Annales scientifiques de l'É.N.S.

Osamu Takenouchi

Sur les sous-algèbres d'une algèbre de Hilbert

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 78, nº 3 (1961), p. 211-240
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1961_3_78_3_211_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
3e série, t. 78, 1961, p. 211 à 240.

SUR LES SOUS-ALGÈBRES D'UNE ALGÈBRE DE HILBERT

Par M. Osamu TAKENOUCHI.

Dans l'étude des algèbres de von Neumann, le rôle que jouent leurs sous-algèbres a fait de temps à autre l'objet de différentes recherches. Mais jusqu'à présent, l'intérêt se portait principalement sur des sous-algèbres abéliennes maximales, et, pour ce qui concerne une étude systématique des sous-algèbres en général, nous ne trouvons presque rien sauf dans le cas des idéaux bilatères. Il paraît assez naturel d'espérer qu'une étude générale des sous-algèbres est utile pour aborder divers problèmes, comme ceci a été le cas dans les études des algèbres abstraites, en particulier pour éclaircir la structure des algèbres. Dans ce Mémoire, nous exposons quelques études préliminaires sur les sous-algèbres d'une algèbre de von Neumann semi-finie. Comme, d'abord, grâce aux résultats de Murray et von Neumann, et ensuite, grâce à la généralisation de ces résultats due à Segal et à Godement, une algèbre de von Neumann munie d'une trace normale, semi-finie et fidèle peut être considérée dans un certain sens comme algèbre de Hilbert, nous donnerons nos résultats sous la forme de propositions concernant les algèbres de Hilbert. Certes, en opérant ainsi, nous devons convenir que la généralité de notre recherche est quelque peu réduite, car une sous-algèbre involutive faiblement fermée d'une algèbre de von Neumann munie d'une trace normale, semi-finie et fidèle, ne sera pas nécessairement engendrée par des opérateurs de carré traçable; mais, d'autant plus qu'on s'intéresse surtout aux algèbres de von Neumann finie où cette circonstance embarrassante ne se produit pas, nous croyons quand même que notre argument a un caractère assez général.

Ce Mémoire comprend trois parties. Après un paragraphe préliminaire, nous étudions d'abord les propriétés du projecteur sur une sous-algèbre (§ 2, 3). On remarquera la ressemblance entre ce projecteur et l'opération $\natural$ de Dixmier; en effet, dans le cas d'une algèbre de von Neumann finie, l'opération $\natural$ n'est autre que le projecteur sur le centre de cette algèbre. Les paragraphes 4, 5 sont consacrés à la construction de sous-algèbres spéciales, notamment du commutant d'un sous-ensemble. Le paragraphe 6 contient l'étude des algèbres de von Neumann proprement définies par une sous-algèbre et l'auteur espère, en poussant plus loin cette étude, avoir une connaissance assez profonde sur la structure de l'algèbre de von Neumann semi-finie.

L'auteur présente son sincère remerciement à M. J. Dixmier qui a bien voulu l'aider de ses conseils. Les principaux résultats de ce travail ont été résumés dans une Note aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* [9].

1. Définition d'une algèbre de Hilbert et rappel de quelques résultats connus (¹).

1. Définition 1. — Soit $\mathfrak{A}$ une algèbre associative sur le corps $\mathcal{C}$ munie d'une involution $x \to x^\star$. Elle est appelée *algèbre de Hilbert* si ;

1° elle est munie d'un produit scalaire qui en fait un espace préhilbertien, et

2° les axiomes suivants sont vérifiés :

(*i*) $(x, y) = (y^\star, x^\star)$ pour $x \in \mathfrak{A}$, $y \in \mathfrak{A}$;

(*ii*) $(xy, z) = (y, x^\star z)$ pour $x \in \mathfrak{A}$, $y \in \mathfrak{A}$, $z \in \mathfrak{A}$;

(*iii*) Pour tout $a \in \mathfrak{A}$, l'application $x \to ax$ est continue;

(*iv*) Les éléments xy, où $x \in \mathfrak{A}$, $y \in \mathfrak{A}$, sont partout denses dans $\mathfrak{A}$.

De ces axiomes, il s'ensuit directement :

(*i'*) que $\|x\| = \|x^\star\|$ pour $x \in \mathfrak{A}$;

(*ii'*) que $(xy, z) = (y, x^\star z) = (x, zy^\star)$ pour $x \in \mathfrak{A}$, $y \in \mathfrak{A}$, $z \in \mathfrak{A}$, et

(*iii'*) que, pour tout $a \in \mathfrak{A}$, les applications $x \to ax$, $x \to xa$ sont toutes les deux continues.

Soit $\mathfrak{H}$ l'espace hilbertien complété de $\mathfrak{A}$. Par continuité, $f^\star$, xf, et fx ont un sens pour $x \in \mathfrak{A}$, $f \in \mathfrak{H}$. Alors nous avons aussi comme une condition équivalente à (*iv*), que

(*iv'*) si $xf = 0$ (ou $fx = 0$) pour tout $x \in \mathfrak{A}$, on a $f = 0$.

2. f étant un élément quelconque de $\mathfrak{H}$, la fermeture de l'opérateur $x \to fx$ (resp. $x \to xf$) de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{H}$ sera désignée par T_f (resp. par S_f). Évidemment,

$$T_x f = S_f x = xf, \qquad S_x f = T_f x = fx \qquad \text{pour} \quad x \in \mathfrak{A} \quad f \in \mathfrak{H}. \tag{1}$$

(¹) Pour la plupart des notions et des propositions décrites dans ce paragraphe, le lecteur se reportera à [AvN], chap I, § 5. Souvent, elles sont modifiées et généralisées, et nous auront aussi occasion dans le présent Mémoire d'utiliser des résultats plus ou moins immédiats qui ne sont pas explicités dans [AvN]; c'est pour cette raison que l'auteur a considéré comme nécessaire ce précis.

En ce qui concerne ces opérateurs, on a une relation fondamentale (due à Segal [7] et à Pallu de la Barrière [5], [6]) :

$$T_{f^\star} = (T_f)^\star, \qquad S_{f^\star} = (S_f)^\star \quad \text{pour tout } f \in \mathfrak{H}. \tag{2}$$

3. Un élément $a \in \mathfrak{H}$ est appelé *borné* si l'un des deux opérateurs T_a, S_a est borné. Dans le cas où cette condition est réalisée, l'autre est aussi borné et l'on a $|||T_a||| = |||S_a|||$.

Pour qu'un élément $a \in \mathfrak{H}$ soit borné, il faut et il suffit qu'on puisse choisir une suite $\{z_n\}$ d'éléments de $\mathfrak{A}$ telle que $\|z_n - a\| \to 0$ et les $|||T_{z_n}|||\,(= |||S_{z_n}|||)$ restent bornés. Sous cette condition, T_{z_n} tend fortement vers T_a, et, par ailleurs, on peut même supposer que $|||T_{z_n}||| \leqq |||T_a|||$.

L'ensemble des éléments bornés constitue d'une manière naturelle une algèbre involutive, extension de $\mathfrak{A}$ (d'où évidemment elle-même une algèbre de Hilbert), qu'on appelle *algèbre de Hilbert achevée provenant de* $\mathfrak{A}$ et que nous allons noter $\overline{\mathfrak{A}}$.

4. L'algèbre d'opérateurs faiblement fermée engendrée par les T_x, $x \in \mathfrak{A}$ (resp. par les S_x, $x \in \mathfrak{A}$) est une algèbre de von Neumann, appelée *algèbre* (*de von Neumann*) *de multiplication à gauche* (resp. *à droite*). Nous la désignerons par $\mathbf{T}(\mathfrak{A})$ [resp. par $\mathbf{S}(\mathfrak{A})$]. $\mathbf{T}(\mathfrak{A})$ est le commutant de $\mathbf{S}(\mathfrak{A})$, et pour $A \in \mathbf{T}(\mathfrak{A})$, $x \in \overline{\mathfrak{A}}$,

$$Ax \in \overline{\mathfrak{A}} \qquad \text{et} \qquad T_{Ax} = AT_x, \tag{3}$$

Nous remarquons de plus qu'on a toujours que

$$T_{Af} \supset AT_f \quad (^2). \tag{4}$$

De même pour $\mathbf{S}(\mathfrak{A})$.

Entre $\mathbf{T}(\mathfrak{A})$ et $\mathbf{S}(\mathfrak{A})$, il y a ce qu'on appelle *anti-isomorphisme canonique*. Par définition, pour $A \in \mathbf{T}(\mathfrak{A})$ ou $\mathbf{S}(\mathfrak{A})$

$$\tilde{A}f = (A^\star f^\star)^\star. \tag{5}$$

$\tilde{A} \in \mathbf{S}(\mathfrak{A})$ ou $\in \mathbf{T}(\mathfrak{A})$ suivant que $A \in \mathbf{T}(\mathfrak{A})$ ou $\in \mathbf{S}(\mathfrak{A})$, et $A \to \tilde{A}$ définit le dit anti-isomorphisme de $\mathbf{T}(\mathfrak{A})$ sur $\mathbf{S}(\mathfrak{A})$ ou de $\mathbf{S}(\mathfrak{A})$ sur $\mathbf{T}(\mathfrak{A})$.

L'opérateur T_f (ou S_f) correspondant à un élément quelconque f de $\mathfrak{H}$ (*voir* n° 2) est affilié à $\mathbf{T}(\mathfrak{A})$ [ou $\mathbf{S}(\mathfrak{A})$], ou avec la notation de Murray et von Neumann (*voir* [R, O. I]),

$$T_f \,\eta\, \mathbf{T}(\mathfrak{A}) \quad [\text{ou } S_f \,\eta\, \mathbf{S}(\mathfrak{A})].$$

Mais ce qu'il y a de plus, c'est que T_f (ou S_f) peut être considéré comme un *opérateur mesurable* en sens de Segal relativement à $\mathbf{T}(\mathfrak{A})$ [ou à $\mathbf{S}(\mathfrak{A})$]. (*Voir* Segal [7], § 2,5. Cette notion sera nécessitée dans notre paragraphe 5, où nous donnerons une description un peu plus détaillée.)

(2) Pour deux opérateurs A, B quelconques, $A \supset B$ signifie que A prolonge B.

5. Les éléments h de $\mathfrak{H}$ seront appelés *hermitiens* si $h = h^\star$, et *projecteurs.* si de plus $h \in \overline{\mathfrak{A}}$ et $h^2 = h$.

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un élément $h \in \mathfrak{H}$ soit respectivement hermitien ou projecteur est que l'opérateur T_h ou S_h soit respectivement auto-adjoint ou projecteur. Dans le cas où T_h (ou S_h) est un opérateur auto-adjoint positif, on dira que h est *hermitien positif*. La condition nécessaire et suffisante pour que h soit hermitien ou hermitien positif est que, respectivement,

$$(h,\, x^\star x) \text{ est réel pour tout } x \in \mathfrak{A} \qquad \text{ou} \qquad (h,\, x^\star x) \geqq 0 \qquad \text{pour tout } x \in \mathfrak{A}.$$

Remarque. — Nous employons dans tout ce Mémoire la notation $[\mathfrak{L}]$ pour exprimer l'adhérence d'un sous-espace linéaire $\mathfrak{L}$.

2. Les sous-algèbres de Hilbert d'une algèbre de Hilbert.

DÉFINITION 2. — Soit $\mathfrak{A}$ une algèbre de Hilbert. Un sous-ensemble $\mathfrak{B}$ de $\mathfrak{A}$ est dit *sous-algèbre de Hilbert* de $\mathfrak{A}$ s'il est une sous-algèbre involutive de $\mathfrak{A}$ comme une algèbre abstraite munie d'une involution,

PROPOSITION 1. — *Soit $\mathfrak{B}$ une sous-algèbre de Hilbert d'une algèbre de Hilbert $\mathfrak{A}$. Munie de la structure préhilbertienne induite de celle de $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ est elle-même une algèbre de Hilbert.*

Démonstration. — Toutes les conditions indiquées dans la définition 1 sont trivialement remplies par $\mathfrak{B}$, sauf 2°, (*iv*). Au lieu de celle-ci, nous allons voir que la condition (*iv'*) est remplie. En effet, s'il n'en était pas ainsi, on pourrait prendre un élément $r \neq 0$ dans l'adhérence de $\mathfrak{B}$ tel que

$$T_x r = 0 \quad \text{pour tout } x \in \mathfrak{B}.$$

Alors, si l'on prend y dans $\mathfrak{A}$, on aurait

$$(S_y r\; x) = (T_{x^\star} r,\, y^\star) = 0 \quad \text{pour tout } x \in \mathfrak{B},$$

ce qui est contradictoire, parce que r est adhérent à l'ensemble des $S_y r$, $y \in \mathfrak{A}$.

C. Q. F. D.

Notation. — L'adhérence $[\mathfrak{B}]$ de $\mathfrak{B}$ dans $\mathfrak{H}$ sera désignée toujours par $\mathfrak{H}_{\mathfrak{B}}$, et le projecteur de $\mathfrak{H}$ sur $\mathfrak{H}_{\mathfrak{B}}$ sera désigné par $E_{\mathfrak{B}}$.

Chaque élément g de $\mathfrak{H}_{\mathfrak{B}}$ donne naissance à deux sortes d'opérateurs de multiplication à gauche, à savoir

$$T_g^{\mathfrak{A}} = \text{l'opérateur de multiplication à gauche dans } \mathfrak{H}$$

et

$$T_g^{\mathfrak{B}} = \text{l'opérateur de multiplication à gauche dans } \mathfrak{H}_{\mathfrak{B}}.$$

Également, les opérateurs de multiplication à droite $S_g^{\mathfrak{A}}$, $S_g^{\mathfrak{B}}$ sont définis. L'indice supérieur $\mathfrak{A}$ sera omis dans ce qui suit s'il n'y a pas de danger de confusion.

L'adhérence faible de l'algèbre d'opérateurs qui consiste en les T_x, $x \in \mathcal{B}$ sera notée $\mathbf{T}^{\mathfrak{A}}(\mathcal{B})$. Elle ne sera pas en général une algèbre de von Neumann, à la différence de $\mathbf{T}(\mathcal{B})$, adhérence faible de l'algèbre d'opérateurs consistant en les $T_x^{\mathcal{B}}$, $x \in \mathcal{B}$, qui l'est toujours et qui est l'algèbre de multiplication à gauche de $\mathcal{B}$ proprement dite. La définition de $\mathbf{S}^{\mathfrak{A}}(\mathcal{B})$ est analogue.

