\beta^2} \\ &\leqq \Gamma \end{aligned}$$

pour $z=x+iy$ dans R_0. D'autre part, dans les demi-bandes $B(\beta)-R_0$, on a

$$e^{\alpha|x|}|g_A(z)| \leqq e^{-\frac{A}{2}\beta^2}|Q_0(z)|\exp\left(-\frac{A}{2}(x-a_{k_0})^2+\alpha|x|\right).$$

Pour un A suffisamment grand cette dernière expression est inférieure à Γ pour tout z dans $B(\beta)-R_0$. On a donc $g_A(z)\in\mathfrak{B}(\alpha, \beta, \Gamma)$ pour un A convenable. Évidemment,

$$g_A^{(\nu_0)}(a_{k_0}) \neq 0,$$

donc on peut remplir la condition (4.3) par une fonction $f=e^{ic}g_A$, c réel.

Lemme 3. — *Étant donné un ensemble borné* $\mathfrak{B}\subset\mathfrak{A}$, *un entier* $N>0$, *et un élément* $\varphi\in\mathfrak{A}'$, *il existe des nombre complexes* $\beta^0_{\nu a}(a\in\mathfrak{A}_N,\ 0\leqq\nu\leqq N)$ *tels que*

$$\mathcal{E}_N(\mathfrak{B}, \varphi) = \sup_{f\in\mathfrak{B}}|\langle\varphi - D^0_N, f\rangle|, \tag{4.4}$$

où

$$D^0_N = \sum \beta^0_{\nu a}\,\partial^{(\nu)}_a.$$

Soit $\beta^{(n)}_{\nu a}$ une suite extrémisant :

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{f\in\mathfrak{B}}|\langle\varphi - D^{(n)}_N, f\rangle| = \mathcal{E}_N(\mathfrak{B}, \varphi).$$

On a donc, pour tout n suffisamment grand,

$$\begin{aligned} 1+\mathcal{E}_N(\mathfrak{B}, \varphi) &\geqq \sup_{f\in\mathfrak{B}}|\langle\varphi - D^{(n)}_N, f\rangle| \\ &\geqq |\langle\varphi - D^{(n)}_N, f\rangle| \\ &\geqq |\langle D^{(n)}_N, f\rangle| - |\langle\varphi, f\rangle|. \end{aligned}$$

Parce que l'ensemble $\mathfrak{B}$ est borné,

$$|\langle\varphi, f\rangle| \leqq \text{Cte} \qquad (f\in\mathfrak{B}),$$

il vient

$$\langle D^{(n)}_N, f\rangle = \mathcal{O}(1) \qquad (n\to\infty), \tag{4.5}$$

uniformément par rapport à $f\in\mathfrak{B}$. En particulier, pour la fonction f du lemme 2 et pour $\nu_0=N$, de (4.5) il vient

$$\beta^{(n)}_{Nk_0} = \mathcal{O}(1)$$

lorsque $n \to \infty$. Donc la suite $\beta_{Nk_0}^{(n)}$ est bornée. On itère cet emploi du lemme 2 pour conclure, successivement, que les suites

$$\beta_{N-1,k_0}^{(n)}, \quad \beta_{N-2,k_0}^{(n)}, \quad \ldots, \quad \beta_{0k_0}^{(n)}$$

sont toutes bornées pour a_{k_0} arbitraire dans $\mathfrak{A}_N$. On peut peut donc supposer qu'elles convergent,

$$\lim_{n\to\infty} \beta_{\nu a}^{(n)} = \beta_{\nu a}^{0}.$$

D'après le lemme 1, (4.4) est établi.

5. Démonstration du théorème 1. — D'après le lemme 3, la meilleure approximation $\mathcal{E}_N(\mathfrak{B}. \varphi)$ peut être écrite comme

$$\mathcal{E}_N(\mathfrak{B}, \varphi) = \sup_{f\in\mathfrak{B}} |\langle \varphi - D_N^0, f\rangle|$$

avec un D_N^0 fixé, indépendant de $f\in\mathfrak{B}$. Nous allons déduire une minoration pour $\mathcal{E}_N$.

On pose $z_0 = i\eta_0$, $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(a, b, C)$ et l'on choisit $\eta_0 > 1 + b$. Désignons par $\mathfrak{B}_N$ la trace sur $\mathfrak{B}$ de l'hyperplan défini par

$$f^{(\nu)}(a) = 0 \qquad (0 \leqq \nu \leqq N,\ a \in \mathfrak{A}_N)$$

Remarquons que $g\in\mathfrak{B}_N(a, b, C)$ entraîne $\dfrac{g}{t-z_0}\in\mathfrak{B}_N(a, b, C)$ en vue de $\eta_0 > 1 + b$. Ceci étant, on a

$$(5.1) \qquad \sup_{f\in\mathfrak{B}(a,b,C)} |\langle \varphi - D_N^0, f\rangle| \geqq \sup_{f\in\mathfrak{B}_N(a,b,C)} |\langle \varphi, f\rangle| \geqq \sup_{g\in\mathfrak{B}_N(a,b,C)} \left|\left\langle \varphi, \frac{g}{t-z_0}\right\rangle\right|.$$

