Annales scientifiques de l'É.N.S.

Charles Roumieu

Sur quelques extensions de la notion de distribution

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 77, nº 1 (1960), p. 41-121

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1960_3_77_1_41_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
3e série, t. 77, 1960, p. 41 à 121.

SUR QUELQUES EXTENSIONS DE LA NOTION DE DISTRIBUTION (1)

PAR M. CHARLES ROUMIEU.

INTRODUCTION.

Depuis l'introduction par Dirac de sa « fonction » $\delta(x)$, la nécessité d'élargir la notion de fonction s'est imposée aux mathématiciens en des domaines divers, et la théorie des distributions développée il y a une dizaine d'années par M. Schwartz est venue réaliser une synthèse satisfaisante entre les solutions très variées apportées à ce problème. On en connait le principe : Les distributions sont les fonctionnelles linéaires et continues sur un espace de fonctions convenablement choisi. L'espace $\mathcal{D}$ de M. Schwartz est celui qui conduit au plus petit espace de distributions permettant de dériver indéfiniment toute fonction continue. Mais bien d'autres espaces fondamentaux sont possibles, conduisant à des espaces de distributions plus ou moins intéressants. MM. Gelfand et Silov en ont proposé et étudié quelques-uns [13]. Par ailleurs, Fantappié [12], avant même la théorie des distributions, et plus tard Köthe [19] et Grothendieck [15] ont étudié les formes linéaires continues définies sur certains espaces de fonctions analytiques.

Les espaces fondamentaux $\mathcal{D}(\{M_p\})$ étudiés dans le chapitre I sont des classes non quasi analytiques de fonctions indéfiniment dérivables à support compact. Leur topologie est la limite inductive de celles d'espaces normés, mais ce n'est pas en général une limite inductive stricte; ces espaces généralisent les espaces de suites étudiés par Köthe [18]. Le dual $\mathcal{D}'(\{M_p\})$ de $\mathcal{D}(\{M_p\})$ est un espace de distributions généralisées. La théorie de ces nouvelles distributions se développe de façon analogue à celle des distributions ordinaires. Toute

(1) *Thèse Sc. math.*, Paris, 1959.

$S \in \mathcal{D}'(\{M_p\})$ est égale à une somme infinie de dérivées de mesures de supports contenus dans un voisinage arbitraire du support de S; mais, contrairement à ce qui a lieu pour une distribution ordinaire, il existe des distributions généralisées de support origine qui ne sont pas égales à une somme infinie convergente dans un $\mathcal{D}'(\{M_p\})$ de dérivées de la mesure de Dirac.

Les espaces fondamentaux envisagés dans le chapitre II, s'introduisent naturellement lorsqu'on étudie la transformation de Fourier des distributions généralisées. Mais il est intéressant d'étudier ces espaces en eux-mêmes, et plus particulièrement ceux qui contiennent un sous-espace dense de fonctions analytiques. Lcs distributions généralisées opérant sur ces espaces apparaissent comme valeurs limites de fonctions holomorphes dans un demi-plan, ce qui permet de définir leur support.

Le chapitre III est consacré à l'étude de la transformation de Fourier des distributions généralisées et aux applications. Il y est fait largement appel aux techniques de la théorie des fonctions entières de type exponentiel. Les applications sont de deux types :

— D'une part, nous avons cherché à préciser la structure des distributions généralisées : chaque classe est engendrée en appliquant à des fonctions un certain opérateur différentiel d'ordre infini. Le théorème de Titchmarsh sur le support du produit de convolution s'étend aux classes $\mathcal{D}'(\{M_p\})$; par contre, les espaces plus généraux envisagés dans le chapitre II contiennent des couples de distributions généralisées à support non ponctuel dont le produit de convolution est à support ponctuel;

— D'autre part, nous montrons que les distributions généralisées définies dans ce travail permettent de résoudre des classes très générales d'équations de convolution.

Je ne saurais terminer sans témoigner ma reconnaissance à M. Jean-Pierre Kahane pour les conseils et les encouragements qu'il m'a prodigués au cours de ce travail. Je suis heureux de pouvoir remercier aussi M. Laurent Schwartz pour le bienveillant intérêt qu'il m'a manifesté, ainsi que MM. Pierre Lelong et Charles Ehresmann.

CHAPITRE I.

Distributions généralisées construites sur des classes non quasi analytiques.

1. Étude de certains espaces vectoriels topologiques.

Les espaces vectoriels topologiques étudiés dans ce paragraphe généralisent les espaces étudiés par M. Köthe sous les noms de « gestufte Raum » et

« Stufenraum » [18]. Ils comprennent comme cas particuliers la plupart des espaces étudiés par MM. Gelfand et Silov [13]. Ils ont les propriétés essentielles des espaces $\mathcal{L}(F)$ de MM. J. Dieudonné et L. Schwartz [11] sans cependant entrer dans cette catégorie. Notre propos n'est pas d'en faire une étude complète mais seulement d'établir les propriétés essentielles pour la suite de ce travail.

Soient $\mathcal{F}$ un espace normé; $\{M_p\}$ une suite positive $(p=0, 1, 2, \ldots)$; on se limite pour simplifier à une suite simple, mais les raisonnements sont valables pour une suite à plusieurs indices; on considère l'espace $E(\mathcal{F}, \{M_p\})$ des suites $F=\{f_p\}$, où $f_p \in \mathcal{F}$, vérifiant

$$\|f_p\| \leqq A h^p M_p \qquad (p=0, 1, 2, \ldots), \tag{1.1.1}$$

où $\|f_p\|$ désigne la norme de f_p, A et h des constantes pouvant dépendre de la suite $\{f_p\}$ considérée.

Soit $E(\mathcal{F}, \{M_p\}, h)$ le sous-espace de $E(\mathcal{F}, \{M_p\})$ formé des suites $\mathcal{F} \in E(\mathcal{F}, \{M_p\})$ vérifiant (1.1.1), h étant maintenant fixé; pour toute $F \in E(\mathcal{F}, \{M_p\}, h)$, on peut poser

$$\|F\|_h = \sup_{p \geqq 0} \frac{\|f_p\|}{h^p M_p}, \tag{1.1.2}$$

$\|F\|_h$ est une norme sur $E(\mathcal{F}, \{M_p\}, h)$; la topologie de $E(\mathcal{F}, \{M_p\}, h)$ sera celle définie par cette norme; on a évidemment

$$E(\mathcal{F}, \{M_p\}, h') \subset E(\mathcal{F}, \{M_p\}, h) \qquad \text{si } h' \leqq h \tag{1.1.3}$$

et il est clair que la topologie de $E(\mathcal{F}, \{M_p\}, h')$ est plus fine que celle de $E(\mathcal{F}, \{M_p\}, h)$.

$E(\mathcal{F}, \{M_p\})$ est la réunion des $E(\mathcal{F}, \{M_p\}, h)$ lorsque h varie; on peut d'ailleurs supposer que h ne prend que des valeurs entières. Il est commode de munir $E(\mathcal{F}, \{M_p\})$ de la topologie la plus fine rendant continues les applications canoniques de chaque $E(\mathcal{F}, \{M_p\}, h)$ dans $E(\mathcal{F}, \{M_p\})$. C'est la limite inductive des topologies des $E(\mathcal{F}, \{M_p\}, h)$ ([7], I, p. 61). Un système tondamental de voisinages de l'origine, dans cette topologie, est formé des ensembles $V(\{\eta_h\})$ définis de la façon suivante ; $\{\eta_h\}$ est une suite positive; $V(\{\eta_h\})$ est l'enveloppe convexe de la réunion des sphères de rayon η_h contenues dans chaque $E(\mathcal{F}, \{M_p\}, h)$, c'est-à-dire l'ensemble des F de la forme

$$F = \sum_h \lambda_h F_h; \qquad F_h \in E(\mathcal{F}, \{M_p\}, h); \qquad \|F\|_h \leqq \eta_h \tag{1.1.4}$$

$\lambda_h \geqq 0$; $\lambda_h = 0$, sauf un nombre fini; $\sum_h \lambda_h = 1$.

PROPOSITION 1. — *Soit* $\mathcal{B}(A, h)$ *l'ensemble des* $F \in E(\mathcal{F}, \{M_p\}, h)$ *tels que* $\|F\|_h \leqq A$, *c'est-à-dire l'ensemble des* $F=\{f_p\}$ *vérifiant* (1.1.1), A *et* h *étant* *fixés. Pour qu'un ensemble soit borné dans* $E(\mathcal{F}, \{M_p\})$, *il faut et il suffit qu'il soit contenu dans un* $\mathcal{B}(A, h)$.

Cette proposition exprime qu'un ensemble est borné dans $E(\mathcal{F}, \{M_p\})$ si et seulement si il est contenu dans un $E(\mathcal{F}, \{M_p\}, h)$ et y est borné. Cela découle d'un résultat général de A. Grothendieck ([14], p. 78); voici d'ailleurs une démonstration directe. La condition est évidemment suffisante. Montrons qu'elle est nécessaire : Soit $\mathcal{B}$ un ensemble borné dans $E(\mathcal{F}, \{M_p\})$; supposons qu'il n'existe pas de constantes A, h donnant lieu à (1.1.1) lorsque $\{f_p\}$ parcourt $\mathcal{B}$. On peut alors trouver une suite de nombres positifs K_r tendant vers ∞, une suite de $F_r = \{f_{p,r}\}$ appartenant à $\mathcal{B}$, et une suite d'entiers p_r telles que

$$\|f_{p_r,r}\| \geqq (K_r)^{p_r} M_{p_r};$$

d'autre part, pour que les ρF_r soient contenus dans un $V(\{\eta_h\})$ donné, il faut qu'on ait, d'après (1.1.4),

$$\rho \|f_{p_r,r}\| \leqq \sup_{h \geqq 1} \eta_h h^{p_r} M_{p_r}.$$

On obtient une contradiction si la quantité $(K_r)^{-p_r} \sup\limits_{h \geqq 1} \eta_h h^{p_r}$ tend vers zéro lorsque r tend vers l'infini; cela a lieu si $\eta_h \leqq \inf\limits_r \left[\dfrac{\sqrt{K_r}}{h}\right]^{p_r}$, ce qui est toujours possible.

Proposition 2. — *Pour qu'une forme linéaire sur* $E(\mathcal{F} \{M_p\})$ *soit continue, il faut et il suffit que l'image de toute partie bornée soit bornée.*

Dans tout espace vectoriel topologique, l'image de toute partie bornée par une forme linéaire continue est bornée. La réciproque est une propriété classique des espaces normés ([2], p. 54). Elle s'étend facilement aux limites inductives d'espaces normés : soit H une forme linéaire bornée sur $E(\mathcal{F}, \{M_p\})$; elle définit par restriction, sur chaque $E(\mathcal{F}, \{M_p\}, h)$ une forme linéaire bornée, donc continue. Ainsi, la restriction de H à chaque $E(\mathcal{F}, \{M_p\}, h)$ est continue: c'est une condition nécessaire et suffisante pour que S soit continue ([7], I, p. 62).

Remarque. — En général, $E(\mathcal{F}, \{M_p\})$ n'est pas une limite inductive stricte ([7], I, p. 64) : si $h' < h$, la topologie induite sur $E(\mathcal{F}, \{M_p\}, h')$ par $E(\mathcal{F}, \{M_p\}, h)$ n'est pas identique à la topologie de $E(\mathcal{F}, \{M_p\}, h')$ ainsi que le montre l'exemple suivant :

Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des nombres complexes; $h > 1$ étant donné, considérons les suites $F_n = \{f_{p,n}\}$ définies par

$$f_{p,n} = h^p M_p \quad \text{pour } p \leqq n; \qquad f_{p,n} = h^n M_p \qquad \text{pour } p \geqq n.$$

On a

$$F_n \in E(\mathcal{F}, \{M_p\}, 1); \qquad \|F_n\|_1 = h^n; \qquad \|F_n\|_h = 1.$$

Les F_n sont bornés dans $E(\mathcal{F}, \{M_p\}, h)$, mais non dans $E(\mathcal{F}, \{M_p\}, 1)$.

L'ESPACE $E'(\mathcal{F}, \{M_p\})$ DUAL DE $E(\mathcal{F}, \{M_p\}$.

LEMME. — *Soit* $F \in E(\mathcal{F}, \{M_p\})$ $(F = \{f_p\})$; *désignons par* F_p *la suite* $\{0, 0, \ldots, 0, f_p, 0, 0, \ldots\}$; *alors la série* $\sum_{p=0}^{\infty} F_p$ *est convergente dans* $E(\mathcal{F}, \{M_p\})$ *uniformément lorsque* F *parcourt un ensemble borné dans* $E(\mathcal{F}, \{M_p\})$ *et l'on a*

$$F = \sum_{p=0}^{\infty} F_p. \tag{1.1.5}$$

En effet, lorsque F parcourt $\mathcal{B}(A, h)$, les relations (1.1.1) sont satisfaites par toute F. Soit alors $H > h$; on a

$$\left\| F - \sum_{q=0}^{p} F_q \right\|_H = \sup_{q \geq p} \frac{\|f_q\|}{H^q M_q} \leq A \sup_{q \geq p} \left(\frac{h}{H}\right)^q = A\left(\frac{h}{H}\right)^p$$

lorsque p tend vers l'infini, $\left(\frac{h}{H}\right)^p$ tend vers zéro, ce qui prouve que $\sum_{q=0}^{p} F_q$ converge vers F dans $E(\mathcal{F}, \{M_p\})$, donc dans $E(\mathcal{F}, \{M_p\})$ uniformément lorsque F parcourt $\mathcal{B}(A, h)$.