$\mathcal{B}\mathfrak{A}$ signifiera le sous-espace (non nécessairement fermé) de $\mathfrak{H}$ engendré par les éléments xy, $x \in \mathcal{B}$, $y \in \mathfrak{A}$. $\mathfrak{A}\mathcal{B}$ se définit de façon analogue.

Remarque. — Si $\mathcal{B}\mathfrak{A}$ est dense dans $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{A}\mathcal{B}$ l'est aussi, et inversement.

PROPOSITION 2. — $(\mathfrak{H}_{\mathcal{B}})^\star = \mathfrak{H}_{\mathcal{B}}$, *et*

$$E_{\mathcal{B}}(f^\star) = (E_{\mathcal{B}} f)^\star \qquad \textit{pour} \quad f \in \mathfrak{H}. \tag{6}$$

Si h est un élément hermitien dans $\mathfrak{H}$, $E_{\mathcal{B}} h$ l'est aussi, et si h est un élément hermitien positif dans $\mathfrak{H}$, $E_{\mathcal{B}} h$ l'est dans $\mathfrak{H}_{\mathcal{B}}$. (Cette dernière assertion sera complétée dans le paragraphe 3.)

Démonstration. — D'abord, $\mathcal{B}$ étant une sous-algèbre involutive, on a

$$\mathcal{B}^\star = \mathcal{B}, \qquad \text{d'où} \qquad (\mathfrak{H}_{\mathcal{B}})^\star = \mathfrak{H}_{\mathcal{B}}.$$

Supposons ensuite qu'on ait pris h hermitien. Alors

$$(E_{\mathcal{B}} h,\, x^\star x) = (h,\, x^\star x) \quad \text{qui est réel pour tout } x \in \mathcal{B}.$$

D'après le critère donné dans le paragraphe 1, n° 5, ceci montre que $E_{\mathcal{B}} h$ est hermitien dans $\mathfrak{H}_{\mathcal{B}}$, *a fortiori* dans $\mathfrak{H}$.

On voit également que si h est hermitien positif, $E_{\mathcal{B}} h$ l'est dans $\mathfrak{H}_{\mathcal{B}}$. (Mais ceci n'entraîne pas tout de suite que $E_{\mathcal{B}} h$ l'est dans $\mathfrak{H}$. A cet égard, *voir* la proposition 5.)

Soit, enfin, $f \in \mathfrak{H}$ quelconque. Sous l'expression $f = g + ih$, g, h hermitiens, nous avons

$$f^\star = g - ih, \qquad E_{\mathcal{B}} f = E_{\mathcal{B}} g + i E_{\mathcal{B}} h \qquad \text{et} \qquad E_{\mathcal{B}} f^\star = E_{\mathcal{B}} g - i E_{\mathcal{B}} h.$$

Or de ce que nous avons déjà vu, $E_{\mathcal{B}} g$, $E_{\mathcal{B}} h$ sont hermitiens. Par conséquent,

$$(E_{\mathcal{B}} f)^\star = E_{\mathcal{B}} g - i E_{\mathcal{B}} h = E_{\mathcal{B}}(f^\star),$$

et ainsi (6) est établi.

PROPOSITION 3. — *Si a est un élément borné pour $\mathfrak{A}$, $b = E_{\mathcal{B}} a$ est un élément borné pour $\mathcal{B}$, et*

$$|||\, T_b^{\mathcal{B}} \,||| \leq |||\, T_a \,|||, \qquad |||\, S_b^{\mathcal{B}} \,||| \leq |||\, S_a \,|||.$$

Démonstration. — Si $f \in \mathfrak{H}$ est orthogonal à $\mathcal{B}$, xf l'est aussi pour $x \in \mathcal{B}$ quelconque. Par conséquent,

$$xa = x(E_{\mathcal{B}} a) + x(a - E_{\mathcal{B}} a)$$

est une décomposition de xa comme somme d'un élément de $\mathfrak{H}_{\mathcal{B}}$ et d'un élément orthogonal à $\mathcal{B}$, d'où il résulte que

$$x(E_{\mathcal{B}}a) = E_{\mathcal{B}}(xa). \tag{7}$$

De cette égalité, nous tirons

$$\| x(E_{\mathcal{B}}a) \| = \| E_{\mathcal{B}}(xa) \| \leqq \| xa \| \leqq ||| S_a |||.\| x \| \quad \text{pour tout } x \in \mathcal{B},$$

ce qui montre le fait que $E_{\mathcal{B}}a$ est un élément borné de $\mathcal{B}$, aussi bien que la relation entre les normes d'opérateurs de multiplication à droite. En fait d'opérateurs de multiplication à gauche, la démonstration est toute pareille, en utilisant

$$(E_{\mathcal{B}}a)x = E_{\mathcal{B}}(ax). \tag{8}$$

Lemme. — Soit $b \in \mathcal{B}$. On a alors

$$||| T_b^{\mathcal{B}} ||| = ||| T_b |||, \qquad ||| S_b^{\mathcal{B}} ||| = ||| S_b |||.$$

Démonstration. — Il nous suffit d'établir la première relation.

1° Nous fixons un élément $a \in \mathfrak{A}$, et nous allons montrer que, pour les éléments de la forme xa, $x \in \mathcal{B}$, on a

$$\| bxa \| \leqq ||| T_b^{\mathcal{B}} |||.\| xa \|.$$

D'abord, $aa^\star$ est un élément hermitien positif de $\mathfrak{A}$, donc, grâce aux propositions 2 et 3, $c = E_{\mathcal{B}}(aa^\star)$ est hermitien positif dans $\mathfrak{H}_{\mathcal{B}}$ et borné pour $\mathcal{B}$. Soit

$$T_c^{\mathcal{B}} = \int_0^\infty \lambda \, dE_\lambda^{\mathcal{B}}$$

la représentation spectrale de $T_c^{\mathcal{B}}$, avec les $E_\lambda^{\mathcal{B}}$ continus à droite.

Concernant cette représentation, nous remarquons que

$$E_0^{\mathcal{B}} c = 0.$$

En effet, grâce à (3), on a

$$T_{E_0^{\mathcal{B}} c}^{\mathcal{B}} = E_0^{\mathcal{B}} T_c^{\mathcal{B}} = 0,$$

d'où la conclusion, d'après le paragraphe 1, n° 1, (iv'). Posons

$$d_n = \left(\int_{\frac{1}{n}}^\infty \frac{1}{\sqrt{\lambda}} dE_\lambda^{\mathcal{B}} \right) c \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

(L'intégrale entre parenthèses représente un opérateur borné.) Il est évident que les d_n sont hermitiens et bornés (*voir* le paragraphe 1, n^{os} 4, 5). En plus, les d_n^2 convergent vers c lorsque $n \to \infty$, car d'après (3)

$$d_n^2 = \left(1 - E_{\frac{1}{n}}^{\mathcal{B}} \right) c,$$

d'où

$$\lim d_n^2 = (1 - E_0^{\mathcal{B}})\, c = c.$$

Prenons maintenant $x \in \mathcal{B}$ quelconque. Alors, en utilisant (7), nous obtenons

$$\begin{aligned} \| xa \|^2 &= (xa,\, xa) = (xaa^*,\, x) = (x\, E_{\mathcal{B}}(aa^*),\, x) = (xc,\, x) \\ &= \lim (x\, d_n^2,\, x) = \lim \| x\, d_n \|^2, \end{aligned}$$

et en conséquence,

$$\| bxa \|^2 = \lim \| bx\, d_n \|^2 \leqq \||\, T_b^{\mathcal{B}} \,\||^2 \lim \| x\, d_n \|^2 \leqq \||\, T_b^{\mathcal{B}} \,\||^2\, \| xa \|^2,$$

comme nous l'avons annoncé.

2° Soit a fixé comme tout à l'heure. Notons $\mathfrak{M}$ l'adhérence de l'ensemble $\mathcal{B}a$ des éléments de la forme xa, $x \in \mathcal{B}$, et $P_{\mathfrak{M}}$ le projecteur sur $\mathfrak{M}$, On a alors $ba \in \mathfrak{M}$ et $P_{\mathfrak{M}} \in (T^{\mathfrak{A}}(\mathcal{B}))'$, et donc

$$b(P_{\mathfrak{M}}\, a) = P_{\mathfrak{M}}(ba) = ba.$$

Or $P_{\mathfrak{M}}\, a$ est adhérent à $\mathcal{B}a$, d'où, d'après ce qu'on a établi dans 1°,

$$\| b\, P_{\mathfrak{M}}\, a \| \leqq \||\, T_b^{\mathcal{B}} \,\||.\| P_{\mathfrak{M}}\, a \| \leqq \||\, T_b^{\mathcal{B}} \,\||.\| a \|.$$

Ces deux relations montrent que

$$\| ba \| \leqq \||\, T_b^{\mathcal{B}} \,\||\,.\, \| a \|.$$

Ceci étant, si nous faisons varier a dans $\mathfrak{A}$, dans cette dernière relation, nous voyons que

$$\||\, T_b \,\|| \leqq \||\, T_b^{\mathcal{B}} \,\||.$$

L'inégalité du sens inverse étant évidente (ou ayant été assurée par la proposition 3), nous avons établi le lemme.

Théorème 1 ([3]). — *Soit $\mathfrak{A}$ une algèbre de Hilbert et $\mathcal{B}$ une sous-algèbre de Hilbert de $\mathfrak{A}$. Soit $b \in \mathfrak{H}_{\mathcal{B}}$ un élément borné pour $\mathcal{B}$. Alors b est aussi borné pour $\mathfrak{A}$ et l'on a*

$$\||\, T_b \,\|| = \||\, T_b^{\mathcal{B}} \,\||, \qquad \||\, S_b \,\|| = \||\, S_b^{\mathcal{B}} \,\||.$$

De plus, pour les algèbres de Hilbert achevées $\overline{\mathfrak{A}}$, $\overline{\mathcal{B}}$ provenant de $\mathfrak{A}$ et de $\mathcal{B}$ respectivement, on a la relation

$$\overline{\mathcal{B}} = E_{\mathcal{B}}\, \overline{\mathfrak{A}} \subset \overline{\mathfrak{A}}.$$

Pour des propriétés plus précises de l'opérateur $E_{\mathcal{B}}$, *voir* aussi les propositions 2, 3, 5.

([3]) Ce théorème a été établi dans un cas spécial, notamment dans le cas où $\mathfrak{A}\mathcal{B}$ est dense dans $\mathfrak{H}$ ou bien quand $\mathbf{T}^{\mathfrak{A}}(\mathcal{B})$ est une algèbre de von Neumann, par Dixmier [1], Umegaki [10]. *Voir* aussi [R. O. IV], Appendice, lemme A. 2 et son corollaire.

Démonstration. — D'après le paragraphe 1, n° 3 appliqué à $\mathfrak{B}$, on peut choisir pour b une suite $z_1, z_2, \ldots$ d'éléments de $\mathfrak{B}$ telle que

$$\| z_n - b \| \to 0 \qquad \text{et} \qquad ||| T^{\mathfrak{B}}_{z_n} ||| \leqq ||| T^{\mathfrak{B}}_{b} |||.$$

Alors, grâce au lemme que nous venons d'établir, les $||| T_{z_n} |||$ restent bornés, ce qui entraîne, en appliquant le paragraphe 1, n° 3, à $\mathfrak{A}$ cette fois-ci, que b est un élément borné pour $\mathfrak{A}$, et que les T_{z_n} convergent fortement vers T_b. Par suite,

$$||| T_b ||| \leqq \underline{\lim} ||| T_{z_n} ||| = \underline{\lim} ||| T^{\mathfrak{B}}_{z_n} ||| \leqq ||| T^{\mathfrak{B}}_{b} |||.$$

L'inégalité inverse étant évidente (ou ayant été assurée par la proposition 3), nous avons que

$$||| T_b ||| = ||| T^{\mathfrak{B}}_{b} |||.$$

Ceci établit en même temps que $\overline{\mathfrak{B}} \subset \overline{\mathfrak{A}}$. Or, d'autre part, grâce à la proposition 3, nous avons $E_{\mathfrak{B}} \overline{\mathfrak{A}} \subset \overline{\mathfrak{B}}$, en conséquence,

$$\overline{\mathfrak{B}} = E_{\mathfrak{B}} \overline{\mathfrak{B}} \subset E_{\mathfrak{B}} \overline{\mathfrak{A}} \subset \overline{\mathfrak{B}} \subset \overline{\mathfrak{A}}.$$

Ainsi s'achève notre démonstration.

PROPOSITION 4. — *On a*

$$(9) \qquad s(E_{\mathfrak{B}} f) = E_{\mathfrak{B}}(sf), \qquad (E_{\mathfrak{B}} f)s = E_{\mathfrak{B}}(fs)$$

pour $f \in \overline{\mathfrak{A}}$, $s \in \mathfrak{H}_{\mathfrak{B}}$, *ou pour* $f \in \mathfrak{H}$, $s \in \overline{\mathfrak{B}}$; *et*

$$(10) \qquad E_{\mathfrak{B}} T_a E_{\mathfrak{B}} = T_{E_{\mathfrak{B}} a} E_{\mathfrak{B}}, \qquad E_{\mathfrak{B}} S_a E_{\mathfrak{B}} = S_{E_{\mathfrak{B}} a} E_{\mathfrak{B}} \qquad \text{pour} \quad a \in \overline{\mathfrak{A}}.$$

Démonstration. — (9) est une conséquence immédiate de (7), (8) et du théorème 1.

Pour montrer (10), soit $f \in \mathfrak{H}$ quelconque. Nous avons alors, d'après (9),

$$E_{\mathfrak{B}} T_a E_{\mathfrak{B}} f = E_{\mathfrak{B}}(a E_{\mathfrak{B}} f) = (E_{\mathfrak{B}} a)(E_{\mathfrak{B}} f) = T_{E_{\mathfrak{B}} a} E_{\mathfrak{B}} f,$$

ce qui établit la première relation de (10). Pour la seconde relation, la démonstration est analogue.

3. Les éléments hermitiens positifs.

Il est évident que la notion d'être hermitien dans $\mathfrak{H}$ et dans $\mathfrak{H}_{\mathfrak{B}}$ coïncide. On va voir dans ce paragraphe que, pour la notion d'être hermitien positif, il en est de même. Ceci perfectionne notre proposition 2.