On rétrécit $\mathfrak{B}_N(a, b, C)$ à $\mathfrak{B}_N(a, b_1, C)$, b_1 étant choisi assez grand afin que certaines intégrales ci-dessous aient un sens, par exemple, $b_1 = 2 + b$. Posons

$$b_1 > p_0 > \eta_0, \qquad \eta_0 - y_0 < \rho < p_0 - y_0, \qquad w_0 = iy_0.$$

Du développement

$$\int_{\operatorname{Im} t = p_0} \frac{\varphi(t) f(t)}{t - z_0}\, dt = \int_{\operatorname{Im} t = p_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z_0 - w_0)^n}{(t - w_0)^{n+1}} \varphi(t) f(t)\, dt$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z_0 - w_0{}^n)}{\rho^{n+1}} \int_{\operatorname{Im} t = p_0} \varphi(t) f(t) \left(\frac{\rho}{t - w_0}\right)^{n+1} dt,$$

on déduit la majoration

$$\left|\int_{\operatorname{Im} t = p_0} \frac{\varphi(t) f(t)}{t - z_0}\, dt\right| \leqq K(z_0, w_0, \rho) \sup_{n=0,1,\ldots} \left|\int_{\operatorname{Im} t = p_0} \varphi(t) f(t) \left(\frac{\rho}{t - w_0}\right)^{n+1} dt\right|.$$

Ici il existe un entier $n_0 = n_0(f)$ pour lequel le suprémum est réalisé puisque

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\operatorname{Im} t = p_0} \varphi(t) f(t) \left(\frac{\rho}{t - w_0}\right)^{n+1} dt = 0.$$

Remarquons que $f \in \mathfrak{B}_N(a, b_1, C)$ entraîne

$$f(t)\left(\frac{\rho}{t-w_0}\right)^{n_0+1} \in \mathfrak{B}_N(a, b_1, C).$$

On a donc

$$\sup_{f \in \mathfrak{B}_N(a, b_1, C)} \left| \int_{\operatorname{Im} t = p_0} \frac{\varphi(t) f(t)}{t - z_0} dt \right| \leq K(z_0, w_0, \rho) \sup_{f \in \mathfrak{B}_N(a, b_1, C)} \left| \int_{\operatorname{Im} t = p_0} \varphi(t) f(t)\, dt \right|.$$

Mais si $\varphi(t)$, $-\infty < t < \infty$, est une fonction bornée, on peut remplacer

$$\int_{\operatorname{Im} t = p_0} \quad \text{par} \quad \int_{\operatorname{Im} t = 0}$$

dans la dernière expression. Dans le cas général on a $\varphi_j \to \varphi$ dans $\mathfrak{A}'$, φ_j étant une fonction bornée, et l'on peut alors remplacer

$$\int_{\operatorname{Im} t = p_0} \varphi(t) f(t)\, dt \quad \text{par} \quad \langle \varphi, f \rangle.$$

On arrive ainsi à la majoration

$$(5.2) \qquad \sup_{f \in \mathfrak{B}_N(a, b_1, C)} \left| \int_{\operatorname{Im} t = p_0} \frac{\varphi(t) f(t)}{t - z_0} dt \right| \leq K(z_0, w_0, \rho) \sup_{f \in \mathfrak{B}(a, b, C)} |\langle \varphi - D_N^0, f \rangle|.$$

De (5.1) et (5.2) on obtient

$$\begin{aligned}
\sup_{f \in \mathfrak{B}(a, b, C)} |\langle \varphi - D_N^0, f \rangle| &\geq K \left\{ \sup_{f \in \mathfrak{B}_N(a, b_1, C)} \left| \int_{\operatorname{Im} t = p_0} \frac{\varphi(t) f(t)}{t - z_0} dt \right| + \sup_{f \in \mathfrak{B}_N(a, b_1, C)} \left| \left\langle \varphi, \frac{f}{t - z_0} \right\rangle \right| \right\} \\
&\geq K \sup_{f \in \mathfrak{B}_N(a, b_1, C)} \left| \int_{\operatorname{Im} t = p_0} \frac{\varphi(t) f(t)}{t - z_0} dt - \left\langle \varphi, \frac{f}{t - z_0} \right\rangle \right| \\
&\geq K \sup_{f \in \mathfrak{B}_N(a, b_1, C)} |\varphi(z_0) f(z_0)|,
\end{aligned}$$

où l'on a posé

$$K = \frac{1}{2} \operatorname{Min}\left(1, \frac{1}{K(z_0, w_0, \rho)}\right).$$

On prend la racine $N^{\text{ième}}$ et l'on passe à la limite $N \to \infty$ pour achever la démonstration du théorème 1.

6. Un cas particulier. — Peut-on obtenir une idée de la grandeur de la borne inférieure qu'on vient d'établir dans le théorème 1 ? C'est seulement pour simplifier les calculs qu'on prendra la suite $a_k = k (= \pm 1, \pm 2, \ldots)$. En choisissant la fonction arbitraire entrant dans (3.4), on obtient la valeur $\frac{3}{e^2}$ comme une minoration asymptotique de la racine $(N^2)^{\text{ième}}$ de la meilleure approximation $\mathcal{E}_N(\mathfrak{B}, \varphi)$.

