

# ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

HUBERT DELANGE

## Sur les fonctions arithmétiques multiplicatives

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 3<sup>e</sup> série*, tome 78, n° 3 (1961), p. 273-304

[http://www.numdam.org/item?id=ASENS\\_1961\\_3\\_78\\_3\\_273\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1961_3_78_3_273_0)

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1961, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# SUR LES FONCTIONS ARITHMÉTIQUES MULTIPLICATIVES

PAR M. HUBERT DELANGE.

---

1. INTRODUCTION. — On appelle fonction arithmétique une fonction définie sur l'ensemble des entiers naturels.

1.1.  $f$  étant une fonction arithmétique réelle ou complexe, si l'expression

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(n)$$

tend vers une limite finie quand l'entier  $N$  tend vers  $+\infty$ , nous disons que  $f$  possède une valeur moyenne égale à cette limite.

Remarquons tout de suite que, comme on le voit immédiatement, il est équivalent de supposer que l'expression précédente tend vers une certaine limite quand l'entier  $N$  tend vers  $+\infty$  ou que l'expression

$$\frac{1}{x} \sum_{n \leq x} f(n)$$

tend vers la même limite quand le nombre réel positif  $x$  tend vers  $+\infty$ .

Lorsque la fonction arithmétique réelle ou complexe  $f$  possède une valeur moyenne, nous désignons celle-ci par  $M(f)$ .

1.2. La fonction arithmétique réelle ou complexe  $f$  est dite *multiplicative* si l'on a

$$f(mn) = f(m)f(n) \quad \text{toutes les fois que } (m, n) = 1.$$

Si l'on n'a pas  $f(n) = 0$  pour tout  $n$ , ceci implique  $f(1) = 1$ .

Nous désignerons ici par  $\mathfrak{M}$  la classe des fonctions arithmétiques réelles ou complexes multiplicatives et non toujours nulles.

Il est clair qu'une fonction de la classe  $\mathfrak{M}$  est complètement déterminée quand on connaît ses valeurs pour les nombres premiers et leurs puissances, et que ces valeurs peuvent être choisies arbitrairement.

1.2.1. Nous désignerons par  $\mathfrak{M}_0$  la sous-classe de  $\mathfrak{M}$  formée des fonctions de  $\mathfrak{M}$  qui satisfont à

$$|f(n)| \leq 1 \quad \text{pour tout } n.$$

Il est clair que, pour qu'une fonction de la classe  $\mathfrak{M}$  appartienne à la classe  $\mathfrak{M}_0$ , il faut et il suffit qu'on ait

$$|f(p^r)| \leq 1 \quad \text{pour tout } p \text{ premier et tout } r \text{ entier } > 0.$$

1.3. La fonction arithmétique  $f$  est dite *additive* si l'on a

$$f(mn) = f(m) + f(n) \quad \text{toutes les fois que } (m, n) = 1.$$

Il est clair que, si  $f$  est une fonction arithmétique réelle additive, quel que soit le nombre réel  $t$ , la fonction arithmétique  $g$  définie par

$$g(n) = \exp\{itf(n)\}$$

appartient à la classe  $\mathfrak{M}_0$ .

1.4. Précisons une fois pour toutes que, dans tout ce qui suit, la lettre  $p$  est utilisée comme symbole générique d'un nombre premier.

De plus, lorsque nous considérons une série ou un produit infini dont le terme général est une fonction de  $p$ , il est entendu que les termes sont supposés rangés dans l'ordre des  $p$  croissants.

1.5. Nous avons donné ailleurs <sup>(1)</sup> des conditions suffisantes pour qu'une fonction de la classe  $\mathfrak{M}_0$  possède une valeur moyenne nulle.

Nous montrerons ici que, pour que la fonction  $f$  de la classe  $\mathfrak{M}_0$  possède une valeur moyenne *non nulle*, il faut et il suffit que :

1° la série  $\sum \frac{1-f(p)}{p}$  soit convergente;

2° On n'ait pas  $f(2^r) = -1$  pour tout  $r \geq 1$ .

Plus précisément, nous établirons les deux théorèmes suivants :

THÉORÈME 1. — Si  $f \in \mathfrak{M}_0$  et si  $M(f)$  existe et n'est pas nulle,

1° la série  $\sum \frac{1-f(p)}{p}$  est convergente;

2° On n'a pas  $f(2^r) = -1$  pour tout  $r \geq 1$ .

---

<sup>(1)</sup> *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, (3), t. 78, 1961, p. 1-29. Dans la suite, nous désignerons ce Mémoire par (A).

THÉOREME 2. — Si  $f \in \mathcal{M}_0$  et si la série  $\sum \frac{1-f(p)}{p}$  est convergente,  $M(f)$  existe et

$$M(f) = \prod \left(1 - \frac{1}{p}\right) \left[1 + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{f(p^j)}{p^j}\right].$$

Ceci ne peut être nul que si  $f(2^r) = -1$  pour tout  $r \geq 1$ .

Nous compléterons le théorème 1 en donnant une borne supérieure de

$$\sum \frac{1 - \mathcal{O}f(p)}{p}$$

dépendant uniquement de  $|M(f)|$ .

Nous compléterons aussi le théorème 2 par un résultat concernant le cas où la fonction  $f$  dépend d'un paramètre.

On verra que nos résultats permettent de retrouver très simplement les conditions nécessaires et suffisantes obtenues par Erdős et Wintner (2) pour qu'une fonction arithmétique réelle additive possède une loi de distribution. Cette méthode s'applique d'ailleurs aussi bien au cas d'une fonction additive à valeurs dans l'espace  $R^m$ .

Dans la démonstration du théorème 2, nous utiliserons un théorème préliminaire (théorème 3) sensiblement plus général qu'il n'est nécessaire, mais qui nous paraît intéressant en lui-même, et dont nous donnerons d'ailleurs une autre application.

Nous donnerons aussi des résultats concernant des valeurs moyennes sur certains ensembles d'entiers naturels.

Cet article présente des points communs avec le Mémoire (A) cité plus haut. Nous avons jugé préférable pour la clarté de l'exposé de tout reprendre complètement ici.

2. PRÉLIMINAIRES. — 2.1. Nous aurons besoin dans la suite du lemme suivant :

LEMME 1. — Soit la série de Dirichlet  $\sum_1^{+\infty} \frac{\alpha_n}{n^s}$ , où les coefficients  $\alpha_n$  sont réels ou complexes et satisfont à

$$|\alpha_n| \leq K \quad \text{pour tout } n \geq 1.$$

Si l'on a, quand  $s$  tend vers 1 par valeurs supérieures,

$$\sum_1^{+\infty} \frac{\alpha_n}{n^s} = \frac{\alpha}{s-1} + o\left[\frac{1}{s-1}\right],$$

(2) *J. London Math. Soc.* t. 13, 1938, p. 119-127 et *Amer. J. Math.*, t. 61, 1939, p. 713-721.

on a quand  $x$  tend vers  $+\infty$

$$\sum_{n \leq x} \frac{\alpha_n}{n} = \alpha \log x + o[\log x].$$

Il est clair qu'on a nécessairement  $|\alpha| \leq K$  car, pour  $s$  réel  $> 1$ ,

$$\left| \sum_1^{+\infty} \frac{\alpha_n}{n^s} \right| \leq K \zeta(s).$$

Pour obtenir la conclusion indiquée, il suffit de remarquer que, si l'on pose

$$\alpha_n = u_n + iv_n \quad \text{et} \quad \alpha = u + iv,$$

et si  $K' > K$ , on a quand  $s$  tend vers 1 par valeurs supérieures

$$\sum_1^{+\infty} \frac{u_n + K'}{n^s} \sim \frac{u + K'}{s - 1}$$

et

$$\sum_1^{+\infty} \frac{v_n + K'}{n^s} \sim \frac{v + K'}{s - 1},$$

ce qui revient à dire que, quand  $s$  tend vers zéro par valeurs positives,

$$\sum_1^{+\infty} \frac{u_n + K'}{n} \frac{1}{n^s} \sim \frac{u + K'}{s}$$

et

$$\sum_1^{+\infty} \frac{v_n + K'}{n} \frac{1}{n^s} \sim \frac{v + K'}{s}.$$

Un théorème bien connu de Hardy et Littlewood sur les séries de Dirichlet à coefficients positifs montre alors qu'on a quand  $t$  tend vers  $+\infty$

$$\sum_{\log n \leq t} \frac{u_n + K'}{n} \sim (u + K')t$$

et

$$\sum_{\log n \leq t} \frac{v_n + K'}{n} \sim (v + K')t.$$

En prenant  $t = \log x$ , on trouve que, quand  $x$  tend vers  $+\infty$ ,

$$\sum_{n \leq x} \frac{u_n + K'}{n} \sim (u + K') \log x$$

et

$$\sum_{n \leq x} \frac{v_n + K'}{n} \sim (v + K') \log x,$$

et, par suite,

$$\sum_{n \leq x} \frac{u_n}{n} = u \log x + o[\log x]$$

et

$$\sum_{n \leq x} \frac{v_n}{n} = v \log x + o[\log x].$$

2.2. A toute fonction  $f$  de la classe  $\mathfrak{M}$  nous associerons les nombres  $c_r^{(p)}(f)$  définis de la façon suivante :

Pour chaque nombre premier  $p$ , nous déterminons la suite  $c_1^{(p)}(f), c_2^{(p)}(f), \dots, c_r^{(p)}(f), \dots$  en prenant

$$c_1^{(p)}(f) = f(p),$$

puis, pour  $r > 1$ ,

$$(1) \quad c_r^{(p)}(f) = r f(p^r) - \sum_{j=1}^{r-1} c_j^{(p)}(f) f(p^{r-j}).$$

2.2.1. On a pour tout  $n \geq 1$

$$(2) \quad f(n) \log n = \sum_{p_i | n} c_j^{(p)}(f) f\left(\frac{n}{p^j}\right) \log p.$$

Cela résulte immédiatement de ce que, si  $p_0$  est l'un des diviseurs premiers de  $n$  et si  $n = p_0^r m$ , avec  $m$  non divisible par  $p_0$ , la somme des termes correspondant à  $p = p_0$  dans l'expression au second membre est égale à  $r f(n) \log p_0$ .

