J. MOUTIER

Théorie des phénomènes capillaires observés au contact de deux liquides

Annales scientifiques de l'É.N.S. 2e série, tome 3 (1874), p. 69-86
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1874_2_3__69_0>

THÉORIE

DES

PHÉNOMÈNES CAPILLAIRES

OBSERVÉS

AU CONTACT DE DEUX LIQUIDES,

Par M. J. MOUTIER.

Deux théories bien distinctes ont été proposées pour expliquer les phénomènes capillaires. Dans la première, on admet que les liquides sont enveloppés d'une sorte de membrane élastique, qui offre une tension constante en tous les points de sa surface. C'est en suivant cet ordre d'idées que Young a obtenu pour la première fois l'équation de la surface capillaire; depuis de nombreux travaux ont remis en lumière la notion de la tension superficielle des liquides, des expériences intéressantes ont été imaginées pour démontrer l'existence de cette tension superficielle.

La théorie de Laplace fait dépendre les phénomènes capillaires de l'existence de forces qui varient avec la distance, suivant une loi inconnue, et deviennent insensibles à une distance sensible. Les résultats obtenus par Laplace ont été retrouvés par Gauss au moyen d'une méthode plus directe, qui fait disparaître plusieurs objections élevées contre les raisonnements de Laplace. La méthode de Gauss, on le sait, consiste à exprimer que la somme des travaux virtuels de toutes les forces qui sollicitent le système en équilibre est nulle. Cette somme est la variation totale d'une fonction Ω, laquelle, pour l'équilibre, doit être un maximum. La recherche de ce maximum a été considérablement simplifiée par M. Bertrand [1] au moyen de considérations géométriques, qui rendent facile l'application de la théorie de Gauss.

J'ai montré, dans un autre travail [2], que cette théorie rend aisément compte des expériences sur lesquelles on a cru devoir fonder l'existence de la tension superficielle des liquides; toutefois une objection grave, si elle est exacte, a été soulevée contre la théorie de Gauss.

« Si à la surface du ménisque, dans le tube capillaire, on fait arriver une petite quantité d'un autre liquide, celui-ci se substitue quelquefois au liquide inférieur, mouille le tube à sa place et forme un nouveau ménisque capable de soutenir un poids déterminé. De là une variation dans la hauteur du liquide soulevé. C'est ce qu'ont vu Young, en faisant arriver un peu d'huile dans le tube capillaire, et Quincke, dans le cas de l'alcool et de l'eau, ou de l'essence de térébenthine et de l'huile d'olive. Dans ces deux derniers cas, les liquides employés étant miscibles l'un à l'autre, il n'y a pas, comme dans l'expérience de Young, deux ménisques superposés; il n'y en a qu'un qui est celui du liquide supérieur, et le poids du liquide soulevé est exactement celui que comporte la tension superficielle de ce liquide [3].

» La théorie de Gauss conduit à admettre que, si plusieurs liquides sont superposés dans un même tube capillaire, la somme des poids des liquides soulevés ne dépend que de la nature du tube et de celle du liquide inférieur. Elle est donc, au moins sur ce point, en contradiction avec l'expérience [4]. »

J'ai été conduit, d'après cela, à reprendre l'étude des liquides superposés dans un tube capillaire. Ce Mémoire est divisé en trois parties : j'indiquerai d'abord une méthode rapide pour former la fonction Ω, j'examinerai ensuite les liquides superposés dans un tube capillaire et, enfin, je chercherai l'explication de certains phénomènes observés au contact de deux liquides.

---

(1) *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. XIII, p. 185.
(2) *Journal de Physique théorique et appliquée*, t. I, p. 98; t. II, p. 27.
(3) Duclaux, *Théorie élémentaire de la capillarité*, p. 9.
(4) *Loc. cit.*, p. 3.

I. Considérons un liquide contenu dans un vase dont la forme est d'ailleurs laissée arbitraire. Désignons par m, m',... les masses des divers éléments du liquide, par M, M',... les masses des divers éléments de la paroi, par z la distance de l'élément liquide m à un plan horizontal arbitraire situé au-dessous du liquide. La force attractive qui agit entre deux éléments liquides m, m', situés à la distance r, peut se représenter par $mm'f(r)$; la force attractive qui agit entre l'élément liquide m et l'élément de paroi M, situés à la distance R, peut se représenter par $m\mathrm{M}\,\mathrm{F}(\mathrm{R})$.