PROPOSITION 3. — *Désignons par* g *les formes linéaires continues sur* $\mathcal{F}$, *par* $\mathcal{F}'$ *le dual de* $\mathcal{F}$, *muni de la norme* $\|g\| = \sup_{\|f\| \leq 1} |g(f)|$. *Le dual* $E'(\mathcal{F}, \{M_p\})$ *de* $E(\mathcal{F}, \{M_p\})$ *est l'espace des suites* $G = \{g_p\}$, *où* $g_p \in \mathcal{F}'$, *vérifiant*

$$\|g_p\| = O\left(\frac{1}{h^p M_p}\right) \qquad (p \to \infty) \quad \textit{pour tout } h \tag{1.1.6}$$

et le produit scalaire est donné par

$$G(F) = \sum_{p=0}^{\infty} g_p(f_p). \tag{1.1.7}$$

La topologie de $E'(\mathcal{F}, \{M_p\})$ *est définie par la famille de semi-normes* $\|G\|_h = \sup_{\|F\|_h \leq 1} |G(F)|$ *et l'on a*

$$\|G\|_h = \sum_{p=0}^{\infty} h^p M_p \|g_p\|. \tag{1.1.8}$$

Muni de cette topologie, $E'(\mathcal{F}, \{M_p\})$ *est complet. C'est un espace de Fréchet.*

Pour la démonstration, observons d'abord que (1.1.6) entraîne

$$\sum_{p=0}^{\infty} h^p \mathrm{M}_p \| g_p \| < +\infty \quad \text{pour tout } h,$$

car on peut écrire

$$\sum_{p=0}^{\infty} h^p \mathrm{M}_p \| g_p \| \leqq \left(\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{2^p} \right) \sup_{p \geqq 0} [(2h)^p \mathrm{M}_p \| g_p \|].$$

Soit alors G une forme linéaire continue sur $\mathrm{E}(\mathcal{F}, \{\mathrm{M}_p\})$; désignons par $\mathrm{E}_p(\mathcal{F}, \{\mathrm{M}_p\})$ le sous-espace de $\mathrm{E}(\mathcal{F}, \{\mathrm{M}_p\})$ formé des suites F_p de la forme $\{0, 0, \ldots, 0, f_p, 0, 0, \ldots\}$. La topologie induite par celle de $\mathrm{E}(\mathcal{F}, \{\mathrm{M}_p\})$ sur $\mathrm{E}_p(\mathcal{F}, \{\mathrm{M}_p\})$ est identique à celle de l'espace $\mathcal{F}$ pour f_p. La restriction de G à $\mathrm{E}_p(\mathcal{F}, \{\mathrm{M}_p\})$ est isomorphe à une forme linéaire g_p définie sur $\mathcal{F}$. On peut alors écrire, en utilisant le lemme et la continuité de G,

$$\mathrm{G}(\mathrm{F}) = \sum_{p=0}^{\infty} \mathrm{G}(\mathrm{F}_p) = \sum_{p=0}^{\infty} g_p(f_p)\,;$$

la série $\sum_{p=0}^{\infty} g_p(f_p)$ étant uniformément convergente lorsque F parcourt un ensemble borné dans $\mathrm{E}(\mathcal{F}, \{\mathrm{M}_p\})$.

On a, si $\| \mathrm{F} \|_h \leqq 1$, c'est-à-dire $\| f_p \| \leqq h^p \mathrm{M}_p$,

$$| \mathrm{G}(\mathrm{F}) | \leqq \sum_{p=0}^{\infty} | g_p(f_p) | \leqq \sum_{p=0}^{\infty} h^p \mathrm{M}_p \| g_p \|;$$

d'où

$$\| \mathrm{G} \|_h \leqq \sum_{p=0}^{\infty} h^p \mathrm{M}_p \| g_p \|.$$

D'autre part, soit h donné; quel que soit $\varepsilon < 0$, il existe $f_p \in \mathcal{F}$ tel que

$$| f_p | \leqq h^p \mathrm{M}_p; \qquad | g_p(f_p) | \geqq h^p \mathrm{M}_p \| g_p \| - \frac{\varepsilon}{2^p}.$$

Quitte à multiplier chaque f_p par une constante convenable de module 1, on peut supposer $g_p(f_p)$ réel et positif; on a alors, en posant $\mathrm{F} = \{f_p\}$,

$$\mathrm{F} \in \mathcal{F}(\{\mathrm{M}_p\}, h), \qquad \| \mathrm{F} \|_h \leqq 1$$

et

$$\mathrm{G}(\mathrm{F}) = \sum_{p=0}^{\infty} g_p(f_p) \geqq \sum_{p=0}^{\infty} \left(h^p \mathrm{M}^p \| g_p \| - \frac{\varepsilon}{2^p} \right) = \sum_{p=0}^{\infty} h^p \mathrm{M}_p \| g_p \| - 2\varepsilon.$$

D'où

$$\sum_{p=0}^{\infty} h^p \mathrm{M}_p \| g_p \| \leqq \mathrm{G}(\mathrm{F}) + 2\varepsilon \leqq \| \mathrm{G} \|_h + 2\varepsilon,$$

ce qui achève la démonstration de (1.1.8)

Le fait que $E'(\mathcal{F}, \{M_p\})$ est complet résulte immédiatement, d'après ([8], p. 12), de ce que $E(\mathcal{F}, \{M_p\})$, limite inductive d'une suites d'espaces normés, est bornologique.

PROPOSITION 4. — *Lorsque* F *parcourt un ensemble borné dans* $E(\mathcal{F}, \{M_p\})$ *et* G *un ensemble borné dans* $E'(\mathcal{F}, \{M_p\})$, *le produit scalaire* G(F) *reste borné. Si l'un des deux converge vers zéro, l'autre restant borné, le produit scalaire converge uniformément vers zéro*

La première partie de l'énoncé résulte de la définition des ensembles bornés dans $E'(\mathcal{F}, \{M_p\})$. La définition de la topologie de $E'(\mathcal{F}, \{M\})$ montre que G(F) converge uniformément vers zéro lorsque G converge vers zéro, F restant borné. Supposons maintenant que F converge vers zéro dans $E(\mathcal{F}, \{M_p\})$, G restant borné; il existe alors des nombres A_h tels que $\| G \|_h \leqq A_h$. Si F appartient à un voisinage de l'origine dans $E(\mathcal{F}, \{M_p\})$ défini par une suite $\{\eta_h\}$, on a, d'après (1.1.4),

$$| G(F) | \leqq \sum_h \lambda_h A_h \eta_h.$$

Si l'on choisit $\{\eta_h\}$ de façon que $\eta_h \leqq \frac{\varepsilon}{A_k}$, on aura $|G(F)| \leqq \varepsilon$, ce qui achève la démonstration.

2. Les distributions généralisées.

Soit $\mathcal{D}$ l'espace vectoriel sur le corps des nombres complexes des fonctions à valeurs complexes définies et indéfiniment dérivables sur la droite, à support compact. A toute suite positive $\{M_p\}$ $(p = 0, 1, 2, \ldots)$ on peut associer le sous-espace $\mathcal{D}(\{M_p\})$ de $\mathcal{D}$ formé des fonctions $f(x) \in \mathcal{D}$ vérifiant

$$(1.2.1) \qquad |f^{(p)}(x)| \leqq A h^p M_p \qquad (p = 0, 1, 2, \ldots) \qquad \text{pour un A, un } h.$$

PROPOSITION 1. — *Soit* $\{M_p^*\}$ *la plus grande suite logarithmiquement convexe telle que* $M_p^* \leqq M_p$. *Alors* $\mathcal{D}(\{M_p\}) = \mathcal{D}(\{M_p^*\})$.

Démonstration [21], n° 6.7.11.

On pourra sans diminuer la généralité supposer la suite $\{M_p\}$ logarithmiquement convexe, c'est-à-dire

$$(1.2.2) \qquad (M_p)^2 \leqq M_{p-1} M_{p+1}.$$

PROPOSITION 2. — *La suite* $\{M_p\}$ *étant logarithmiquement convexe, chacune des conditions équivalentes*

$$(1.2.3) \qquad \sum_{p=}^{\infty} \frac{M_{p-1}}{M_p} < +\infty; \qquad \sum_{p=0}^{\infty} (M_p)^{-\frac{1}{p}} < +\infty.$$

est nécessaire pour que $\mathcal{D}(\{M_p\})$ *contienne des fonctions non identiquement nulles; chacune de ces conditions est suffisante pour que* $\mathcal{D}(\{M_p\})$ *contienne, quel que soit* $\varepsilon > 0$, *une fonction* $\rho_\varepsilon(x)$ *non négative, paire, de support* $(-\varepsilon, +\varepsilon)$ *vérifiant*

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \rho_\varepsilon(x)\, dx = 1. \tag{1.2.4}$$

La première partie de la démonstration résulte du théorème de Denjoy-Carleman [9]; l'existence, moyennant la condition (1.2.3) d'une fonction $\in \mathcal{D}(\{M_p\})$ non négative, paire et de support $(-\varepsilon. +\varepsilon)$ est un résultat de M. S. Mandelbrojt [21]. Il suffit de multiplier cette fonction par une constante convenable pour qu'elle satisfasse aussi (1.2.4).

Remarque. — On déduit immédiatement de (1.2.4) que $\rho_\varepsilon(x)$ converge vers la mesure de Dirac δ, dans l'espace des mesures à supports compacts, lorsque ε tend vers zéro.

On désignera par $\mathfrak{M}$ l'ensemble des suites $\{M_p\}$ vérifiant (1.2.2) et (1.2.3). Le cas où $M_p = +\infty$ à partir d'un certain rang n'est pas exclu, mais on supposera toujours M_0 fini. Si $M_p = +\infty$ pour $p > p_0$, $\mathcal{D}(\{M_p\})$ est identique à $\mathcal{D}$. Dans tout le chapitre I, on n'envisagera que des espaces $\mathcal{D}(\{M_p\})$ pour lesquels $\{M_p\} \in \mathfrak{M}$.

Corollaire. — $\mathcal{D}(\{M_p\})$, *considéré comme sous-espace de* $\mathcal{D}$, *est dense dans* $\mathcal{D}$.

Soit $f(x) \in \mathcal{D}$; posons

$$f_\varepsilon(x) = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} f(x-\xi)\,\rho_\varepsilon(\xi)\, d\xi;$$

on a

$$|\rho_\varepsilon^{(p)}(x)| \leq A h^p M_p,$$

d'où

$$|f_\varepsilon^{(p)}(x)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(\xi)\,\rho_\varepsilon^{(p)}(x-\xi)|\, d\xi \leq A h^p M_p \int_{-\infty}^{+\infty} |f(\xi)|\, d\xi;$$

$$f_\varepsilon(x) \in \mathcal{D}(\{M_p\}).$$

Lorsque ε tend vers zéro, $\rho_\varepsilon(x)$ converge vers δ et $f_\varepsilon(x)$ vers $f(x)$ dans $\mathcal{D}$.

Proposition 3. — *Soit* I *un segment*; Ω_i *des ouverts formant un recouvrement de* I. *On peut associer à chaque* Ω_i *une fonction* $\alpha_i(x) \in \mathcal{D}(\{M_p\})$ *possédant les propriétés suivantes :*

a. $\alpha_i(x) \geq 0$; *le support de* $\alpha_i(x)$ *est dans* Ω_i;

b. $\alpha_i(x) = 0$ *sauf un nombre fini et* $\sum_i \alpha_i(x) = 1$.

On peut supposer les Ω_i en nombre fini; car s'il y en avait une infinité, on pourrait toujours en trouver un nombre fini formant un recouvrement de I et poser $\alpha_i(x)=0$ pour les autres. Associons alors à chaque Ω_i un ouvert Ω'_i de telle façon que les Ω'_i forment un recouvrement de I et que $\overline{\Omega'_i}\subset\Omega_i$. Soient $\beta_i(x)$ des fonctions en escalier possédant les propriétés : *a*. le support de $\beta_i(x)$ est dans Ω'_i ; *b*. $\sum_i \beta_i(x)=1$. Il existe $\varepsilon>0$ tel que tout segment de longueur 2ε ayant son milieu dans Ω'_i soit contenu en entier dans Ω_i, Posons alors

$$\alpha_i(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\rho_\varepsilon(x-\xi)\,\beta_i(\xi)\,d\xi;$$

on vérifie immédiatement que les $\alpha_i(x)$ satisfont aux conditions voulues.

Topologie de $\mathcal{D}(\{M_p\})$. — $\mathcal{D}(\{M_p\})$ est la réunion des sous-espaces $\mathcal{D}(\{M_p\}, I, h)$ formés des fonctions $f(x)\in\mathcal{D}(\{M_p\})$, de supports contenus dans le segment I, vérifiant (1.2.1), h étant maintenant fixé. On définit une norme sur $\mathcal{D}(\{M_p\}, I, h)$ par

$$\|f\|_h=\sup_{p\geqq 0}\left[\frac{1}{h^p M_p}\sup_x |f^{(p)}(x)|\right]. \tag{1.2.5}$$

En général, on dira que des $f_j(x)$ convergent vers zéro (resp. forment un ensemble borné) dans $\mathcal{D}(\{M_p\})$ si et seulement si elles sont contenues dans un même $\mathcal{D}(\{M_p\}, I, h)$ et y convergent vers zéro (resp. y forment un ensemble borné).