PROPOSITION 5. — *Si* $s \in \mathfrak{H}_{\mathfrak{B}}$ *est hermitien positif dans* $\mathfrak{H}_{\mathfrak{B}}$, *il l'est aussi dans* $\mathfrak{H}$.

Si h *est un élément hermitien positif dans* $\mathfrak{H}$, $E_{\mathfrak{B}} h$ *l'est aussi.*

Démonstration. — Considérons l'opérateur $T_s^{\mathcal{B}}$. D'après l'hypothèse, il est hermitien positif. Soit

$$T_s^{\mathcal{B}} = \int_0^\infty \lambda\, dE_\lambda^{\mathcal{B}}, \qquad E_\lambda^{\mathcal{B}}: \text{continu à droite},$$

sa représentation spectrale. On peut écrire ici

$$(11) \qquad 1 - E_\lambda^{\mathcal{B}} = T_{e_\lambda}^{\mathcal{B}} \qquad e_\lambda: \text{projecteur},$$

parce que, en posant

$$X^{\mathcal{B}} = \int_\lambda^\infty \frac{1}{\mu}\, dE_\mu^{\mathcal{B}}, \qquad \text{nous avons} \quad X^{\mathcal{B}} \in \mathbf{T}(\mathcal{B}),$$

d'où d'après (3),

$$1 - E_\lambda^{\mathcal{B}} = X^{\mathcal{B}} T_s^{\mathcal{B}} = T_{X^{\mathcal{B}} s}^{\mathcal{B}}, \qquad \text{donc} \quad e_\lambda = X^{\mathcal{B}} s.$$

De plus, $se_\lambda = e_\lambda s$.

Nous fixons un $\lambda_0 > 0$ quelconque, et posons successivement

$$A_n^{\mathcal{B}} = \int_{\lambda_0}^n \lambda\, dE_\lambda^{\mathcal{B}},$$

$$B_n^{\mathcal{B}} = \int_{\lambda_0}^n \sqrt{\lambda}\, dE_\lambda^{\mathcal{B}}.$$

Alors l'élément b_n défini par

$$b_n = B_n^{\mathcal{B}} e_{\lambda_0} \qquad \text{pour} \quad n = 1, 2, \ldots$$

est borné, hermitien dans $\mathfrak{H}_{\mathcal{B}}$, *a fortiori*, l'est dans $\mathfrak{H}$, et nous avons, d'après (3) et (11),

$$B_n^{\mathcal{B}} = T_{b_n}^{\mathcal{B}},$$

de sorte que

$$b_n^2 = (B_n^{\mathcal{B}})^2 e_{\lambda_0} = A_n^{\mathcal{B}} e_{\lambda_0}.$$

Par suite,

$$\lim b_n^2 = \lim A_n^{\mathcal{B}} e_{\lambda_0} = T_s^{\mathcal{B}} e_{\lambda_0} = se_{\lambda_0},$$

d'où l'on voit que, pour tout $s \in \mathfrak{A}$,

$$(12) \qquad (se_{\lambda_0}, x^* x) = \lim (b_n^2, x^* x) = \lim (x b_n, x b_n) \geqq 0.$$

D'après la caractérisation du paragraphe 1, n° 5, ceci montre que se_{λ_0} est hermitien positif dans $\mathfrak{H}$.

Il nous reste à constater que $se_\lambda \to s$ pour $\lambda \to 0$. Si c'est établi, en passant à la limite pour $\lambda_0 \to 0$ en (12) et moyennant la caractérisation des éléments hermitiens positifs dont nous nous sommes servis tout à l'heure, on voit que s est hermitien positif dans $\mathfrak{H}$.

On a d'abord évidemment que $se_\lambda = e_\lambda s = T_{e_\lambda}^{\mathcal{B}} s = (1 - E_\lambda^{\mathcal{B}}) s$ tend vers $(1 - E_0^{\mathcal{B}}) s$. Or, si l'on prend un $x \in \mathcal{B}$ quelconque,

$$\begin{aligned} sx = T_s^{\mathcal{B}} x = T_s^{\mathcal{B}} (1 - E_0^{\mathcal{B}}) x &= (1 - E_0^{\mathcal{B}})\, T_s^{\mathcal{B}} x \\ &= T_{(1 - E_0^{\mathcal{B}}) s}^{\mathcal{B}} x = ((1 - E_0^{\mathcal{B}})\, s)\, x, \end{aligned}$$

d'où, grâce au paragraphe 1, n° 1(iv') appliqué à $\mathfrak{H}_{\mathcal{B}}$,

$$s = (1 - E_0^{\mathcal{B}})s = \lim_{\lambda \to 0} se_\lambda.$$

La seconde assertion de la proposition 5 est une conséquence de la première assertion et de la proposition 2.

Proposition 6. — *Supposons que le sous-espace $\mathcal{A}\mathcal{B}$ soit dense dans $\mathfrak{H}$. Alors, si pour un élément h hermitien positif dans $\mathfrak{H}$, $E_{\mathcal{B}} h = 0$, on a nécessairement $h = 0$.*

Démonstration. — Prenons un $z \in \mathcal{A}$, et proposons-nous de calculer $(h, z^\star z)$. D'une part, par hypothèse, c'est toujours $\geqq 0$. D'autre part, parce que $E_{\mathcal{B}} h = 0$, nous avons

$$\begin{aligned}(h, z^\star z) &= (h, (E_{\mathcal{B}} z)^\star (E_{\mathcal{B}} z)) \\ &\quad + (h, (E_{\mathcal{B}} z)^\star (z - E_{\mathcal{B}} z)) + (h, (z - E_{\mathcal{B}} z)^\star (E_{\mathcal{B}} z)) \\ &\quad + (h, (z - E_{\mathcal{B}} z)^\star (z - E_{\mathcal{B}} z)) \\ &= 2\mathfrak{R}(h, (z - E_{\mathcal{B}} z)^\star (E_{\mathcal{B}} z)) + (h, (z - E_{\mathcal{B}} z)^\star (z - E_{\mathcal{B}} z)).\end{aligned}$$

Si, donc, un z tel que

$$(h, (z - E_{\mathcal{B}} z)^\star (E_{\mathcal{B}} z)) \neq 0$$

existait, en posant

$$w = \lambda (E_{\mathcal{B}} z) + (z - E_{\mathcal{B}} z),$$

on conclurait que

$$(h, w^\star w) = 2\mathfrak{R}\bar{\lambda}(h, (z - E_{\mathcal{B}} z)^\star (E_{\mathcal{B}} z)) + (h, (z - E_{\mathcal{B}} z)^\star (z - E_{\mathcal{B}} z))$$

prend n'importe quelle valeur réelle quand λ varie. En particulier, $(h, w^\star w)$ pourrait devenir négatif, alors que nous avons vu au début que c'est toujours $\geqq 0$. Nous aboutissons ainsi à une contradiction.

Par conséquent, pour tout $z \in \mathcal{A}$, $(h, (z - E_{\mathcal{B}} z)^\star (E_{\mathcal{B}} z))$ doit être 0; il revient au même de dire que, pour tous $x \in \mathcal{B}$, $y \in \mathcal{A}$,

$$(h, yx) = (h, (E_{\mathcal{B}} y^\star)^\star x) + (h, (y^\star - E_{\mathcal{B}} y^\star)^\star x) = 0.$$

On en tire que pour un élément quelconque de $\mathcal{A}\mathcal{B}$, soit $\sum y_j x_j$ (somme finie) on a

$$\left(f, \sum y_j x_j\right) = 0,$$

d'où, en vertu de l'hypothèse que $\mathcal{A}\mathcal{B}$ est dense dans $\mathfrak{H}$, $f = 0$.

4. Le calcul fonctionnel et l'enveloppe bornée d'un élément hermitien.

Dans tout ce paragraphe, h est un élément hermitien fixe.

On remarque d'abord que l'anti-isomorphisme canonique entre $\mathbf{T}(\mathcal{A})$ et $\mathbf{S}(\mathcal{A})$ établi dans le paragraphe 1, n° 4, c'est-à-dire l'application $A \to \tilde{A}$ définie par

$$(5) \qquad \tilde{A} f = (A^\star f^\star)^\star \qquad (f \in \mathfrak{H})$$

est étendu aux opérateurs affiliés à $\mathbf{T}(\mathfrak{A})$ ou à $\mathbf{S}(\mathfrak{A})$. En particulier,

(13) $$\tilde{T}_f = S_f, \qquad \tilde{S}_f = T_f \qquad \text{pour} \quad f \in \mathfrak{H}.$$

Soient

(14) $$T_h = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, dE_\lambda, \qquad S_h = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, dF_\lambda$$

les représentations spectrales de ces opérateurs avec les E_λ, les F_λ continus à droite. Comme, en vertu de (13), $\tilde{T}_h = S_h$, on a

(15) $$\tilde{E}_\lambda = F_\lambda, \qquad \tilde{F}_\lambda = E_\lambda.$$

Soit

(16) $\xi(\lambda)$: *une fonction de variable réelle, à valeurs complexes, borélienne et bornée, dont le support ne contient pas* o.

Définissons comme d'ordinaire $\xi(T_h)$ et $\xi(S_h)$:

(17) $$\xi(T_h) = \int_{-\infty}^{\infty} \xi(\lambda)\, dE_\lambda, \qquad \xi(S_h) = \int_{-\infty}^{\infty} \xi(\lambda)\, dF_\lambda.$$

Ce sont des opérateurs bornés, appartenant respectivement à $\mathbf{T}(\mathfrak{A})$ et à $\mathbf{S}(\mathfrak{A})$, et nous avons

(18) $$\widetilde{\xi(T_h)} = \xi(S_h), \qquad \widetilde{\xi(S_h)} = \xi(T_h),$$

parce que

$$\begin{aligned}\widetilde{\xi(T_h)} f &= (\xi(T_h)^\star f^\star)^\star = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \bar{\xi}(\lambda)\, dE_\lambda f^\star\right)^\star \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \xi(\lambda)\, d(E_\lambda f^\star)^\star = \int_{-\infty}^{\infty} \xi(\lambda)\, d\tilde{E}_\lambda f \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \xi(\lambda)\, dF_\lambda f = \xi(S_h) f,\end{aligned}$$

où

(19) $$\bar{\xi}(\lambda) = \text{la conjuguée complexe de } \xi(\lambda).$$

De cette relation, nous pouvons tirer que

(20) $$\xi(T_h) h = \xi(S_h) h.$$

Prenons pour cet effet z, $w \in \mathfrak{A}$ quelconque. Alors

$$\begin{aligned}
&(\xi(T_h) h,\, zw) \\
&= ((\xi(T_h) h) w^\star,\, z) \\
&= (\xi(T_h)(h w^\star),\, z) && \text{car } \xi(T_h) \in \mathbf{T}(\mathfrak{A}) = (\mathbf{S}(\mathfrak{A}))' \\
&= (\xi(T_h) T_h w^\star,\, z) \\
&= (T_h w^\star,\, \bar{\xi}(T_h) z) && \text{d'après le principe du calcul fonctionnel} \\
&= (w^\star,\, \bar{\xi}(T_h) T_h z) && \text{car } T_h \text{ et } \bar{\xi}(T_h) \text{ commutent} \\
&= (w^\star,\, (\bar{\xi}(T_h) h) z) && \text{car } \bar{\xi}(T_h) \in \mathbf{T}(\mathfrak{A}) = (\mathbf{S}(\mathfrak{A}))' \\
&= (w^\star z^\star,\, \bar{\xi}(T_h) h) \\
&= (w^\star z^\star,\, (\xi(T_h))^\star h^\star) \\
&= (\xi(S_h) h,\, zw) && \text{d'après (18).}
\end{aligned}$$

D'où (20), grâce aux axiomes des algèbres de Hilbert [§ 1, n° 1, (*iv*)]. Ensuite, posons

$$(21)\qquad \xi[h]=\xi[T_h]h, \qquad \text{où} \quad \xi[T_h]=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\xi(\lambda)}{\lambda}\,dE_\lambda.$$

Si l'on écrit

$$\eta(\lambda)=\frac{\xi(\lambda)}{\lambda},$$

$\eta(\lambda)$ est aussi une fonction qui satisfait à la condition indiquée à (16). Par la définition même, il est évident que $\xi[T_h]=\eta(T_h)$, d'où, au moyen de (20),

$$\xi[h]=\xi[T_h]h=\eta(T_h)h=\eta(S_h)h,$$

ou bien

$$(22)\qquad \xi[h]=\xi[S_h]h, \qquad \text{où} \quad \xi[S_h]=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\xi(\lambda)}{\lambda}\,dF_\lambda.$$

D'ailleurs, par le principe du calcul fonctionnel, on a

$$\xi[T_h]\,T_h\subset T_h\xi[T_h]\subset\xi(T_h),$$
$$\xi[S_h]S_h\subset S_h\xi[S_h]\subset\xi(S_h).$$

Par conséquent, si nous prenons un $z\in\mathfrak{A}$ quelconque, nous voyons que

$$\xi[h]z=(\xi[T_h]h)z=\xi[T_h]\,T_hz=\xi(T_h)z.$$

De même, nous avons

$$z\xi[h]=\xi(S_h)z.$$

On en déduit que

$$(23)\qquad T_{\xi[h]}=\xi(T_h), \qquad S_{\xi[h]}=\xi(S_h).$$

Les membres à droite de ces expressions étant des opérateurs bornés, cette relation montre que

(24) $\xi[h]$ *est un élément borné.*

Pour cet élément, nous avons encore

$$(25)\qquad (\xi[h])^*=\bar{\xi}[h];$$
$$(26)\qquad \xi_1[h]\,\xi_2[h]=\xi_3[h],$$

où $\xi_1(\lambda)$, $\xi_2(\lambda)$ sont des fonctions qui satisfont à la condition (16) et $\xi_3(\lambda)=\xi_1(\lambda)\,\xi_2(\lambda)$.