En effet, si  $r = 1$ , on a le seul terme

$$c_1^{(p_0)}(f) f(m) \log p_0 = f(p_0) f(m) \log p_0 = f(n) \log p_0,$$

et, si  $r > 1$ , on a la somme

$$\sum_{j=1}^r c_j^{(p_0)}(f) f(p_0^{r-j} m) \log p_0 = f(m) \log p_0 \left\{ \sum_{j=1}^{r-1} c_j^{(p_0)}(f) f(p_0^{r-j}) + c_r^{(p_0)}(f) \right\};$$

d'après (1), ceci est égal à

$$r f(p_0^r) f(m) \log p_0 = r f(n) \log p_0.$$

2.2.2. La formule (2) peut aussi s'écrire

$$f(n) \log n = \sum_{p_i m = n} c_j^{(p)}(f) f(m) \log p,$$

et l'on en déduit que, pour  $x > 0$ ,

$$(3) \quad \sum_{n \leq x} f(n) \log n = \sum_{m \leq x} f(m) \psi_f\left(\frac{x}{m}\right),$$

où  $\psi_f$  est la fonction définie par

$$(4) \quad \psi_f(x) = \sum_{p^j \leq x} c_j^{(p)}(f) \log p \quad (3);$$

2.3. Supposons maintenant, jusqu'à la fin de ce chapitre, que la fonction  $f$  appartienne à la classe  $\mathfrak{M}_0$ .

2.3.1. On voit d'abord qu'on a, quels que soient  $p$  et  $r$ ,

$$(5) \quad |c_j^{(p)}(f)| \leq 2^r - 1.$$

Cette inégalité s'obtient immédiatement, par récurrence sur  $r$ , en tenant compte du fait que  $c_1^{(p)}(f) = f(p)$  et de la formule (1).

2.3.2. Pour chaque  $p$ , la série entière

$$1 + \sum_{j=1}^{+\infty} f(p^j) z^j$$

est évidemment absolument convergente pour  $|z| < 1$  et, en raison de l'inégalité (5), la série entière

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{c_j^{(p)}(f)}{j} z^j$$

est absolument convergente pour  $|z| < \frac{1}{2}$ .

On voit qu'on a pour  $|z| < \frac{1}{2}$

$$(6) \quad 1 + \sum_{j=1}^{+\infty} f(p^j) z^j = \exp \left\{ \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{c_j^{(p)}(f)}{j} z^j \right\}.$$

En effet, si l'on pose

$$F_p(z) = 1 + \sum_{j=1}^{+\infty} f(p^j) z^j$$

et

$$C_p(z) = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{c_j^{(p)}(f)}{j} z^j,$$

on voit que, d'après la relation (1), on a pour  $|z| < \frac{1}{2}$

$$C_p'(z) F_p(z) = F_p'(z),$$

de sorte que la fonction égale à

$$F_p(z) \exp \{ -C_p(z) \}$$

est constante pour  $|z| < \frac{1}{2}$ .

---

(3) Signalons que la fonction  $\psi_f$  considérée ici n'est pas la même que celle considérée dans notre Mémoire (A).

Sa valeur constante est 1 puisque  $F_p(0) = 1$  et  $C_p(0) = 0$ .

De (6) on déduit que, pour  $|z| < \frac{1}{2}$ ,

$$(7) \quad (1-z) \left[ 1 + \sum_{j=1}^{+\infty} f(p^j) z^j \right] = \exp \left\{ \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{c_j^{(p)}(f) - 1}{j} z^j \right\}.$$

2.3.3. Il est facile de voir qu'on a pour  $\mathcal{R}s > 1$ .

$$(8) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(n)}{n^s} = \prod \left[ 1 + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{f(p^j)}{p^{js}} \right].$$

On voit immédiatement que les séries et le produit infini qui figurent dans cette relation sont absolument convergents.

$p_1, p_2, \dots, p_q, \dots$  étant les nombres premiers rangés par ordre croissant, si l'on désigne par  $f_q$  la fonction de la classe  $\mathcal{M}$  définie par

$$f_q(p^r) = \begin{cases} f(p^r) & \text{si } p \leq p_q, \\ 0 & \text{si } p > p_q, \end{cases}$$

on voit de proche en proche, en effectuant des produits de séries de Dirichlet, que, si  $\mathcal{R}s > 1$ , on a pour chaque  $q \geq 1$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f_q(n)}{n^s} = \prod_{r=1}^q \left[ 1 + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{f(p^j)}{p^{js}} \right].$$

(8) se déduit de là par passage à la limite en faisant tendre  $q$  vers  $+\infty$ .

De (8) on déduit qu'on a pour  $\mathcal{R}s > 1$

$$\frac{1}{\zeta(s)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(n)}{n^s} = \prod \left( 1 - \frac{1}{p^s} \right) \left[ 1 + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{f(p^j)}{p^{js}} \right],$$

d'où, en tenant compte de (7),

$$\frac{1}{\zeta(s)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(n)}{n^s} = \left( 1 - \frac{1}{2^s} \right) \left[ 1 + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{f(2^j)}{2^{js}} \right] \exp \left\{ \sum_{p>2} \frac{c_j^{(p)}(f) - 1}{jp^{js}} \right\},$$

ou, puisque  $c_1^{(p)}(f) = f(p)$ ,

$$(9) \quad \frac{1}{\zeta(s)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(n)}{n^s} = \left( 1 - \frac{1}{2^s} \right) \left[ 1 + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{f(2^j)}{2^{js}} \right] \exp \left\{ - \sum_{p>2} \frac{1-f(p)}{p^s} + \sum_{\substack{p>2 \\ j>1}} \frac{c_j^{(p)}(f) - 1}{jp^{js}} \right\}.$$

2.3.4. Il est à noter qu'on a pour  $s$  réel  $> 1$

$$(10) \quad \left| \exp \left\{ - \sum_{p>2} \frac{1-f(p)}{p^s} + \sum_{\substack{p>2 \\ j>1}} \frac{c_j^{(p)}(f) - 1}{jp^{js}} \right\} \right| \leq \exp \left\{ a - \sum_{p>2} \frac{1-\mathcal{R}f(p)}{p^s} \right\},$$



où  $a$  est la constante définie par

$$a = \sum_{p>2} \frac{2}{p(p-2)}.$$

Cela résulte immédiatement de ce que, par suite de l'inégalité (5),

$$\left| \sum_{\substack{p>2 \\ j>1}} \frac{c_j^{(p)}(f) - 1}{jp^{js}} \right| \leq \sum_{\substack{p>2 \\ j>1}} \frac{2^j}{jp^{js}} \leq \sum_{\substack{p>2 \\ j>1}} \frac{2^{j-1}}{p^j}.$$

Comme  $1 - \mathcal{R}f(p) \geq 0$ , (10) entraîne

$$(11) \quad \left| \exp \left\{ - \sum_{p>2} \frac{1-f(p)}{p^s} + \sum_{\substack{p>2 \\ j>1}} \frac{c_j^{(p)}(f) - 1}{p^{js}} \right\} \right| \leq e^a.$$

3. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1. — Soit  $f$  une fonction de la classe  $\mathfrak{M}_0$  et supposons que  $M(f)$  existe et ne soit pas nulle.

3.1. On a, quand  $x$  tend vers  $+\infty$ ,

$$\sum_{n \leq x} f(n) \sim M(f)x,$$

ce qui entraîne que, quand  $s$  tend vers 1 par valeurs supérieures,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(n)}{n^s} \sim \frac{M(f)}{s-1}.$$

Il en résulte, d'après la relation (9), que le produit

$$\left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \left[ 1 + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{f(2^j)}{2^{js}} \right] \exp \left\{ - \sum_{p>2} \frac{1-f(p)}{p^s} + \sum_{\substack{p>2 \\ j>1}} \frac{c_j^{(p)}(f) - 1}{jp^{js}} \right\}$$

tend vers  $M(f)$ .