Cependant, pour pouvoir appliquer à $\mathcal{D}(\{M_p\})$ le théorème de Hahn-Banach, il est nécessaire de munir cet espace d'une véritable topologie; ce sera la limite inductive des topologies des $\mathcal{D}(\{M_p\}, I, h)$ lorsque I et h varient. On peut d'ailleurs se ramener à la topologie des espaces $E(\mathcal{F}, \{M_p\})$ étudiés au paragraphe 1 au moyen de l'artifice suivant ;

Soit I_k le segment $(-k, +k)$; l'espace $\mathcal{D}(\{M_p\}, I_k, h)$ peut être défini comme étant l'espace des fonctions $f(x)$ vérifiant

$$|f^{(p)}(x)|\leqq A h^p M_p \inf_{q\geqq 0}\left(\frac{k}{|x|}\right)^q,$$

c'est-à-dire

$$|x^q f^{(p)}(x)|\leqq A h^p k^q M_p \qquad (p=0, 1, 2, \ldots, q=0, 1, 2, \ldots). \tag{1.2.6}$$

Soit $\mathcal{B}$ l'espace des fonctions à valeurs complexes définies, continues et bornées sur la droite muni de la topologie définie par la norme $\sup_x|f(x)|$, Soit $E(B, \{M_p\}, \{1\})$ l'espace des suites à deux indices $\{f_{pq}(x)\}$, où $f_{pq}(x)\in\mathcal{B}$, vérifiant

$$|f_{pq}(x)|\leqq A h^p k^q M_p \qquad (p=0, 1, 2, \ldots).$$

On peut définir la topologie de $E(\mathcal{B}, \{M_p\}, \{1\})$ comme celle de $E(\mathcal{F}, \{M_p\})$.

L'espace $\mathcal{D}(\{M_p\})$ est isomorphe au sous-espace de $E(\mathcal{B}, \{M_p\}, \{1\})$ dont les éléments $f_{pq}(x)$ sont de la forme $x^q f^{(p)}(x)$.

Lorsque $M_p < +\infty$, la topologie de $\mathcal{D}(\{M_p\})$, est plus fine que celle induite par $\mathcal{D}$; en effet, si des fonctions $f_j(x)$ convergent vers zéro dans $\mathcal{D}(\{M_p\}, I, h)$, chacune de leurs dérivées converge uniformément vers zéro, donc les $f_j(x)$ convergent vers zéro dans $\mathcal{D}$. La topologie de $\mathcal{D}$ est donc moins fine que celle de $\mathcal{D}(\{M_p\}\ I, h)$, quels que soient I, h; elle est aussi moins fine que celle de $\mathcal{D}(\{M_p\})$.

Lorsque $M_p = +\infty$ pour $p > p_0$, la topologie de $\mathcal{D}(\{M_p\})$ est identique à celle induite par l'espace $\mathcal{D}^{(p_0)}$ ([21], I, p. 21).

Pour qu'un ensemble soit borné dans $\mathcal{D}(\{M_p\})$, il faut et il suffit qu'il soit contenu dans un $\mathcal{D}(\{M_p\}, I, h)$ et y soit borné.

Dans $\mathcal{D}(\{M_p\})$ comme dans les espaces $E(\mathcal{F}, \{M_p\})$, pour qu'une forme linéaire soit continue, il faut et il suffit que l'image de toute partie bornée soit bornée.

Les distributions généralisées. — On désigne par $\mathcal{D}'(\{M_p\})$ le dual de $\mathcal{D}(\{M_p\})$. Soit S une forme linéaire sur $\mathcal{D}(\{M_p\})$. Pour qu'elle soit continue sur $\mathcal{D}(\{M_p\})$ topologique, il faut et il suffit que sa restriction à chaque $\mathcal{D}(\{M_p\}, I, h)$ soit continue ([7], I, p. 60).

On appellera distributions généralisées les éléments des espaces $\mathcal{D}'(\{M_p\})$.

Proposition 4. — *La distribution généralisée* S *se réduit à une distribution ordinaire si et seulement si c'est une forme linéaire continue sur* $\mathcal{D}(\{M_p\})$ *muni de la topologie induite par* $\mathcal{D}$.

Toute distribution ordinaire définit par restriction une forme linéaire sur $\mathcal{D}(\{M_p\})$ continue pour la topologie induite par $\mathcal{D}$. Réciproquement si S est une forme linéaire sur $\mathcal{D}(\{M_p\})$ continue pour la topologie induite par $\mathcal{D}$, on peut la prolonger de façon unique en une forme linéaire $\overline{S}$ définie sur $\mathcal{D}$, puisque $\mathcal{D}(\{M_p\})$ est un sous-espace dense de $\mathcal{D}$; on peut alors identifier S et $\overline{S}$.

Proposition 5. — *Lorsque* $M_p = +\infty$ *pour* $p > p_0$, $\mathcal{D}'(\{M_p\})$ *est l'espace des distributions ordinaires d'ordre* $\leq p_0$.

En effet, on a vu que $\mathcal{D}(\{M_p\})$ est identique à $\mathcal{D}$ muni de la topologie induite par $\mathcal{D}^{p_0}$; soit $S \in \mathcal{D}'(\{M_p\})$. Alors, S est prolongeable en une forme linéaire continue sur $\mathcal{D}^{p_0}$ et cela de façon unique, car $\mathcal{D}$ est dense dans $\mathcal{D}^{p_0}$.

Support. — La proposition 2 permet de définir l'égalité de deux distributions généralisées sur un intervalle ouvert quelconque : on dira que $S \in \mathcal{D}'(\{M_p\})$ est nulle sur un intervalle ouvert Ω si le produit scalaire $S(f)$ est nul pour toute $f \in \mathcal{D}(\{M_p\})$ ayant son support contenu dans Ω.

Lemme 1. — *Soient*

$$f(x) \in \mathcal{D}(\{M_p\}) \quad \textit{et} \quad g(x) \in \mathcal{D}(\{M_p\}).$$

Alors, on a aussi

$$f(x)g(x) \in \mathcal{D}(\{M_p\}).$$

En effet, les inégalités

$$|f^{(p)}| \leqq A h^p M_p \qquad \text{et} \qquad |g^{(p)}| \leqq B k^p M_p$$

entraînent

$$|(fg)^{(p)}| \leqq AB \sum_p C_n^p h^p k^{n-p} M_p M_{n-p}$$

et, en tenant compte de la relation $M_p M_{n-p} \leqq M_0 M_n$ qui résulte de la convexité de la suite $\operatorname{Log} M_p$,

$$|(fg)^{(p)}| \leqq AB M_0 (h+k)^n M_n,$$

ce qui établit le lemme,

Si une distribution généralisée S est nulle sur des ouverts Ω_i, elle est nulle sur leur réunion : soit, en effet,

$$f(x) \in \mathcal{D}(\{M_p\})$$

le support I de $f(x)$ étant recouvert par les Ω_i; posons

$$f_i(x) = \alpha_i(x) f(x),$$

en utilisant les fonctions $\alpha_i(x)$ définies dans la proposition 3 ; on a

$$f(x) = \sum_i f_i(x)$$

et le support de f_i est contenu dans Ω_i. On a alors

$$S(f) = \sum_i S(f_i) = 0,$$

ce qui établit la propriété.

On peut alors définir le support d'une distribution généralisée : ce sera le complémentaire de la réunion des ouverts dans lesquels S est nulle.

Exemple. — Soit $\{c_p\}$ une suite complexe donnée ($p = 0, 1, 2, \ldots$) vérifiant la condition

$$\lim_{p \to \infty} (|C_p| M_p)^{\frac{1}{p}} = 0. \tag{1.2.7}$$

Posons

$$S(f) = \sum_{p=0}^{\infty} c_p f^{(p)}(0). \tag{1.2.8}$$

Lorsque f parcourt un ensemble borné dans $\mathcal{D}(\{M_p\})$, on a

$$|f^{(p)}(x)| \leqq A h^p M_p;$$

alors, la série du second membre de (1.2.8) converge absolument et uniformément, d'après la règle de Cauchy, et l'on a

$$|S(f)| \leqq A \sum_{p=0}^{\infty} h^p |C_p| M_p,$$

ce qui prouve que les $S(f)$ sont bornés. La formule (1.2.8) définit donc une distribution généralisée $S \in \mathcal{D}'(\{M_p\})$ dont le support est évidemment l'origine. Lorsqu'il y a une infinité de c_p différents de zéro, S n'est pas une distribution ordinaire puisqu'elle ne se réduit pas à une somme finie de dérivées de la mesure de Dirac.

Topologie de $\mathcal{D}'(\{M_p\})$. — La topologie de $\mathcal{D}'(\{M_p\})$ est la topologie habituelle du dual; on peut la définir par la famille de semi-normes

$$(1.2.9) \qquad \|S\|_{I,h} = \sup |S(f)| \qquad \text{pour} \quad f \in \mathcal{D}(\{M_p\}, I, h)\} \quad \|f\|_h \leqq 1.$$

Proposition 6. — *L'espace $\mathcal{D}'(\{M_p\})$ est complet.*

En effet, $\mathcal{D}'(\{M_p\})$ est le dual fort d'un espace bornologique ([8], p. 12).

Proposition 7. — *Lorsque f parcourt un ensemble borné dans $\mathcal{D}(\{M_p\})$ et S un ensemble borné dans $\mathcal{D}'(\{M_p\})$, le produit scalaire $S(f)$ reste borné. Si l'une des deux converge vers zéro, l'autre restant bornée, le produit scalaire $S(f)$ converge vers zéro.*

Même démonstration que pour $E(\mathcal{F}, \{M_p\})$ et $E'(\mathcal{F}, \{M_p\})$.

Dérivées et primitives. — q étant un entier positif, on désigne par $\{M_{p+q}\}$ la suite $M_q, M_{q+1}, \ldots$ dont le terme de rang p est M_{p+q}, et par $\{M_{p-q}\}$ toute suite logarithmiquement convexe $A_0, A_1, \ldots, A_{q-1}, M_0, M_1, \ldots$ dont le terme de rang p est M_{p-q} (pour $p \geqq q$).

Lemme 2. — *La dérivation est une application linéaire continue de $\mathcal{D}(\{M_{p-1}\})$ dans $\mathcal{D}(\{M_p\})$.*

Évident d'après la définition de $\mathcal{D}(\{M_p\})$.

Définition et proposition 8. — *Soit*

$$S \in \mathcal{D}'(\{M_p\});$$

la dérivée de S est une distribution généralisée

$$S' \in \mathcal{D}'(\{M_{p-1}\})$$

définie par

$$(1.2.10) \qquad S'(f) = -S(f'), \qquad \text{où} \quad f \in \mathcal{D}(\{M_{p-1}\}).$$

La dérivation est une application linéaire continue de $\mathcal{D}'(\{M_p\})$ *dans* $\mathcal{D}'(\{M_{p-1}\})$.

Justification immédiate au moyen du lemme 2.

Primitives. — Soit $S \in \mathcal{D}'(\{M_p\})$; on voit en raisonnant comme pour les distributions ordinaires, que S possède une infinité de primitives $T \in \mathcal{D}'(\{M_{p+1}\})$ définies par la relation $T' = S$; deux quelconques d'entre elles diffèrent d'une fonction constante.

THÉORÈME 1. — *Soient* μ_p *des mesures vérifiant*

$$\int_I |d\mu_p| = O\left(\frac{1}{h^p M_p}\right) \qquad (p \to +\infty) \tag{1.2.11}$$

quels que soient l'intervalle I *et la constante* h. *La formule*

$$S = \sum_{p=0}^{\infty} D^p \mu_p \tag{1.2.12}$$

définit alors une distribution généralisée $S \in \mathcal{D}'(\{M_p\})$. *Réciproquement, toute distribution généralisée* $S \in \mathcal{D}'(\{M_p\})$ *peut être mise sous cette forme.*

Soit $f \in \mathcal{D}(\{M_p\})$; la formule (1.2.12) s'écrit

$$S(f) = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \int_{-\infty}^{+\infty} f^{(p)}(x)\, d\mu_p;$$

on voit facilement que lorsque f parcourt un ensemble borné dans $\mathcal{D}(\{M_p\})$, la série du second membre converge absolument et uniformément, ce qui permet de conclure.

Pour démontrer la réciproque, on utilise l'espace $\mathcal{B}(\{M_p\})$ introduit pour définir la topologie de $\mathcal{D}(\{M_p\})$. S est une forme linéaire continue sur le sous-espace $\mathcal{D}(\{M_p\})$ de $\mathcal{B}(\{M_p\})$ et peut être prolongée en une forme linéaire continue M définie sur $\mathcal{B}(\{M_p\})$. Utilisons la proposition 3 du paragraphe 1. M est une suite de mesures sommables μ_{pq} vérifiant

$$\sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} h^p k^q M_p \int_{-\infty}^{+\infty} |d\mu_{pq}| < +\infty$$

pour tout h et tout k. On a, pour toute $f(x) \in \mathcal{D}(\{M_p\})$,

$$S(f) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f^{(p)}(x)\, x^q\, d\mu_{pq}.$$

Posons

$$\mu_p = \sum_{q=0}^{\infty} (-1)^q x^q\, d\mu_{pq};$$

on aura alors

$$S(f)=\sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p\int_{-\infty}^{+\infty}f^{(p)}(x)\,d\mu_p,$$

ce qui donne la formule (1.2.12). On a, d'autre part, I_k désignant le segment $(-k, +k)$,

$$\int_{I_k}|d\mu_p|\leq\sum_{q=0}^{\infty}\int_{I_k}|x^q\,d\mu_{pq}|\leq\sum_{q=0}^{\infty}k^q\int_{-\infty}^{+\infty}|d\mu_{pq}|$$

et

$$\sum_{p=0}^{\infty}h^p M_p\int_{I_k}|d\mu_p|\leq\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}h^p k^q M_p\int_{-\infty}^{+\infty}|d\mu_{pq}|,$$

ce qui achève la démonstration.