Soient encore a, b, C les paramètres définissant l'ensemble borné $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$. Nous allons choisir les constantes $A_N > 0$, $c_N > 0$, telles que la fonction

$$(6.1) \qquad f_N(z) = c_N \prod_{k=1}^{N} \left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right)^N e^{-A_N z^2}$$

appartienne à $\mathfrak{B}$.

Posons $\beta = A_N - a$. On a

$$\begin{aligned}
\sup_x e^{-\beta x^2} \prod_{k=1}^{N} \left(1 + \frac{x^2}{k^2}\right)^N &= \sup_x \left\{ \prod_{k=1}^{N} \left(1 + \frac{x^2}{k^2}\right) e^{-\frac{\beta x^2}{N^2}} \right\}^N \\
&\leq \left\{ \prod \sup_x \left(1 + \frac{x^2}{k^2}\right) e^{-\frac{\beta x^2}{N^2}} \right\}^N \\
&= \left\{ \prod \frac{N^2}{e\beta k^2} e^{\frac{\beta k^2}{N^2}} \right\}^N \\
&= \left(\prod \frac{N^2}{e\beta k^2} \right)^N e^{\frac{\beta}{N} \sum_1^N k^2}.
\end{aligned}$$

En utilisant la liberté de choix de β (> 0), on pose

$$\beta = \frac{N^2}{M}, \qquad \text{où} \quad M = \frac{(N+1)(2N+1)}{6}.$$

On a alors $\beta \to 3$ lorsque $N \to \infty$ et

$$\sup_x e^{-\beta x^2} \prod_{k=1}^{N} \left(1 + \frac{x^2}{k^2}\right)^N \leq \gamma_N \equiv \frac{M^{N^2}}{(N!)^{2N}}. \tag{6.2}$$

Lemme. — *Si l'on pose*

$$A_N = a + \beta,$$

$$c_N = C \gamma_N^{-1} \exp\left(-\frac{a}{4} - A_N b^2\right) \prod_{k=1}^{N} \left(\frac{k^2}{k^2 + b^2}\right)^N,$$

alors la fonction $f_N(z)$ donnée par (6.1) *appartient à* $\mathbf{B}(a, b, C)$.

En effet, avec la détermination de β indiquée ci-dessus, on obtient les évaluations suivantes $[z = x + iy \in B(b)]$:

$$\begin{aligned}
|f_N(z)| &\leq c_N \prod_{k=1}^{N} \left(1 + \frac{|z|^2}{k^2}\right)^N e^{-A_N x^2 + A_N b^2} \\
&\leq \gamma_N^{-1} C e^{-\frac{a}{4} - a x^2} e^{-\beta x^2} \prod_{k=1}^{N} \left(\frac{k^2}{k^2 + b^2}\right)^N \prod_{k=1}^{N} \left(\frac{k^2 + b^2 + x^2}{k^2}\right)^N \\
&\leq \gamma_N^{-1} C e^{-a|x|} \sup_x e^{-\beta x^2} \prod_{k=1}^{N} \left(1 + \frac{x^2}{k^2}\right)^N \\
&\leq C e^{-a|x|},
\end{aligned}$$

en vertu de (6.2). C. Q. F. D.

On achève la démonstration du théorème 2 comme suit. Soit $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(a, b, C)$, $y_0 \geqq 1 + b$. Alors pour la fonction que nous venons de construire, il existe une constante K indépendante de N telle que

$$|f_N(iy_0)| \geqq K \gamma_N^{-1} \prod_{k=1}^{N} \left(\frac{k^2 + y_0^2}{k^2 + b^2}\right)^N$$
$$\geqq K \frac{6^{N^2}(N!)^{2N}}{(N+1)(2N+1)^{N^2}}.$$

D'où il vient

$$\varliminf_{N \to \infty} \sqrt[N^2]{|f_N(iy_0)|} \geqq \frac{3}{e^2},$$

ce qui donne la conclusion du théorème 2.

7. Quasi-analyticité de distributions a support ponctuel. — Soit φ un élément de $\mathfrak{A}'$ ayant l'origine comme support. D'après un résultat de Roumieu [5], un tel φ peut être exprimé par une série infinie de dérivées de la mesure de Dirac,

$$\varphi = \sum_{\nu \in \smile} a_\nu \delta^{(\nu)}, \tag{7.1}$$

la série étant convergente pour la topologie τ' de $\mathfrak{A}'$. Nous allons étudier l'approximation à φ par des combinaisons linéaires des $\delta^{(\nu)}$ (4). Vu l'invariance des espaces $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$ par rapport à la transformation de Fourier, ce problème revient à l'étude de l'approximation polynomiale à la fonction entière $\Phi = \mathcal{F}\varphi$ de type exponentiel nul, l'approximation étant entendue dans le sens de τ'.

Tandis que dans le numéro 5, pour établir le théorème 1 de quasi-analyticité on avait supposé que la transformée de Fourier Φ était nulle sur une demi-droite, maintenant l'hypothèse, *grosso-modo* l'homologue de celle-là, sera l'existence de lacunes assez grandes dans la série (7.1).

Le problème d'approximation est lié à un second problème extrémal. Soit $\mathfrak{B}$ un ensemble borné de $\mathfrak{A}$ et posons

$$\rho_N = \rho_N(\mathfrak{B}) = \sup |G^{(N)}(0)| \qquad (N \in \Sigma),$$

le suprémum étant relatif à l'ensemble des fonctions $G \in \mathfrak{B}$ telles que $G^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \in \Sigma$ à l'exception de $n = N$.