3.2. Le produit des deux premiers facteurs tend vers

$$\frac{1}{2} \left[ 1 + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{f(2^j)}{2^j} \right].$$

En raison de l'inégalité (11), le fait que  $M(f) \neq 0$  nécessite que

$$1 + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{f(2^j)}{2^j} \neq 0,$$

ce qui revient à dire qu'on n'a pas

$$f(2^j) = -1 \quad \text{pour tout } j \geq 1.$$

3.3. On voit alors que, quand  $s$  tend vers 1 par valeurs supérieures, l'expression

$$\exp \left\{ - \sum_{p>2} \frac{1-f(p)}{p^s} + \sum_{\substack{p>2 \\ j>1}} \frac{c_j^{(p)}(f) - 1}{jp^{js}} \right\}$$

tend vers une limite finie non nulle.

Comme

$$\sum_{\substack{p>2 \\ j>1}} \frac{c_j^{(p)}(f) - 1}{jp^{js}} \quad \text{tend vers} \quad \sum_{\substack{p>2 \\ j>1}} \frac{c_j^{(p)}(f) - 1}{jp^j},$$

du fait qu'il y a convergence uniforme pour  $\Re s \geq 1$  en raison de l'inégalité (5), il en résulte que

$$\exp \left\{ - \sum_{p>2} \frac{1-f(p)}{p^s} \right\}$$

tend aussi vers une limite finie non nulle.

Comme  $\sum_{p>2} \frac{1-f(p)}{p^s}$  est une fonction de  $s$  continue pour  $s$  réel  $> 1$ , ceci entraîne que

$$\sum_{p>2} \frac{1-f(p)}{p^s}$$

tend vers une limite finie, de sorte qu'il en est de même de

$$\sum \frac{1-f(p)}{p^s}.$$

Autrement dit, quand  $s$  tend vers zéro par valeurs positives,

$$\sum \frac{1-f(p)}{p^{1+s}}$$

tend vers une limite finie.

3.4. Ceci entraîne, d'après un théorème taubérien classique, que la série

$$\sum \frac{1-f(p)}{p}$$

est convergente.

En effet, on peut écrire pour  $\Re s > 0$

$$\sum \frac{1-f(p)}{p^{1+s}} = \int_0^{+\infty} e^{-st} dS(t) = s \int_0^{+\infty} e^{-st} S(t) dt,$$

où

$$S(t) = \sum_{\log p \leq t} \frac{1-f(p)}{p} = \sum_{p \leq e^t} \frac{1-f(p)}{p}.$$

Quel que soit  $\lambda$  réel  $> 1$ , on a pour  $t > 0$  et  $t < t' \leq \lambda t$

$$|S(t') - S(t)| = \left| \sum_{e^t < p \leq e^{t'}} \frac{1-f(p)}{p} \right| \leq 2 \sum_{e^t < p \leq e^{\lambda t}} \frac{1}{p},$$

et il en résulte que

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \left\{ \sup_{t < t' \leq \lambda t} |S(t') - S(t)| \right\} \leq 2 \log \lambda.$$

La démonstration du théorème 1 est ainsi achevée.

3.5. Nous compléterons le théorème 1 par la remarque suivante :

La convergence de la série  $\sum \frac{1-f(p)}{p}$  entraîne évidemment celle de la série à termes réels  $\geq 0$

$$\sum \frac{1-\mathcal{R}f(p)}{p}.$$

On peut ajouter qu'on a

$$(12) \quad \sum \frac{1-\mathcal{R}f(p)}{p} \leq \log \frac{1}{|M(f)|} + B,$$

où  $B = a + 1$ ,  $a$  étant la constante considérée au paragraphe 2.3.4.

En effet, la relation (9) et l'inégalité (10) montrent qu'on a pour  $s$  réel  $> 1$

$$\left| \frac{1}{\zeta(s)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(n)}{n^s} \right| \leq \exp \left\{ a - \sum_{p>2} \frac{1-\mathcal{R}f(p)}{p^s} \right\}.$$

En faisant tendre  $s$  vers 1, on obtient à la limite

$$|M(f)| \leq \exp \left\{ a - \sum_{p>2} \frac{1-\mathcal{R}f(p)}{p} \right\},$$

d'où

$$\sum_{p>2} \frac{1-\mathcal{R}f(p)}{p} \leq a + \log \frac{1}{|M(f)|}.$$

On en déduit (12) en remarquant que

$$\frac{1-\mathcal{R}f(2)}{2} \leq 1.$$

4. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 3. — 4.1. Pour établir le théorème 3, nous aurons besoin de quelques lemmes simples.

4.1.1. LEMME 2. — Si  $f \in \mathfrak{N}$  et si la série  $\sum_1^{+\infty} \frac{|f(n)|}{n}$  est convergente, on a

$$\sum_1^{+\infty} \frac{f(n)}{n} = \prod \left[ 1 + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{f(p^j)}{p^j} \right].$$

Chacune des séries qui figurent dans cette formule est absolument convergente et l'on voit immédiatement que le produit infini est aussi absolument convergent.

La démonstration de la formule est semblable à celle de (8) au paragraphe 2.3.3.

4.1.2. LEMME 3. — Si  $f \in \mathfrak{N}$  et si la série double

$$\sum_{p,i} \frac{|f(p^i)|}{p^i}$$

est convergente, la série

$$\sum_1^{+\infty} \frac{|f(n)|}{n}$$

est convergente.

Cela résulte immédiatement de ce que, pour tout  $x > 0$ ,

$$\sum_{n \leq x} \frac{|f(n)|}{n} \leq \prod_{p \leq x} \left[ 1 + \sum_{p^i \leq x} \frac{|f(p^i)|}{p^i} \right]$$

et de ce que le produit infini

$$\prod \left[ 1 + \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{|f(p^i)|}{p^i} \right]$$

est convergent.

4.1.3. LEMME 4. — Soient  $g$  et  $h$  deux fonctions arithmétiques réelles ou complexes quelconques.

Définissons une fonction arithmétique  $f$  par

$$f(n) = \sum_{d|n} h(d) g\left(\frac{n}{d}\right).$$

1° Si  $g$  et  $h \in \mathfrak{N}$ ,  $f \in \mathfrak{N}$ .

2° Si  $M(g)$  existe et si la série  $\sum_1^{+\infty} \frac{|h(n)|}{n}$  est convergente,  $M(f)$  existe et

$$M(f) = M(g) \sum_1^{+\infty} \frac{h(n)}{n}.$$

1° résulte immédiatement de ce que, quand  $(m, n) = 1$ , tout diviseur du produit  $mn$  se met, de façon unique, sous forme du produit d'un diviseur de  $m$  par un diviseur de  $n$ .

On a ainsi, si  $(m, n) = 1$ ,

$$\begin{aligned} f(mn) &= \sum_{\substack{d_1/m \\ d_2/n}} h(d_1 d_2) g\left(\frac{mn}{d_1 d_2}\right), \\ &= \sum_{\substack{d_1/m \\ d_2/n}} h(d_1) h(d_2) g\left(\frac{m}{d_1}\right) g\left(\frac{n}{d_2}\right), \\ &= f(m) f(n). \end{aligned}$$

Pour démontrer 2°, nous poserons

$$\sum_{n \leq x} g(n) = M(g) x + x \eta(x).$$

Ainsi  $\eta(x)$  tend vers zéro quand  $x$  tend vers  $+\infty$ .

Comme le produit  $x\eta(x)$  est borné sur tout intervalle fini, on en déduit que  $\eta(x)$  est borné pour  $x \geq 1$  : il existe un nombre positif  $H$  tel que

$$|\eta(x)| \leq H \quad \text{pour } x \geq 1.$$

On voit que, pour  $x > 0$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} f(n) &= \sum_{d \leq x} h(d) \sum_{\substack{m \leq x \\ m \leq d}} g(m), \\ &= \sum_{d \leq x} h(d) \left[ M(g) \frac{x}{d} + \frac{x}{d} \eta\left(\frac{x}{d}\right) \right], \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\frac{1}{x} \sum_{n \leq x} f(n) = M(g) \sum_{n \leq x} \frac{h(n)}{n} + \sum_{n \leq x} \frac{h(n)}{n} \eta\left(\frac{x}{n}\right).$$

Il nous suffit donc de démontrer que  $\sum_{n \leq x} \frac{h(n)}{n} \eta\left(\frac{x}{n}\right)$  tend vers zéro quand  $x$  tend vers  $+\infty$ .