Relations entre les classes $\mathcal{D}'(\{M_p\})$.

Lemme 3. — *Soit μ une mesure à support compact; la formule*

$$f\to\mu\star f=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x-\xi)\,d\mu(\xi)$$

définit une application linéaire continue de $\mathcal{D}(\{M_p\})$ dans $\mathcal{D}(\{M_p\})$.

En effet, on a

$$(f\star\mu)^{(p)}=\int_{-\infty}^{+\infty}f^{(p)}(x-\xi)\,d\mu(\xi);$$

si $|f^{(p)}(x)|\leq Ah^pM_p$, on aura

$$|(f\star\mu)^{(p)}|\leq Ah^pM_p\int_{-\infty}^{+\infty}|d\mu|,$$

ce qui permet de conclure.

Proposition 9. — *Soient deux suites $\{M_p\}$, $\{M'_p\}$ appartenant à $\mathfrak{M}$ et vérifiant*

$$(M'_p)^{\frac{1}{p}}=O\left[(M_p)^{\frac{1}{p}}\right]\qquad(p\to+\infty).\tag{1.2.13}$$

Alors, $\mathcal{D}(\{M'_p\})\subset\mathcal{D}(\{M_p\}$ et $\mathcal{D}(\{M'_p\})$ est dense dans $\mathcal{D}(\{M_p\})$.
On peut identifier $\mathcal{D}'(\{M_p\})$ à un sous-espace de $\mathcal{D}'(\{M'_p\})$.

Il est évident que $\mathcal{D}(\{M'_p\})\subset\mathcal{D}(\{M_p\}$; de plus, si des $f_j(x)$ convergent vers zéro dans $\mathcal{D}(\{M'_p\}, I, h)$, elles convergent vers zéro dans un certain $\mathcal{D}(\{M_p\}, I, H)$, car leurs supports sont contenus dans un segment fixe et l'on a

$$\sup_x|f^{(p)}(x)|=O(h^pM'_p)=O(h^pM_p)\quad\text{pour un H}\qquad(p\to\infty).$$

Soit $f(x) \in \mathcal{D}(\{M_p\})$; les « régularisées »

$$f_\varepsilon(x) = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} f(x-\xi)\,\rho_\varepsilon(\xi)\,d\xi$$

formées avec la fonction $\rho_\varepsilon(x) \in \mathcal{D}(\{M'_p\})$ définie dans la proposition 2 sont dans $\mathcal{D}(\{M'_p\})$. Lorsque ε tend vers zéro, $\rho_\varepsilon(x)$ converge vers δ et $f_\varepsilon(x)$ converge vers $f(x)$, d'après le lemme 3; donc $\mathcal{D}(\{M'_p\})$ est dense dans $\mathcal{D}(\{M_p\})$.

Enfin, soit $S \in \mathcal{D}'(\{M_p\})$. S définit par restriction une forme linéaire continue sur $\mathcal{D}(\{M'_p\})$, donc un élément $\bar{S} \in \mathcal{D}'(\{M'_p\})$ et $\bar{S}$ détermine complètement S, car $\mathcal{D}(\{M'_p\})$ est dense dans $\mathcal{D}(\{M_p\})$.

LEMME 4. — *Soient $\{M_p\}$ et $\{M'_p\}$ deux suites logarithmiquement convexes; la suite $\{Q_p\}$ définie par*

$$Q_p = \inf_{r \leq p} M'_{p-r} M_r \tag{1.2.14}$$

est aussi logarithmiquement convexe. On a $\{Q_p\} \in \mathfrak{M}$ si et seulement si $\{M_p\} \in \mathfrak{M}$ et $\{M'_p\} \in \mathfrak{M}$.

Posons

$$m_p = \frac{M_p}{M_{p-1}} \qquad \text{et} \qquad m'_p = \frac{M'_p}{M'_{p-1}}.$$

Les suites $\{m_p\}$ et $\{m'_p\}$ sont non décroissantes et l'on a

$$Q_p = Q_0 \inf_{r \leq p} m_1,\, m_2 \ldots m_r\, m'_1 m'_2 \ldots m'_{p-r},$$

ce qui montre que $\frac{Q_p}{Q_0}$ est le plus petit produit de p facteurs différents formés avec les nombres $m_1, m_2, \ldots, m'_1, m'_2, \ldots$; on déduit de là que la suite $\frac{Q_p}{Q_{p-1}}$ s'obtient en rangeant par ordre de grandeur croissante l'ensemble des nombres $m_1, m_2, \ldots, m'_1, m'_2, \ldots$. La suite Q_p est donc bien logarithmiquement convexe et l'on a

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{q_p} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{m_p} + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{m'_p},$$

ce qui permet de conclure.

THÉORÈME 2. — *L'ensemble $\bigcup_{\{M_p\} \in \mathfrak{M}} \mathcal{D}'(\{M_p\})$ est un espace vectoriel sur le corps des nombres complexes.*

En effet, soient $\{M_p\} \in \mathfrak{M}$ et $\{M'_p\} \in \mathfrak{M}$. Considérons la suite $\{Q_p\}$ définie par (1.2.14). On a

$$Q_p \leq M_0 M'_p \qquad \text{et} \qquad Q_p \leq M'_0 M_p,$$

donc $\mathcal{D}'(\{Q_p\})$ contient à la fois $\mathcal{D}'(\{M_p\})$ et $\mathcal{D}'(\{M'_p\})$. Étant donné deux distributions généralisées

$$S \in \mathcal{D}'(\{M_p\}) \qquad \text{et} \qquad T \in \mathcal{D}'(\{M'_p\}),$$

on peut toujours définir leur somme $S+T$ comme un élément de $\mathcal{D}'(\{Q_p\})$.

LEMME 5. — *Soient $\{M_p\}_q$ une famille dénombrable de suites positives $\{M_p\}$ telle que, pour chaque q, $\{M_p\}_q \in \mathfrak{M}$. Il existe alors une suite $\{Q_p\} \in \mathfrak{M}$ telle que*

$$(Q_p)^{\frac{1}{p}} = O\left[(M_{p,q})^{\frac{1}{p}}\right] \quad \text{pour tout } q.$$

Posons

$$m_{pq} = \frac{M_{p,q}}{M_{p-1,q}}; \qquad \sigma_q = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{m_{pq}}; \qquad m'_{pq} = q^2 \sigma_q m_{pq}.$$

Considérons la suite $\{q_p\}$ obtenue en rangeant par ordre de grandeur croissante les nombres m'_{pq} et posons

$$Q_0 = 1, \qquad Q_p = q_1, q_2 \ldots q_p.$$

On a

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{q_p} = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q^2 \sigma_q m_{pq}} = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q^2} < +\infty.$$

On a donc $\{Q_p\} \in \mathfrak{M}$ et, de plus,

$$q_p \leqq q^2 \sigma_q m_{pq}, \qquad \text{d'où} \qquad Q_p \leqq M_{0,q} (q^2 \sigma_q)^p M_{p,q},$$

ce qui achève la démonstration.

THÉORÈME 3. — *Pour que la série de la formule (1.2.12) où les μ_p sont des mesures données, converge dans un $\mathcal{D}'(\{M_p\})$, il faut et il suffit qu'on ait*

$$(1.2.14) \qquad \sum_{p=0}^{\infty} (C_{I,p})^{\frac{1}{p}} < +\infty \quad \textit{pour tout intervalle } I,$$

$\{C_{I,p}\}$ désignant la plus petite suite logarithmiquement concave majorant $\int_I |d\mu_p|$.

La condition est nécessaire; en effet, la suite $\frac{1}{h^p M_p}$ étant logarithmiquement concave, on a, d'après (1.1.11),

$$(1.2.15) \qquad C_{I,p} = O\left(\frac{1}{h^p M_p}\right)$$

et (1.2.14) découle alors de ce que $M_p \in \mathfrak{M}$.

La condition est suffisante : en effet, soit I_k le segment $(-k, +k)$ il existe d'après le lemme 5 une suite $\{Q_p\}$ telle que

$$(Q_p)^{\frac{1}{p}} = O\left[(C_{I_k,h})^{-\frac{1}{p}}\right] \quad \text{pour tout } k.$$

On peut alors trouver une suite $\{R_p\} \in \mathfrak{M}$ telle que

$$\lim_{p\to\infty} \frac{h^p R_p}{Q_p} = 0 \quad \text{pour tout } h$$

(lemme 1, § 1, chap. II).

On a alors $\lim\limits_{p\to\infty} C_{I_k} M_p = 0$ quels que soient h et k, ce qui entraine

$$\int_I |d\mu_p| = O\left(\frac{1}{h^p M_p}\right) \qquad (p\to\infty)$$

quels que soient l'intervalle I et la constante h. Le théorème 1 permet alors de conclure.

Théorème 4. — *Soit* $S \in \mathcal{D}'(\{M_p\})$. *Il existe* S_+ *et* S_- *appartenant aussi à* $\mathcal{D}'(M_p\})$ *et vérifiant*

$$S = S_+ + S_-; \qquad S_+ = 0 \quad \textit{pour } x < 0; \qquad S_- = 0 \quad \textit{pour } x > 0.$$

Soit d'abord une mesure μ, dérivée d'une fonction à variation bornée $f(x)$. Posons

$$\begin{array}{lll} \text{pour } x < 0: & f_+(x) = 0; & f_-(x) = f(x); \\ \text{pour } x > 0: & f_+(x) = f(x) - f(-0); & f_-(x) = f(-0) \end{array}$$

et désignons par μ_+ et μ_- les mesures qui sont les dérivées de $f_+(x)$ et $f_-(x)$.

On a évidemment

$$\mu = \mu_+ + \mu_-; \qquad \mu_+ = 0 \quad \text{pour } x < 0; \qquad \mu_- = 0 \quad \text{pour } x > 0;$$

de plus,

$$\int_I |d\mu| = \int_I |d\mu_+| + \int_I |d\mu_-|,$$

car la variation totale de $f(x)$ est la somme des variations totales de $f_+(x)$ et $f_-(x)$. On passe de là au cas d'une distribution généralisée en utilisant le théorème 1.

Proposition 10. — *Lorsque la suite* $\{M_p\}$ *vérifie la condition*

$$(M_{p+1})^{\frac{1}{p}} = O\left[(M_p)^{\frac{1}{p}}\right], \tag{1.2.16}$$

les classes $\mathcal{D}(\{M_p\})$ *et* $\mathcal{D}'(\{M_p\})$ *sont dérivables* [*c'est-à-dire que* $f(x) \in \mathcal{D}(\{M_p\})$ *entraîne* $f'(x) \in \mathcal{D}(\{M_p\})$ *et* $S \in \mathcal{D}'(\{M_p\})$ *entraîne* $S' \in \mathcal{D}'(\{M_p\})$]; *conséquence immédiate des propositions* 7 *et* 8.

La relation (1.2.16) sera appelée condition de dérivabilité.

3. Multiplication et convolution dans les $\mathcal{D}'(\{M_p\})$.

Les distributions généralisées a support compact. — Soit $\mathcal{E}$ l'espace vectoriel sur le corps des nombres complexes des fonctions à valeurs complexes définies et indéfiniment dérivables sur la droite, à supports quelconques. A toute suite $\{M_p\} \in \mathfrak{M}$, on associe le sous-espace $\mathcal{E}(\{M_p\})$ de $\mathcal{E}$ formé des fonctions $f(x) \in \mathcal{E}$ vérifiant, sur chaque segment I, des inégalités telles que (1.2.1), les constantes A, h pouvant dépendre de la fonction $f(x)$ et aussi du segment I. Le segment I et la constante h étant donnés, soit $\mathcal{E}(\{M_p\}, \mathrm{I}, h)$ le sous-espace de $\mathcal{E}$ vérifiant les conditions :

$$\text{il existe A tel que} \quad \sup_{x \in \mathrm{I}} |f^{(p)}(x)| \leqq \mathrm{A} h^p \mathrm{M}_p \qquad (p = 0, 1, 2, \ldots),$$

$\mathcal{E}(\{M_p\}, \mathrm{I}, h)$ est muni de la topologie naturelle définie par la semi-norme

$$\sup_{p \geqq 0} \left[\frac{1}{h^p \mathrm{M}_p} \sup_{x \in \mathrm{I}} |f^{(p)}(x)| \right].$$

On désigne par $\mathcal{E}(\{M_p\}, \mathrm{I})$ la limite inductive des $\mathcal{E}(\{M_p\}, \mathrm{I}, h)$ lorsque h varie. L'espace $\mathcal{E}(\{M_p\})$ est l'intersection des $\mathcal{E}(\{M_p\}, \mathrm{I})$ et sa topologie sera la limite projective de celles des $\mathcal{E}(\{M_p\}, \mathrm{I})$. On dira que des f_j convergent vers zéro (resp. forment un ensemble borné) dans $\mathcal{E}(\{M_p\})$ si et seulement si elles convergent vers zéro (resp. forment un ensemble borné) dans chaque $\mathcal{E}(\{M_p\}, \mathrm{I})$. En particulier, si des $f_j(x) \in \mathcal{D}(\{M_p\})$ ont leurs supports qui s'éloignent à l'infini, elles convergent vers zéro dans $\mathcal{E}(\{M_p\})$.