Supposons que le liquide éprouve un changement quelconque et estimons la somme des travaux virtuels relatifs au déplacement de l'élément liquide m :

1° Si l'on appelle $z+dz$ la nouvelle ordonnée de l'élément m, g l'accélération due à la pesanteur, le travail virtuel de la pesanteur est $-mg\,dz$.

2° La distance de l'élément m à l'élément m' devient $r+dr$, la force attractive qui agit entre ces deux éléments effectue un travail $-mm'f(r)\,dr$. La somme des travaux virtuels qui proviennent des attractions du liquide sur l'élément m est la somme des quantités analogues, étendue à tout le liquide.

3° La distance de l'élément liquide m à l'élément de paroi M devient $\mathrm{R}+d\mathrm{R}$; la force attractive, qui agit entre ces deux éléments, effectue un travail $-m\mathrm{M}\,\mathrm{F}(\mathrm{R})\,d\mathrm{R}$. La somme des travaux virtuels qui proviennent des attractions de la paroi sur l'élément m est la somme des quantités analogues étendue à toute la paroi.

Appelons ρ la densité du liquide, ρ' la densité de la paroi, dv le volume de l'élément m, $d\mathrm{V}$ le volume de l'élément M,

$$m=\rho\,dv,\quad \mathrm{M}=\rho'\,d\mathrm{V};$$

la somme des travaux virtuels de toutes les forces qui agissent sur m est donc

$$-g\rho\,dv\,dz-\rho^2\,dv\int dv' f(r)\,dr-\rho\rho'\,dv\int d\mathrm{V}\,\mathrm{F}(\mathrm{R})\,d\mathrm{R}.$$

Si l'on désigne par $\varphi(r)$ et par $\Phi(\mathrm{R})$ des fonctions de r et de R telles que les dérivées de ces fonctions, par rapport à r et R, soient égales aux fonctions $f(r)$ et $\mathrm{F}(\mathrm{R})$ changées de signe,

$$f(r)=-\varphi'(r),\quad \mathrm{F}(\mathrm{R})=-\Phi'(\mathrm{R}),$$

on peut considérer la somme précédente comme la variation de la fonction

$$-g\rho z\,dv+\rho^2\,dv\int dv'\varphi(r)+\rho\rho'\,dv\int d\mathrm{V}\,\Phi(\mathrm{R}).$$

Si l'on répète le même raisonnement pour tous les éléments du liquide, et si l'on remarque que le travail virtuel correspondant au déplacement de deux éléments m et m' aura été compté deux fois, on voit aisément que la somme des travaux virtuels de toutes les forces qui agissent sur le liquide est la variation de la fonction

$$\Omega=-g\rho\int z\,dv+\frac{1}{2}\rho^2\int\int dv\,dv'\varphi(r)+\rho\rho'\int\int d\mathrm{V}\,dv\,\Phi\mathrm{R}. \tag{1}$$

Posons, pour abréger,

$$\mathrm{S}=\frac{1}{2}\frac{\rho}{g}\int\int dv\,dv'\,\varphi(r),\quad \mathrm{S}'=\frac{1}{2}\frac{\rho'}{g}\int\int d\mathrm{V}\,dv\,\Phi(\mathrm{R}),$$

$$\Omega=-g\rho\left(\int z\,dv-\mathrm{S}-2\mathrm{S}'\right). \tag{2}$$

Gauss a indiqué un mode de réduction des intégrales sextuples, S et S', indépendant de toute hypothèse sur la nature des forces $f(r)$ et $\mathrm{F}(\mathrm{R})$, puis il a supposé dans le résultat final que les forces cessent d'être sensibles à partir d'une distance très-petite ; on obtient le même résultat, d'une manière plus rapide, en introduisant immédiatement cette dernière hypothèse.

1° Appelons λ la distance limite à laquelle deux éléments liquides cessent d'agir, ou le rayon d'activité moléculaire propre au liquide, et négligeons tout d'abord les termes de l'intégrale S qui se rapportent à deux éléments situés à une distance supérieure à λ.

Soient u l'aire de la surface libre du liquide, t l'aire de la surface du liquide en contact avec la paroi. Imaginons, en tous les points des deux surfaces u et t, des normales à ces surfaces; prenons sur toutes ces normales, à partir des surfaces et du côté du liquide, une longueur λ; les extrémités de ces normales forment une surface qui décompose le volume v du liquide en deux parties, l'une intérieure, dont le volume est v_1, l'autre extérieure, dont le volume est v_2.