En effet, pour (25),

$$(\xi[h])^*=(\xi[T_h]h)^*=\big((\bar{\xi}[T_h])^*h\big)^*=\bar{\xi}[S_h]h=\bar{\xi}[h],$$

d'après (18) appliqué à $\frac{\bar{\xi}(\lambda)}{\lambda}$ à la place de $\xi(\lambda)$, et d'après (22) appliqué à $\bar{\xi}(\lambda)$ à la place de $\xi(\lambda)$. Quant à (26),

$$\begin{aligned}\xi_1[h]\,\xi_2[h] &= T_{\xi_1[h]}\xi_2[h] = \xi_1(T_h)\,\xi_2[T_h]\,h \\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty}\xi_1(\lambda)\,dE_\lambda\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\xi_2(\lambda)}{\lambda}\,dE_\lambda\right)h \\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\xi_1(\lambda)\,\xi_2(\lambda)}{\lambda}\,dE_\lambda\right)h \\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\xi_3(\lambda)}{\lambda}\,dE_\lambda\right)h = \xi_3[T_h]\,h = \xi_3[h],\end{aligned}$$

d'après (14), (16) et le principe du calcul fonctionnel.

Nous pouvons maintenant énoncer les principaux résultats de ce paragraphe.

Lemme. — *Pour toute fonction $\alpha(\lambda)$ de variable réelle à valeurs complexes, borélienne et bornée,*

$$\alpha(T_h)\,h = \alpha(S_h)\,h,$$

et ceci est adhérent à l'ensemble des $\xi[h]$.

Démonstration. — Posons pour chaque n entier positif

(27) $\chi_n(\lambda) =$ la fonction caractéristique de l'ensemble des λ tels

que $\quad -n < \lambda \leqq -\frac{1}{n} \quad$ ou $\quad \frac{1}{n} < \lambda \leqq n.$

Alors il est manifeste que $\chi_n(\lambda)$ est une fonction assujettie à (16), et

$$\chi_n(T_h) = E_n - E_{\frac{1}{n}} + E_{-\frac{1}{n}} - E_{-n}.$$

On a donc

(28) $$\text{limite forte de } \chi_n(T_h) = 1 - (E_0 - E_{0-0}).$$

Soit maintenant $\xi_n(\lambda) = \lambda\,\alpha(\lambda)\,\chi_n(\lambda)$. Alors $\xi_n(\lambda)$ satisfait à la condition (16) et

(29) $$\begin{aligned}\xi_n[h] &= \xi_n[T_h]\,h = \left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\xi_n(\lambda)}{\lambda}\,dE_\lambda\right)h \\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty}\alpha(\lambda)\,\chi_n(\lambda)\,dE_\lambda\right)h = \alpha(T_h)\,\chi_n(T_h)\,h\end{aligned}$$

qui tend fortement vers $\alpha(T_h)(1-(E_0-E_{0-0}))h$ grâce à (28) et parce que $\alpha(T_h)$ est borné. Or nous avons $(E_0 - E_{0-0})h = 0$, car

$$((E_0 - E_{0-0})\,h)\,z = (E_0 - E_{0-0})\,(hz) = (E_0 - E_{0-0})\,T_h z = 0$$

pour tout $z \in \mathfrak{A}$, d'où l'assertion en tenant compte du paragraphe 1, n° 1 (*iv'*). Par conséquent,

$$\alpha(T_h)\,h = \lim_{n\to\infty}\xi_n[h].$$

Ensuite, en vertu de (13), on a

$$\chi_n(T_h)h = \chi_n(S_h)h.$$

D'autre part, on voit, justement de la même façon que (29), que

$$\xi_n[h] = \alpha(S_h)\chi_n(S_h)h,$$

eu égard aussi à (22). En passant à la limite, nous avons donc

$$\alpha(T_h)h = \lim_{n\to\infty} \xi_n[h] = \alpha(S_h)h.$$

Proposition 7. — *Soit h un élément hermitien dans $\mathfrak{H}$. Soient* **P** *l'algèbre de von Neumann dont le commutant est l'ensemble des opérateurs permutables avec T_h, et de même* **Q** *l'algèbre de von Neumann dont le commutant est l'ensemble des opérateurs permutables avec S_h. Alors :*

(i) $[\mathbf{P}h] = [\mathbf{Q}h]$, *que nous allons noter $\mathfrak{G}$. Évidemment $h \in \mathfrak{G}$;*

(ii) $\mathfrak{G}$ *est l'adhérence d'une sous-algèbre de Hilbert commutative de $\overline{\mathfrak{A}}$; l'algèbre de Hilbert achevée provenant de cette sous-algèbre sera désignée par $\{h\}$;*

(iii) **P** *est engendré par les T_x, $x \in \{h\}$ et l'opérateur d'identité, et* **Q** *est engendré par les S_x, $x \in \{h\}$ et l'opérateur d'identité.*

(*Voir* aussi la proposition 9.)

Démonstration. — *Ad* (i). On sait que, pour un opérateur quelconque A de **P**, il existe une fonction borélienne $\zeta(\lambda)$ telle que $\zeta(T_h)h$ soit défini et

$$\zeta(T_h)h = Ah.$$

(Pour ce fait *voir* par exemple [LT], p. 63). D'autant que h appartient au domaine de $\zeta(T_h)$, $\zeta(T_h)h$ est la limite forte d'une suite des éléments de la forme $\alpha(T_h)h$, où $\alpha(\lambda)$ est une fonction borélienne bornée. Or les éléments de cette dernière forme sont adhérents à l'ensemble des $\xi[h]$ comme nous l'avons vu dans le lemme, nous voyons que $[\mathbf{P}h]$ est l'adhérence de l'ensemble des $\xi[h]$. De la même façon, nous voyons que $[\mathbf{Q}h]$ est aussi l'adhérence de l'ensemble des $\xi[h]$. Donc $[\mathbf{P}h] = [\mathbf{Q}h]$. D'ailleurs, il est évident que ce sous-espace contient h.

Ad (ii). A cause de (24), (25), (26), il est immédiat que l'ensemble des $\xi[h]$ forme une sous-algèbre de Hilbert de $\overline{\mathfrak{A}}$.

Ad (iii). Choisissons $\chi_n(\lambda)$ comme en (27). Alors $\xi_n(\lambda) = \alpha(\lambda)\chi_n(\lambda)$ remplit la condition (16) et

$$\xi_n(T_h) = \alpha(T_h)\chi_n(T_h) \to \alpha(T_h)(1 - (E_0 - E_{0-0})) \quad \text{fortement}$$

en vertu de (28) et pour la raison que $\alpha(T_h)$ est borné. Donc, si $\alpha(0) = 0$, $\alpha(T_h)$ est adhérent à l'ensemble des $\xi(T_h) = T_{\xi[h]}$. Pour $\alpha(\lambda)$ arbitraire, si nous posons

$$\alpha_0(\lambda) = \alpha(\lambda) - \alpha(0),$$

nous avons

$$\alpha(T_h) = \alpha_0(T_h) + \alpha(0)1,$$

qui sera contenu dans l'algèbre d'opérateurs faiblement fermée engendrée par 1 et les $T_{\xi[h]}$, à plus forte raison contenu dans celle qui est engendrée par 1 et les T_x, $x \in \{h\}$. Réciproquement, parce que $\{h\}$ est engendrée par les $\xi[h]$, les T_x, $x \in \{h\}$ sont fortement adhérents aux $T_{\xi[h]}$ (§ 1, n° 3), donc contenus dans $\mathbf{P}$. Aussi avons-nous que $\mathbf{P}$ est engendrée par 1 et les T_x, $x \in \{h\}$.

Définition 3. — Nous allons appeler *enveloppe bornée* d'un élément hermitien h la sous-algèbre de Hilbert $\{h\}$ de $\overline{\mathfrak{A}}$ que nous avons obtenue dans la proposition 7.

5. Le commutant d'un sous-ensemble et le centre d'une algèbre de Hilbert.

Proposition 8. — *Les conditions suivantes sont équivalentes pour deux éléments f, g de $\mathfrak{H}$:*

(i) *La fermeture de $T_f T_g$ et la fermeture de $T_g T_f$ coïncident;*

(i*) *La fermeture de $T_{f^*} T_{g^*}$ et la fermeture de $T_{g^*} T_{f^*}$ coïncident;*

(i') *La fermeture de $S_f S_g$ et la fermeture de $S_g S_f$ coïncident;*

(i'*) *La fermeture de $S_{f^*} S_{g^*}$ et la fermeture de $S_{g^*} S_{f^*}$ coïncident;*

(ii) *$T_f T_g$ et $T_g T_f$ sont tous les deux définis sur un ensemble partout dense dans $\overline{\mathfrak{A}}$ sur lequel ils coïncident;*

(ii*) *$T_{f^*} T_{g^*}$ et $T_{g^*} T_{f^*}$ sont tous les deux définis sur un ensemble partout dense dans $\overline{\mathfrak{A}}$ sur lequel ils coïncident;*

(ii') *$S_f S_g$ et $S_g S_f$ sont tous les deux définis sur un ensemble partout dense dans $\overline{\mathfrak{A}}$ sur lequel ils coïncident;*

(ii'*) *$S_{f^*} S_{g^*}$ et $S_{g^*} S_{f^*}$ sont tous les deux définis sur un ensemble partout dense dans $\overline{\mathfrak{A}}$ sur lequel ils coïncident;*

(iii) *Pour $z \in \mathfrak{A}$ quelconque,*

$$(zf, g^*) = (fz, g^*) \qquad (= (zg, f^*) = (gz, f^*)).$$

Avant d'entamer la démonstration, nous esquissons la théorie des opérateurs mesurables due à [R. O. I] (chap. XIV) et à Segal [7] (§ 2).

Un sous-ensemble $\mathfrak{D}$ de $\mathfrak{H}$ est dit *essentiellement dense* par rapport à une algèbre de von Neumann $\mathbf{M}$ s'il existe une suite $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$, ... de sous-espaces fermés de $\mathfrak{H}$ telle que

(*a*) $\mathfrak{M}_j \eta \mathbf{M}$, $\mathfrak{M}_j^{\perp}$ soit fini [au sens de la théorie des algèbres de von Neumann ([4])] par rapport à $\mathbf{M}$;

(*b*) $\mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{M}_2 \subset \ldots$;

(*c*) $[\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots] = \mathfrak{H}$.

Nous disons dans ce cas que $\mathfrak{D}$ est *défini sur* $\mathfrak{M}_1$ $\mathfrak{M}_2$, ...

([4]) *Voir*, par exemple [AvN], p. 241.

Un opérateur fermé est appelé *mesurable* par rapport à $\mathbf{M}$ s'il est défini dans un domaine essentiellement dense dans $\mathfrak{H}$ par rapport à $\mathbf{M}$ et est affilié à $\mathbf{M}$.

La théorie générale des opérateurs mesurables nous enseigne que, si nous prenons des opérateurs mesurables par rapport à $\mathbf{M}$ et si nous appliquons entre eux un nombre fini d'opérations telles que l'addition, la multiplication, l'adjonction, nous obtenons un opérateur dont la fermeture peut être formée et est aussi mesurable, et ces opérations sont faites comme s'il s'agissait d'opérateurs bornés (à savoir l'associativité, la distributivité, etc. sont valables); que, si l'on prend un nombre fini (même dénombrable) d'opérateurs mesurables par rapport à $\mathbf{M}$ leur domaine commun est encore essentiellement dense; qu'un opérateur affilié à $\mathbf{M}$ et défini sur un domaine essentiellement dense a une unique extension fermée,

Nous ajoutons ici encore quelques mots sur le comportement de ces opérateurs sous l'influence de l'anti-isomorphisme canonique. Soit $\mathfrak{D}$ un sous-ensemble essentiellement dense par rapport à $\mathbf{M}$, qui est défini sur la suite $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$, ..., où les projecteurs P_j sur $\mathfrak{M}_j$ appartiennent à $\mathbf{M}$. Alors $\mathfrak{D}^\star$ est essentiellement dense par rapport à $\mathbf{M}'$: sa suite définissante peut être prise comme $\mathfrak{M}_1^\star$, $\mathfrak{M}_2^\star$, ... et le projecteur sur $\mathfrak{M}_j^\star$ est le projecteur $\tilde{P}_j$, image de P_j par l'anti-isomorphisme canonique. Par ailleurs, le calcul entre les opérateurs mesurables se transporte précisément d'une manière anti-isomorphe par l'anti-isomorphisme canonique. (Par exemple, si A, B sont des opérateurs mesurables par rapport à $\mathbf{M}$, les fermetures de $A+B$, AB, etc. correspondent à celles de $\tilde{A}+\tilde{B}$, $\tilde{B}\tilde{A}$. etc.).

Dans notre proposition, T_f, T_g sont mesurables par rapport à $\mathbf{T}(\mathfrak{A})$ comme ceci a été dit au paragraphe 1, n° 4, donc les fermetures de T_fT_g et de T_gT_f existent toujours, et ont un domaine commun essentiellement dense. En ce qui concerne les opérateurs $T_{f^\star}T_{g^\star}$, etc., et les S_fS_g, etc., les circonstances sont les mêmes.

Démonstration de la proposition 8. — D'après les règles du calcul sur les opérateurs mesurables et la relation (2) du paragraphe 1, (i)$\rightleftharpoons$(i*), (i$'$)$\rightleftharpoons$(i$'^\star$) sont évidentes. Quant à (i)$\rightleftharpoons$(i$'$), ceci est vrai parce que (i) et (i$'$) sont les conditions qui se correspondent par l'anti-isomorphisme canonique. Si l'on démontre l'équivalence de (i) et de (ii), les démonstrations de (i*)$\rightleftharpoons$(ii*), (i$'$)$\rightleftharpoons$(ii$'$), (i$'^\star$)$\rightleftharpoons$(ii$'^\star$) seront faites de la même façon. Donc tout ce qu'il nous reste est de montrer l'équivalence de (i) et de (ii), et celle de (i) et de (iii).

(ii)$\rightarrow$(i). Soit $\mathfrak{R}$ le sous-ensemble introduit dans la condition (ii), et soit A la fermeture de l'opérateur $T_fT_g - T_gT_f$. Soit $\mathfrak{N}$ l'ensemble des zéros de A. A étant un opérateur fermé, $\mathfrak{N}$ est un sous-espace fermé qui, par l'hypothèse, contient $\mathfrak{R}$. Or $\mathfrak{R}$ étant partout dense dans $\mathfrak{H}$, il suit de là que $\mathfrak{N} = \mathfrak{H}$, d'où $A = 0$. Et ceci signifie, d'après les règles du calcul sur les opérateurs mesurables, que les fermetures de T_fT_g et de T_gT_f coïncident.