Proposition 1. — *L'opération qui fait correspondre au couple*

$$f(x), \quad \alpha(x); \quad (f \in \mathcal{E}(\{M_p\}), \quad \alpha \in \mathcal{D}(\{M_p\}))$$

le produit $f(x)\,\alpha(x)$ est une application bilinéaire hypocontinue de $\mathcal{E}(\{M_p\}) \times \mathcal{D}(\{M_p\})$ dans $\mathcal{D}(\{M_p\})$.

Soit I un voisinage compact du support de $\alpha(x)$; on établit, comme le lemme 1 du paragraphe 2, que les inégalités

$$|f^{(p)}| \leqq \mathrm{A} h^p \mathrm{M}_p, \qquad |\alpha^{(p)}| \leqq \mathrm{B} k^p \mathrm{M}_p,$$

valables sur I, entraînent

$$|(f\alpha)^{(p)}| \leqq \mathrm{A B M}_0 (h + k)^p \mathrm{M}_p \quad \text{sur I},$$

ce qui prouve d'abord que $f\alpha \in \mathcal{D}(\{M_p\})$. Ensuite, si f converge vers zéro dans $\mathcal{E}(\{M_p\}, \mathrm{I}, h)$, α parcourant un ensemble borné dans $\mathcal{D}(\{M_p\})$, on peut supposer I, B, h, k fixes, et que A tend vers zéro; l'inégalité ci-dessus montre alors que $f\alpha$ converge uniformément vers zéro dans $\mathcal{D}(\{M_p\}, \mathrm{I}, h + k)$, donc dans $\mathcal{D}(\{M_p\})$. Ainsi, l'application $f \to \alpha f$ de $\mathcal{E}(\{M_p\}, \mathrm{I}, h)$ dans $\mathcal{D}(\{M_p\})$ est continue quel que soit h, ce qui entraîne que l'application $f \to f\alpha$ de $\mathcal{E}(\{M_p\}, I)$ dans $\mathcal{D}(\{M_p\})$ est continue, et par suite l'application $f \to f\alpha$ de $\mathcal{E}(\{M_p\})$ dans $\mathcal{D}(\{M_p\})$. On établirait de façon analogue que l'application $\alpha \to f\alpha$ de $\mathcal{D}(\{M_p\})$ dans $\mathcal{D}(\{M_p\})$ est continue, ce qui achève la démonstration.

Proposition 2. — *$\mathcal{D}(\{M_p\})$ est dense dans $\mathcal{E}(\{M_p\})$.*

Soit $f(x) \in \mathcal{E}(\{M_p\})$. Posons $\alpha_n(x) \in \mathcal{D}(\{M_p\})$ vérifiant $\alpha_n(x) = 1$ pour $|x| \leq n$; les fonctions $f(x) = f(x)\,\alpha_n(x)$ sont dans $\mathcal{D}(\{M_p)$ et convergent vers $f(x)$ dans $\mathcal{E}(\{M_p\})$ lorsque n tend vers l'infini, puisque $f_n(x) = f(x)$ sur tout segment fixé dès que n est assez grand.

L'espace $\mathcal{E}'(\{M_p\})$ des distributions généralisées a support compact. — On désigne par $\mathcal{E}'(\{M_p\})$ le dual de $\mathcal{E}(\{M_p\})$. Soit $S \in \mathcal{E}'(\{M_p\})$; S définit par restriction une forme linéaire continue $\overline{S}$ sur $\mathcal{D}(\{M_p\})$ et $\overline{S}$ détermine S puisque $\mathcal{D}(\{M_p\})$ est dense dans $\mathcal{E}(\{M_p\})$. Cette distribution généralisée $\overline{S}$ est à support compact, car les nombres $S(f_j)$ doivent tendre vers zéro pour toute suite de fonctions $f_j \in \mathcal{D}(\{M_p\})$ dont les supports s'éloignent indéfiniment (même raisonnement que dans [21], I, p. 89).

Réciproquement, soient $S \in \mathcal{D}'(\{M_p\})$ et à support compact : $g(x) \in \mathcal{D}(\{M_p\})$, égale à 1 sur un voisinage compact K du support de S; quelle que soit $f \in \mathcal{E}(\{M_p\})$ le produit $f(x)\,g(x)$ est dans $\mathcal{D}(\{M_p\})$ et égal à $f(x)$ sur K. Le produit scalaire $S(fg)$ ne dépend pas de g, ce qui permet de prendre sa valeur comme définition de $S(f)$. De plus, lorsque $f(x)$ converge vers zéro dans $\mathcal{E}(\{M_p\})$, $g(x)$ restant fixe, fg converge vers zéro dans $\mathcal{D}(\{M_p\})$ d'après la proposition 1; on peut donc assimiler S à un élément de $\mathcal{E}(\{M_p\})$.

On dira que des distributions généralisées convergent vers zéro (resp. forment un ensemble borné) dans $\mathcal{E}'(\{M_p\})$ si et seulement si leurs supports sont contenus dans un segment fixe et si elles convergent vers zéro (resp. forment un ensemble borné) dans $\mathcal{D}'(\{M_p\})$.

Théorème 5. — *Toute distribution généralisée à support compact $S \in \mathcal{E}'(\{M_p\})$ est égale à une série convergente dans $\mathcal{E}'(\{M_p\})$ de la forme*

$$S = \sum_{p=0}^{\infty} D^p \mu_p, \tag{1.3.1}$$

où les μ_p sont des mesures de supports contenus dans un voisinage arbitraire du support de S et vérifiant

$$\sum_{p=0}^{\infty} h^p M_p \int_{-\infty}^{+\infty} |d\mu_p| < +\infty \quad \textit{pour tout } h. \tag{1.3.2}$$

D'après le théorème 1, on a

$$S = \sum_{p=0}^{\infty} D^p \mu_p,$$

les μ_p étant des mesures de supports quelconques; Ω étant un voisinage du support de S, soit $\alpha(x) \in \mathcal{D}(\{M_p\})$, de support contenu dans Ω et égale à 1 sur un voisinage compact du support de S. Pour toute $f \in \mathcal{E}(\{M_p\})$, on a

$$S(f) = S(\alpha f) = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \int_{-\infty}^{+\infty} (\alpha f)^{(p)} d\mu_p = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \int_{-\infty}^{+\infty} f^{(p)} d\mu'_p,$$

où les μ'_p sont des mesures de supports contenus dans Ω définies par

$$\mu'_p = \sum_{q=0}^{\infty} (-1)^q C_{p+q}^q \alpha^{(q)} \mu_{p+q}.$$

Il existe des constantes A, h_1 telles que

$$|\alpha^{(p)}| \leqq A (h_1)^p M_p, \qquad \text{d'où} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} |d\mu'_p| \leqq A \sum_{q=0}^{\infty} C_{p+q}^q (h_1)^q M_q \int_\Omega |d\mu_{p+q}|,$$

et, en utilisant la relation

$$M_p M_q \leqq M_0 M_{p+q}$$

qui découle de (1.2.2), on a, quel que soit h,

$$\sum_{p=0}^{\infty} h^p M_p \int_{-\infty}^{+\infty} |d\mu'_p| \leqq A \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} C_{p+q}^q (h_1)^q h^p M_p M_q \int_\Omega |d\mu_{p+q}|$$
$$\leqq A M_0 \sum_{p=0}^{\infty} (h + h_1)^p M_p \int_\Omega |d\mu_p|,$$

ce qui permet de conclure.

Remarque. — Il n'est pas possible d'améliorer le théorème 5 en remplaçant dans son énoncé l'expression « dans un voisinage arbitraire du support de S » par « dans le segment support de S ». Voir la remarque qui suit le théorème 4 du chapitre III.

Produit multiplicatif. — La proposition 2 permet de justifier l'énoncé suivant :

Définition et proposition 3. — *Soient* $S \in \mathcal{D}'(\{M_p\})$ *et* $f \in \mathcal{E}(\{M_p\})$. *Le produit* Sf *est une distribution généralisée* $\in \mathcal{D}'(\{M_p\})$ *définie par la formule*

$$S f(\alpha) = S(f\alpha) \quad \textit{pour toute } \alpha \in \mathcal{D}(\{M_p\}), \tag{1.3.3}$$

l'opération qui fait correspondre au couple S, f, *le produit* Sf, *est une application bilinéaire hypocontinue de* $\mathcal{D}'(\{M_p\}) \times \mathcal{D}(\{M_p\})$ *dans* $\mathcal{D}'(\{M_p\})$.

Régularisation. — On utilisera maintenant la notation $S(x)$ indiquant la variable x dont dépend une distribution généralisée et la notation $\int S(x) f(x)\, dx$ pour le produit scalaire.

Définition et proposition 4. — *Soient* $S \in \mathcal{D}'(\{M_p\})$ *et* $f \in \mathcal{D}(\{M_p\})$ [*resp.* $S \in \mathcal{E}'(\{M_p\})$ *et* $f \in \mathcal{E}(\{M_p\})$]. *La formule*

$$S \star f = \int S(\xi) f(x-\xi)\, d\xi \tag{1.3.4}$$

définit une fonction continue $S \star f$ *appelée régularisée de* S *par* f. *L'opération qui fait correspondre au couple* S, f *la régularisée* $S \star f$ *est une application bilinéaire hypocontinue de*

$$\mathcal{D}'(\{M_p\}) \times \mathcal{D}(\{M_p\}) \quad [\textit{resp. } \mathcal{E}'(\{M_p\}) \times \mathcal{E}(\{M_p\})]$$

dans l'espace C *des fonctions continues muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact.*

Faisons la démonstration pour

$$S \in \mathcal{D}'(\{M_p\}) \qquad \text{et} \qquad f \in \mathcal{D}(\{M_p\});$$

en utilisant le théorème 1, on peut écrire, les μ_p désignant des mesures

$$S \star f = \sum_{p=0}^{\infty} \int f^{(p)}(x-\xi)\, d\mu(\xi);$$

x variant sur un segment J, la fonction $f(x-\xi)$ de la variable ξ parcourt un ensemble borné dans $\mathcal{D}(\{M_p\})$; alors, la série prédédente est uniformément convergente et, puisque chaque terme $\int f^{(p)}(x-\xi)\, d\mu(\xi)$ est une fonction continue, la somme $S \star f$ est continue. De plus, si $f \in \mathcal{D}(\{M_p\}, I, h)$, on a la relation

$$|S \star f| \leq \|S\|_{I+J,h} \cdot \|f\|,$$

ce qui permet de conclure.

Proposition 5. — *Si la classe* $\mathcal{D}(\{M_p\})$ *est dérivable* [*vérifie* (1.2.15)] *le produit de convolution est une application bilinéaire hypocontinue de* $\mathcal{D}'(\{M_p\}) \times \mathcal{D}(\{M_p\})$ *dans* $\mathcal{E}$ [*resp. de* $\mathcal{E}'(\{M_p\}) \times \mathcal{E}(\{M_p\})$ *dans* $\mathcal{E}$].

En effet, dans ce cas, la somme

$$\sum_{p=0}^{\infty} \int f^{(p)}(x-\xi)\, d\mu_p(\xi)$$

peut être dérivée terme à terme indéfiniment.

Proposition 6. — *La régularisation est une application bilinéaire hypocontinue de* $\mathcal{D}'(\{M_p\}) \times \mathcal{D}(\{Q_p\})$ *dans* $\mathcal{E}(\{M'_p\})$ [*resp. de* $\mathcal{E}'(\{M_p\}) \times \mathcal{E}(\{Q_p\})$ *dans* $\mathcal{E}(\{M'_p\})$]*; on a posé*

$$Q_p = \inf_{q \leq p} M_q M'_{p-q}.$$

En effet, on a dans ce cas

$$(S \star f)^{(p)} = \sum_{q=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f^{(p+q)}(x-\xi)\, d\mu_q(\xi),$$

d'où les inégalités

$$|(S\star f)^{(p)}| \leq A \sum_{p=0}^{\infty} h^{p+q} Q_{p+q} \int_{\Omega} |d\mu_q| \leq A h^p M'_p \sum_{q=0}^{\infty} h^q M_q \int_{\Omega} |d\mu_q|,$$

où Ω est un voisinage de support de f; cela permet de conclure.

Convolution. — La proposition 6 permet de justifier l'énoncé suivant :

Définition et proposition 7. — *Soient* $S \in \mathcal{D}'(\{M_p\})$ *et* $T \in \mathcal{E}'(\{M'_p\})$ [*resp.* $S \in \mathcal{E}'(\{M_p\})$ *et* $T \in \mathcal{E}'(\{M'_p\})$]. *La formule*

$$(1.3.5) \quad \int (S\star T) f(x)\, dx = \int S(\check{T}\star f)\, dx; \qquad f \in \mathcal{D}(\{M_p\}) \qquad [resp.\ f \in \mathcal{E}(\{M_p\})],$$

où $\check{T}$ *désigne la distribution généralisée déduite de* T *par symétrie par rapport à l'origine et* $Q_p = \inf_{q \leq p} M_q M'_{p-q}$ *définit une distribution généralisée* $S \star T \in \mathcal{D}'(\{Q_p\})$ *appelée produit de convolution de* S *et* T.

L'opération qui fait correspondre au couple S, T *le produit de convolution* $S \star T$ *est une application bilinéaire hypocontinue de* $\mathcal{D}'(\{M_p\}) \times \mathcal{E}'(\{M'_p\})$ *dans* $\mathcal{D}'(\{Q_p\})$ [*resp. de* $\mathcal{E}'(\{M_p\}) \times \mathcal{E}'(\{M'_p\})$ *dans* $\mathcal{E}'(\{Q_p\})$].