Théorème 3. — *Soit Σ une suite d'entiers non négatifs de densité $D < \frac{1}{2}$ dans l'ensemble des entiers non négatifs. Soit φ une distribution de la forme* (7.1) *où*

$$\mathcal{F}\varphi(z) = \Phi(z) = \sum_{\nu \in \Sigma} c_\nu z^\nu$$

(4) Il serait souhaitable d'étudier la relation entre les sommes partielles de la série (7.1) et l'élément D_N^0 du lemme 3, § 4.

est une fonction entière de type exponentiel nul et d'ordre $\rho > 0$. *Si l'on a pour la meilleure approximation* $\mathcal{E}_N = \mathcal{E}_N(\mathfrak{B}, \varphi)$,

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{n \log n}{\log^+\left(\frac{\rho_n}{\mathcal{E}_n}\right)} < \rho,$$

alors $\varphi \equiv 0$.

Lemme 1. — *Étant donné* $\sigma > 1$, $\varepsilon > 0$, $\alpha > 0$, *il existe une constante* $A = A(\sigma, \varepsilon, \alpha)$ *telle que*

$$\left|(iv+\sigma)(iv+2\sigma)\dots\left(iv+\left[\frac{n}{\sigma}\right]\sigma\right)\right| e^{-\varepsilon|v|} \leqq A^{\left[\frac{n}{\sigma}\right]}\left[\frac{n}{\sigma}\right]!$$

Posons $m = \left[\frac{n}{\sigma}\right]$. Alors on trouve

$$\log|(iv+\sigma)\dots(iv+m\sigma)| = \log \sigma^m m! + \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{v^2}{\sigma^2}\right)\cdots\left(1+\frac{v^2}{\sigma^2 m^2}\right)$$

$$\leqq \log\sigma^m m! + \frac{1}{2} m \log\left(1+\frac{v^2}{\sigma^2 m^2}\right) + v^2\int_{\frac{1}{2}}^{m}\frac{dt}{\sigma^2 t^2 + v^2},$$

et ensuite

$$(7.2) \qquad v^2 \int_{\frac{1}{2}}^{m} \frac{dt}{\sigma^2 t^2 + v^2} = \frac{|v|}{\sigma}\int_{\frac{\sigma}{2|v|}}^{\frac{\sigma m}{|v|}} \frac{dt}{1+t^2}.$$

Choisissons R suffisamment grand de façon que pour $|v| \geqq \sigma m R$ l'expression (7.2) soit

$$\leqq \frac{|v|}{\sigma}\int_0^{\frac{1}{R}} \frac{dt}{1+t^2} \leqq \frac{\varepsilon}{2}|v|,$$

et, pour $|v| \leqq \sigma m R$, $\leqq \frac{\pi}{2} m R$. On a donc sans exception

$$(7.3) \qquad v^2\int_{\frac{1}{2}}^{m}\frac{dt}{\sigma^2t^2+v^2} \leqq \frac{\varepsilon}{2}|v| + \frac{\pi}{2} m R.$$

Il s'ensuit que

$$|(iv+\sigma)\dots(iv+m\sigma)|\,e^{-\varepsilon|v|} \leqq \sigma^m m!\left(1+\frac{v^2}{\sigma^2 m^2}\right)^{\frac{m}{2}} e^{\frac{\pi}{2}mR-\frac{\varepsilon}{2}|v|}$$

$$\leqq m!\, e^{\frac{\pi}{2}mR} m^{-m}|v|^m e^{-\frac{\varepsilon}{2}|v|}$$

$$\leqq m!\, e^{\frac{\pi}{2}mR}\left(\frac{2}{\varepsilon e}\right)^m$$

$$\leqq A^m m!.$$

C. Q. F. D.

Soit dorénavant Λ une suite d'entiers positifs de densité $D < \frac{1}{2}$ dans l'ensemble de tous les entiers positifs. Posons

$$\Delta = \frac{2}{1 + 2D} > 1.$$

On considère alors la suite Λ_1, réunion de Λ, de la suite $\{n\Delta : n = -1, -2, \ldots\}$ et de la suite des entiers pairs positifs. La densité de Λ_1 étant au plus égale à $D + \frac{1}{2}$, il existe une fonction entière $S(w)$ non identiquement nulle, s'évanouissant sur Λ_1 et telle que

$$|S(w)| < e^{\pi\left(D+\frac{1}{2}\right)|v|}, \qquad w = u + iv. \tag{7.4}$$

Ceci étant, on définit la fonction « morcelée » :

$$g_1(w) = S(w)\,\Gamma\left(\frac{w}{\Delta}\right),$$

où Γ désigne la fonction d'Euler.

La fonction $g_1(w)$ est entière.