Pour montrer (i)$\rightarrow$(ii) et (iii)$\rightarrow$(i), nous ferons une considération préparatoire. $T_f T_g$ et $T_g T_f$ sont définis sur un domaine $\mathfrak{D}$ essentiellement dense par rapport à $\mathbf{M}$ qui est défini sur une suite $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$, ... Soit P_j le projecteur sur $\mathfrak{M}_j$. Alors $P_j \in \mathbf{T}(\mathfrak{A})$, d'où d'après le paragraphe 1, n° 4, $P_j\mathfrak{A} \subset \overline{\mathfrak{A}}$; et de plus, évidemment, $P_j\mathfrak{A}$ est dense dans $\mathfrak{M}_j$. Donc si l'on prend la réunion $\mathfrak{S}$ des $P_j\mathfrak{A}$, elle est contenue dans $\overline{\mathfrak{A}}$, partout dense dans $\mathfrak{H}$, *a fortiori* dans $\overline{\mathfrak{A}}$, et contenue dans $\mathfrak{D}$.

Ceci étant

(i)$\rightarrow$(ii). D'après l'hypothèse, $T_f T_g$ et $T_g T_f$ coïncident sur $\mathfrak{D}$, à plus forte raison sur $\mathfrak{S}$, donc $\mathfrak{S}$ répond à notre besoin.

(iii)$\rightarrow$(i). Nous remarquons tout d'abord le fait que, sous la condition (iii), on a l'égalité

$$(zf, g^*) = (fz, g^*),$$

même si nous supposons $z \in \overline{\mathfrak{A}}$. En effet, d'après le paragraphe 1, n° 3, on peut prendre une suite z_1, z_2, ... d'éléments de $\mathfrak{A}$ qui tend vers z avec les $|||T_{z_n}|||(=|||S_{z_n}|||)$ bornés. Et sous cette condition, comme nous l'avons remarqué là-bas, les T_{z_n} (les S_{z_n}) convergent fortement vers T_z (vers S_z). Par l'hypothèse, pour les z_n, l'égalité en question est vraie, et en passant à la limite, nous pouvons avoir cette égalité pour z aussi.

Soient maintenant $z \in \mathfrak{S}$ et $a \in \mathfrak{A}$ quelconques. On a alors $za \in \overline{\mathfrak{A}}$, d'où, d'après ce que nous venons de voir,

$$\begin{aligned}(fza, g^*) &= (za f, g^*) = (g, f^* a^* z^*) = (gz, f^* a^*)\\ &= (\mathrm{T}_f \mathrm{T}_g z, a^*).\end{aligned}$$

D'autre part,

$$(fza, g^*) = (fz, g^* a^*) = (\mathrm{T}_g \mathrm{T}_f z, a^*).$$

Donc

$$(\mathrm{T}_f \mathrm{T}_g z, a^*) = (\mathrm{T}_g \mathrm{T}_f z, a^*), \quad \text{pour tout } a \in \mathfrak{A},$$

par conséquent on a

$$\mathrm{T}_f \mathrm{T}_g z = \mathrm{T}_g \mathrm{T}_f z \quad \text{pour tout } z \in \mathfrak{S}.$$

Or, d'après le théorème du graphe fermé, les fermetures de $T_f T_g$ et de $T_g T_f$ sont toutes les deux bornées sur chaque $\mathfrak{M}_j$. $\mathfrak{S} \cap \mathfrak{M}_j$ étant dense dans $\mathfrak{M}_j$, il s'ensuit qu'elles coïncident sur $\mathfrak{M}_j$, d'où sur leur réunion qui est fortement dense dans $\mathfrak{H}$. Par conséquent, la fermeture de $T_f T_g$ coïncide avec la fermeture de $T_g T_f$.

(i)$\rightarrow$(iii). Pour démontrer (iii) sous la condition (i), il nous faut encore faire quelques préparations. Soit $\mathfrak{D}'$ le domaine commun des quatre opérateurs $T_f T_g$, $T_g T_f$, $T_{f^*} T_{g^*}$, $T_{g^*} T_{f^*}$ et soit $\mathfrak{D}''$ le domaine commun des $S_g S_f$, $S_f S_g$, $S_{g^*} S_{f^*}$, $S_{f^*} S_{g^*}$. Puisque $S_g S_f$ etc. correspondent à $T_f T_g$, etc. par l'anti-isomorphisme canonique, $\mathfrak{D}''$ correspond à $\mathfrak{D}'$ par l'anti-isomorphisme canonique c'est-à-dire $\mathfrak{D}''=(\mathfrak{D}')^\star$. D'ailleurs, $\mathfrak{D}'(\mathfrak{D}'')$ est essentiellement dense par rapport à $\mathbf{M}$ (à $\mathbf{M}'$).

Posons $\mathfrak{T}=\mathfrak{D}'\cap\mathfrak{D}''\cap\overline{\mathfrak{A}}$. Comme $\mathfrak{D}''=(\mathfrak{D}')^\star$, $\mathfrak{T}$ est un sous-espace linéaire involutif. Nous allons observer de plus que $\mathfrak{T}$ est dense dans $\overline{\mathfrak{A}}$. En effet, $\mathfrak{D}'$ étant essentiellement dense par rapport à $\mathbf{M}$, il est défini sur une suite, disons $\mathfrak{M}'_1$, $\mathfrak{M}'_2$, ... $\mathfrak{D}''$ est également défini sur une suite $\mathfrak{M}''_1$, $\mathfrak{M}''_2$, ... en faisant le même argument par rapport à $\mathbf{M}'$. Posons P_j(resp. Q_j) le projecteur sur $\mathfrak{M}'_j$ (resp. sur $\mathfrak{M}''_j$). Alors

$$(\alpha)\qquad P_j\in\mathbf{T}(\mathfrak{A}),\qquad Q_j\in\mathbf{S}(\mathfrak{A}),$$

d'où P_j, Q_j commutent et P_jQ_j est projecteur,

$$(\beta)\qquad \begin{aligned} &P_1\leqq P_2\leqq\ldots,\quad \text{limite forte de } P_j=1,\\ &Q_1\leqq Q_2\leqq\ldots,\quad \text{limite forte de } Q_j=1.\end{aligned}$$

De ces deux points, nous avons que

$$(\gamma)\qquad P_1Q_1\leqq P_2Q_2\leqq\ldots,\quad \text{limite forte de } P_jQ_j=1.$$

Maintenant, d'après le paragraphe 1, n° 4, nous avons que

$$(\delta)\qquad P_jQ_j\overline{\mathfrak{A}}\subset\overline{\mathfrak{A}}.$$

La réunion des $P_jQ_j\overline{\mathfrak{A}}$ que nous allons noter $\mathfrak{T}_0$ est donc contenue dans $\overline{\mathfrak{A}}$. D'autre part,

$$P_jQ_j\overline{\mathfrak{A}}\subset P_j\mathfrak{H}\subset\mathfrak{D}'\qquad (j=1, 2, \ldots),$$

d'où $\mathfrak{T}_0\subset\mathfrak{D}'$. De même, $\mathfrak{T}_0\subset\mathfrak{D}''$. Par conséquent,

$$(\varepsilon)\qquad \mathfrak{T}_0\subset\overline{\mathfrak{A}}\cap\mathfrak{D}'\cap\mathfrak{D}''=\mathfrak{T}.$$

Or (γ) montre que $\mathfrak{T}_0$ est partout dense dans $\overline{\mathfrak{A}}$, donc, à plus forte raison, $\mathfrak{T}$ l'est aussi.

Ensuite nous posons $\mathfrak{A}'$ l'ensemble des éléments z de $\overline{\mathfrak{A}}$ qui satisfont aux relations

$$(\zeta)\qquad (zf, g^\star)=(fz, g^\star),\qquad (z^\star f, g^\star)=(fz^\star, g^\star).$$

Il est manifeste que $\mathfrak{A}'$ est un sous-espace linéaire involutif de $\mathfrak{H}$. Notre but suivant est de démontrer que, si $t\in\mathfrak{T}$ et $z\in\overline{\mathfrak{A}}$, tz et zt sont dans $\mathfrak{A}'$. D'après l'hypothèse, $T_fT_g=T_gT_f$ sur $\mathfrak{D}'$, *a fortiori* sur $\mathfrak{T}$, nous avons

$$\begin{aligned}((tz)f, g^\star)&=(f, z^\star t^\star g^\star)\ =\ (gtz, f^\star)\ =(gt, f^\star z^\star)\\ &=(T_gt,\ T^\star_f z^\star)=(T_fT_gt,\ z^\star)=(T_gT_ft,\ z^\star)\\ &=(T_ft,\ T^\star_g z^\star)=\ (ft, g^\star z^\star)\ =(f(tz), g^\star).\end{aligned}$$

Nous avons déjà remarqué que (i) et (i*) sont équivalentes. Donc le même raisonnement est valable pour $f^\star$ et $g^\star$, et nous obtenons la seconde relation de (ζ), ayant tz à la place de z. Par conséquent, $tz\in\mathfrak{A}'$. Quant à zt, il appartient à $\mathfrak{A}'$ vu que $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{A}'$, $\overline{\mathfrak{A}}$ sont tous trois involutifs. [On pourrait montrer que $zt \in \mathfrak{A}'$ en faisant le même argument sous les conditions (i′) et (i′*).]

Considérons ensuite l'ensemble $\mathfrak{A}'' = \mathfrak{T}\overline{\mathfrak{A}} + \overline{\mathfrak{A}}\mathfrak{T}$, c'est-à-dire l'ensemble des éléments de la forme $\sum t_j z_j + \sum z'_k t'_k$ (somme finie) où t_j, $t'_k \in \mathfrak{T}$, z_j, $z'_k \in \overline{\mathfrak{A}}$. $\mathfrak{A}''$ est non seulement un sous-espace linéaire involutif, mais aussi une sous-algèbre de $\overline{\mathfrak{A}}$, parce que $\mathfrak{T} \subset \overline{\mathfrak{A}}$. Donc $\mathfrak{A}''$ est une sous-algèbre de Hilbert de $\overline{\mathfrak{A}}$ et, de plus, il est partout dense dans $\mathfrak{H}$, parce qu'il est d'abord dense dans $\overline{\mathfrak{A}}\ \overline{\mathfrak{A}}$ vu que $\mathfrak{T}$ est dense dans $\overline{\mathfrak{A}}$ et ensuite $\mathfrak{A}\ \mathfrak{A}$ est dense dans $\mathfrak{H}$, d'après l'axiome 2° (*iv*) de l'algèbre de Hilbert. Par conséquent, $\overline{\mathfrak{A}}$ est l'algèbre de Hilbert achevée provenant de $\mathfrak{A}''$, d'où il suit que tous les éléments de $\overline{\mathfrak{A}}$ sont bornés par rapport à $\mathfrak{A}''$. Prenons un élément quelconque y de $\overline{\mathfrak{A}}$. D'après le paragraphe 1, n° 3, il existe une suite $y_1, y_2, \ldots$ d'éléments de $\mathfrak{A}''$ qui tend vers y avec les $|||T_{y_n}|||\,(= |||T_{y_n^\star}||| = |||S_{y_n}||| = |||S_{y_n^\star}|||)$ bornés. Maintenant les y_n sont des combinaisons linéaires des éléments de la forme tz, zt, où $t \in \mathfrak{T}$, $z \in \overline{\mathfrak{A}}$, qui sont contenus dans $\mathfrak{A}'$, et les y_n appartiennent à $\mathfrak{A}'$ aussi. Autrement dit, nous avons

$$(y_n f, g^\star) = (f y_n, g^\star), \qquad (y_n^\star f, g^\star) = (f y_n^\star, g^\star)$$

pour tout n. En passant à la limite (ce qui est légitime vu que, sous notre hypothèse, les T_{y_n} convergent fortement vers T_y, etc), nous avons les relations (ζ) aussi pour y ou, par définition, y appartient à $\mathfrak{A}'$. Ceci implique que $\mathfrak{A}' = \overline{\mathfrak{A}}$, et en particulier $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{A}'$. Donc nous avons bien pour les éléments de $\mathfrak{A}$ les égalités (ζ). C. Q. F. D.

Remarque. — Si l'un des deux éléments f, g est borné, nos conditions sont encore équivalentes aux suivantes :

(iv) *T_f et T_g commutent au sens usuel;*
(iv*) *$T_{f^\star}$ et $T_{g^\star}$ commutent au sens usuel;*
(iv′) *S_f et S_g commutent au sens usuel;*
(iv′*) *$S_{f^\star}$ et $S_{g^\star}$ commutent au sens usuel;*
(v) $fg = gf$;
(v*) $f^\star g^\star = g^\star f^\star$.

DÉFINITION 4. — Soient f, $g \in \mathfrak{H}$. Si l'une des conditions équivalentes de la proposition 7 est remplie, nous appelons f, g *commutatifs*.

Suivant cette définition, lorsque f et g commutent, $f^\star$ et $g^\star$ commutent aussi.

D'ailleurs, il est évident que cette définition étend la notion de commutativité entre deux éléments bornés au sens ordinaire (*voir* aussi la remarque ci-dessus).

LEMME. — *Soient A, B des opérateurs hermitiens, affiliés à $\mathbf{T}(\mathfrak{A})$ et mesurables par rapport à $\mathbf{T}(\mathfrak{A})$. Si A, B sont commutatifs en ce sens que la fermeture de AB et celle de BA coïncident, alors A, B commutent au sens de von Neumann* [4], *c'est-*

à-dire les projecteurs spectraux de A et de B commutent. Et dans ce cas, tous les opérateurs bornés, fonctions de A ou de B, commutent entre eux et avec A et B (au sens usuel du mot).

Démonstration. — Dans l'hypothèse faite, on voit sans peine que, d'après les règles du calcul sur les opérateurs mesurables,

$$\text{la fermeture de } \frac{A - i1}{A + i1} B = \text{la fermeture de } B \frac{A - i1}{A + i1},$$

c'est-à-dire le transformé de Cayley U_A de A commute à B. De la même manière, on voit que le transformé de Cayley U_B de B commute à U_A. Or alors il ne s'agit que d'opérateurs bornés, donc U_A et U_B commutent au sens ordinaire. Il suit de là que les projecteurs spectraux de U_A et de U_B, donc ceux de A et de B commutent. D'ailleurs on sait, grâce à la théorie générale des opérateurs hermitiens, que, sous cette circonstance, tous les opérateurs bornés, fonctions de A ou de B, commutent entre eux et avec A et B, et ceci conclut la démonstration.