Remarques. — *a*. D'après le lemme 3 du paragraphe 2, le produit de convolution de deux distributions généralisées appartenant à $\bigcup_{\{M_p\} \in \mathfrak{M}} \mathcal{D}'(\{M_p\})$ dont l'une est à support compact, est toujours défini.

b. Lorsque S et T sont données par des séries

$$S = \sum_{p=0}^{\infty} D^p \mu_p, \qquad T = \sum_{p=0}^{\infty} D^p \mu'_p$$

le produit de convolution est donné par

$$S\star T = \sum_{p=0}^{\infty} D^p \mu''_p, \qquad \text{avec} \quad \mu''_p = \sum_{q=0}^{p} \mu_q \star \mu'_{p-q}.$$

Pour le prouver, il suffit de montrer que la série double

$$\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} \mathrm{D}^{(p+q)}(\mu_p \star \mu'_q)$$

est convergente dans $\mathcal{D}'(\{Q_p\})$, c'est-à-dire que la série numérique

$$\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} \int (\mu_p \star \mu'_q) f^{(p+q)}(x)\, dx$$

est absolument et uniformément convergente lorsque f parcourt un ensemble borné dans $\mathcal{D}(\{Q_p\})$. Supposons, par exemple, que S soit à support compact. Soit I un voisinage du support de S. On peut supposer que les mesures μ_p ont leurs supports contenus dans I. On a, pour tout segment J,

$$\int_{\mathrm{J}} |d(\mu_p \star \mu'_q)| \leqq \int_{\mathrm{I}} |d\mu_p| \times \int_{\mathrm{I}-\mathrm{J}} |d\mu'_q|;$$

on en déduit, si $|f^{(p)}| \leqq \mathrm{A}h^p \mathrm{Q}_p$,

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} \int f^{(p+q)}(x)\, d(\mu_p \star \mu'_q)\right| \\
&\quad \leqq \mathrm{A}\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} h^{p+q} \mathrm{Q}_{p+q} \int_{\mathrm{I}} |d\mu_p| \int_{\mathrm{I}-\mathrm{J}} |d\mu'_q| \\
&\quad \leqq \mathrm{A}\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} h^{p+q} \mathrm{M}_p \mathrm{M}'_q \int_{\mathrm{I}} |d\mu_p| \int_{\mathrm{I}-\mathrm{J}} |d\mu'_q| \\
&\quad = \mathrm{A}\left(\sum h^p \mathrm{M}_p \int_{\mathrm{I}} |d\mu_p|\right)\left(\sum h^q \mathrm{M}'_q \int_{\mathrm{I}-\mathrm{J}} |d\mu'_q|\right),
\end{aligned}$$

ce qui établit la propriété annoncée.

Propriétés du produit de convolution. — La remarque précédente permet d'étendre facilement au produit de convolution de deux distributions généralisées les propriétés classiques du produit de convolution de deux distributions ordinaires; en particulier

$\mathrm{S} \star \mathrm{T} = \mathrm{T} \star \mathrm{S}$.

δ étant la mesure de Dirac, $\mathrm{S} \star \delta = \mathrm{S}$.

La dérivée de $\mathrm{S} \star \mathrm{T}$ *est* $\mathrm{S}' \star \mathrm{T}$ *ou* $\mathrm{S} \star \mathrm{T}'$.

Le support de $\mathrm{S} \star \mathrm{T}$ *est contenu dans la somme des supports de* S *et* T. *La valeur de* $\mathrm{S} \star \mathrm{T}$ *dans un ouvert* Ω *ne dépend que des valeurs de* T *dans* Ω-I, *si* I *est le support de* S.

On peut définir le produit de convolution d'un nombre quelconque de distributions généralisées appartenant à $\bigcup_{\{M_p\}\in\mathfrak{M}} \mathcal{D}'(M_p)$ qui sont toutes, sauf une au plus, à support compact. Ce produit est associatif et commutatif. Voici maintenant, comme application de la régularisation, un théorème d'approximation.

THÉORÈME 6. — *Quelles que soient les suites* $\{M_p\}\in\mathfrak{M}$ *et* $\{M'_p\}\in\mathfrak{M}$, *l'espace* $\mathcal{D}(\{M'_p\})$ *est dense dans* $\mathcal{D}'(\{M_p\})$.

On a déjà vu que $\mathcal{D}(\{M'_p\})$ est dense dans $\mathcal{E}(\{M'_p\})$. Il suffit de montrer que $\mathcal{E}(\{M'_p\})$ est dense dans $\mathcal{D}'(\{M_p\})$. Soit

$$\rho_\varepsilon(x)\in\mathcal{D}(\{Q_p\}) \qquad (Q_p=\inf_{q\leq p} M_q M'_{p-q})$$

la fonction définie dans la proposition 2 du paragraphe 2. Soit alors $S\in\mathcal{D}'(\{M_p\})$. Les régularisées $S\star\rho_\varepsilon(x)$ sont dans $\mathcal{E}(\{M'_p\})$; lorsque ε tend vers zéro, $\rho_\varepsilon(x)$ converge vers la mesure de Dirac δ dans l'espace $\mathcal{E}'(\{+\infty\})$ des mesures à support compact; ($\{+\infty\}$ désigne la suite $M_0=1$, $M_p=+\infty$ pour $p>0$) et $S\star\rho_\varepsilon(x)$ converge vers S dans $\mathcal{D}'(\{M_p\})$.

L'ESPACE $\mathcal{D}'_+(\{M_p\})$ DES DISTRIBUTIONS GÉNÉRALISÉES A SUPPORT LIMITÉ A GAUCHE. — On peut définir le produit de convolution dans d'autres cas que ceux que nous venons d'étudier. En particulier, soit $\mathcal{D}_-(\{M_p\})$ [resp. $\mathcal{D}_+(\{M_p\})$] le sous-espace de $\mathcal{E}(\{M_p\})$ formé des fonctions $\in\mathcal{E}(\{M_p\})$ à support limité à droite (resp. à gauche). Le dual de $\mathcal{D}_-(\{M_p\})$ [resp. $\mathcal{D}_+(\{M_p\})$] est le sous-espace $\mathcal{D}'_+(\{M_p\})$ [resp. $\mathcal{D}'_-(\{M_p\})$] formé des distributions généralisées à support limité à gauche (resp. à droite).

On peut définir le produit de convolution $S\star T$, avec

$$S\in\mathcal{D}'_+(\{M_p\}) \qquad T\in\mathcal{D}'_+(\{M'_p\}).$$

On a

$$S\star T\in\mathcal{D}'_+(\{Q_p\}), \qquad \text{avec} \quad Q_p=\inf_{q\leq p} M_q M'_{p-q}.$$

THÉORÈME 7. — *L'algèbre de convolution des distributions généralisées* $S\in\bigcup_{\{M_p\}\in\mathfrak{M}} \mathcal{D}'_+(\{M_p\})$ *n'a pas de diviseurs de zéro.*

La démonstration est analogue à celle relative aux distributions ordinaires (21, II, p. 29).

CHAPITRE II.

DISTRIBUTIONS GÉNÉRALISÉES CONSTRUITES SUR CERTAINES CLASSES DE FONCTIONS ANALYTIQUES.

Les espaces fondamentaux étudiés dans ce chapitre ont été déjà considérés par MM. Gelfand et Silov. Ces auteurs ont surtout étudié ceux obtenus avec des suites de la forme $M_p = p^{\alpha p}$ et $N_p = p^{\beta p}$ (α et β constantes). Dans notre travail, nous avons considéré plus particulièrement des espaces $\mathfrak{S}(\{p!\}, \{N_p\})$ formés de fonctions holomorphes dans une bande, nulles à l'infini. Les distributions généralisées construites sur $\mathfrak{S}(\{p!\}, \{N_p\})$ apparaissent comme valeurs limites de fonctions holomorphes dans un demi-plan, ce qui permet de définir leur support.

L'idée d'utiliser un espace fondamental de fonctions analytiques pour généraliser la notion de distribution a été développée par M. Köthe [19]. Mais cet auteur s'est limité au cas des fonctions analytiques sur une courbe fermée. L'extension à la droite pose des problèmes nouveaux.

L'espace $\mathfrak{S}(\{p!\}, \{N_p\})$ ne contient pas de fonctions trop rapidement décroissantes; à cause de cela, son dual $\mathfrak{S}'(\{p!\}, \{N_p\})$ ne contient pas de distributions généralisées très rapidement croissantes. Nous indiquons une méthode qui semble permettre de définir des distributions généralisées ayant une croissance arbitrairement grande comme valeurs limites de fonctions holomorphes dans un demi-plan.

1. Quelques propriétés de certaines suites et de fonctions associées.

Les propriétés rappelées au début de ce paragraphe se trouvent dans (21, chap. I).

Soit $\{M_p\}$ une suite positive logarithmiquement convexe ($p = 0, 1, 2, \ldots$); on appellera fonction associée à cette suite la fonction

$$M(r) = \sup_{p \geq 0}\left(p \operatorname{Log} r - \operatorname{Log}\frac{M_p}{M_0}\right). \tag{2.1.1}$$

Cette fonction $M(r)$ est non décroissante et nulle pour $r \leq \frac{M_1}{M_0}$. Soit $m(r)$ le nombre des rapports $\frac{M_p}{M_{p-1}} = m_p$ dont la valeur n'excède pas r. On appelle $m(r)$ la fonction de distribution de la suite $\{m_p\}$; on a

$$\begin{aligned} M(r) &= \sup_{p \geq 0} \sum_{q=1}^{p}\left(\operatorname{Log} r - \operatorname{Log}\frac{M_p}{M_{p-1}}\right) \\ &= \sum_{m_q \leq r} \operatorname{Log}\frac{r}{m_q} = \int_0^r \operatorname{Log}\frac{r}{\lambda}\, dm(\lambda) = \int_0^r \frac{m(\lambda)}{\lambda}\, d\lambda, \end{aligned}$$

$$m(r) = r\frac{dM}{dr} = \frac{dM(r)}{d(\operatorname{Log} r)}.$$

Cela montre que $M(e^\sigma)$ est une fonction convexe. On a les inégalités

$$m\left(\frac{r}{e}\right) \leq M(r) \leq m(r) \operatorname{Log}\frac{r}{m_1}. \tag{2.1.2}$$

Réciproquement, toute fonction $M(r)$ nulle pour $r \leqq r_1$, telle que

$$m(r) = \frac{dM(r)}{d(\operatorname{Log} r)}$$

soit non négative, non décroissante et à valeurs entières, est associée à une suite $\{M_p\}$ définie par

$$\operatorname{Log} M_p = \sup_{r>0}(p \operatorname{Log} r - M(r)) \qquad (p = 0, 1, 2, \ldots). \tag{2.1.3}$$

Lorsque $M_p = +\infty$ pour $p > p_0$, on a

$$M(r) = p_0 \operatorname{Log} r + o(1) \qquad (r \to \infty). \tag{2.1.4}$$

La condition « $M_p < +\infty$ *pour tout* p » équivaut à

$$\lim_{r \to \infty} \frac{M(r)}{\operatorname{Log} r} = +\infty \qquad \text{ou à} \qquad \lim_{r \to \infty} m(r) = +\infty. \tag{2.1.5}$$

La condition de non quasi-analyticité (1.2.3) équivaut à chacune des conditions suivantes qui sont équivalentes :

$$\int^{\infty} \frac{M(r)}{r} dr < +\infty\,; \qquad \int^{\infty} \frac{m(r)}{r} dr < +\infty. \tag{2.1.6}$$

Les conditions équivalentes

$$\lim_{r \to \infty} \frac{M(r)}{r} = 0; \qquad \lim_{r \to \infty} \frac{m(r)}{r} = 0; \qquad \lim_{p \to \infty} \frac{1}{p} \frac{M_p}{M_{p-1}} = +\infty. \tag{2.1.7}$$

sont des conséquences de la condition de non quasi-analyticité.

La condition de dérivabilité (1.2.16) équivaut à

$$\varliminf_{r \to \infty} \frac{m(r)}{\operatorname{Log} r} > 0. \tag{2.1.8}$$

Soient deux suites $\{M_p\}$, $\{M'_p\}$ positives logarithmiquement convexes, $M(r)$ et $M'(r)$ leurs fonctions associées; la fonction associée à la suite $Q_p = \inf_{q \leq p} M_{p-q} M'_q$ est $Q(r) = M(r) + M'(r)$; en effet, on a vu p. 55 que la suite $q_p = \dfrac{Q_p}{Q_{p-1}}$ s'obtient en rangeant par ordre de grandeur croissante les nombres m_p, m'_p; $r\dfrac{dQ}{dr}$ est le nombre des m_p, m'_p dont la valeur ne dépasse pas r, c'est-à-dire $r\dfrac{dM}{dr} + r\dfrac{dM'}{dr}$.