Or, si  $\varepsilon$  est un nombre positif quelconque, il existe un  $x_0 > 1$  tel que

$$|\eta(x)| \leq \varepsilon \quad \text{pour } x \geq x_0.$$

On a pour  $x > x_0$

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n \leq x} \frac{h(n)}{n} \eta\left(\frac{x}{n}\right) \right| &\leq \sum_{n \leq \frac{x}{x_0}} \left| \frac{h(n)}{n} \eta\left(\frac{x}{n}\right) \right| + \sum_{\frac{x}{x_0} < n \leq x} \left| \frac{h(n)}{n} \eta\left(\frac{x}{n}\right) \right|, \\ &\leq \varepsilon \sum_{n \leq \frac{x}{x_0}} \frac{|h(n)|}{n} + H \sum_{\frac{x}{x_0} < n \leq x} \frac{|h(n)|}{n}, \end{aligned}$$

ce qui entraîne

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \left| \sum_{n \leq x} \frac{h(n)}{n} \eta\left(\frac{x}{n}\right) \right| \leq \varepsilon \sum_1^{+\infty} \frac{|h(n)|}{n}.$$

4.2. Nous sommes maintenant en mesure d'établir le théorème 3, dont l'énoncé est le suivant :

**THÉORÈME 3.** — *Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions arithmétiques appartenant à la classe  $\mathcal{N}_0$ .*

*Supposons que :*

- 1°  $M(g)$  existe ;
- 2°  $\sum \frac{|f(p) - g(p)|}{p} < +\infty$  ;
- 3° *Si l'on a  $|g(2^r)| = 1$  pour tout  $r \geq 1$ , avec  $g(2^r) = (-1)^{r+1} g(2)^r$  pour  $r > 1$ , on ait  $f(2^r) = g(2^r)$  pour tout  $r \geq 1$ .*

*Alors  $M(f)$  existe et*

$$M(f) = M(g) \prod_{j=1}^{+\infty} \frac{1 + \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{f(p^i)}{p^i}}{1 + \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{g(p^i)}{p^i}},$$

le produit infini, où le facteur correspondant à  $p = 2$  est pris égal à un s'il se présente sous la forme  $\frac{0}{0}$ , étant absolument convergent <sup>(4)</sup>.

4.2.1. Soient  $F_p$  et  $G_p$  les fonctions définies pour  $|z| < 1$  par

$$F_p(z) = 1 + \sum_{j=1}^{+\infty} f(p^j) z^j \quad \text{et} \quad G_p(z) = 1 + \sum_{j=1}^{+\infty} g(p^j) z^j.$$

On a certainement  $G_p(z) \neq 0$  pour  $|z| < \frac{1}{2}$  puisque, pour  $|z| < 1$ ,

$$\left| \sum_{j=1}^{+\infty} g(p^j) z^j \right| \leq \sum_{j=1}^{+\infty} |z|^j = \frac{|z|}{1 - |z|},$$

et que

$$\frac{|z|}{1 - |z|} < 1 \quad \text{pour} \quad |z| < \frac{1}{2}.$$

Les fonctions  $\frac{F_p(z)}{G_p(z)}$ , évidemment égales à 1 pour  $z = 0$ , sont donc méromorphes pour  $|z| < 1$  et holomorphes pour  $|z| < \frac{1}{2}$ .

Nous poserons, pour  $|z| < \frac{1}{2}$ ,

$$(13) \quad \frac{F_p(z)}{G_p(z)} = 1 + \sum_{j=1}^{+\infty} h_j^{(p)} z^j,$$

---

<sup>(4)</sup> Il est à noter que, dans le cas où  $M(g) \neq 0$ , le résultat est une conséquence du théorème 2.

et nous désignerons par  $h$  la fonction de la classe  $\mathfrak{N}$  déterminée par

$$h(p^r) = h(p^r).$$

4.2.2. On voit d'abord qu'on a pour tout  $n \geq 1$

$$f(n) = \sum_{d|n} h(d) g\left(\frac{n}{d}\right).$$

En effet, si l'on définit une fonction arithmétique  $f'$  par

$$f'(n) = \sum_{d|n} h(d) g\left(\frac{n}{d}\right),$$

$f'$  appartient à la classe  $\mathfrak{N}$  d'après la première partie du lemme 4.

Quels que soient le nombre premier  $p$  et l'entier  $r \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} f'(p^r) &= \sum_{j=0}^r h(p^j) g(p^{r-j}), \\ &= g(p^r) + \sum_{j=1}^r h(p^j) g(p^{r-j}), \\ &= f(p^r). \end{aligned}$$

Par suite,  $f' = f$ .

4.2.3. Remarquons maintenant que, quels que soient  $p$  et  $r$ ,

$$|h(p^r)| \leq 2^r.$$

Cela résulte immédiatement de ce que les coefficients du développement en série entière de la fonction  $\frac{F_p(z)}{G_p(z)}$  sont majorés en module par ceux du développement de la fonction

$$\frac{1 + \sum_{j=1}^{+\infty} z^j}{1 - \sum_{j=1}^{+\infty} z^j} = \frac{1}{1 - 2z}.$$

Si l'on observe, de plus, que

$$h(p) = h(p^1) = f(p) - g(p),$$

on voit que, pour chaque  $p > 2$ , la série

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{|h(p^j)|}{p^j}$$

est convergente et sa somme est au plus égale à

$$\frac{|f(p) - g(p)|}{p} + \frac{4}{p(p-2)}.$$

4.2.4. La série  $\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{|h(2^j)|}{2^j}$ , c'est-à-dire  $\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{|h_j^{(2)}|}{2^j}$ , est aussi convergente, car la fonction  $\frac{F_2(z)}{G_2(z)}$  est holomorphe dans un cercle de rayon supérieur à  $\frac{1}{2}$ .

En effet,  $G_2(z)$  ne peut s'annuler pour  $|z| = \frac{1}{2}$  que si l'on a

$$|g(2^r)| = 1 \quad \text{pour tout } r \geq 1,$$

avec

$$g(2^r) = (-1)^{r+1} g(2)^r \quad \text{pour } r > 1.$$

Mais, dans ce cas,

$$F_2(z) = G_2(z) \quad \text{et} \quad \frac{F_2(z)}{G_2(z)} = 1.$$

4.2.5. Il résulte de ce qui précède que la série double

$$\sum_{p,j} \frac{|h(p^j)|}{p^j}$$

est convergente.

Alors, d'après le lemme 3, la série

$$\sum_1^{+\infty} \frac{|h(n)|}{n}$$

est convergente, et, d'après la deuxième partie du lemme 4,  $M(f)$  existe et l'on a

$$M(f) = M(g) \sum_1^{+\infty} \frac{h(n)}{n}.$$

On a, d'après le lemme 2,

$$\begin{aligned} \sum_1^{+\infty} \frac{h(n)}{n} &= \prod \left[ 1 + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{h(p^j)}{p^j} \right], \\ &= \prod \left[ 1 + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{h_j^{(p)}}{p^j} \right], \end{aligned}$$

et le produit infini est absolument convergent.

Si  $p > 2$ , de sorte que  $\frac{1}{p} < \frac{1}{2}$ , on a d'après (13)

$$1 + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{h_j^{(p)}}{p^j} = \frac{F_p\left(\frac{1}{p}\right)}{G_p\left(\frac{1}{p}\right)} = \frac{1 + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{f(p^j)}{p^j}}{1 + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{g(p^j)}{p^j}}.$$



Si  $G_2\left(\frac{1}{2}\right) \neq 0$ , on a de même

$$1 + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{h_j^{(2)}}{2^j} = \frac{F_2\left(\frac{1}{2}\right)}{G_2\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{1 + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{f(2^j)}{2^j}}{1 + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{g(2^j)}{2^j}}.$$

Si  $G_2\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ , on a  $F_2(z) = G_2(z)$ , et en particulier  $F_2\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ , et l'on a

$$1 + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{h_j^{(2)}}{2^j} = 1.$$

Le théorème 3 est ainsi complètement démontré.

4.3. Pour la démonstration du théorème 2, nous n'aurons pas besoin de ce théorème dans toute sa force, mais seulement du corollaire suivant, qui pourrait se démontrer directement de manière plus simple.

COROLLAIRE. — Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions de la classe  $\mathcal{M}_0$ .

Supposons qu'il existe un ensemble  $E$  de nombres premiers tel que  $\sum_{p \in E} \frac{1}{p} < +\infty$

et que

$$g(p^r) = 1 \quad \text{quand } p \in E$$

et

$$f(p^r) = g(p^r) \quad \text{quand } p \notin E.$$

Alors, si  $M(g)$  existe,  $M(f)$  existe.

5. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2. — 5.1. Pour établir le théorème 2, nous avons encore besoin du lemme suivant :

LEMME 5. — Soit  $f$  une fonction de la classe  $\mathcal{M}_0$  et supposons que

1°  $f(2^r) = 1$  pour tout  $r \geq 1$ ;

2°  $f(p)$  tende vers 1 quand  $p$  tend vers  $+\infty$ ;

3° la série  $\sum \frac{1-f(p)}{p}$  soit convergente.

Alors  $M(f)$  existe.

5.1.1. On voit d'abord que la fonction  $\psi_f$  introduite au paragraphe 2.2.2 satisfait à

$$(14) \quad \psi_f(x) = x + o[x]$$

quand  $x$  tend vers  $+\infty$ .