Lemme 2. — *Pour n'importe quel nombre $\alpha > 0$, il existe une constante $M = M(\alpha)$ telle que les inégalités suivantes soient vérifiées :*

$$|g_1(w)| < M\alpha^n n!\,\frac{e^{\frac{\pi}{2}|v|}}{|(w+1)\ldots(w+n)|} \qquad \text{sur} \quad u = -n + \frac{1}{2}, \tag{7.5}$$

$$|g_1(w)| < M\alpha^n n!\, e^{\frac{\pi}{2}|v|} \qquad \text{sur} \quad u = n + \frac{1}{2}, \tag{7.6}$$

où $n = 0, 1, 2, \ldots.$

Soit d'abord $u = -n + \frac{1}{2}$. En vue de la condition (7.4) il suffit de montrer que la quantité

$$\frac{e^{\pi D|v|}}{\alpha^n n!}\left|\Gamma\left(\frac{w}{\Delta}\right)\prod_{k=1}^{n}(w+k)\right| \tag{7.7}$$

est bornée sur $u = -n + \frac{1}{2}$.

Rappelons l'égalité asymptotique

$$|\Gamma(u+iv)| \sim \sqrt{2\pi}\, e^{-\frac{\pi}{2}|v|}\,|v|^{u-\frac{1}{2}}, \qquad |v| \to \infty,$$

valable pour u fixé. Les facteurs qui sont des puissances de $|v|$ à exposant borné sont négligeables, comme le lecteur le verra tout de suite. L'emploi de la formule d'addition pour la fonction Γ permet de faire deux choses utiles; 1° accroître la partie réelle de l'argument de $\Gamma\left(\frac{1}{\Delta}\left(-n + \frac{1}{2} + iv\right)\right)$ de $\left[\frac{n}{\Delta}\right]$ unités;

2° annuler $\left[\frac{n}{\Delta}\right]$ des facteurs du produit $(w+1)\ldots(w+n)$ paraissant dans (7.7).

Les facteurs restants ont leurs parties réelles approximativement en progression arithmétique :

$$\frac{\Delta}{\Delta-1},\qquad 2\frac{\Delta}{\Delta-1},\qquad \ldots .$$

On peut appliquer le lemme 1 avec $\sigma=\frac{\Delta}{\Delta-1}$, $\alpha=\alpha$, $\varepsilon=\pi\left(\frac{1}{2\Delta}-D\right)$ pour déduire l'inégalité

$$\frac{e^{\pi D|v|}}{\alpha^n n!}\left|\Gamma\left(\frac{w}{\Delta}\right)\prod_{k=1}^{n}(w+k)\right|<A^n\frac{\left[\frac{n}{\Delta}\right]!}{n!}$$

pour tout n, v. Puisque la majoration obtenue est bornée en n, (7.5) se trouve établi.

La même méthode suffit pour l'étude de (7.6). Il s'agit de montrer que

$$\frac{e^{\pi D|v|}\left|\Gamma\left(\frac{w}{\Delta}\right)\right|}{\alpha^n n!} \tag{7.8}$$

est borné sur $u=n+\frac{1}{2}$. En effet, en réduisant la partie réelle de

$$\Gamma\left(\frac{1}{\Delta}\left(n+\frac{1}{2}+iv\right)\right)$$

on fait apparaître un produit de $\left[\frac{n}{\Delta}\right]$ facteurs dont les parties réelles sont en progression arithmétique :

$$\Delta,\quad 2\Delta,\quad \ldots .$$

On majore ce produit comme auparavant pour conclure.

Lemme 3. — *Étant donné une suite Λ d'entiers positifs de densité $D<\frac{1}{2}$ et une constante $\alpha>0$, il existe une fonction $G(x+iy)$ holomorphe dans la bande $B\left(\frac{1}{\alpha}\right)$, non identiquement nulle, paire et telle que*

$$G^{(\lambda-1)}(0)=0 \qquad \textit{pour tout } \lambda\in\Lambda, \tag{7.9}$$

$$|G^{(n)}(x)|<\mathrm{Cte}\,\alpha^n n!, \tag{7.10}$$

$$|x^n G(x)|<\mathrm{Cte}\,\alpha^n n! \qquad \textit{pour}\quad n=0,1,2,\ldots \tag{7.11}$$

et $-\infty<x<\infty$.

Pour la démonstration nous utiliserons la fonction $g_1(w)$ construite dans le lemme précédent. Posons pour $x\geq 0$,

$$G(x)=\int_{\mathrm{Re}\,w=\frac{1}{2}}\frac{g_1(w)}{(1+w)^3}\,\frac{x^{w-1}}{\Gamma(w)\sin\pi w}\,dw. \tag{7.12}$$

(On suppose, ce qui est évidemment loisible, que la fonction intégrée n'a pas de résidu en $w = -1$.)