Considérons d'abord un élément m du volume intérieur v_1; le point m est à une distance de la surface extérieure du liquide supérieure à λ, de sorte que la sphère décrite de m comme centre avec le rayon λ est entièrement située à l'intérieur du liquide. La portion de l'intégrale S relative au point m est évidemment proportionnelle à dv et peut se représenter par $K\,dv$, de sorte que la portion de S relative au volume v_1 est Kv_1.

Considérons ensuite un élément m du volume extérieur v_2; le point m est à une distance de la surface extérieure du liquide inférieure à λ, de sorte que la sphère décrite de m comme centre avec le rayon λ est en partie extérieure au liquide. La portion de l'intégrale S relative au point m est alors égale à $K\,dv$, diminué d'une certaine quantité $\mu\,dv$, provenant du segment sphérique extérieur au liquide, en le supposant rempli du liquide lui-même.

Imaginons sur la surface extérieure du liquide un élément superficiel ω; circonscrivons à cet élément un cylindre normal à la surface extérieure du liquide, et menons deux plans perpendiculaires aux génératrices du cylindre, à des distances de la surface extérieure x et $x+dx$: ces plans découpent dans le cylindre un élément de volume $\omega\,dx$ et la portion de S relative à cet élément est

$$(K-\mu)\,\omega\,dx.$$

Pour le cylindre circonscrit à l'élément ω et compris dans le volume v_2, la somme des termes analogues est

$$\omega\left(K\lambda-\int_0^\lambda \mu\,dx\right);$$

or la dernière intégrale est une quantité constante que nous représenterons par α_2,

$$\int_0^\lambda \mu\,dx=\alpha^2,$$

de sorte que la portion de S relative au volume extérieur v_2 est

$$Kv_2-\alpha^2(t+u).$$

En réunissant cette expression à la portion de S relative au volume intérieur v_1,

$$S = Kv - \alpha^2(t + u).$$

Pour former cette valeur de S, on a négligé les termes de l'intégrale qui se rapportent à deux éléments situés à une distance supérieure à λ. Pour deux éléments placés dans cette condition, $f(r) = 0$ par hypothèse; par suite $\varphi'(r) = 0$ et $\varphi(r)$ devient constant, de sorte que la considération de pareils éléments a uniquement pour effet d'introduire dans la valeur de S un terme nouveau qui ne dépend que du volume v; par suite, si l'on désigne par c une constante qui dépende uniquement du volume du liquide, la valeur de S peut s'écrire définitivement

$$S = c - \alpha^2 (t + u).$$

2° L'expression de S′ se déduit immédiatement de ce qui précède. En effet, désignons par λ' la distance limite à laquelle deux éléments, l'un liquide et l'autre solide, cessent d'agir mutuellement, et négligeons tout d'abord les termes de l'intégrale S′ qui se rapportent à deux éléments situés à une distance supérieure à λ'.

Considérons un élément ω situé sur la surface t; circonscrivons à cet élément un cylindre normal à la surface et menons du côté du liquide deux plans perpendiculaires aux génératrices du cylindre à des distances x et $x + dx$ de la surface : ces plans découpent dans le cylindre un volume $\omega\, dx$ et la portion de S′, relative à cet élément de volume, peut se représenter par $\mu'\omega\, dx$, en désignant par μ' une quantité analogue à μ.

Pour tous les éléments du cylindre considéré, la portion correspondante de S′ est

$$\omega \int_0^{\lambda'} \mu'\, dx,$$

et si l'on pose, comme précédemment,

$$\int_0^{\lambda'} \mu'\, dx = \beta^2,$$

la portion de S′ qui correspond à la surface t a pour expression $\beta^2 t$.

La considération des éléments situés à une distance supérieure à λ' conduit à ajouter, d'après les raisonnements qui précèdent, à la valeur précédente un terme c' qui dépend uniquement des volumes du liquide et de la paroi.

$$S' = c' + \beta^2 t.$$

Si l'on reporte les valeurs de S et de S' dans la relation (2) et si l'on désigne par C l'ensemble des termes constants,

$$\Omega = C - g\rho\left[\int z\,dv + (\alpha^2 - 2\beta^2)\,t + \alpha^2 u\right];$$

telle est l'expression de Ω dans le cas d'un seul liquide. Si l'on suppose maintenant qu'il existe deux liquides dans le vase et que l'on désigne par Ω_0 et par Ω_1 les portions de Ω relatives aux deux liquides, par ρ_1 la densité du second liquide, par $\psi(r_1)$ la force attractive qui s'exerce entre l'élément dv du premier liquide et l'élément dv_1 du second liquide, situés à la distance r_1, la valeur de Ω_0 sera donnée par la relation (1), en y ajoutant le terme

$$\frac{1}{2}\rho\rho_1\int\int dv\,dv_1\,\Psi(r_1),$$

où $\Psi(r_1)$ désigne la fonction primitive de $\psi(r_1)$ changée de signe.