PROPOSITION 9. — *Soit h un élément hermitien de $\mathfrak{H}$. Alors tous les éléments commutatifs à h commutent à tous les éléments dans l'enveloppe bornée $\{h\}$ de h.*

Démonstration. — Soit f commutatif à h. Alors il est immédiat que $f^\star$ commute à h. Donc $f+f^\star$, $i(f-f^\star)$ commutent à h. Pour cette raison, nous pouvons supposer que f soit hermitien.

Prenons une fonction $\xi(\lambda)$ comme en (16), et considérons l'élément $\xi[h]$ de (21). D'après (23), $T_{\xi[h]} = \xi(T_h)$. Or le lemme précédent montre qu'alors $T_{\xi[h]}$ et T_f commutent. Et ceci revient à dire, vu la remarque faite après la proposition 8 et par définition, que f et $\xi[h]$ commutent.

Maintenant, l'élément quelconque de $\{h\}$ est adhérent à l'ensemble des $\xi[h]$, et par suite, grâce à la proposition 8 (iii), il commute à f.

THÉORÈME 2. — *Soit $\mathfrak{E}$ un sous-ensemble quelconque de $\mathfrak{H}$, et soit $\mathfrak{F}$ l'ensemble des éléments f de $\mathfrak{H}$ tels que f et $f^\star$ commutent à tous les éléments de $\mathfrak{E}$.*

Alors l'ensemble $\mathcal{F}$ des éléments bornés contenus dans $\mathfrak{F}$ est dense dans $\mathfrak{F}$ et forme une sous-algèbre de Hilbert de $\overline{\mathfrak{A}}$.

Démonstration. — $\mathcal{F}$ est évidemment une sous-algèbre involutive de $\overline{\mathfrak{A}}$. Donc il s'agit seulement de montrer la densité de $\mathcal{F}$ dans $\mathfrak{F}$.

$\mathfrak{F}$ est un sous-espace involutif ainsi que $\mathcal{F}$. Par conséquent, pour montrer que $\mathcal{F}$ est dense dans $\mathfrak{F}$, il suffit d'établir que les éléments hermitiens de $\mathfrak{F}$ peuvent être approchés autant qu'on veut par les éléments de $\mathcal{F}$.

Soit donc h un élément hermitien $\in \mathfrak{F}$. Prenons un $g \in \mathfrak{E}$. Alors grâce à la proposition 9, nous savons que tous les éléments de $\{h\}$ commutent à g. $\{h\}$ étant involutive, ceci dit que tous les éléments de $\{h\}$ commutent à g ainsi que leur adjoint. Ceci étant vrai pour tous les $g \in \mathfrak{E}$, on voit que $\{h\} \subset \mathfrak{F}$.

D'ailleurs, $\{h\}$ consiste en éléments bornés, donc est contenu dans $\mathcal{F}$. Enfin, d'après la proposition 7, l'adhérence de $\{h\}$ contient h et, à plus forte raison, h appartient à l'adhérence de $\mathcal{F}$. C. Q. F. D.

DÉFINITION 5. — Soit $\mathfrak{E}$ un sous-ensemble quelconque de $\mathfrak{H}$. La sous-algèbre de Hilbert $\mathcal{F}$ de $\overline{\mathcal{A}}$ qui consiste en les éléments bornés commutatifs à tous les éléments de $\mathfrak{E}$ ainsi que leur adjoint (qui est considéré au théorème 2) est appelée *commutant* de $\mathfrak{E}$. Elle sera aussi désignée par $\mathfrak{E}'$.

PROPOSITION 10 ([5]). — *Soit $\mathfrak{C}$ l'ensemble des éléments commutatifs à tous les éléments de $\mathcal{A}$ (l'ensemble des éléments centraux de $\mathcal{A}$) et $\mathcal{C}$ l'ensemble des éléments bornés dans $\mathfrak{C}$. $E_{\mathcal{C}}$ est le projecteur sur $\mathfrak{C}$. Alors :*

(i) *$\mathcal{C}$ est une sous-algèbre de Hilbert de $\overline{\mathcal{A}}$ qui est dense dans $\mathfrak{C}$;*

(ii) *Les éléments de $\mathcal{C}$ sont permutables avec tous les éléments de $\mathcal{A}$ et $E_{\mathcal{C}}$ envoie un élément borné arbitraire pour $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{C}$;*

(iii) *$E_{\mathcal{C}}(zf) = E_{\mathcal{C}}(fz)$ pour $z \in \mathcal{A}$, $f \in \mathfrak{H}$;*

(iv) *$E_{\mathcal{C}}(sf) = sE_{\mathcal{C}}f$ pour $s \in \mathcal{C}$, $f \in \mathfrak{H}$ ou $s \in \mathfrak{C}$, $f \in \mathcal{A}$;*

(v) *Si f est hermitien positif, $E_{\mathcal{C}}f$ l'est aussi, et $E_{\mathcal{C}}f = 0$ entraîne $f = 0$ lorsque le projecteur caractéristique de $\mathcal{A}$ est 1.*

Il sera naturel d'appeler cette sous-algèbre de Hilbert $\mathcal{C}$ le *centre* de $\mathcal{A}$ malgré que cette terminologie soit souvent employée en un autre sens.

Démonstration. — Ce sont des conséquences des théorèmes 1, 2 et des propositions 4, 5, 6 excepté (iii). Pour la dernière assertion de (v), souvenons-nous de la définition du projecteur caractéristique qui était exactement le projecteur sur $[\mathcal{A}\mathcal{C}]$. Par suite, la condition que le projecteur caractéristique soit 1 signifie que $\mathcal{A}\mathcal{C}$ est dense dans $\mathfrak{H}$.

Pour montrer (iii), prenons $a \in \mathcal{A}$ quelconque. Alors

$$\begin{aligned}(\mathrm{E}_{\mathcal{C}}(zf), a) &= (zf, \mathrm{E}_{\mathcal{C}}a) = (f, z^*(\mathrm{E}_{\mathcal{C}}a)) = (f, (\mathrm{E}_{\mathcal{C}}a)z^*) \\ &= (fz, \mathrm{E}_{\mathcal{C}}a) = (\mathrm{E}_{\mathcal{C}}(fz), a),\end{aligned}$$

parce que, étant un élément de $\mathcal{C}$, $E_{\mathcal{C}}a$ commute à tous les éléments de $\mathcal{A}$. D'où l'assertion vu l'arbitraire de a.

6. Les algèbres d'opérateurs $\mathbf{T}^{\mathcal{A}}(\mathcal{B})$, $\mathbf{S}^{\mathcal{A}}(\mathcal{B})$.

Dans ce qui suit, nous suivrons les notations du paragraphe 2.

PROPOSITION 11. — *Le projecteur maximal de $\mathbf{T}^{\mathcal{A}}(\mathcal{B})$ est le projecteur P sur $[\mathcal{B}\mathcal{A}]$ et celui de $\mathbf{S}^{\mathcal{A}}(\mathcal{B})$ est le projecteur P' sur $[\mathcal{A}\mathcal{B}]$. Par suite, tous les opérateurs de $\mathbf{T}^{\mathcal{A}}(\mathcal{B})$ (de $\mathbf{S}^{\mathcal{A}}(\mathcal{B})$) appliquent $[\mathcal{B}\mathcal{A}]$ ($[\mathcal{A}\mathcal{B}]$) dans lui-même*

([5]) Cette proposition n'est pas nouvelle. *Cf.* Godement [2], Sunouchi [3], et aussi [AvN] (chap. I, § 5, exerc. 4).

et $(\mathcal{B}\mathcal{A})^{\perp}$ $((\mathcal{A}\mathcal{B})^{\perp})$ *dans* o. *De plus, P et P' se correspondent l'un à l'autre par l'anti-isomorphisme canonique entre* $\mathbf{T}(\mathcal{A})$ *et* $\mathbf{S}(\mathcal{A})$.

Démonstration. — Le projecteur maximal de $\mathbf{T}^{\mathcal{A}}(\mathcal{B})$ est le projecteur sur le sous-espace fermé engendré par les Af pour $A \in \mathbf{T}^{\mathcal{A}}(\mathcal{B})$ et $f \in \mathfrak{H}$. Ce sous-espace est $[\mathcal{B}\mathcal{A}]$, comme on le voit aisément.

Ensuite, soit f contenu dans $[\mathcal{B}\mathcal{A}]$. Alors, évidemment

$$f^{\star} \in [\mathcal{A}\mathcal{B}], \qquad \text{d'où} \qquad P f^{\star} = f^{\star}.$$

Par conséquent,

$$\tilde{P} f = (P^{\star} f^{\star})^{\star} = (P f^{\star})^{\star} = f^{\star\star} = f.$$

Soit f cette fois dans l'image de $\tilde{P}$. Alors

$$P f^{\star} = (P^{\star} f^{\star})^{\star\star} = (\tilde{P} f)^{\star} = f^{\star}, \qquad \text{d'où} \qquad f^{\star} \in [\mathcal{A}\mathcal{B}], \qquad \text{d'où} \qquad f \in [\mathcal{B}\mathcal{A}].$$

On voit ainsi que $\tilde{P} = P'$.

Corollaire. — *Il existe un projecteur P dans* $\mathbf{T}(\mathcal{A})$, *tel que* $\mathcal{C} = P\tilde{P}\overline{\mathcal{A}}$ *soit une algèbre de Hilbert qui contient* $\mathcal{B}$ *et que* $\mathbf{T}^{\mathcal{C}}(\mathcal{B})$, $\mathbf{S}^{\mathcal{C}}(\mathcal{B})$ *soient des algèbres de von Neumann* ($\tilde{P}$ *désignant l'opérateur de* $\mathbf{S}(\mathcal{A})$ *correspondant à P par l'anti-isomorphisme canonique*).

Démonstration. — Il est clair que le projecteur P sur $[\mathcal{B}\mathcal{A}]$ est contenu dans $\mathbf{T}(\mathcal{A})$ et le projecteur P' sur $[\mathcal{A}\mathcal{B}]$ est contenu dans $\mathbf{S}(\mathcal{A})$. Alors on sait que, pour $a \in \overline{\mathcal{A}}$, $Pa \in \overline{\mathcal{A}}$ et $P'a \in \overline{\mathcal{A}}$ (*voir* § 1, n° 4). Puisque, grâce à la proposition 11, P, P' se correspondent l'un à l'autre par l'anti-isomorphisme canonique entre $\mathbf{T}(\mathcal{A})$ et $\mathbf{S}(\mathcal{A})$, on a

$$\begin{aligned} (PP'a_1)(PP'a_2) &= (P(P'a_1))(P'Pa_2) = P((P'a_1)P'(Pa_2)) \\ &= P(P'((P'a_1)(Pa_2))) \in PP'\overline{\mathcal{A}}, \\ (PP'a)^{\star} &= P'Pa^{\star} \in PP'\overline{\mathcal{A}}. \end{aligned}$$

On en déduit que $PP'\overline{\mathcal{A}}$ est une sous-algèbre de Hilbert de $\overline{\mathcal{A}}$ qui sera désignée par $\mathcal{C}$. En ce qui concerne cette algèbre, il est clair que $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}$, et l'on aura sans peine que $[\mathcal{B}\mathcal{C}] = [\mathcal{C}\mathcal{B}] = \mathfrak{H}_{\mathcal{C}}$, ce qui établira que $\mathbf{T}^{\mathcal{C}}(\mathcal{B})$ et $\mathbf{S}^{\mathcal{C}}(\mathcal{B})$ sont des algèbres de von Neumann d'après la proposition 11.

C. Q. F. D.

Nous allons ensuite établir que l'application de restriction de $\mathbf{T}^{\mathcal{A}}(\mathcal{B})$ dans $\mathbf{T}(\mathcal{B})$ est un isomorphisme surjectif. Plus précisément dit, d'abord, grâce à la proposition 4, tout opérateur de $\mathbf{T}^{\mathcal{A}}(\mathcal{B})$ est réduit par $\mathfrak{H}_{\mathcal{B}}$, donc si l'on restreint son domaine à $\mathfrak{H}_{\mathcal{B}}$, nous avons une application de restriction qui est manisfestement un homomorphisme, et il s'agit de prouver que celle-ci est biunivoque et surjective. Pour cela nous avons besoin de prolonger un opérateur quelconque de $\mathbf{T}(\mathcal{B})$ en un opérateur de $\mathbf{T}(\mathcal{A})$. Soit donc un opérateur $A^{\mathcal{B}}$

de $\mathbf{T}(\mathcal{B})$ prolongé en un opérateur A de $\mathbf{T}(\mathcal{A})$. Alors si l'on prend un élément de la forme

$$(30)\qquad w = s + \sum_{j=1}^{m} t_j z_j \qquad (s,\ t_j \in \mathfrak{H}_{\mathcal{B}},\ z_j \in \mathcal{A}),$$

nous avons forcément

$$A w = A s + \sum_{j=1}^{m} A(t_j z_j) = A s + \sum_{j=1}^{m} (A t_j) z_j = A^{\mathcal{B}} s + \sum_{j=1}^{m} (A^{\mathcal{B}} t_j) z_j.$$

Nous commençons ainsi par associer à w l'élément

$$A^{\mathcal{B}} s + \sum_{j=1}^{m} (A^{\mathcal{B}} t_j) z_j,$$

et c'est ce procédé que nous appelons dans ce qui suit le *prolongement canonique*.

LEMME 1. — *Tout opérateur $A^{\mathcal{B}}$ de $\mathbf{T}(\mathcal{B})$ se prolonge canoniquement en un opérateur borné $A^{\mathfrak{M}}$ sur $\mathfrak{M} = [\mathcal{B}\mathcal{A}]$. L'application $A^{\mathcal{B}} \to A^{\mathfrak{M}}$ est un isomorphisme. A $T_b^{\mathcal{B}}(b \in \mathcal{B})$ correspond l'opérateur $T_{b(\mathfrak{M})}$, la restriction de T_b à $\mathfrak{M}$. De même pour $\mathbf{S}(\mathcal{B})$.*

Démonstration. — Posons $\mathfrak{T} = \mathfrak{H}_{\mathcal{B}} + \mathfrak{H}_{\mathcal{B}}\mathcal{A}$, c'est-à-dire l'ensemble des éléments de la forme $s + \sum_{\text{fini}} t_j z_j$, où $s,\ t_j \in \mathfrak{H}_{\mathcal{B}},\ z_j \in \mathcal{A}$. C'est un sous-espace tel que $\mathfrak{T} \supset \mathfrak{H}_{\mathcal{B}},\ [\mathfrak{T}] = \mathfrak{M}$.