En effet, comme  $c_1^{(p)}(f) = f(p)$ , on a

$$\psi_f(x) = \sum_{p \leq x} f(p) \log p + \sum_{\substack{p^j \leq x \\ j > 1}} c_j^{(p)}(f) \log p.$$

On a ensuite

$$\begin{aligned} \sum_{p \leq x} f(p) \log p &= \sum_{p \leq x} \log p + \sum_{p \leq x} [f(p) - 1] \log p, \\ &= x + o[x], \end{aligned}$$

puisque  $f(p) - 1$  tend vers zéro quand  $p$  tend vers  $+\infty$ .

Par ailleurs,

$$\sum_{\substack{p^j \leq x \\ j > 1}} c_j^{(p)}(f) \log p = \sum_{p \leq \sqrt{x}} \left\{ \sum_{\substack{p^j \leq x \\ j > 1}} c_j^{(p)}(f) \log p \right\}.$$

Mais, d'autre part, comme  $f(2^r) = 1$  pour  $r \geq 1$ , la formule (1) montre que  $c_r^{(2)}(f) = 1$  pour  $r \geq 1$ , de sorte que

$$\left| \sum_{\substack{2^j \leq x \\ j > 1}} c_j^{(2)}(f) \log 2 \right| = \sum_{\substack{2^j \leq x \\ j > 1}} \log 2 \leq \log x.$$

Par ailleurs, pour chaque  $p > 2$ , on a d'après (5)

$$\left| \sum_{\substack{p^j \leq x \\ j > 1}} c_j^{(p)}(f) \log p \right| \leq \sum_{p^j \leq x} 2^j \log p < 2^{\frac{\log x}{\log p} + 1} \log p = 2x^{\frac{\log 2}{\log p}} \log p.$$

Donc

$$\begin{aligned} \left| \sum_{\substack{p^j \leq x \\ j > 1}} c_j^{(p)}(f) \log p \right| &\leq \log x + 2x^{\frac{\log 2}{\log 3}} \log 3 + 2x^{\frac{\log 2}{\log 5}} \sum_{p \leq \sqrt{x}} \log p, \\ &= o[x]. \end{aligned}$$

5.1.2. De (14) et du fait que  $\psi_f(x)$  est bornée sur tout intervalle fini, on déduit immédiatement que, pour  $x$  infini,

$$\sum_{m \leq x} \left| \psi_f\left(\frac{x}{m}\right) - \frac{x}{m} \right| = o[x \log x].$$

5.1.3. La formule (3) du paragraphe 2.2.2 peut s'écrire

$$\sum_{n \leq x} f(n) \log n = x \sum_{m \leq x} \frac{f(m)}{m} + \sum_{m \leq x} f(m) \left[ \psi_f\left(\frac{x}{m}\right) - \frac{x}{m} \right],$$

et, comme

$$\left| \sum_{m \leq x} f(m) \left[ \psi_f\left(\frac{x}{m}\right) - \frac{x}{m} \right] \right| \leq \sum_{m \leq x} \left| \psi_f\left(\frac{x}{m}\right) - \frac{x}{m} \right|,$$

on en déduit

$$(15) \quad \sum_{n \leq x} f(n) \log n = x \sum_{n \leq x} \frac{f(n)}{n} + o[x \log x].$$

5.1.4. Maintenant, la formule (9) du paragraphe 2.3.3 montre que, lorsque  $s$  tend vers 1 par valeurs supérieures,

$$\frac{1}{\zeta(s)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(n)}{n^s}$$

tend vers une limite finie, soit  $\alpha$ , de sorte qu'on a

$$\sum_1^{+\infty} \frac{f(n)}{n^s} = \frac{\alpha}{s-1} + o\left[\frac{1}{s-1}\right].$$

Alors le lemme 1 montre qu'on a pour  $x$  infini

$$\sum_{n \leq x} \frac{f(n)}{n} = \alpha \log x + o[\log x]$$

et (15) donne

$$(16) \quad \sum_{n \leq x} f(n) \log n = \alpha x \log x + o[x \log x].$$

5.1.5. Si l'on pose

$$F(x) = \sum_{n \leq x} f(n),$$

on a pour  $x \geq 1$

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} f(n) \log n &= \int_{\frac{1}{2}}^x \log t \, dF(t) = F(x) \log x - \int_1^x \frac{F(t)}{t} \, dt, \\ &= F(x) \log x + O[x]. \end{aligned}$$

Avec (16), ceci donne, pour  $x$  infini,

$$F(x) = \alpha x + o[x].$$

Donc  $M(f)$  existe et est égale à  $\alpha$ .

5.2. Nous sommes maintenant en mesure d'établir le théorème 2.

Supposons donc que  $f$  soit une fonction de la classe  $\mathfrak{M}_0$ , assujettie seulement à ce que la série

$$\sum \frac{1-f(p)}{p}$$

soit convergente.

5.2.1. La convergence de la série

$$\sum \frac{1-f(p)}{p}$$

implique évidemment celle de la série à termes  $\geq 0$

$$\sum \frac{1-\mathcal{R}f(p)}{p}.$$

On peut trouver une fonction positive  $\omega(p)$  telle que  $\omega(p)$  tende vers  $+\infty$  quand  $p$  tend vers  $+\infty$ , mais que la série

$$\sum \omega(p) \frac{1 - \mathcal{R}f(p)}{p}$$

soit encore convergente.

Soit  $E$  l'ensemble formé du nombre 2 et des  $p > 2$  pour lesquels

$$1 - \mathcal{R}f(p) > \frac{1}{\omega(p)},$$

s'il y en a.

On a  $\sum_{p \in E} \frac{1}{p} < +\infty$  car, si  $p \in E$  et  $p > 2$ ,

$$\frac{1}{p} < \omega(p) \frac{1 - \mathcal{R}f(p)}{p}.$$

Soit  $g$  la fonction de la classe  $\mathcal{N}$  déterminée par

$$g(p^r) = \begin{cases} f(p^r) & \text{si } p \notin E, \\ 1 & \text{si } p \in E. \end{cases}$$

5.2.2.  $g$  appartient évidemment à la classe  $\mathcal{N}_0$ .

On a  $g(2^r) = 1$  pour tout  $r \geq 1$ , puisque  $2 \in E$ .

$g(p)$  tend vers 1 quand  $p$  tend vers  $+\infty$ , car on a toujours

$$1 - \mathcal{R}g(p) \leq \frac{1}{\omega(p)},$$

de sorte que  $\mathcal{R}g(p)$  tend vers 1.

Enfin, la série  $\sum \frac{1 - g(p)}{p}$  est convergente.

En effet, on a pour  $x \geq 2$

$$\sum_{p \leq x} \frac{1 - g(p)}{p} = \sum_{p \leq x} \frac{1 - f(p)}{p} - \sum_{\substack{p \leq x \\ p \in E}} \frac{1 - f(p)}{p}.$$

Les deux sommes au second membre tendent vers des limites finies quand  $x$  tend vers  $+\infty$ , la première par hypothèse, la seconde parce qu'on a

$$\left| \frac{1 - f(p)}{p} \right| \leq \frac{2}{p} \quad \text{et} \quad \sum_{p \in E} \frac{1}{p} < +\infty.$$

Ceci étant, le lemme 5 permet d'affirmer que  $M(g)$  existe.

Alors, le corollaire du théorème 3, énoncé au paragraphe 4.3, permet d'affirmer l'existence de  $M(f)$ .

5.2.3. Pour déterminer la valeur de  $M(f)$ , observons que, du fait que, pour  $x$  infini,

$$\sum_{n \leq x} f(n) = M(f) \cdot x + o[x],$$

il résulte que, quand  $s$  tend vers 1 par valeurs supérieures,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(n)}{n^s} = \frac{M(f)}{s-1} + o\left[\frac{1}{s-1}\right],$$

de sorte que  $\frac{1}{\zeta(s)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(n)}{n^s}$  tend vers  $M(f)$ .

La formule (9) du paragraphe 2.3.3 montre alors que

$$M(f) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left[1 + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{f(2^j)}{2^j}\right] \exp\left\{-\sum_{p>2} \frac{1-f(p)}{p} + \sum_{\substack{p>2 \\ j>1}} \frac{c_j^{(p)}(f)-1}{jp^j}\right\}.$$

Ceci montre déjà que  $M(f)$  ne peut être nulle que si

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{f(2^j)}{2^j} = -1,$$

c'est-à-dire si  $f(2^j) = -1$  pour tout  $j \geq 1$ .

D'autre part, on voit que  $M(f)$  est la valeur du produit infini convergent

$$\prod \left(1 - \frac{1}{p}\right) \left[1 + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{f(p^j)}{p^j}\right].$$

Tous les facteurs autres que le premier, correspondant à  $p=2$ , sont non nuls.