En posant comme précédemment

$$S'' = \frac{1}{2}\frac{\rho_1}{g}\int\int dv\,dv_1\,\Psi(r_1),$$

$$\Omega_0 = -g\rho\left(\int z\,dv - S - 2S' - S''\right).$$

Si l'on désigne par s la surface commune aux deux liquides, par γ^2 une constante analogue à β^2, et si l'on remarque que la surface extérieure du premier liquide est maintenant $t + u + s$, la valeur précédente peut s'écrire

$$\Omega_0 = C - g\rho\left[\int z\,dv + (\alpha^2 - 2\beta^2)\,t + \alpha^2 u + (\alpha^2 - \gamma^2)\,s\right]. \tag{3}$$

De même

$$\Omega_1 = C_1 - g\rho_1\left[\int z\,dv_1 + (\alpha_1^2 - 2\beta_1^2)\,t_1 + \alpha_1^2\,u_1 + (\alpha_1^2 - \gamma_1^2)\,s\right]. \tag{4}$$

Il existe entre les deux constantes γ^2 et γ_1^2 une relation fort simple; en effet

$$\gamma^2 s = \frac{1}{2}\frac{\rho_1}{g}\int\int dv\,dv_1\,\Psi(r_1),$$

$$\gamma_1^2 s = \frac{1}{2}\frac{\rho}{g}\int\int dv\,dv_1\,\Psi(r_1);$$

donc

$$\rho\gamma^2 = \rho_1\gamma_1^2.$$

Nous désignerons, pour abréger, par L_0 le liquide auquel se rapporte Ω_0, par L_1 le liquide auquel se rapporte Ω_1.

II. Supposons que le liquide L_1 soit contenu dans un vase où plonge un tube capillaire, et supposons que l'on dépose le liquide L_0 au-dessus du ménisque formé par le premier liquide L_1. Il est facile de déterminer la surface terminale du liquide L_0, l'angle de raccordement de cette surface avec la paroi et le volume liquide soulevé dans le tube capillaire, en appliquant la méthode fort simple indiquée par M. Bertrand.

Équation de la surface terminale. — Pour trouver l'équation de la surface capillaire terminale, il suffit de supposer que cette surface éprouve seule une modification, en conservant le même contour. Alors la variation de Ω se compose uniquement de la variation de

$$-g\rho\left(\int z\,dv + \alpha^2 u\right).$$

Considérons sur la surface u un élément superficiel ω limité par quatre lignes de courbure : soient ω' l'élément correspondant sur la nouvelle surface infiniment voisine de u; ε la portion infiniment petite de la normale à la surface u comprise entre les deux surfaces; R et R' les rayons de courbure principaux au point considéré de la surface u. Supposons, pour fixer les idées, la surface u concave et admettons qu'au point considéré le liquide s'élève, par le fait du déplacement virtuel.

D'après un théorème démontré par M. Bertrand dans son Mémoire sur les surfaces isothermes orthogonales,

$$\omega' - \omega = -\omega\varepsilon\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right).$$

Si l'on pose $\omega\varepsilon = dv$, la variation de Ω a pour valeur

$$(5) \qquad d\Omega = -g\rho \int \left[z - \alpha^2\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)\right] dv.$$

Mais le volume du liquide restant le même, la somme des travaux virtuels s'annule si l'on pose

$$(6) \qquad z - \alpha^2\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) = \lambda,$$

en désignant par λ une constante qui dépend de la position du plan horizontal arbitraire à partir duquel on compte l'ordonnée z : nous supposerons que ce plan coïncide avec la surface libre du liquide dans le vase et que les ordonnées soient comptées positivement au-dessus de ce plan.

Angle de raccordement. — Pour trouver l'angle de raccordement de la surface avec la paroi, il suffit de supposer que le liquide terminal éprouve, comme précédemment, une modification, sans conserver toutefois le même contour le long du tube.

Désignons par u' la nouvelle surface terminale du liquide; élevons en tous les points du contour primitif de la surface u des normales à cette surface et désignons, pour abréger, par S la surface déterminée par ces normales. L'intervalle compris entre les deux surfaces u, u' et la paroi du tube peut alors se décomposer en deux parties, l'une comprise entre u, u' et S, l'autre comprise entre u'; S et la paroi du tube.