LEMME 1. — *Soit* $S_p \in \mathfrak{M}$, *il existe une suite* $\{M_p\} \in \mathfrak{M}$ *vérifiant*

$$\lim_{p \to \infty} \frac{M_p}{M_{p-1}} \frac{S_{p-1}}{S_p} = 0; \qquad \lim_{p \to \infty} \frac{h^p M_p}{S_p} = 0 \quad \textit{quel que soit } h. \tag{2.1.9}$$

Ce lemme équivaut à la propriété suivante des séries à termes positifs : Soit $m_p > 0$, non décroissant, vérifiant

$$\sum^{\infty} \frac{1}{m_p} < +\infty.$$

Il existe $m'_p > 0$, non décroissant vérifiant

$$\sum^{\infty} \frac{1}{m'_p} < +\infty; \qquad \lim_{p \to \infty} \frac{m'_p}{m_p} = 0.$$

Cela est connu [6], au moins si l'on supprime la condition « non décroissant ». On se ramène à ce dernier cas par la transformation d'Abel en posant

$$u_p = p\left(\frac{1}{m_p} - \frac{1}{m_{p+1}}\right); \qquad v_p = p\left(\frac{1}{m'_p} - \frac{1}{m'_{p+1}}\right).$$

Lemme 2. — *Soit* T(r) *une fonction non négative, non décroissante, vérifiant*

$$\int^{\infty} \frac{T(r)}{r^2}\, dr < +\infty.$$

Il existe une suite $\{M_p\} \in \mathfrak{M}$ *dont la fonction associée* M(r) *vérifie*

$$\lim_{r \to \infty} \left[M\left(\frac{r}{h}\right) - T(r) \right] = +\infty \quad \textit{quel que soit } h.$$

Grâce à (2.1.2), il suffit d'obtenir

$$\lim_{r \to \infty} \left[m\left(\frac{r}{h}\right) - T(r) \right] = +\infty \quad \text{pour tout } h.$$

On peut supposer T(r) à valeurs entières et nulle pour $r \leqq r_0 (r_0 > 0)$; c'est alors la fonction de distribution d'une suite $\{s_p\}$ et la condition à obtenir équivaut à

$$\lim_{p \to \infty} \frac{1}{s_p} \frac{M_p}{M_{p-1}} = 0;$$

il suffit alors d'appliquer le lemme 1.

Lemme 3. — *Si la suite* $\{M_p\}$ *vérifie la condition de dérivabilité* (1.2.16), *il existe une constante k vérifiant*

$$\int^{\infty} e^{M(r) - M(kr)}\, dr < +\infty. \tag{2.1.10}$$

En effet, d'après (2.1.8), il existe $a > 0$ tel que

$$\frac{dM(r)}{d(\mathrm{Log}\, r)} \geqq a\, \mathrm{Log}\, r.$$

On aura alors

$$M(kr) - M(r) \geqq a \operatorname{Log} k \operatorname{Log} r,$$

ce qui entraîne (2.1.10) si $a \operatorname{Log} k > 1$.

Lemme 4. — *Soit $\{a_p\}$ une suite positive vérifiant*

$$\overline{\lim_{p \to \infty}} \frac{1}{p} (a_p)^{\frac{1}{p}} = +\infty$$

Il existe une suite $\{M_p\} \in \mathfrak{M}$ telle que

$$\overline{\lim_{p \to \infty}} \frac{a_p}{h^p M_p} = +\infty \quad \text{quel que soit } h.$$

On peut se borner, grâce au lemme 1, à montrer l'existence d'une suite $\{S_p\} \in \mathfrak{M}$ vérifiant

$$\lim_{p \to \infty} \frac{S_p}{a_p} \leqq 1.$$

Pour cela, choisissons une suite d'entiers p_r vérifiant les conditions

$$p_0 = 0; \qquad p_{r+1} > p_r;$$

$$\frac{1}{p_r - p_{r-1}} \left(\frac{a_{p_r}}{a_{p_{r-1}}} \right)^{\frac{1}{p_r - p_{r-1}}} \geqq r^2 \qquad \left(\frac{a_{p_r}}{a_{p_{r-1}}} \right)^{\frac{1}{p_r - p_{r-1}}} \geqq \left(\frac{a_{p_{r-1}}}{a_{p_{r-2}}} \right)^{\frac{1}{p_{r-1} - p_{r-2}}}$$

On s'assure aisément que l'hypothèse rend ce choix possible. Posons alors

$$S_p = a_{p_{r-1}} \left(\frac{a^{p_r}}{a_{p_{r-1}}} \right)^{\frac{p - p_{r-1}}{p_r - p_{r-1}}} \qquad \text{pour} \quad p_{r-1} \leqq p \leqq p_r.$$

On a $S_{p_r} = a_{p_r}$ et, par conséquent,

$$\lim_{p \to \infty} \frac{S_p}{a_p} \leqq 1.$$

De plus,

$$\sum_{p=0}^{p_r} \frac{S_p}{S_{p+1}} = p_1 \left(\frac{a^{p_1}}{a_{p_0}} \right) + \ldots + (p_r - p_{r-1}) \left(\frac{a^{p_r}}{a_{p_{r-1}}} \right)^{\frac{-1}{p_r - p_{r-1}}} \leqq 1 + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{r^2},$$

d'où

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{S_p}{S_{p+1}} \leqq +\infty,$$

ce qui achève la démonstration.

Lemme 5. — *Soit $\{a_p\}$ une suite positive possédant la propriété : Quelle que soit la suite $\{M_p\} \in \mathfrak{M}$, il existe des constantes A, h vérifiant*

$$a_p \leqq A h^p M_p.$$

Il existe alors des constantes A, *h vérifiant*

$$a_p \leqq A h^p p\,!$$

En effet, la conclusion équivaut à

$$\overline{\lim_{p\to\infty}} \frac{1}{p}(a_p)^{\frac{1}{p}} < +\infty.$$

Si elle était fausse, il existerait, d'après le lemme 4, une suite $\{M_p\} \in \mathfrak{M}$ telle que

$$\overline{\lim_{p\to\infty}} \frac{a_p}{h^p M_p} = +\infty \quad \text{quel que soit } h,$$

ce qui contredit l'hypothèse.

Lemme 6. — *Si la suite* $\{N_p\}$, *positive, logarithmiquement convexe, vérifie*

$$\sum^{\infty} e^{-a n_p} < +\infty \qquad \left(n_p = \frac{N_p}{N_{p-1}}\right)$$

la fonction $\alpha(z)$ *définie par*

$$(2.1.11) \qquad \alpha(z) = \prod_{q=1}^{\infty} \left(1 + e^{a(z-n_q)}\right)^{-\frac{1}{a}} \left(1 + e^{a(-z-n_q)}\right)^{-\frac{1}{a}}$$

est holomorphe dans la bande $|y| \leqq \frac{\pi}{2a}$ *et il existe une constante* A *telle que*

$$|\alpha(z)| \leqq A\, e^{-N(|x|)} \qquad \left(|y| \leqq \frac{\pi}{2a}\right),$$

$N(r)$ *étant la fonction associée à la suite* $\{N_p\}$.

En effet, le produit infini $\prod_{q=1}^{\infty}(1 + e^{a(z-n_q)})$ définit une fonction entière dont les zéros sont les points

$$z_{qr} = n_q \pm (2r+1)\frac{i\pi}{a} \qquad (q = 1, 2, \ldots;\ r = 0, 1, \ldots).$$

Il en résulte que la formule (2.2.11) définit bien une fonction $\alpha(z)$ holomorphe dans $|y| \leqq \frac{\pi}{a}$ (on prend pour chaque facteur la détermination réelle pour z réel). De plus, pour $|y| \leqq \frac{\pi}{2a}$ on a

$$|1 + e^{a(z-n_q)}| \geqq 1 \qquad \text{et} \qquad |1 + e^{a(z-n_q)}| \geqq e^{a(x-n_q)}.$$

La fonction $\alpha(z)$ est paire; pour $x > 0$, par exemple, on aura

$$|\alpha(z)| \leqq e^{-\nu(x)},$$

avec

$$\nu(x) = \sup_{p\geqq 0} \sum_{q=1}^{p} (r - n_q) = \sum_{n_q \leqq r} (r - n_q) = \int_0^r (r - \lambda)\, dn(\lambda),$$

$n(\lambda)$ désignant la fonction de distribution de la suite n_p. On aura

$$\nu(r) = \int_0^r n(\lambda)\,d\lambda \geqq \int_1^r n(\lambda)\,d\lambda \geqq \int_1^r \frac{n(\lambda)}{\lambda}\,d\lambda = \mathrm{N}(r) - \int_0^1 \frac{n(\lambda)}{\lambda}\,d\lambda.$$

D'où le résultat.

2. Les espaces $\mathcal{S}_\alpha(\{\mathrm{M}_p\}, \{\mathrm{N}_p\})$.

Soient $\{\mathrm{M}_p\}$, $\{\mathrm{N}_p\}$ deux suites positives logarithmiquement convexes. On désigne par $\mathcal{S}_\alpha(\{\mathrm{M}_p\}, \{\mathrm{N}_p\})$ l'espace vectoriel des fonctions à valeurs complexes définies et indéfiniment dérivables sur la droite, possédant la propriété suivante :

Il existe des constantes A, h, k telles que

$$(2.2.1) \qquad \|x^q f^{(p)}(x)\|_\alpha \leqq \mathrm{A} h^p k^q \mathrm{M}_p \mathrm{N}_q \qquad (p = 0, 1, 2, \ldots;\ q = 0, 1, 2, \ldots),$$

où $\|f(x)\|_\alpha$ désigne la norme de la fonction $f(x)$ dans l'espace L^α des fonctions de puissance $\alpha^{\text{ième}}$ sommable sur la droite ($1 \leqq \alpha \leqq +\infty$).

La propriété précédente est équivalente à :

Il existe des constantes A, h, k telles que

$$(2.2.2) \qquad \left\| f^{(p)}(x)\, e^{\mathrm{N}\left(\frac{|x|}{k}\right)} \right\|_\alpha \leqq \mathrm{A} h^p \mathrm{M}_p \qquad (p = 0, 1, 2, \ldots),$$

où $\mathrm{N}(r)$ est la fonction associée à la suite $\{\mathrm{N}_p\}$.

En effet, d'après la définition de $\mathrm{N}(r)$, on a

$$|x|^q \leqq k^q \mathrm{N}_q\, e^{\mathrm{N}\left(\frac{|x|}{k}\right)}$$

et il est évident que (2.2.2) entraîne (2.2.1). Pour établir la réciproque, on déduit de (2.2.1), pour $\delta > 1$,

$$\left\| f^{(p)}(x) \sum_{q=0}^{\infty} \frac{|x|^q}{k^q \delta^q \mathrm{N}^q} \right\|_\alpha \leqq \mathrm{A} h^p \mathrm{M}_p \sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{\delta^q} = \frac{\mathrm{A}}{\delta - 1} h^p \mathrm{M}_p$$

et l'on remarque que

$$e^{\mathrm{N}\left(\frac{|x|}{\delta k}\right)} \leqq \sum_{q=0}^{\infty} \frac{|x|^q}{k^q \delta^q \mathrm{N}_q}.$$

Ce raisonnement vaut encore si $\mathrm{N}_q = 1$; on a alors $\mathrm{N}(r) = +\infty$ pour $r > 1$. On voit dans ce cas que $f(x)$ est à support compact.

La question se pose de connaître les conditions auxquelles doivent satisfaire les suites $\{\mathrm{M}_p\}$, $\{\mathrm{N}_p\}$ pour que l'espace $\mathcal{S}_\alpha(\{\mathrm{M}_p\}, \{\mathrm{N}_p\})$ contienne des fonctions non identiquement nulles. C'est un problème de quasi-analyticité qui semble difficile. M. Silov [23] a établi que si $\mathrm{M}_p = p^{\alpha p}$, $\mathrm{N}_p = p^{\beta p}$ (α, β, constantes) l'espace $\mathcal{S}_\infty(\{M_p\}, \{N_p\})$ contient des fonctions non nulles si et seulement si $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha + \beta \geq 1$.

D'autre part, si $N_p = a^p$ (a, constante),

$$\mathcal{S}_\infty(\{M_p\}, \{N_p\}) = \mathcal{D}(\{M_p\})$$

et l'on sait que, dans ce cas, la condition nécessaire et suffisante cherchée est

$$\sum^\infty (M_p)^{-\frac{1}{p}} < +\infty.$$

Si $M_p = a^p$, on peut se ramener au cas précédent par la transformation de Fourier et la condition nécessaire et suffisante cherchée est

$$\sum^\infty (N_p)^{-\frac{1}{p}} < +\infty.$$

La proposition 3 fera connaître une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathcal{S}_\alpha(\{p!\}, \{N_p\})$ contienne des fonctions non nulles.

Si la suite $\{M_p\}$ vérifie les conditions équivalentes

$$\underline{\lim}_{p\to\infty} \frac{1}{p} \frac{M_p}{M_{p-1}} > 0; \qquad \overline{\lim}_{r\to\infty} \frac{M(r)}{r} < +\infty, \tag{2.2.3}$$

on a

$$\mathcal{S}_\alpha(\{p!\}, \{N_p\}) \subset \mathcal{S}_\alpha(\{M_p\}, \{N_p\})$$

et la condition (2.2.8) est suffisante pour que $\mathcal{S}_\alpha(\{M_p\}, \{N_p\})$ contienne des fonctions non nulles. Dans toute la suite de ce travail, on supposera que la suite $\{M_p\}$ vérifie (2.2.3).

Le résultat suivant ne sera pas utilisé dans la suite, mais il est intéressant en lui-même. Il est à rapprocher d'un théorème de Th. Bang ([3], p. 78).

THÉORÈME 1. — *On a*

$$\mathcal{S}_\alpha(\{p!\}, \{N_p\}) = \bigcap_{\{M_p\}\in\mathfrak{M}} \mathcal{S}_\alpha(\{M_p\}, \{N_p\}).$$

Il suffit évidemment de montrer que le premier membre contient le second. Soit

$$f(x) \in \bigcap_{\{M_p\}\in\mathfrak{M}} \mathcal{S}_\alpha(\{M_p\}, \{N_p\}).$$

Quelle que soit $\{M_p\}$, il existe des constantes A, h, k telles que

$$\| x^q f^{(p)}(x) \|_\alpha \leq A h^p k^q M_p N_q.$$

On peut même supposer k indépendant de la suite $\{M_p\}$ envisagée, car on peut prendre pour k tout nombre supérieur à

$$\varlimsup_{q\to\infty}\left(\frac{1}{N_q}\| x^q f^{(p)}(x)\|_\alpha\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Il suffit alors d'appliquer le lemme 4 du paragraphe 1 à la suite

$$a_p=\sup_{q\geq 0}\frac{1}{k^q N_q}\| x^q f^{(p)}(x)\|_\alpha$$

pour obtenir le résultat.