De plus, pour chaque  $p > 2$ , la formule (7) du paragraphe 2.3.2 donne, en prenant  $z = \frac{1}{p}$ ,

$$\left(1 - \frac{1}{p}\right) \left[1 + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{f(p^j)}{p^j}\right] = \exp\left\{\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{c_j^{(p)}(f)-1}{jp^j}\right\}.$$

On a, par suite, pour  $x > 2$ ,

$$\begin{aligned} \prod_{2 < p \leq x} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \left[1 + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{f(p^j)}{p^j}\right] &= \exp\left\{\sum_{\substack{2 < p \leq x \\ j \geq 1}} \frac{c_j^{(p)}(f)-1}{jp^j}\right\} \\ &= \exp\left\{-\sum_{2 < p \leq x} \frac{1-f(p)}{p} + \sum_{\substack{2 < p \leq x \\ j > 1}} \frac{c_j^{(p)}(f)-1}{jp^j}\right\}, \end{aligned}$$

et, quand  $x$  tend vers  $+\infty$ , ceci tend vers

$$\exp \left\{ - \sum_{p>2} \frac{1-f(p)}{p} + \sum_{\substack{p>2 \\ j>1}} \frac{c_j^{(p)}(f) - 1}{jp^j} \right\}.$$

La démonstration du théorème 2 est ainsi achevée.

5.3 Nous compléterons le théorème 2 par la remarque suivante :

*Soit  $f$  une fonction de la classe  $\mathcal{M}_0$ , dépendant d'un paramètre  $t$ , qui parcourt un certain ensemble de points d'un espace topologique.*

*Supposons, d'une part, que, pour chaque  $t$  appartenant à cet ensemble, la série*

$$\sum \frac{1-f(p)}{p}$$

*soit convergente, de sorte que  $M(f)$  existe d'après le théorème 2, d'autre part, que, pour chaque nombre premier  $p$  et chaque entier  $r \geq 1$ ,  $f(p^r)$  soit une fonction continue de  $t$ .*

*Alors  $M(f)$  est le produit de  $\exp \left\{ - \sum \frac{1-f(p)}{p} \right\}$  par une fonction continue de  $t$ .*

Ceci se déduit immédiatement de la première expression de  $M(f)$  obtenue au paragraphe précédent, en observant que la série  $\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{f(2^j)}{2^j}$  et la série double  $\sum_{\substack{p>2 \\ j>1}} \frac{c_j^{(p)}(f) - 1}{jp^j}$  sont uniformément convergentes par rapport à  $t$  et que, pour chaque  $p$ , les  $c_j^{(p)}$  s'expriment par des polynomes en  $f(p), f(p^2), \dots, f(p^r), \dots$

6. APPLICATION AUX FONCTIONS RÉELLES ADDITIVES. —  $f$  étant une fonction arithmétique réelle, désignons par  $N_f(x, u)$  le nombre des  $n$  au plus égaux à  $x$  pour lesquels

$$f(n) \leq u.$$

On dit que  $f$  possède une loi de distribution s'il existe une fonction réelle  $\sigma$  non décroissante sur  $] -\infty, +\infty[$  et satisfaisant à

$$\lim_{u \rightarrow -\infty} \sigma(u) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{u \rightarrow +\infty} \sigma(u) = 1,$$

telle que, pour toute valeur de  $u$  pour laquelle  $\sigma$  est continue,  $\frac{1}{x} N_f(x, u)$  tende vers  $\sigma(u)$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$ .

6.1. D'après un théorème bien connu du Calcul des Probabilités, pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que, quand  $x$  tend vers  $+\infty$ ,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itu} d \left[ \frac{1}{x} N_f(x, u) \right]$$

converge vers une fonction continue  $\Phi(t)$ .

Mais on voit immédiatement qu'on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itu} d\left[\frac{1}{x} N_f(x, u)\right] = \frac{1}{x} \sum_{n \leq x} \exp[itf(n)].$$

Donc, pour que la fonction arithmétique réelle  $f$  possède une loi de distribution, il faut et il suffit que, pour chaque  $t$  réel, la fonction arithmétique égale à

$$\exp[itf(n)]$$

possède une valeur moyenne, et que cette valeur moyenne soit une fonction continue de  $t$ .

6.2. On va voir que, grâce à cette remarque, nos résultats fournissent une nouvelle solution du problème qui consiste à trouver des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction arithmétique réelle additive  $f$  possède une loi de distribution, problème résolu par Erdős et Wintner.

Les conditions obtenues par Erdős et Wintner sont les suivantes :

Si l'on définit une fonction  $f^*$  sur l'ensemble des nombres premiers par

$$f^*(p) = \begin{cases} f(p) & \text{quand } |f(p)| < 1, \\ 1 & \text{quand } |f(p)| \geq 1, \end{cases}$$

il faut et il suffit que les deux séries

$$\sum \frac{f^*(p)}{p} \quad \text{et} \quad \sum \frac{f^*(p)^2}{p}$$

soient convergentes.

On voit immédiatement que la convergence de ces deux séries est équivalente à ce qui suit :

Quel que soit  $R > 0$ , on a

$$\sum_{|f(p)| > R} \frac{1}{p} < +\infty \quad \text{et} \quad \sum_{|f(p)| \leq R} \frac{f(p)^2}{p} < +\infty,$$

et la série

$$\sum_{|f(p)| \leq R} \frac{f(p)}{p}$$

est convergente.

Il suffit d'ailleurs que ceci ait lieu pour un  $R > 0$  pour qu'il en soit de même pour tous.

6.3. Soit donc  $f$  une fonction arithmétique réelle additive.

6.3.1. Supposons d'abord que  $f$  possède une loi de distribution.

Alors, pour chaque  $t$  réel, la fonction arithmétique égale à

$$\exp[itf(n)]$$

possède une valeur moyenne  $\Phi(t)$ , et la fonction  $\Phi$  est continue.

Comme  $\Phi(0) = 1$ , il existe un nombre positif  $T$  tel que

$$|\Phi(t)| \geq \frac{1}{2} \quad \text{pour } |t| \leq T.$$

Le théorème 1, avec le complément que nous lui avons donné au paragraphe 3.5, montre alors que, pour chaque  $t$  réel satisfaisant à  $|t| \leq T$ , la série

$$\sum \frac{1 - \exp[itf(p)]}{p}$$

est convergente, de sorte qu'il en est de même des séries

$$(17) \quad \sum \frac{1 - \cos tf(p)}{p}$$

et

$$(18) \quad \sum \frac{\sin tf(p)}{p},$$

et l'on a

$$(19) \quad \sum \frac{1 - \cos tf(p)}{p} \leq C,$$

où  $C = B + \log 2$ .

La convergence de la série (17) pour  $|t| \leq T$  entraîne celle de la série

$$\sum_{|f(p)| \leq \frac{2}{T}} \frac{1 - \cos tf(p)}{p},$$

et, comme il existe un  $\alpha > 0$  tel que

$$1 - \cos \theta \geq \alpha \theta^2 \quad \text{pour } |\theta| \leq 2,$$

on en déduit la convergence de la série

$$\sum_{|f(p)| \leq \frac{2}{T}} \frac{f(p)^2}{p}.$$

Par ailleurs, l'inégalité (19) donne

$$\sum_{|f(p)| > \frac{2}{T}} \frac{1 - \cos tf(p)}{p} \leq C,$$

d'où, en intégrant sur l'intervalle  $[0, T]$  et divisant par  $T$ ,

$$\sum_{|f(p)| > \frac{2}{T}} \frac{1}{p} \left[ 1 - \frac{\sin Tf(p)}{Tf(p)} \right] \leq C.$$



Comme, quand  $|f(p)| > \frac{2}{T}$ ,

$$1 - \frac{\sin T f(p)}{T f(p)} > \frac{1}{2},$$

on déduit de là que

$$\sum_{|f(p)| > \frac{2}{T}} \frac{1}{p} \leq 2C.$$

Compte tenu de ceci, la convergence de la série (18) pour  $|t| \leq T$  entraîne celle de la série

$$\sum_{|f(p)| \leq \frac{2}{T}} \frac{\sin t f(p)}{p},$$

et, comme, pour  $|\theta| \leq 2$ ,

$$|\theta - \sin \theta| \leq \frac{\theta^3}{6} \leq \frac{1}{3} \theta^2,$$

on en déduit la convergence de la série

$$\sum_{|f(p)| \leq \frac{2}{T}} \frac{f(p)}{p}.$$

6.3.2. Supposons maintenant que, pour tout  $R > 0$ , on ait

$$\sum_{|f(p)| > R} \frac{1}{p} < +\infty \quad \text{et} \quad \sum_{|f(p)| \leq R} \frac{f(p)^2}{p} < +\infty,$$

et la série

$$\sum_{|f(p)| \leq R} \frac{f(p)}{p}$$

soit convergente.

On voit que, quel que soit  $T > 0$ , la série

$$\sum \frac{1 - \exp[it f(p)]}{p}$$

est uniformément convergente sur l'intervalle  $[-T, +T]$ .