Considérons la première partie : en conservant les notations précédentes, la variation de Ω qui correspond à cette partie du liquide est donnée par la relation (5); mais, d'après l'équation de la surface capillaire (6), cette variation est nulle. Il suffit donc d'examiner la variation de Ω qui correspond à la seconde partie du liquide.

Considérons sur le contour de la surface u un élément rectiligne ds : désignons par e la portion infiniment petite de la normale menée par un point de cet élément à la surface u et limitée à la surface u'; désignons par i l'angle sous lequel le liquide coupe la paroi.

1° A l'élément ds correspond un accroissement de la surface libre $e\,ds \cot i$.

2° A l'élément ds correspond un accroissement de la surface t égal à $\frac{e\,ds}{\sin i}$.

3° Au même élément ds correspond un accroissement du volume du liquide égal à $\frac{1}{2} e^2\,ds \cot i$. La variation de Ω qui correspond au changement de forme du liquide est finalement

$$d\Omega = -g\rho \int e\,ds \left(\frac{1}{2} ez + \frac{\alpha^2 - 2\beta^2}{\cos i} + \alpha^2 \right) \cot i.$$

Si l'on remarque que l'épaisseur e est infiniment petite et que $d\Omega$ doit s'annuler, quel que soit e, on trouve pour valeur de l'angle de raccordement

$$\cos i = \frac{2\beta^2 - \alpha^2}{\alpha^2}.$$

Volume liquide soulevé. — Pour trouver l'expression du volume liquide soulevé dans un tube cylindrique vertical à section circulaire, considérons un élément ω de la surface u, limité par quatre lignes de courbure; appelons z l'ordonnée d'un point de l'élément ω, φ l'angle que fait la normale à l'élément avec la verticale.

Le volume liquide soulevé dans le tube au-dessus de la surface libre dans le vase est

$$V = \Sigma\,\omega z \cos\varphi.$$

Imaginons une seconde surface, obtenue en prolongeant les normales à la surface u d'une longueur infiniment petite ε, dirigée du côté du liquide; désignons par ω' l'élément de la nouvelle surface correspondant à ω. D'après le théorème cité de M. Bertrand,

$$\omega' = \omega + \omega\varepsilon\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right);$$

mais, en tenant compte de l'équation de la surface capillaire (6),

$$\omega z = \frac{\alpha^2}{\varepsilon}(\omega' - \omega) + \omega\lambda,$$

et par suite

$$V = \frac{\alpha^2}{\varepsilon}(\Sigma\omega'\cos\varphi - \Sigma\omega\cos\varphi) + \lambda\Sigma\omega\cos\varphi.$$

Or $\Sigma\omega\cos\varphi$ et $\Sigma\omega'\cos\varphi$ sont les projections horizontales de la surface u et de la surface infiniment voisine; leur différence est la projection horizontale de la zone déterminée par les normales de longueur infiniment petite ε, menées suivant le contour de la surface terminale. La projection horizontale de cette zone a pour valeur $L\varepsilon\cos i$, en appelant L le contour de la surface terminale ou la circonférence du tube. Si l'on désigne par B la base du tube, on a finalement

$$V = \alpha^2 L\cos i + B\lambda. \tag{7}$$

Détermination de la constante λ. — L'équation de la surface capillaire, la valeur de l'angle de raccordement et l'expression du volume liquide soulevé s'appliquent également dans le cas d'un seul liquide. Dans ce cas, la constante λ se détermine par cette considération : si le tube est suffisamment large, la surface terminale du liquide dans le tube est plane à une distance suffisante de la paroi du tube, et de plus cette surface est sur le prolongement de la surface libre du liquide dans le vase,

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = 0, \quad z = 0, \quad \lambda = 0.$$

Dans le cas de deux liquides superposés, la constante λ se détermine d'une manière analogue.

Soient MN la surface libre du liquide contenu dans le vase; AB la surface terminale du liquide contenu dans le tube capillaire; CD la surface de séparation des deux liquides dans le tube capillaire; nous supposerons cette surface CD placée au-dessous de MN. Désignons par h la distance moyenne des points de la surface CD au plan horizontal MN, de sorte que le volume du liquide contenu dans la portion du tube située au-dessous de MN soit égal à Bh.