Nous allons associer à $A^{\mathcal{B}}$ un opérateur $A^{\mathfrak{T}}$ sur $\mathfrak{T}$ qui prolonge $A^{\mathcal{B}}$. Prenons pour cet effet un $w \in \mathfrak{T}$ et fixons-en une expression :

$$w = s + \sum_{j=1}^{m} t_j z_j.$$

L'élément w' que nous voulons associer à w par $A^{\mathfrak{T}}$ est défini par

$$(31)\qquad w' = A^{\mathcal{B}} s + \sum_{j=1}^{m} (A^{\mathcal{B}} t_j) z_j.$$

Évidemment, c'est aussi un élément de $\mathfrak{T}$.

Donnons-nous un $\varepsilon > 0$, et supposons que

$$|||S_{z_j}||| \leq M \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

$\mathbf{T}(\mathcal{B})$ étant engendrée par les $T_b^{\mathcal{B}}$, $b \in \mathcal{B}$, il existe, grâce au théorème de densité de Kaplansky ([6]), un $b \in \mathcal{B}$ tel que

$$|||\, T_b^{\mathcal{B}} \,||| \leq |||\, A^{\mathcal{B}} \,|||,$$
$$\|\, A^{\mathcal{B}} s - bs \,\| \leq \frac{\varepsilon}{1+mM}, \qquad \|\, A^{\mathcal{B}} t_j - bt_j \,\| \leq \frac{\varepsilon}{1+mM} \qquad (j = 1, 2, \ldots, m).$$

Or d'après le théorème 1, on sait que $|||\, T_b^{\mathcal{B}} \,||| = |||\, T_b \,|||$, d'où l'on déduit que

$$\begin{aligned}
\|\, w' \,\| &= \left\| A^{\mathcal{B}} s + \sum_j (A^{\mathcal{B}} t_j) z_j \right\| \\
&\leq \left\| bs + \sum_j (bt_j) z_j \right\| + \|\, A^{\mathcal{B}} s - bs \,\| \\
&\qquad + \sum \|\, (A^{\mathcal{B}} t_j) z_j - (bt_j) z_j \,\| \\
&= \left\| b\Big(s + \sum_j t_j z_j\Big) \right\| + \|\, A^{\mathcal{B}} s - bs \,\| \\
&\qquad + \sum_j \|\, S_{z_j}(A^{\mathcal{B}} t_j - bt_j) \,\| \\
&\leq |||\, T_b \,||| \cdot \|\, s + \sum_j t_j z_j \,\| + \varepsilon \\
&\leq |||\, A^{\mathcal{B}} \,||| \cdot \|\, w \,\| + \varepsilon.
\end{aligned}$$

ε étant arbitraire, nous obtenons

$$\|\, w' \,\| \leq |||\, A^{\mathcal{B}} \,||| \cdot \|\, w \,\|. \tag{32}$$

Si donc $w = 0$, $w' = 0$. Par conséquent, on voit que deux expressions différentes d'un même élément de $\mathfrak{T}$ donnent le même élément par passage de (30) à (31). Nous avons ainsi un opérateur $A^{\mathfrak{T}}$ bien déterminé sur $\mathfrak{T}$. De plus, (32) assure que $A^{\mathfrak{T}}$ est un opérateur borné sur $\mathfrak{T}$, de sorte qu'il peut se prolonger uniquement par continuité en un opérateur sur $\mathfrak{M}$, que nous allons écrire $A^{\mathfrak{M}}$. On a donc $|||\, A^{\mathfrak{M}} \,||| \leq |||\, A^{\mathcal{B}} \,|||$, et, évidemment, même

$$|||\, A^{\mathfrak{M}} \,||| = |||\, A^{\mathcal{B}} \,|||. \tag{33}$$

Pour les propriétés de l'application $A^{\mathcal{B}} \rightarrow A^{\mathfrak{M}}$, il est immédiat qu'elle conserve l'opération linéaire, et l'opération de multiplication. Évidemment elle est biunivoque. De plus, elle conserve l'adjonction. En effet, soient

$$w^{(1)} = s^{(1)} + \sum_{j=1}^{m} t_j^{(1)} z_j^{(1)}, \qquad w^{(2)} = s^{(2)} + \sum_{k=1}^{n} t_k^{(2)} z_k^{(2)} \in \mathfrak{T}.$$

([6]) *Voir* Kaplansky [3] ou [AvN], p. 46.

Alors

$$(34)\qquad (A^{\mathfrak{M}} w^{(1)}, w^{(2)}) = \left(A^{\mathcal{B}} s^{(1)} + \sum_{j=1}^{m} (A^{\mathcal{B}} t_j^{(1)}) z_j^{(1)}, s^{(2)} + \sum_{k=1}^{n} t_k^{(2)} z_k^{(2)} \right)$$

$$= (A^{\mathcal{B}} s^{(1)}, s^{(2)}) + \sum_{j=1}^{m} ((A^{\mathcal{B}} t_j^{(1)}) z_j^{(1)}, s^{(2)}) + \sum_{k=1}^{n} (A^{\mathcal{B}} s^{(1)}, t_k^{(2)} z_k^{(2)})$$

$$+ \sum_{j,k} ((A^{\mathcal{B}} t_j^{(1)}) z_j^{(1)}, t_k^{(2)} z_k^{(2)}).$$

Or, en utilisant (9), on a

$$\begin{aligned}
((A^{\mathcal{B}} t_j^{(1)}) z_j, s^{(2)}) &= (A^{\mathcal{B}} t_j^{(1)}, s^{(2)} z_j^{(1)\star}) = (A^{\mathcal{B}} t_j^{(1)}, E_{\mathcal{B}}(s^{(2)} z_j^{(1)\star}))\\
&= (A^{\mathcal{B}} t_j^{(1)}, s^{(2)}(E_{\mathcal{B}} z_j^{(1)\star}))\\
&= (t_j^{(1)}, (A^{\mathcal{B}})^\star (s^{(2)}(E_{\mathcal{B}} z_j^{(1)\star})))\\
&= (t_j^{(1)}, ((A^{\mathcal{B}})^\star s^{(2)})(E_{\mathcal{B}} z_j^{(1)\star}))\\
&= (t_j^{(1)}, ((A^{\mathcal{B}})^\star s^{(2)}) z_j^{(1)\star})\\
&= (t_j^{(1)} z_j^{(1)}, (A^{\mathcal{B}})^\star s^{(2)}),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Donc, on peut écrire (34) sous la forme suivante :

$$(s^{(1)}, (A^{\mathcal{B}})^\star s^{(2)}) + \sum_{j=1}^{m} (t_j^{(1)} z_j^{(1)}, (A^{\mathcal{B}})^\star s^{(2)})$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} (s^{(1)}, ((A^{\mathcal{B}})^\star t_k^{(2)}) z_k^{(2)}) + \sum_{j,k} (t_j^{(1)} z_j^{(1)}, ((A^{\mathcal{B}})^\star t_k^{(2)}) z_k^{(2)})$$

$$= (w^{(1)}, (A^{\mathcal{B}})^\star s^{(2)} + \sum_{k=1}^{n} ((A^{\mathcal{B}})^\star t_k^{(2)}) z_k^{(2)}).$$

On en déduit que

$$(A^{\mathfrak{M}})^\star w^{(2)} = (A^{\mathcal{B}})^\star s^{(2)} + \sum_{k=1}^{n} ((A^{\mathcal{B}})^\star t_k^{(2)}) z_k^{(2)},$$

ce qui montre que $(A^{\mathfrak{M}})^\star$ est l'opérateur associé à $(A^{\mathcal{B}})^\star$. Nous avons pu ainsi constater que l'application $A^{\mathcal{B}} \to A^{\mathfrak{M}}$ est un isomorphisme.

Enfin, soit $b \in \mathcal{B}$. Alors, si l'on prend un élément de la forme (30), on a

$$T_b^{\mathfrak{M}} w = T_b^{\mathcal{B}} s + \sum_{j=1}^{m} (T_b^{\mathcal{B}} t_j) z_j = bs + \sum_{j=1}^{m} (bt_j) z_j$$

$$= bs + \sum_{j=1}^{m} b(t_j z_j) = b\left(s + \sum_{j=1}^{m} t_j z_j\right) = T_b w,$$

d'où immédiatement $T_b^{\mathfrak{M}} = T_{b(\mathfrak{M})}$. (D'ailleurs on s'est servi de cette relation au cours de la démonstration.)

LEMME 2. — *Soit A un opérateur de $\mathbf{T}(\mathcal{A})$ commutatif à $E_{\mathcal{B}}$, et soit $A^{\mathcal{B}}$ sa restriction sur $\mathfrak{H}_{\mathcal{B}}$. Alors $A^{\mathcal{B}} \in \mathbf{T}(\mathcal{B})$.*

De plus, A est réduit par $\mathfrak{M} = [\mathcal{B}\mathcal{A}]$, et sa restriction $A_{(\mathfrak{M})}$ sur $\mathfrak{M}$ est identique à $A^{\mathfrak{M}}$ obtenu dans le lemme 1 en partant de $A^{\mathcal{B}}$ ci-dessus.

De même pour $\mathbf{S}(\mathcal{A})$.

Démonstration. — A est réduit par $\mathfrak{H}_{\mathcal{B}}$ et donc induit sur $\mathfrak{H}_{\mathcal{B}}$ un opérateur borné $A^{\mathcal{B}}$. Puisque $A \in \mathbf{T}(\mathcal{A})$, A est permutable avec tous les opérateurs S_z, $z \in \mathcal{A}$, donc permutable avec tous les S_x, $x \in \mathcal{B}$. Par conséquent, $A^{\mathcal{B}}$ est permutable avec tous les $S_x^{\mathcal{B}}$, donc il est un opérateur de $\mathbf{T}(\mathcal{B})$. Moyennant le lemme 1, $A^{\mathcal{B}}$ se prolonge canoniquement en un opérateur $A^{\mathfrak{M}}$ sur $\mathfrak{M}$.

Prenons un élément de la forme (30) :

$$w = s + \sum_{j=1}^{m} t_j z_j.$$

Alors, parce que A commute à la multiplication à droite par un élément de $\mathcal{A}$,

$$(35)\qquad \begin{aligned} Aw &= As + \sum_{=1}^{m} A(t_j z_j) = As + \sum_{j=1}^{m} (At_j) z_j \\ &= A^{\mathcal{B}} s + \sum_{j=1}^{m} (A^{\mathcal{B}} t_j) z_j = A^{\mathfrak{M}} w. \end{aligned}$$

De cette relation, on tire tout de suite que $A\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}$. Si l'on remarque que, en même temps que A, $A^{\star}$ commute à $E_{\mathcal{B}}$, on a aussi $A^{\star}\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}$, d'où il s'ensuit que A est réduit par $\mathfrak{M}$. Ensuite, également d'après (35), on voit que $A_{(\mathfrak{M})} = A^{\mathfrak{M}}$.

THÉORÈME 3. — *Tout opérateur $A^{\mathcal{B}}$ de $\mathbf{T}(\mathcal{B})$ se prolonge canoniquement en un opérateur $A^{\mathcal{A}}$ de $\mathbf{T}^{\mathcal{A}}(\mathcal{B})$, qui sera obtenu en posant*

$$(36)\qquad \begin{aligned} A^{\mathcal{A}} &= A^{\mathfrak{M}} \quad (\mathit{sur}\ \mathfrak{M} = [\mathcal{B}\mathcal{A}]), \\ &= 0 \quad\quad (\mathit{sur}\ \mathfrak{M}^{\perp}), \end{aligned}$$

où $A^{\mathfrak{M}}$ est l'opérateur obtenu dans le lemme 1.

L'application $A^{\mathcal{B}} \to A^{\mathcal{A}}$ est un isomorphisme normal de $\mathbf{T}(\mathcal{B})$ sur $\mathbf{T}^{\mathcal{A}}(\mathcal{B})$. Elle transforme $T_b^{\mathcal{B}}$ en T_b et l'opérateur d'identité en le projecteur sur $\mathfrak{M}$, le plus grand projecteur dans $\mathbf{T}^{\mathcal{A}}(\mathcal{B})$.

De même pour $\mathbf{S}(\mathcal{B})$.

Démonstration. — Il est évident, d'après le lemme 2, qu'on obtient un isomorphisme moyennant le procédé indiqué dans l'énoncé du théorème. Concernant cet isomorphisme, nous établissons d'autres propriétés en plusieurs étapes.

1° $A^{\mathcal{A}} \in \mathbf{T}^{\mathcal{A}}(\mathcal{B})$: On déduit d'abord de (33) et de (36) que

$$||| A^{\mathcal{A}} ||| = ||| A^{\mathcal{B}} |||.$$

Pour montrer que $A^{\mathfrak{a}}$ est fortement adhérent aux T_b, $b \in \mathcal{B}$, prenons un nombre fini d'éléments de $\mathfrak{H}$, soient $f^{(1)}, f^{(2)}, \ldots, f^{(n)}$. Soit P le projecteur sur $\mathfrak{M}$. Alors il existe des éléments $w^{(1)}, w^{(2)}, \ldots, w^{(n)} \in \mathfrak{T}$ (*voir* le lemme 1) tels que

$$\| Pf^{(k)} - w^{(k)} \| \leq \frac{\varepsilon}{4 \||A^{\mathcal{B}}\||} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

pour $\varepsilon > 0$ donné. Les $w^{(k)}$ sont représentés à leur tour sous la forme suivante :

$$w^{(k)} = s^{(k)} + \sum_{\text{fini}} t_j^{(k)} z_j^{(k)}. \tag{37}$$

Grâce au théorème de densité de Kaplansky ([6]), on peut prendre $b \in \mathcal{B}$ tel que

$$\||T_b\|| = \||T_b^{\mathcal{B}}\|| \leq \||A^{\mathcal{B}}\||,$$
$$\| A^{\mathcal{B}} s^{(k)} - b s^{(k)} \|, \qquad \| A^{\mathcal{B}} t_j^{(k)} - b t_j^{(k)} \| \leq \frac{\varepsilon}{2(n + NM)},$$

où $M > 0$ est un nombre qui majore tous les $\||S_{z_j^{(k)}}\||$, et N est le nombre des éléments $t_j^{(k)}$ qui interviennent dans les expressions (37).