$R$  étant fixé arbitrairement, on voit d'abord que la série

$$\sum_{|f(p)| > R} \frac{1 - \exp[it f(p)]}{p}$$

est uniformément convergente sur  $[-T, +T]$ , puisque

$$\left| \frac{1 - \exp[it f(p)]}{p} \right| \leq \frac{2}{p}.$$

Ensuite, il en est de même de la série

$$\sum_{|f(p)| \leq R} \frac{1 - \exp[itf(p)]}{p},$$

car on a

$$\frac{1 - \exp[itf(p)]}{p} = -it \frac{f(p)}{p} + \frac{1 - \cos tf(p)}{p} + i \left[ \frac{tf(p)}{p} - \frac{\sin tf(p)}{p} \right]$$

et, quand  $|f(p)| \leq R$ , on a pour  $|t| \leq T$

$$0 \leq \frac{1 - \cos tf(p)}{p} \leq \frac{t^2 f(p)^2}{2p} \leq \frac{T^2}{2} \frac{f(p)^2}{p}$$

et

$$\left| \frac{tf(p)}{p} - \frac{\sin tf(p)}{p} \right| \leq \frac{|tf(p)|^3}{6p} \leq \frac{T^3 R}{6} \frac{f(p)^2}{p}.$$

Il résulte de là que la série

$$\sum \frac{1 - \exp[itf(p)]}{p}$$

est convergente pour tout  $t$  réel et sa somme est une fonction continue de  $t$ .

Alors, le théorème 2, avec le complément que nous lui avons donné au paragraphe 5.3, montre que, pour chaque  $t$  réel, la fonction arithmétique égale à

$$\exp[itf(n)]$$

possède une valeur moyenne, et que cette valeur moyenne est une fonction continue de  $t$ .

La fonction  $f$  possède donc une loi de distribution.

6.4. La même méthode permet de traiter le cas d'une fonction additive à valeurs dans l'espace  $R^m$ .

$f$  étant une fonction arithmétique à valeurs dans l'espace  $R^m$ , désignons par  $N_f(x, \mathcal{E})$  le nombre des  $n \leq x$  pour lesquels  $f(n)$  appartient à l'ensemble  $\mathcal{E}$ .

Nous dirons que  $f$  possède une loi de distribution s'il existe une mesure positive ou nulle  $\mu$  définie dans  $R^m$  et satisfaisant à  $\mu(R^m) = 1$ , telle que, pour tout ensemble  $\mathcal{E}$  dont la frontière est de mesure nulle,  $\frac{1}{x} N_f(x, \mathcal{E})$  tende vers  $\mu(\mathcal{E})$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$ .

Si  $f$  est additive, on trouve que, pour que  $f$  possède une loi de distribution, il faut et il suffit que, pour tout  $R > 0$ , on ait

$$\sum_{\|f(p)\| > R} \frac{1}{p} < +\infty \quad \text{et} \quad \sum_{\|f(p)\| \leq R} \frac{\|f(p)\|^2}{p} < +\infty$$

et la série

$$\sum_{\|f(p)\| \leq R} \frac{f(p)}{p}$$

soit convergente, ou, ce qui revient au même, que, si

$$f(n) = [f_1(n), f_2(n), \dots, f_m(n)],$$

chacune des fonctions  $f_1, f_2, \dots, f_m$  possède une loi de distribution.

7. VALEURS MOYENNES DE FONCTIONS MULTIPLICATIVES SUR CERTAINS ENSEMBLES D'ENTIERS. — Soit A un ensemble infini d'entiers naturels, et soit  $\nu_A(x)$  le nombre des nombres de A au plus égaux à  $x$ .

$f$  étant une fonction arithmétique réelle ou complexe, si l'expression

$$\frac{1}{\nu_A(x)} \sum_{\substack{n \leq x \\ n \in A}} f(n)$$

tend vers une limite finie quand  $x$  tend vers  $+\infty$ , nous dirons que  $f$  possède une valeur moyenne sur l'ensemble A égale à cette limite.

Nous désignerons la valeur moyenne de  $f$  sur l'ensemble A, lorsqu'elle existe, par  $M(f, A)$ .

La valeur moyenne  $M(f)$  considérée jusqu'ici apparaît comme cas particulier de celle-ci, en prenant A égal à l'ensemble de tous les entiers naturels.

7.1. Le théorème 2 entraîne que, si  $f$  est une fonction de la classe  $\mathfrak{M}_0$  et si la série

$$\sum \frac{1-f(p)}{p}$$

est convergente,  $f$  possède une valeur moyenne sur l'ensemble Q des entiers positifs qui ne sont divisibles par aucun carré autre que 1.

Cette valeur moyenne est d'ailleurs non nulle et est en général différente de  $M(f)$ .

Ceci résulte immédiatement de ce qu'on a

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ n \in Q}} f(n) = \sum_{n \leq x} f_0(n),$$

où  $f_0$  est la fonction définie par

$$f_0(n) = \begin{cases} f(n) & \text{si } n \in Q, \\ 0 & \text{si } n \notin Q. \end{cases}$$

fonction qui appartient aussi à la classe  $\mathfrak{M}_0$ .

On voit que

$$M(f, Q) = \frac{\pi^2}{6} M(f_0) = \prod \left[ 1 - \frac{1-f(p)}{p+1} \right].$$

7.2. On peut obtenir des résultats relatifs à des ensembles autres que Q grâce au théorème suivant :

THÉORÈME 4. — Soient  $f$  et  $h$  deux fonctions de la classe  $\mathfrak{N}_0$ .

Supposons que :

1° La série  $\sum \frac{1 - \mathcal{R}f(p)}{p}$  soit convergente ;

2° Il existe un nombre réel ou complexe  $\rho$ , différent de 1, tel qu'on ait pour  $x$  infini

$$\sum_{p \leq x} h(p) = \rho \frac{x}{\log x} + o\left[\frac{x}{\log x}\right].$$

Alors  $M(fh)$  existe et est nulle. Autrement dit, on a pour  $x$  infini

$$\sum_{n \leq x} f(n) h(n) = o[x].$$

Ce théorème s'établit aisément comme suit :

Définissons l'ensemble  $E$ , puis la fonction  $g$ , comme au paragraphe 5.2.1, en omettant toutefois le nombre 2 dans l'ensemble  $E$ .

Comme au paragraphe 5.2.1, on a

$$\sum_{p \in E} \frac{1}{p} < +\infty,$$

$g \in \mathfrak{N}_0$ , et  $g(p)$  tend vers 1 quand  $p$  tend vers  $+\infty$ .

Si  $g_1$  est la fonction de la classe  $\mathfrak{N}$  déterminée par

$$g_1(p^r) = g(p) h(p),$$

$g_1 \in \mathfrak{N}_0$  et l'on a pour  $x$  infini

$$\begin{aligned} \sum_{p \leq x} g_1(p) &= \sum_{p \leq x} h(p) - \sum_{p \leq x} [1 - g(p)] h(p), \\ &= \rho \frac{x}{\log x} + o\left[\frac{x}{\log x}\right], \end{aligned}$$

puisque  $[1 - g(p)]h(p)$  tend vers zéro quand  $p$  tend vers  $+\infty$ .

Le théorème principal de notre Mémoire (A) permet alors d'affirmer que  $M(g_1)$  existe et est nulle, et le théorème 3 permet d'en déduire que  $M(fh)$  existe aussi et est aussi nulle.

7.3. Comme première application, indiquons le théorème suivant :

THÉORÈME 5. — Soit  $f$  une fonction de la classe  $\mathfrak{N}_0$  telle que la série

$$\sum \frac{1 - f(p)}{p}$$

soit convergente.

Si  $k$  est un entier  $> 1$  et  $l$  un entier quelconque,  $f$  possède une valeur moyenne sur l'ensemble des entiers positifs satisfaisant à

$$n \equiv l \pmod{k}.$$

7.3.1. Si  $l$  est premier avec  $k$ , le théorème 4 montre que, lorsque  $\chi$  est un caractère modulo  $k$  autre que le caractère principal, on a pour  $x$  infini

$$\sum_{n \leq x} f(n) \chi(n) = o[x].$$

Si  $\chi_0$  est le caractère principal, le théorème 2 montre que  $M(f\chi_0)$  existe, de sorte qu'on a pour  $x$  infini

$$\sum_{n \leq x} f(n) \chi_0(n) = M(f\chi_0)x + o[x].$$

On déduit de là que

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv l \pmod{k}}} f(n) &= \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\chi} \frac{1}{\chi(l)} \sum_{n \leq x} f(n) \chi(n), \\ &= \frac{1}{\varphi(k)} M(f\chi_0)x + o[x]. \end{aligned}$$

$f$  possède donc sur l'ensemble considéré une valeur moyenne égale à

$$\frac{k}{\varphi(k)} M(f\chi_0) = \prod_{p+k} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \left[1 + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{f(p^j)}{p^j}\right].$$

7.3.2. Si  $(k, l) = \delta > 1$ , et si l'on pose

$$k = \delta k' \quad \text{et} \quad l = \delta l',$$

on a  $(k', l') = 1$  et l'on voit que la condition

$$n \equiv l \pmod{k}$$

est équivalente à

$$n = \delta n', \quad \text{avec} \quad n' \equiv l' \pmod{k'}.$$

On voit aussi que

$$f(\delta n') = \sum_{d|n'} h(d) g\left(\frac{n'}{d}\right),$$

où  $h$  est la fonction arithmétique définie par

$$h(n) = \begin{cases} \sum_{d|n} \mu(d) f\left(\frac{\delta n}{d}\right) & \text{si } n \text{ n'a pas de diviseurs premiers autres que ceux de } \delta \text{ }^{(5)}, \\ 0 & \text{dans le cas contraire,} \end{cases}$$