Translatons la ligne verticale sur laquelle on intègre de n unités vers la gauche. Il vient, en vue des inégalités (7.5),

$$|x^n G(x)| < \mathrm{Cte}\,\alpha^n n! \int_{\mathrm{Re}\,w=-n+\frac{1}{2}} \frac{e^{-\frac{\pi}{2}|v|}}{|1+w|^2\,|w(w+1)\ldots(w+n)\,\Gamma(w)|}\,dv$$

$$< \mathrm{Cte}\,\alpha^n n! \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\pi}{2}|v|}}{\left|\Gamma\left(\frac{1}{2}+iv\right)\right|}\,\frac{dv}{1+v^2}$$

$$< \mathrm{Cte}\,\alpha^n n!.$$

Pour évaluer la $n^{\text{ième}}$ dérivée on écrit

$$G^{(n)}(x) = \int_{\mathrm{Re}\,w=\frac{1}{2}} \frac{g_1(w)(w-1)(w-2)\ldots(w-n)\,x^{w-n-1}}{(1+w)^3\,\Gamma(w)\sin\pi w}\,dw.$$

En déplaçant la ligne d'intégration de n unités vers la droite on ne rencontre point de singularités. Il vient donc d'après (7.6)

$$|G^{(n)}(x)| < \mathrm{Cte}\,\alpha^n n! \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left|\left(\frac{1}{2}+iv\right)\cdots\left(n-\frac{1}{2}+iv\right)\right|}{\left|n+\frac{3}{2}+iv\right|^3\left|\Gamma\left(n+\frac{1}{2}+iv\right)\right|}\,e^{-\frac{\pi}{2}|v|}\,dv$$

$$< \mathrm{Cte}\,\alpha^n n! \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\pi}{2}|v|}}{\left|\Gamma\left(\frac{1}{2}+iv\right)\right|}\,\frac{dv}{1+v^2}$$

$$< \mathrm{Cte}\,\alpha^n n!.$$

Ceci entraîne que $G(x)$ est holomorphe dans tout cercle de rayon inférieur à $\frac{1}{\alpha}$ centré en un point de l'axe positif. En particulier, elle est holomorphe à l'origine. D'autre part, la définition (7.12) de $G(x)$ entraîne que le développement de Taylor contient seulement des puissances de la forme $x^{\mu-1}$, $\mu \in \complement\Lambda$, $\mu > 0$. De tels exposants sont tous pairs. On peut donc prolonger $G(x)$ en posant

$$G(-x) = G(x)$$

pour obtenir une fonction holomorphe dans une bande $B\left(\frac{1}{\alpha}\right)$. Il est clair que les inégalités (7.10) et (7.11) restent valables pour la fonction ainsi prolongée.

C. Q. F. D.

Corollaire. — *Étant donné un ensemble borné* $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(a, b, C)$ *quelconque dans* $\mathfrak{A}$, *il existe une fonction* G *dans* $\mathfrak{B}$ *non identiquement nulle telle que*

(7.13) $$G^{(\lambda-1)}(0) = 0 \quad \textit{pour tout } \lambda \in \Lambda.$$

Il suffit de prendre la fonction $G(x)$ du lemme 3 pour un α suffisamment faible. En effet, on a déjà remarqué que $G(x)$ est holomorphe dans la bande $B\left(\frac{1}{\alpha}\right)$. D'autre part, les inégalités (7.11) entraîne que la décroissance pour $|x| \to \infty$ est suffisamment rapide, pour α suffisamment petit, pour qu'on puisse atteindre celle décrite par le paramètre a intervenant dans $\mathfrak{B}(a, b, C)$ dans la bande $B(b)$. Ici on utilise la proposition 1. En divisant par une constante convenable on obtient une majoration de la forme cherchée.

Démonstration du théorème 3. — Nous pouvons maintenant achever facilement la démonstration du théorème 3. Soit $N \in \Sigma$. Prenons comme Λ la suite

$$\{n+1 : n \in \Sigma,\ n \neq N\}.$$

Alors le corollaire ci-dessus entraîne l'existence d'une fonction $G(x)$ appartenant à $\mathfrak{B}$ telle que $G^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \in \Sigma$, $(n \neq N)$. Nous pouvons prendre la fonction G telle que $G^{(N)}(0) \neq 0$ en vue de la formule (7.12). Posons pour $N \in \Sigma$

$$\rho_N = \rho_N(\mathfrak{B}) = \sup_{\substack{G \in \mathfrak{B} \\ G^{(n)}(0)=0 \\ n \in \Sigma - \{N\}}} |G^{(N)}(0)|.$$

On trouve alors la minoration

$$\mathcal{E}_N(\mathfrak{B}, \varphi) \geq \rho_N(\mathfrak{B})\,|a_N| \qquad (N \in \Sigma). \tag{7.14}$$

Il s'ensuit que [5]

$$\lim_{N \to \infty} \frac{N \log N}{\log^+\left(\dfrac{\rho_N}{\mathcal{E}_N}\right)} \geq \rho > 0,$$

où ρ est l'ordre de la fonction entière $\Phi = \mathcal{F}\varphi$, ce qui est équivalent à la conclusion du théorème 3.

Remarques. — 1° Dans les hypothèses où nous nous sommes placés, l'évaluation (7.14) ne peut pas être beaucoup améliorée.