Supposons que le tube s'élargisse et que le rayon devienne assez grand pour que les deux surfaces AB et CD deviennent planes dans leur partie moyenne, à une distance suffisante de la paroi du tube, la hauteur h restant la même. L'ordonnée d'un point de la région plane de AB devient, d'après l'équation (6), égale à λ; d'ailleurs les hauteurs des deux liquides au-dessus de leur surface de séparation CD sont inversement proportionnelles à leurs densités

$$(\lambda + h)\,\rho = h\rho_1,$$

$$\lambda = h\,\frac{\rho_1 - \rho}{\rho}.$$

L'ordonnée de la surface capillaire et le volume liquide soulevé ont alors pour expressions

$$z = \alpha^2\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) + h\,\frac{\rho_1 - \rho}{\rho},$$

$$V = \alpha^2 L \cos i + Bh\,\frac{\rho_1 - \rho}{\rho}.$$

Ces résultats peuvent s'exprimer d'une manière fort simple. Menons à l'intérieur du tube un plan horizontal EF à la distance λ au-dessus du plan horizontal MN.

1° Si l'on compte l'ordonnée de la surface capillaire AB à partir du plan horizontal EF, cette ordonnée a la même valeur $\alpha^2\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)$ que si le tube capillaire plongeait dans un liquide unique, tel que EF fût la surface libre du liquide dans la cuve.

2° Le volume liquide ABEF a la même valeur $\alpha^2 L \cos i$ que si le tube plongeait dans un liquide unique.

Conséquences. — Un autre cas à considérer est celui où le niveau du liquide CD est plus élevé dans le tube que dans la cuve.

Si l'on désigne alors par h la hauteur moyenne du liquide inférieur soulevé au-dessus de la surface MN de ce liquide dans la cuve, les formules précédentes sont immédiatement applicables en changeant le signe de h,

$$z = \alpha^2\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right) - h\frac{\rho_1-\rho}{\rho},$$

$$V = \alpha^2 L\cos i - Bh\frac{\rho_1-\rho}{\rho}.$$

Cette dernière relation peut s'écrire

$$(V - Bh)g\rho + Bhg\rho_1 = \alpha^2 Lg\rho\cos i.$$

Sous cette forme, on voit que *la somme des poids des deux liquides soulevés dans le tube capillaire est constante et égale au poids du liquide soulevé dans le tube capillaire, lorsque ce tube plonge dans un vase qui ne renferme que le liquide supérieur;* résultat conforme aux expériences citées plus haut.

Cette proposition renferme plusieurs conséquences :

1° Lorsque la température d'un liquide soulevé dans un tube capillaire n'est pas uniforme dans toute l'étendue de la colonne, on peut considérer la colonne soulevée comme étant formée de plusieurs liquides, et, dans ce cas, le poids total du liquide soulevé dans le tube ne dépend que de la température au sommet de la colonne liquide.

Ce résultat est d'accord avec les expériences de M. Wolf (¹). Dans les recherches relatives à l'influence de la température sur les phénomènes capillaires, M. Wolf cite les expériences suivantes :

Si l'on chauffe la portion moyenne de la colonne liquide soulevée dans un tube capillaire, on observe immédiatement une ascension du ménisque. Cette ascension est à peu près égale à celle qui résulterait de la dilatation de la portion de colonne échauffée.

Si l'on refroidit, au contraire, une portion de la colonne liquide soulevée, le ménisque s'abaisse.

2° Si l'on considère une colonne liquide soulevée dans un tube capillaire et renfermant des bulles d'air à l'intérieur, le poids de la colonne liquide soulevée est constant et indépendant du nombre et du

(¹) *Annales de Chimie et de Physique*, 3ᵉ série, t. XLIX, p. 243.

volume des bulles d'air. Ce résultat avait déjà été indiqué, au moyen d'autres considérations, par M. Bertrand, comme une conséquence de la théorie de Gauss.

III. L'attention des physiciens est dirigée, depuis quelques années, vers l'étude de nombreux phénomènes observés au contact de deux liquides différents et liés d'une manière intime aux forces capillaires. M. Van der Mensbrugghe, dans deux Mémoires remarqués (¹), a résumé l'ensemble de ces phénomènes; il a fait connaître un grand nombre de faits nouveaux et intéressants, et de plus il a proposé des explications fondées sur l'existence de la tension superficielle des liquides.