(<sup>5</sup>) Ici,  $\mu$  est naturellement la fonction de Möbius.

et  $g$  est la fonction de la classe  $\mathfrak{N}$  déterminée par

$$g(p^r) = \begin{cases} f(p^r) & \text{si } p \neq \delta, \\ 1 & \text{si } p/\delta. \end{cases}$$

On arrive au résultat en utilisant ce qui a été établi au paragraphe précédent et le complément suivant à la deuxième partie du lemme 4 :

Les notations restant inchangées, si l'on remplace l'hypothèse que  $M(g)$  existe par celle que, pour tout  $l$  premier avec  $k$ , où  $k$  est un entier donné  $> 1$ , la fonction  $g$  possède une valeur moyenne égale à  $\lambda$  sur l'ensemble des  $n$  satisfaisant à

$$n \equiv l \pmod{k},$$

on peut conclure que, si  $(k, l) = 1$ , la fonction  $f$  possède une valeur moyenne sur l'ensemble des  $n$  satisfaisant à cette condition, valeur moyenne qui est égale à

$$\lambda \sum_{(k,n)=1} \frac{h(n)}{n}.$$

La série  $\sum_1^{+\infty} \frac{|h(n)|}{n}$  est bien convergente ici car, comme on a, quand  $n$  n'a pas de diviseurs premiers autres que ceux de  $\delta$ ,

$$|h(n)| \leq \sum_{d|n} |\mu(d)|,$$

on a pour tout  $x > 0$

$$\sum_{n \leq x} \frac{|h(n)|}{n} \leq \prod_{p/\delta} \left[ 1 + \sum_{p^j \leq x} \frac{2}{p^j} \right] \leq \prod_{p/\delta} \left[ 1 + \frac{2}{p-1} \right].$$

7.4. Comme autre application du théorème 4, on a encore le théorème suivant :

**THÉOREME 6.** — Soient  $q$  un entier  $> 1$  et  $\mathfrak{F}$  une fonction arithmétique réelle additive, à valeurs entières, et supposons que :

1° Pour chaque entier  $m$ , l'ensemble  $E_m$  des nombres premiers tels que

$$\mathfrak{F}(p) \equiv m \pmod{q}$$

possède une densité par rapport à l'ensemble de tous les nombres premiers, soit  $D_m$ ;

2° Le plus grand commun diviseur de  $q$  et des  $m$  positifs et  $\leq q-1$  pour lesquels  $D_m > 0$  soit égal à 1.

[Alors, d'après le théorème 4 de notre Mémoire (A), pour tout entier  $r$ , l'ensemble des entiers naturels  $n$  pour lesquels

$$\mathfrak{F}(n) \equiv r \pmod{q}$$

possède une densité égale à  $\frac{1}{q}$  et l'ensemble des nombres de  $\mathbb{Q}$  satisfaisant à la même condition possède une densité égale à  $\frac{1}{q} \frac{6}{\pi^2}$ .

Si  $f$  est une fonction de la classe  $\mathfrak{N}_0$  et si la série

$$\sum \frac{1-f(p)}{p}$$

est convergente [de sorte que  $M(f)$  existe d'après le théorème 2 et  $M(f, Q)$  existe d'après ce qui a été dit au paragraphe 7.1], quel que soit l'entier  $r$ , la fonction possède une valeur moyenne égale à  $M(f)$  sur l'ensemble des entiers naturels  $n$  pour lesquels

$$\mathcal{F}(n) \equiv r \pmod{q}$$

et une valeur moyenne égale à  $M(f, Q)$  sur l'ensemble des nombres de  $\mathbb{Q}$  satisfaisant à la même condition.

7.4.1. Pour établir ce résultat, nous introduisons d'abord les fonctions  $h_j$  définies par

$$h_j(n) = \exp \left\{ \frac{2\pi j i}{q} \mathcal{F}(n) \right\}.$$

Chacune de ces fonctions appartient à la classe  $\mathfrak{N}_0$  et l'on a pour  $x$  infini

$$\sum_{p \leq x} h_j(p) = \rho_j \frac{x}{\log x} + o \left[ \frac{x}{\log x} \right],$$

où

$$\rho_j = \sum_{m=0}^{q-1} D_m \exp \left\{ \frac{2\pi j m i}{q} \right\}.$$

Comme tous les  $D_m$  sont  $\geq 0$  et  $\sum_{m=0}^{q-1} D_m = 1$ , on ne peut avoir  $\rho_j = 1$  que si  $j m \equiv 0 \pmod{q}$  pour tous les  $m$  satisfaisant à  $1 \leq m \leq q-1$  et tels que  $D_m > 0$ , ce qui n'est possible que si  $j \equiv 0 \pmod{q}$ .

Donc, si  $j \not\equiv 0 \pmod{q}$ , le théorème 4 montre qu'on a pour  $x$  infini

$$\sum_{n \leq x} f(n) h_j(n) = o[x],$$

c'est-à-dire

$$\sum_{n \leq x} f(n) \exp \left\{ \frac{2\pi j i}{q} \mathcal{F}(n) \right\} = o[x],$$

ou, en multipliant par  $\exp \left[ -\frac{2\pi j r i}{q} \right]$ ,

$$\sum_{n \leq x} f(n) \exp \left\{ \frac{2\pi j i}{q} [\mathcal{F}(n) - r] \right\} = o[x].$$

En ajoutant les relations correspondant à  $j = 1, 2, \dots, q - 1$  et la relation

$$\sum_{n \leq x} f(n) = M(f)x + o[x],$$

et divisant par  $q$ , on obtient

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ \mathfrak{F}(n) \equiv r \pmod{q}}} f(n) = \frac{1}{q} M(f)x + o[x].$$

Le résultat relatif aux nombres de  $\mathcal{Q}$  s'obtient en raisonnant sur la fonction  $f_0$  considérée au paragraphe 7.1 au lieu de la fonction  $f$ .

7.4.2. A titre d'exemple, on peut prendre pour  $\mathfrak{F}(n)$  dans le théorème 6 le nombre des diviseurs premiers de  $n$ , ou le nombre total des facteurs dans la décomposition de  $n$  en facteurs premiers, ou la somme des puissances  $k^{\text{ièmes}}$  des diviseurs premiers de  $n$ , ou le nombre des diviseurs de  $n$  appartenant à un ensemble donné de nombres premiers possédant une densité positive par rapport à l'ensemble de tous les nombres premiers, etc.

7.5. Si  $f$  est une fonction de la classe  $\mathfrak{N}_0$  dépendant d'un paramètre  $t$  qui parcourt un certain ensemble de points d'un espace topologique, si la valeur de  $f$  pour chaque nombre de la forme  $p^r$  est une fonction continue de  $t$ , et si la série

$$\sum \frac{1 - f(p)}{p}$$

est convergente pour chaque valeur de  $t$ , sa somme étant une fonction continue de  $t$ , on voit sans peine que chacune des valeurs moyennes qui existent pour chaque valeur de  $t$  d'après le théorème du paragraphe 7.1 et les théorèmes 5 et 6 est une fonction continue de  $t$ .

7.6.  $f$  étant une fonction arithmétique réelle et  $A$  un ensemble infini d'entiers naturels, on peut définir le fait que  $f$  possède une loi de distribution sur l'ensemble  $A$  en remplaçant, dans la définition donnée au début du chapitre 6, du fait que  $f$  possède une loi de distribution,  $\frac{1}{x} N_f(x, u)$  par  $\frac{1}{v_A(x)} N_f(x, u, A)$ , où  $N_f(x, u, A)$  est le nombre des  $n$  appartenant à  $A$ , au plus égaux à  $x$  et tels que  $f(n) \leq u$ .

Par une modification semblable de la définition donnée au paragraphe 6.4, on définira le fait qu'une fonction arithmétique à valeurs dans un espace numérique à un nombre fini de dimensions possède une loi de distribution sur un ensemble donné d'entiers naturels.

Dans les deux cas, si l'on prend  $A$  égal à l'ensemble de tous les entiers naturels, on retombe sur le fait de posséder une loi de distribution considéré précédemment.



Ceci dit, ce qui précède entraîne que, lorsqu'une fonction arithmétique additive, réelle ou à valeurs dans un espace numérique à un nombre fini de dimensions, possède une loi de distribution, elle possède aussi une loi de distribution sur l'ensemble  $Q$  et sur chacun des ensembles d'entiers naturels considérés dans les théorèmes 5 et 6. Dans le cas des ensembles considérés dans le théorème 6, on peut ajouter que la loi de distribution est la même pour l'ensemble des  $n$  tels que  $\mathcal{F}(n) \equiv r \pmod{q}$  que pour l'ensemble de tous les entiers naturels, et elle est la même pour l'ensemble des nombres de  $Q$  satisfaisant à la condition indiquée que pour l'ensemble  $Q$ .