Car prenons pour Σ une suite d'entiers impairs, et étudions l'approximation d'un $\varphi = \sum_{n \in \Sigma} a_n \delta^{(n)}$ tel que $\rho = 1$ et $|a_n| n!$ ne croît pas. D'après le lemme 3 ci-dessus, nous pouvons trouver une fonction $G(z)$ paire ayant les propriétés y indiquées appartenant à un ensemble borné donné en avance. Avec une telle $G(z)$ la fonction

$$g(z) = C_1 \frac{G(z)}{(ib_1)^2 - z^2} \qquad (b_1 > b)$$

---

[5] Rappelons que l'ordre ρ d'une fonction entière $\Sigma\, a_n z^n$ peut être exprimé comme

$$\rho = \lim \frac{n \log n}{\log\left(\dfrac{1}{|a_n|}\right)}.$$

appartient à $\mathfrak{B}(a, b, C)$ pour une constante C_1 convenable. Choisissons n'importe quel $G_N(z)$ intervenant dans la définition de ρ_N : c'est-à-dire, la $N^{\text{ième}}$ coefficient de Taylor de $G_N(z)$ est non nulle, $(N \in \Sigma)$. En utilisant la fonction

$$\frac{1}{2}(G_N(z) + g(z))$$

qui intervient elle aussi dans ρ_N, on trouve, vu les pôles de $g(z)$ en $\pm ib_1$,

$$\underline{\lim} \sqrt[N]{\frac{\mathcal{E}_N(\mathfrak{B}(a, b, C), \varphi)}{|a_N| N!}} \geqq \frac{1}{b_1}.$$

Puisque $b_1 > b$ est arbitraire, on obtient

$$\underline{\lim} \sqrt[N]{\frac{\mathcal{E}_N}{|a_N| N!}} \geqq \frac{1}{b}.$$

D'autre part, prenons $\alpha = \frac{1}{b}$ dans (7.10) et (7.11). Avec $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(a, b, C)$ comme auparavant, il vient

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_N &\leqq \sup_{f \in \mathfrak{B}} \sum_{\substack{n \geqq N \\ n \in N}} |a_n| . |f^{(n)}(0)| \\ &\leqq \mathrm{Cte}\, \alpha^N |a_N| N! \sum_{n \geqq 0} \alpha^n, \end{aligned}$$

donc

$$\overline{\lim} \sqrt[N]{\frac{\mathcal{E}_N}{|a_N| N!}} \leqq \frac{1}{b},$$

donc

$$\lim \sqrt[N]{\frac{\mathcal{E}_N}{|a_N| N!}} = \frac{1}{b}.$$

Dans ce cas l'évaluation (7.14) est donc asymptotiquement la meilleure possible.

2° La question de savoir si la condition de lacunarité imposée $\left(D < \frac{1}{2}\right)$ est nécessaire est liée au problème suivant concernant les fonctions entières.

Étant donné deux suites M_n et Λ de nombres positifs, quelles sont les conditions sur M_n et sur la distribution de Λ pour qu'il existe une fonction entière $g(z) \not\equiv 0$ telle que

$$(7.15) \qquad \begin{cases} |g(n + iy)| < M_{|n|}, & (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots), \\ g(\Lambda) = \{0\}? \end{cases}$$

Dans le cas où $g(z)$ est de type exponentiel et où (7.15) comporte une majoration seulement sur l'axe imaginaire $(|g(iy)| \leqq \exp \pi b |y|)$ cette question a été complètement résolue par Malliavin et Rubel [10].

8. Une extension d'un théorème de M. Kœthe. — Pour l'espace fondamental $\mathbf{A}$ qui se compose des fonctions holomorphes sur une courbe fermée K sur la sphère de Riemann, M. G. Kœthe a caractérisé l'espace dual $\mathbf{A}'$, muni de la topologie forte, comme l'espace $\mathbf{A}_0$ de toutes les fonctions localement holomorphes dans le complémentaire de K qui s'annulent à l'infini. Rappelons que l'espace fondamental $\mathbf{A}$ est une limite inductive définie à partir de la famille de normes de la convergence uniforme sur les voisinages compacts de K, et que celle de $\mathbf{A}_0$ est une limite projective ([6]) donnée par les normes de la convergence uniforme sur les compacts du complémentaire de K. Un résultat de cette simplicité ne subsiste pas pour la droite. Néanmoins, Roumieu ([5], p. 78 et suiv.) a fait correspondre chaque élément φ de $\mathfrak{A}'$ ([7]) à une fonction holomorphe $|\Psi(x+iy)|$ dans $y \neq 0$ telle que

$$\varphi = \lim_{\substack{y \to 0 \\ y > 0}} \Psi(x+iy) - \lim_{\substack{y \to 0 \\ y < 0}} \Psi(x+iy) \tag{8.1}$$

et telle que quels que soient H_1, H_2, K positifs, il existe une constante A telle que

$$|\Psi(x+iy)| < A e^{\frac{|x|}{K}} \quad \text{dans} \quad \frac{1}{H_1} \leq |y| \leq \frac{1}{H_2}. \tag{8.2}$$

Réciproquement, chaque fonction Ψ ayant lesdites propriétés définit par (8.1) un élément φ de $\mathfrak{A}'$. On appelle la fonction Ψ une indicatrice de φ. Bien que la correspondance $\varphi \to \Psi$ n'est pas univoque, les fonctions Ψ qui correspondent à un élément φ fixé diffèrent par une fonction entière. Donc la non-unicité de l'indicatrice dans le cas de la droite est plus large que dans le cas étudié par Kœthe.

Les considérations suivantes ne sont qu'un commentaire sur les pages 79-81 du travail de Roumieu.