La théorie de Gauss conduit d'une manière directe à l'explication de ce genre de phénomènes. Dans le cas de deux liquides, la fonction Ω est la somme des fonctions Ω_0 et Ω_1 relatives aux deux liquides,

$$\Omega = \Omega_0 + \Omega_1.$$

Si l'on pose, pour abréger,

$$g\rho\alpha^2 = \mathrm{F}, \quad g\rho_1\alpha_1^2 = \mathrm{F}_1,$$
$$g\rho\gamma^2 = g\rho_1\gamma_1^2 = \mathrm{G}.$$

Si l'on désigne par i et i_1 les angles de raccordement des deux liquides avec la paroi solide, par dm la masse d'un élément liquide, l'expression générale de Ω devient, d'après les relations (3) et (4),

$$\Omega = \mathrm{C} - \left[\int z\,dm - \mathrm{F}t\cos i + \mathrm{F}u + (\mathrm{F} + \mathrm{F}_1 - 2\mathrm{G})s - \mathrm{F}_1 t_1 \cos i_1 + \mathrm{F}_1 u_1\right].$$

La fonction Ω, pour l'équilibre, doit être un maximum; par conséquent la quantité contenue dans la parenthèse doit être un minimum. La recherche de ce minimum est un problème, en général, très-com-

(¹) *Sur la tension superficielle des liquides considérée au point de vue de certains mouvements observés à leur surface* (*Mémoires couronnés et Mémoires des savants étrangers, publiés par l'Académie royale de Belgique*, t. XXXIV, 1869; t. XXXVII, 1873).

plexe, dont la solution varie avec chaque cas particulier; nous examinerons quelques exemples.

a. Considérons une lame mince constituée par deux liquides différents L et L_1; le liquide L s'appuie sur un contour plan horizontal et le liquide L_1 forme une lame mince à l'intérieur du premier liquide.

Désignons par U la surface totale de la lame liquide, $u + u_1 = U$. La surface U conserve une valeur constante, le terme $\int z\,dm$ ne varie pas, t reste constant, $t_1 = 0$, la surface s est négligeable devant U : alors la quantité

$$Fu + F_1(U - u)$$

doit être minimum; par suite

$$(F - F_1)\,u$$

doit être un minimum.

1° $F > F_1$; u est minimum.

2° $F < F_1$; u est maximum.

Ainsi la surface de la lame doit s'étendre du côté du liquide pour lequel la constante F ou F_1 a la plus petite valeur.

b. Supposons que le liquide L_1 soit étalé en couche mince à la surface du liquide L.

Le terme $\int z\,dm$ ne varie pas sensiblement, t reste constant, $t_1 = 0$, la surface s peut être regardée comme sensiblement égale à u_1, et si l'on désigne, comme précédemment, par U la somme $u + u_1$, qui reste d'ailleurs constante, on voit que, pour l'équilibre, la quantité

$$(F_1 - G)\,u_1$$

doit être un minimum.

1° $F_1 > G$; u_1 est minimum, le liquide L_1 forme alors une goutte circulaire.

2° $F_1 < G$; u_1 est maximum, le liquide L_1 s'étale à la surface du liquide L.

c. Considérons enfin une goutte d'un liquide L_1 déposée à l'intérieur d'un liquide L de même densité.

Le terme $\int z\,dm$ ne varie pas, t reste constant, $t_1 = 0$, u reste constant, $u_1 = 0$; pour l'équilibre, la quantité

$$(F + F_1 - 2G)s$$

doit être un minimum.

1° $F + F_1 < 2G$; s est maximum, l'équilibre est impossible (¹).

2° $F + F_1 > 2G$; s est minimum, la goutte est sphérique; c'est le cas des expériences célèbres de M. Plateau.

d. On peut déduire de la valeur de Ω (p. 82) l'équation de la surface de séparation de deux liquides superposés dans un tube capillaire (²).

Il suffit de supposer que cette surface éprouve seule une modification en conservant le même contour. Considérons sur la surface s un élément superficiel ω limité par quatre lignes de courbure : soient ω' l'élément correspondant sur la nouvelle surface infiniment voisine de s; ε la portion infiniment petite de la normale à la surface s comprise entre les deux surfaces; R et R′ les rayons de courbure principaux au point considéré de la surface s. Supposons, pour fixer les idées, la surface s concave, et admettons qu'au point considéré le liquide s'élève par le fait du déplacement virtuel.

Si l'on pose $\omega\varepsilon = dv$, on a, d'après le théorème cité (p. 77),

$$\omega' - \omega = -\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) dv.$$

En désignant toujours par ρ_1 et ρ les densités des liquides inférieur et supérieur, la variation du terme $\int z\,dm$ qui correspond à l'élément

---

(¹) Ce résultat a été indiqué déjà par Athanase Dupré au moyen d'autres considérations : *La diffusion a lieu toutes les fois que la force de réunion des deux fluides l'un avec l'autre surpasse la moyenne arithmétique de leurs forces de réunion respectives* (*Théorie mécanique de la Chaleur*, p. 372).