On sait, au moyen de la proposition 11, que T_b s'annule sur $\mathfrak{M}^{\perp}$. Quant à $A^{\mathfrak{a}}$, il s'annule sur $\mathfrak{M}^{\perp}$ par définition. Nous avons donc

$$\begin{aligned}
&\| A^{\mathfrak{a}} f^{(k)} - T_b f^{(k)} \| = \| A^{\mathfrak{a}} P f^{(k)} - T_b P f^{(k)} \| \\
&\leq \| A^{\mathfrak{a}} w^{(k)} - T_b^{\mathfrak{M}} w^{(k)} \| + \| A^{\mathfrak{a}} (P f^{(k)} - w^{(k)}) \| + \| T_b (P f^{(k)} - w^{(k)}) \| \\
&\leq \Big\| A^{\mathcal{B}} s^{(k)} + \sum (A^{\mathcal{B}} t_j^{(k)}) z_j^{(k)} - \Big(b s^{(k)} + \sum b t_j^{(k)} z_j^{(k)} \Big) \Big\| \\
&\qquad + \||A^{\mathfrak{a}}\||.\| P f^{(k)} - w^{(k)} \| + \||T_b\||.\| P f^{(k)} - w^{(k)} \| \\
&\leq \| A^{\mathcal{B}} s^{(k)} - b s^{(k)} \| + \sum \| S_{z_j^{(k)}} (A^{\mathcal{B}} t_j^{(k)} - b t_j^{(k)}) \| + \frac{\varepsilon}{2} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Ceci constate bien que $A^{\mathfrak{a}}$ est fortement adhérent aux T_b, $b \in \mathcal{B}$, comme nous voulions établir.

2° Par l'application $A^{\mathcal{B}} \to A^{\mathfrak{a}}$, T_b correspond à $T_b^{\mathcal{B}}$ pour $b \in \mathcal{B}$.

En effet, $T_b^{\mathfrak{M}} = T_{b(\mathfrak{M})}$ d'après le lemme 1, et comme T_b s'annule sur $\mathfrak{M}^{\perp}$ en vertu de la proposition 10, on voit, à cause de (36), que

$$T_b^{\mathfrak{a}} = T_b.$$

3° Par l'application $A^{\mathcal{B}} \to A^{\mathfrak{a}}$, l'opérateur d'identité se transforme en le projecteur sur $\mathfrak{M}$. C'est évident.

4° L'application $A^{\mathcal{B}} \to A^{\mathfrak{a}}$ de $\mathbf{T}(\mathcal{B})$ dans $\mathbf{T}^{\mathfrak{a}}(\mathcal{B})$ est surjective.

D'après la proposition 4, $\mathfrak{H}_{\mathcal{B}}$ est réduit par tous les opérateurs de $\mathbf{T}^{\mathfrak{a}}(\mathcal{B})$. Donc, si l'on prend un opérateur $A \in \mathbf{T}^{\mathfrak{a}}(\mathcal{B})$, et si l'on désigne par $A^{\mathcal{B}}$ sa restriction sur $\mathfrak{H}_{\mathcal{B}}$, on a, grâce au lemme 2, que $A^{\mathcal{B}} \in \mathbf{T}(\mathcal{B})$ et que la restriction $A_{(\mathfrak{M})}$ de A sur $\mathfrak{M}$ est identique à $A^{\mathfrak{M}}$ obtenu en partant de cet $A^{\mathcal{B}}$. Or, grâce à la proposition 11, A s'annule sur $\mathfrak{M}^{\perp}$, donc A coïncide avec $A^{\mathfrak{A}}$ qui provient de $A^{\mathfrak{B}}$. Comme cela nous voyons que A est l'image d'un opérateur de $\mathbf{T}(\mathfrak{B})$ par l'application énoncée.

5° Notre isomorphisme est normal (7).

$\mathfrak{M}$ est invariant par rapport à $\mathbf{T}^{\mathfrak{A}}(\mathfrak{B})$. Donc l'algèbre d'opérateurs $(\mathbf{T}^{\mathfrak{A}}(\mathfrak{B}))_{(\mathfrak{M})}$ induite sur $\mathfrak{M}$ est une algèbre d'opérateurs faiblement fermée dont le projecteur maximal est l'opérateur d'identité sur $\mathfrak{M}$. Par suite, $(T^{\mathfrak{A}}(\mathfrak{B}))_{(\mathfrak{M})}$ est une algèbre de von Neumann et l'application $A^{\mathfrak{B}} \to A^{\mathfrak{M}}$ fournit un isomorphisme de $\mathbf{T}(\mathfrak{B})$ sur cette algèbre de von Neumann, en conséquence, elle est ultrafaiblement continue. Il suit immédiatement de ceci que l'isomorphisme donné dans le théorème est normal.

Théorème 3'. — *Pour tout opérateur $A^{\mathfrak{B}}$ de $\mathbf{T}(\mathfrak{B})$, il existe un opérateur A dans $\mathbf{T}(\mathfrak{A})$ qui prolonge $A^{\mathfrak{B}}$. S'il en existe plusieurs, ils coïncident l'un avec l'autre sur $\mathfrak{M} = [\mathfrak{B}\mathfrak{A}]$, et leur restriction $A_{(\mathfrak{M})}$ à $\mathfrak{M}$ est un opérateur de $\mathfrak{M}$ dans $\mathfrak{M}$ avec $|||A_{(\mathfrak{M})}||| = |||A^{\mathfrak{B}}|||$.*

En particulier, il existe un prolongement qui est contenu dans $\mathbf{T}^{\mathfrak{A}}(\mathfrak{B})$. Il est unique et caractérisé par le fait qu'il prend la valeur o sur $(\mathfrak{B}\mathfrak{A})^{\perp}$.

Démonstration. — D'après le lemme 2, il est évident que tous les prolongements de $A^{\mathfrak{B}}$ contenus dans $\mathbf{T}(\mathfrak{A})$ coïncident sur $\mathfrak{M}$. Le reste est une conséquence immédiate du théorème 3.

Corollaire 1. — *Lorsque $\mathfrak{B}\mathfrak{A}$ (donc aussi $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$) est dense dans $\mathfrak{H}$, tout opérateur de $\mathbf{T}(\mathfrak{B})$ [de $\mathbf{S}(\mathfrak{B})$] se prolonge d'une manière unique en un opérateur de $\mathbf{T}(\mathfrak{A})$ [de $\mathbf{S}(\mathfrak{A})$].*

Corollaire 2. — *Étant donné un élément a borné pour $\mathfrak{A}$, si l'on a $T_a \in \mathbf{T}^{\mathfrak{A}}(\mathfrak{B})$ ou bien $S_a \in \mathbf{S}^{\mathfrak{A}}(\mathfrak{B})$, alors $a \in \overline{\mathfrak{B}}$.*

Démonstration. — Nous allons supposer que $T_a \in \mathbf{T}^{\mathfrak{A}}(\mathfrak{B})$. D'après le théorème 3, T_a est le prolongement d'un opérateur $A^{\mathfrak{B}} \in \mathbf{T}(\mathfrak{B})$ suivant le procédé indiqué dans l'énoncé du théorème 3. Or pour un élément $s \in \mathfrak{H}_{\mathfrak{B}}$ quelconque, on a grâce à (9) et à l'hypothèse,

$$(E_{\mathfrak{B}}a)s = E_{\mathfrak{B}}(as) = E_{\mathfrak{B}}(A^{\mathfrak{B}}s) = A^{\mathfrak{B}}s.$$

On en déduit que $A^{\mathfrak{B}} = T_b^{\mathfrak{B}}$, en posant $b = E_{\mathfrak{B}}a$. Alors, en vertu du théorème 3,

$$T_b = A^{\mathfrak{A}} = T_a,$$

par suite, moyennant le paragraphe 1, n° 1 (iv'), $a = b \in \overline{\mathfrak{B}}$.

(7) Pour ces passages, *voir* [AvN], p. 56 et suiv.

PROPOSITION 12. — *Un opérateur A de $\mathbf{T}(\mathcal{A})$ est contenu dans $\mathbf{T}^{\mathcal{A}}(\mathcal{B})$ si et seulement si A est permutatable avec $E_{\mathcal{B}}$, et s'annule sur $(\mathcal{B}\mathcal{A})^{\perp}$.*

De même pour $\mathbf{S}(\mathcal{A})$.

Démonstration. — Soit $A \in \mathbf{T}^{\mathcal{A}}(\mathcal{B})$. Alors, la proposition 4 montre que A est permutable avec $E_{\mathcal{B}}$ et donc, d'après la proposition 11, A s'annule sur $(\mathcal{B}\mathcal{A})^{\perp}$.

Inversement, soit A un opérateur de $\mathbf{T}(\mathcal{A})$ commutatif à $E_{\mathcal{B}}$ et nul sur $(\mathcal{B}\mathcal{A})^{\perp}$. Alors, grâce au lemme 2, la restriction de A à $\mathfrak{H}_{\mathcal{B}}$ est contenue dans $\mathbf{T}(\mathcal{B})$, et, pour son prolongement à $\mathfrak{H}$ tout entier comme un opérateur de $\mathbf{T}(\mathcal{A})$, le fait qu'il s'annule sur $(\mathcal{B}\mathcal{A})^{\perp}$ est caractéristique pour qu'il appartienne à $\mathbf{T}^{\mathcal{A}}(\mathcal{B})$, en vertu du théorème 3'. Or, d'après l'hypothèse, A possède cette propriété, d'où immédiatement $A \in \mathbf{T}^{\mathcal{A}}(\mathcal{B})$,

THÉORÈME 4. — *Supposons que $\mathcal{B}\mathcal{A}$ (et donc $\mathcal{A}\mathcal{B}$ aussi) est dense dans $\mathfrak{H}$. Sous cette hypothèse, $\mathbf{T}^{\mathcal{A}}(\mathcal{B})$ et $\mathbf{S}^{\mathcal{A}}(\mathcal{B})$ sont des algèbres de von Neumann et leur commutant est l'algèbre de von Neumann engendrée respectivement par $\mathbf{S}(\mathcal{A})$ et $E_{\mathcal{B}}$ et par $\mathbf{T}(\mathcal{A})$ et $E_{\mathcal{B}}$.*

Démonstration. — Grâce à la proposition 11, il est évident que $\mathbf{T}^{\mathcal{A}}(\mathcal{B})$ et $\mathbf{S}^{\mathcal{A}}(\mathcal{B})$ sont des algèbres de von Neumann.

Ensuite, soit $\mathbf{A}$ l'algèbre de von Neumann engendrée par $\mathbf{S}(\mathcal{A})$ et $E_{\mathcal{B}}$. D'après la proposition 4, $E_{\mathcal{B}}$ commute aux T_x, $x \in \mathcal{B}$, d'ou l'on voit tout de suite que $\mathbf{T}^{\mathcal{A}}(\mathcal{B}) \subset \mathbf{A}'$. Établissons la relation d'inclusion de sens contraire. D'abord, parce que

$$\mathbf{A} \supset \mathbf{S}(\mathcal{A}), \qquad \mathbf{A}' \subset (\mathbf{S}(\mathcal{A}))' = \mathbf{T}(\mathcal{A}).$$

Donc, dire qu'un opérateur A appartient à $\mathbf{A}'$, c'est dire que A est un opérateur de $\mathbf{T}(\mathcal{A})$ qui permute avec $E_{\mathcal{B}}$. En raison de ce que, par hypothèse, $(\mathcal{B}\mathcal{A})^{\perp}$ se réduit à (o), nous voyons enfin, grâce à la proposition 12, que $A \in \mathbf{T}^{\mathcal{A}}(\mathcal{B})$.

C. Q. F. D.

BIBLIOGRAPHIE.

[AvN] J. DIXMIER, *Les algèbres de von Neumann*, Gauthier-Villars, Paris, 1957.

[LT] BÉLA v. SZ. NAGY, *Spektraldarstellung linearer Transformationen des Hilbertschen Raumes* (*Erg. Math.*, t. 5, cahier 5, Springer-Verlag, Berlin, 1942).

[R. O. I.] F. J. MURRAY et J. VON NEUMANN, *On rings of operators* (*Ann. Math.*, t. 37, 1936, p. 116-229).

[R. O. IV] F. J. MURRAY et J. VON NEUMANN, *On rings of operators*, IV, (*Ann. Math.*, *t.* 44. 1943, p. 716-808).

[1] J. DIXMIER, *Formes linéaires sur un anneau d'opérateurs* (*Bull. Soc. Math. Fr.*, t. 81, 1953, p. 9-39).

[2] R. GODEMENT, *Mémoire sur la théorie des caractères dans les groupes localememt compacts unimodulaires* (*J. Math. pure et appl.*, t. 30, 1951, p. 1-110).

[3] I. Kaplansky, *A theorem on rings of operators* (*Pacific J. Math.*, t. **1**, 1951, p. 227-232).

[4] J. von Neumann, *Zur Algebra der Funktionaloperatoren und Theorie der normalen Operatoren* (*Math. Ann.*, t. **102**, 1929, p. 370-427).

[5] R. Pallu de la Barrière, *Algèbres unitaires et espaces d'Ambrose* (*C. R. Acad. Sc.*, t. **233**, 1951, p. 997-999).

[6] R. Pallu de la Barrière, *Algèbres unitaires et espaces d'Ambrose* (*Ann. Éc. Norm. Sup.*, t. **70**, 1953, p. 381-401).

[7] I. E. Segal, *A non-commutative extension of abstract integration* (*Ann. Math.*, t. **57**, 1953, p. 401-457).

[8] H. Sunouchi, *The irreducible decomposition of the maximale Hilbert algebras of the finite class* (*Tohoku Math. J.*, t. **4**, 1952, p. 206-215).

[9] O. Takenouchi, *Sur les algèbres de Hilbert*, (*C. R. Acad. Sc.*, t. **250**, 1960, p. 3436).

[10] H. Umegaki, *Conditional expectation in a operator algebra* (*Tohoku Math. J.*, t. **6**, 1954, p. 177-181).