Désignons par $\mathfrak{A}_0$ l'espace vectoriel des fonctions holomorphes hors de l'axe réel satisfaisant à la condition (8.2). On considère $\mathfrak{A}_0$ comme une limite projective définie par la famille de normes

$$\|\Psi\|_{H_1, H_2, K} = \sup_{\frac{1}{H_1} \leq |y| \leq \frac{1}{H_2}} |\Psi(x+iy)| e^{-\frac{|x|}{K}}.$$

Il est clair que $\mathfrak{A}_0$ est un espace de Fréchet. Le sous-ensemble $\mathfrak{J}_0$ des fonctions entières de $\mathfrak{A}_0$ est un sous-espace (fermé). Donc on peut envisager l'espace-quotient $\tilde{\mathfrak{A}}_0 = \mathfrak{A}_0/\mathfrak{J}_0$, qui est encore un espace de Fréchet, défini par la famille de normes évidentes.

([6]) Si l'on désigne par N_α les normes dont il s'agit, la topologie en question est définie par le système fondamental de voisinages de O donné par $N_\alpha(f) < r_\alpha$ lorsque α et r_α varient.

([7]) Les résultats de Roumieu valent pour toute une classe d'espaces dont $\mathfrak{A}'$ n'est qu'un cas particulier.

Proposition 2. — *L'espace vectoriel topologique $\tilde{\mathfrak{A}}_0$ est isomorphe au dual $\mathfrak{A}'$.*

Démonstration. — Soit $\|\varphi\|_{h,k,\mathrm{C}}$ une norme qui joue dans la définition de la topologie de $\mathfrak{A}'$. Alors pour $\Psi \in \tilde{\Psi}$ et $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\left(\frac{1}{h}, \frac{1}{k}, \mathrm{C}\right)$ on obtient

$$
\begin{aligned}
\|\varphi\|_{h,k,\mathrm{C}} &= \sup_{f\in\mathfrak{B}} |\langle \varphi, f\rangle| \\
&= \sup_{f\in\mathfrak{B}} \left| \int_\Gamma \Psi(x+iy) f(x+iy)\, dx \right|
\end{aligned}
$$

où Γ se compose des deux horizontales $y = \pm \frac{1}{k}\cdot$ D'où il vient

$$
\begin{aligned}
\|\varphi\|_{h,k,\mathrm{C}} &\leq \mathrm{C} \int_\Gamma e^{-\frac{|x|}{2h}} |\Psi(x+iy)|\, dx. \\
&\leq 16h\mathrm{C} \quad \sup \quad |\Psi(x+iy)|\, e^{-\frac{|x|}{4h}}.
\end{aligned}
$$

On a donc l'inégalité

$$
\|\varphi\|_{h,k,\mathrm{C}} \leq 16h\mathrm{C}\, \|\tilde{\Psi}\|_{2k,\, k,\, 4h},
$$

ce qui établit la continuité de l'application $\tilde{\Psi} \to \varphi$.

Puisque $\tilde{\Psi} \to \varphi$ est biunivoque, le théorème du graphe fermé entraîne la continuité de l'application inverse.

C. Q. F. D.

Remarque. — L'approximation de φ par des éléments de $\mathfrak{D}_\mathrm{N}$ équivaut à l'approximation de l'indicatrice de φ par des combinaisons linéaires des fonctions

$$
\frac{1}{(z-a)^n} \qquad (0 \leq n \leq \mathrm{N},\ a \in \mathcal{A}_\mathrm{N}).
$$

BIBLIOGRAPHIE.

[1] N. Bourbaki, *Espaces vectoriels topologiques*. Livre V (*Act. scient. et industr*, n^os **1189**, **1229**, Paris, 1953, 1955).

[2] G. Koethe, *Topologische Lineare Räume*, I (*Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*, Bd. **107**, 1960).

[3] G. Koethe, *Die Randverteilungen analytischer Funktionen*, (*Math. Z.*, t. **57**, 1952).

[4] G. Koethe, *Dualität in der Funktionentheorie*, (*J. reine angew. Math.*, t. **191**, 1953).

[5] C. Roumieu, *Sur quelques extensions de la notion de distribution* (*Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, 3^e série, t. **77**, 1960, p. 41-121).

[6] J. Dieudonné et L. Schwartz, *La dualité dans les espaces* ($\mathcal{F}$) *et* ($\mathcal{LF}$), (*Ann. Inst. Fourier*, t. **1**, 1950).

[7] I. Gelfand et G. Siloff, *Les fonctions généralisées* (en russe), Moscou, 1958.

[8] S. Bernstein, *Leçons sur les propriétés extrémales*, Paris, 1926.

[9] P. MALLIAVIN, *Sur quelques procédés d'extrapolation* (*Acta Math.*, t. **93**, 1955).

[10] P. MALLIAVIN et L. RUBEL, *On small entire functions of exponential type with given zeros*, (*Bull. Soc. Math. France*, t. **89**, 1961).

[11] S. MANDELBROJT, *Séries adhérentes, régularisation des suites. Applications*, Paris, 1952.

[12] S. MANDELBROJT, *Théorèmes de fermeture et théorèmes de composition* (*Littérature Étrangère*, Moscou 1961, (en russe).

[13] G. DOETSCH, *Handbuch der Laplacetransformation*, I, Basel, 1953.

[14] H. G. TILLMANN, *Darstellung der Schwartzschen Distributionen durch analytische Funktionen*, (*Math. Z.*, t. **77**, 1961).