(²) Cette question et la suivante ont été déjà traitées par M. Quet dans le cas d'un liquide contenu dans un tube capillaire et soumis à l'action de la vapeur qu'il dégage (*Rapport sur les progrès de la capillarité*, p. 272).

de volume dv est $g(\rho_1 - \rho)\, z\, dv$. D'ailleurs les surfaces t, u, t_1, u_1 restent invariables; par suite, la variation de Ω, qui correspond à la modification précédente, est

$$d\Omega = -\int \left[g(\rho_1 - \rho) z - (\mathrm{F} + \mathrm{F}_1 - 2\mathrm{G}) \left(\frac{1}{\mathrm{R}} + \frac{1}{\mathrm{R}'} \right) \right] dv.$$

Mais le volume reste le même; cette somme s'annule, si l'on pose

$$z = \frac{\mathrm{F} + \mathrm{F}_1 - 2\mathrm{G}}{g(\rho_1 - \rho)} \left(\frac{1}{\mathrm{R}} + \frac{1}{\mathrm{R}'} \right) + \lambda_1,$$

en désignant par λ_1 une constante dont la valeur dépend de la position du plan horizontal arbitraire à partir duquel on compte positivement les valeurs de z; nous supposerons comme précédemment que ce plan coïncide avec la surface libre du liquide dans le vase.

Si l'on suppose que la surface de séparation des deux liquides soit située au-dessus de la surface libre du liquide dans le vase, la constante λ_1 est déterminée par la condition que la somme des poids des liquides soulevés au-dessus de la surface libre dans le vase soit égale au poids du liquide supérieur qui serait soulevé dans le même tube plongeant dans ce liquide.

Le volume du liquide inférieur soulevé au-dessus du vase est (p. 79)

$$\alpha_1^2\, \mathrm{L} \cos i' + \mathrm{B}\lambda_1,$$

en désignant par i' l'angle de raccordement du liquide inférieur avec la paroi. En appelant p le poids du liquide supérieur, on doit avoir

$$g\rho_1 (\alpha_1^2\, \mathrm{L} \cos i' + \mathrm{B}\lambda_1) + p = g\rho\, \alpha^2\, \mathrm{L} \cos i.$$

e. L'angle de raccordement i' du liquide inférieur avec la paroi se détermine par des considérations analogues aux précédentes (p. 77).

Il suffit de supposer que la surface de séparation éprouve une modification sans conserver le même contour le long du tube. Désignons par s' la nouvelle surface de séparation des deux liquides; élevons en tous les points du contour primitif de la surface s des normales à cette surface et désignons, pour abréger, par S la surface déterminée par ces normales. L'intervalle compris entre les deux surfaces s, s' et la paroi du tube peut alors se décomposer en deux parties, l'une comprise entre s, s' et S, l'autre comprise entre s', S et la paroi du tube.

Considérons la première partie : la variation de Ω, qui lui correspond, est nulle d'après l'équation de la surface de séparation des deux liquides.

Considérons ensuite sur le contour de la surface s un élément rectiligne $d\sigma$; désignons par e la portion infiniment petite de la normale menée par un point de cet élément à la surface s et limitée à la surface s'.

1° A l'élément $d\sigma$ correspond un accroissement de la surface de séparation $e\,d\sigma \cot i'$.

2° A l'élément $d\sigma$ correspond un accroissement de la surface t_1 égal à $\frac{e\,d\sigma}{\sin i'}$ et par suite une diminution égale de la surface t.

3° Au même élément $d\sigma$ correspond un accroissement du volume liquide inférieur égal à $\frac{1}{2} e^2\, d\sigma \cot i'$ et par suite une diminution égale du volume liquide supérieur.

La variation de Ω, qui correspond au changement de la surface de séparation des deux liquides est finalement

$$d\Omega = -\int \left[\tfrac{1}{2} ezg(\rho_1 - \rho) + \mathrm{F} + \mathrm{F}_1 - 2\mathrm{G} + \frac{\mathrm{F}\cos i - \mathrm{F}_1 \cos i_1}{\cos i'} \right] e\, d\sigma \cot i'.$$

Si l'on remarque que l'épaisseur e est infiniment petite et que $d\Omega$ doit s'annuler, quel que soit e, on trouve pour valeur de l'angle i', formé par le liquide inférieur avec la paroi,

$$\cos i' = \frac{\mathrm{F}_1 \cos i_1 - \mathrm{F} \cos i}{\mathrm{F} + \mathrm{F}_1 - 2\mathrm{G}}.$$