Topologie de $\mathcal{S}_\alpha(\{M_p\}, \{N_p\})$. — Soit $\mathcal{S}_\alpha(\{M_p\}, \{N_p\}, h, k)$ le sous-espace de $\mathcal{S}_\alpha(\{M_p\}, \{N_p\})$ formé des fonctions vérifiant (2.2.1), h et k étant maintenant fixés, muni de la norme

$$\sup_{p\geq 0,\ q\geq 0}\left(\frac{1}{h^p k^q M_p N_q}\| x^q f^{(p)}(x)\|_\alpha\right).$$

La topologie de $\mathcal{S}_\alpha(\{M_p\}, \{N_p\})$ sera la limite inductive de celles des $\mathcal{S}_\alpha(\{M_p\}, \{N_p\}, h, k)$. On se ramène facilement au cas des espaces $E(L^\alpha, \{M_p\}, \{N_p\}$ formé des suites $\{f_{pq}(x)\}$, où $f_{pq}(x)\in L^\alpha$ vérifiant

$$\| f_{pq}(x)\|_\alpha\leq A h^p k^q M_p N_q \qquad (p=0, 1, 2, \ldots; q=0, 1, 2, \ldots)$$

pour un A, un h, un k.

$\mathcal{S}_\alpha(\{M_p\}, \{N_p\})$ est le sous-espace de $E(L^\alpha, \{M_p\}, \{N_p\})$ formé des suites de la forme $\{x^q f^{(p)}(x)\}$ obtenues chacune avec une seule fonction $f(x)$.

Proposition 1. — *Lorsque les suites $\{M_p\}$, $\{N_p\}$ vérifient la condition de dérivabilité* (*cf.* p. 57) *les espaces $\mathcal{S}_\alpha(\{M_p\}, \{N_p\})$ et $\mathcal{S}_\infty(\{M_p\}, \{N_p\})$ sont isomorphes.*

La démonstration utilise le lemme 3 du paragraphe 1, les inégalités d'Hölder et Minkowski et les relations

$$\left\| f^{(p)}(x)\, e^{N\left(\frac{|x|}{2k}\right)}\right\|_\alpha\leq\left\| f^{(p)}(x)\, e^{N\left(\frac{|x|}{k}\right)}\right\|_\infty\cdot\left\| e^{N\left(\frac{|x|}{2k}\right)-N\left(\frac{|x|}{k}\right)}\right\|_\alpha,$$

$$x^q f^{(p)}(x)=\int_{-\infty}^{x}[x^q f^{(p+1)}(x)+qx^{q-1}f^{(p)}(x)](1+x^2)\frac{dx}{1+x^2}.$$

L'espace $\mathcal{H}_\alpha(\{N_p\})$. — On désigne par $\mathcal{H}_\alpha(\{N_p\})$ l'espace des fonctions $f(z)$ de la variable complexe $z=x+iy$ possédant les propriétés :

a. Il existe une constante h telle que $f(z)$ est holomorphe dans la bande $|y|\leq\frac{1}{h}$;

b. Il existe des constantes A, k telles que

$$\| x^q f(x+iy)\|_\alpha\leq A k^q N_q \quad\text{pour}\quad |y|\leq\frac{1}{h}\qquad (q=0, 1, 2, \ldots). \tag{2.2.4}$$

On démontre par le même procédé que celui employé pour (2.2.1) que la condition b équivaut à :

Il existe des constantes A, k telles que

$$\left\| f(x+iy)\, e^{N\left(\frac{|x|}{k}\right)}\right\|_\alpha\leq A \quad\text{pour}\quad |y|\leq\frac{1}{h}. \tag{2.2.5}$$

Soit $\mathcal{H}_\alpha(\{N_p\}, h, k)$ le sous-espace de $\mathcal{H}_\alpha(\{N_p\})$ formé des fonctions vérifiant (2.2.4), h et k étant maintenant fixés, muni de la norme

$$\sup_{q\geq 0}\left[\frac{1}{N_q}\sup_{|y|\leq\frac{1}{h}}\|x^q f(x+iy)\|_\alpha\right]$$

La topologie de $\mathcal{H}_\alpha(\{N_p\})$ sera la limite inductive de celle des $\mathcal{H}_\alpha(\{N_p\}, h, k)$.

PROPOSITION 2. — *Les espaces vectoriels topologiques $\mathcal{H}_\alpha(\{N_p\})$ et $\dot{\mathcal{S}}_\alpha(\{p\,!\}, \{N_p\})$ sont isomorphes.*

Soit d'abord $f(x)$ vérifiant (2.2.1), avec $M_p = p\,!$. On a d'abord

$$f^{(p)}(x) = \int_{-\infty}^{x}(1+x^2)f^{(p+1)}(x)\frac{dx}{1+x^2};$$

en utilisant (2.2.1) et l'inégalité de Hölder, on obtient

$$|f^{(p)}(x)| \leq B h^{p+1}(p+1)\,! \qquad (B = \mathrm{Cte}),$$

ce qui montre que le rayon de convergence de la série de Taylor de $f(x)$ est au moins $\frac{1}{h}$; si $H > h$, $f(x)$ est donc prolongeable en une fonction $f(z)$ holomorphe dans $|y| \leq \frac{1}{H}$ et la formule de Taylor donne, pour $|y| \leq \frac{1}{H}$

$$\|x^q f(x+iy)\|_\alpha \leq \frac{AH}{H-h}k^q N_q,$$

ce qui montre que $f(z) \in \mathcal{H}_\alpha(\{N_p\}, H, k)$ et y converge vers zéro si elle converge vers zéro dans $\dot{\mathcal{S}}_\alpha(\{p\,!\}, \{N_p\}, h, k)$.

Soit maintenant $f(z)$ holomorphe dans $|y| \leq \frac{1}{h}$ et vérifiant (2.2.4), La formule de Cauchy donne

$$f^{(p)}(x) = \frac{p\,!}{2i\pi}\int_C \frac{f(x-\zeta)}{\zeta^{p+1}}d\zeta \qquad \left(C,\ \text{cercle } |\zeta| = \frac{1}{h}\right);$$

on déduit de là

$$\|x^q f^{(p)}(x)\|_\alpha \leq h^p p\,! \sup_{|\zeta|=\frac{1}{h}}\|x^q f(x-\zeta)\|_\alpha \leq h^p p! \sup_{|\xi|\leq\frac{1}{h}}\|(x-\xi)^q f(x+iy)\|_\alpha$$

$$\leq h^p p\,! \sum_{r=0}^{q} C_q^r \frac{1}{h^{q-r}}\|x^r f(x+iy)\|_\alpha \leq A h^p\left(k+\frac{1}{h}\right)^q p\,! N_q,$$

ce qui permet d'achever la démonstration.

PROPOSITION 3. — *Les conditions (2.2.6) et (2.2.7) sont équivalentes :*

(2.2.6) $$\int^{\infty} N(r)\,e^{-ar} < +\infty \quad \textit{pour un } a,$$

(2.2.7) $$\sum_{p=1}^{\infty} e^{-a\frac{N_p}{N_{p-1}}} < +\infty \quad \textit{pour un } a.$$

Ces conditions sont nécessaires pour que $\mathcal{H}_\alpha(\{N_p\})$ contienne des fonctions non identiquement nulles. Elles sont suffisantes pour que $\mathcal{H}_\alpha(\{N_p\})$ contienne une suite de fonctions $\rho_n(x)$ qui converge vaguement vers la mesure de Dirac dans l'espace des mesures définies sur la droite.

Montrons d'abord que ces conditions sont équivalentes : Soit

$$n(r) = r\frac{dN}{dr};$$

(2.2.6) équivaut à $\int^\infty n(r)e^{-ar}\,dr < +\infty$ pour un a; pour voir que cette dernière condition équivaut à (2.2.7), on peut poser

$$\nu_p = e^{an_p} \quad \left(n_p = \frac{N_p}{N_{p-1}}\right) \qquad \text{et} \qquad e^{ar} = \sigma,$$

de sorte que $n\left(\frac{\operatorname{Log}\sigma}{a}\right)$ est le nombre des ν_p au plus égaux à σ. On est alors ramené aux différentes formes de la condition de non quasi-analyticité pour la suite $\{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_p\}$.

Pour établir que la condition (2.2.6) est nécessaire, nous utiliserons un résultat de M. S. Mandelbrojt ([21], chap. II).

Soit $f(z) \in \mathcal{H}_\alpha(N_p)$, donc $f(x) \in \mathcal{S}_\alpha(\{p!\}, \{N_p\})$. On a aussi

$$f'(x) \in \mathcal{S}_\alpha(\{p!\}, \{N_p\});$$

$f(z)$ est holomorphe dans une bande $|y| \leqq \frac{1}{h}$ et il existe des constantes A, k, telles que

$$\| x^q f(x+iy) \|_\alpha \leqq A k^q N_q; \qquad \| x^q f'(x+iy) \|_\alpha \leqq A k^q N_q \qquad \text{pour} \quad |y| \leqq \frac{1}{h}$$

On a

$$x^q f(x+iy) = \int_{-\infty}^{x} (qx^{q-1}f + x^q f')(1+x^2)\frac{dx}{1+x^2},$$

ce qui donne en utilisant l'inégalité de Hölder et les inégalités précédentes,

$$|x^q f(x+iy)| \leqq BK^q N_{q+2} \qquad (B, K = \text{Cte}),$$

c'est-à-dire

$$|f(x+iy)| \leqq B\, e^{-N_1\left(\frac{|x|}{K}\right)},$$

$N_1(r)$ désignant la fonction associée à la suite $\{N_{q+2}\}$ la fonction $f\left(\frac{2z}{\pi h}\right)$ est holomorphe pour $|y| \leqq \frac{\pi}{2}$ et vérifie

$$\left| f\left(\frac{2x+2iy}{\pi h}\right) \right| \leqq B \exp\left[-N_1\left(\frac{2|x|}{\pi h K}\right) \right].$$

D'après le résultat cité, on doit avoir

$$\int^{\infty} N_1\left(\frac{2x}{\pi h K}\right) e^{-x}\, dx < +\infty,$$

ce qui entraîne (2.2.6), car la fonction associée à la suite $\{N_{q+2}\}$ est $N(x) - 2\operatorname{Log} x + o(1)$.

Il reste à construire la suite $\rho_n(x)$. $\alpha(z)$ étant la fonction définie par (2.1.11), la fonction $\frac{\alpha(z)}{1+z^2}$ appartient évidemment à $\mathcal{H}_\alpha(\{N_p\})$. Posons

$$C = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha(x)\, dx}{1+x^2} \qquad \text{et} \qquad \rho_n(x) = \frac{n}{C}\, \frac{\alpha(nx)}{1+n^2x^2}.$$

Les fonctions $\rho_n(x)$ sont dans $\mathcal{H}_\alpha(\{N_p\})$ et convergent vers la mesure de Dirac.

Proposition 4. — *Soient $f(x) \in \mathcal{S}_\alpha(\{M_p\}, \{N_p\})$; μ mesure vérifiant*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{N\left(\frac{|x|}{k}\right)} |d\mu(x)| < +\infty \quad \textit{pour un certain } k.$$

Alors, la fonction $g(x)$ définie par

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-\xi)\, d\mu(\xi)$$

appartient aussi à $\mathcal{S}_\alpha(\{M_p\}, \{N_p\})$. De plus, si $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{N\left(\frac{|x|}{k}\right)} |d\mu(x)|$ tend vers zéro pour une certaine valeur de k, alors $g(x)$ converge vers zéro dans $\mathcal{S}_\alpha(\{M_p\}, \{N_p\})$.

Cela découle immédiatement de l'inégalité

$$|g^{(p)}(x)|\, e^{N\left(\frac{|x|}{K+k}\right)} \leqq \int_{-\infty}^{+\infty} |f^{(p)}(x-\xi)|\, e^{N\left(\frac{|x-\xi|}{K}\right) + N\left(\frac{|\xi|}{k}\right)} |d\mu(\xi)|.$$

L'inégalité

$$N\left(\frac{|x|}{K+k}\right) \leqq N\left(\frac{|x-\xi|}{K}\right) + N\left(\frac{|\xi|}{k}\right)$$

s'obtient en remarquant que si $\frac{|x|}{K+k} \leqq \frac{|\xi - x|}{K}$, on a

$$N\left(\frac{|x|}{K+k}\right) \leqq N\left(\frac{|x-\xi|}{K}\right) \leqq 0$$

et si $\frac{|x|}{K+k} \geqq \frac{|\xi - x|}{K}$ on a

$$|x| \leqq \frac{K+k}{k} |\xi| \qquad \text{et} \qquad N\left(\frac{|x|}{K+k}\right) - N\left(\frac{|x-\xi|}{K}\right) \leqq N\left(\frac{|x|}{K+k}\right) \leqq N\left(\frac{|\xi|}{k}\right).$$

Proposition 5. — *$\{N_p\}$ vérifiant (2.2.7), $\mathcal{S}_\alpha(\{p!\}, \{N_p\})$ est dense dans $\mathcal{S}_\alpha(\{M_p\}, \{N_p\})$.*

On utilise pour la démonstration une suite de fonctions

$$\rho_n(x) \in \mathcal{S}_1(\{p\,!\}, \{N_p\})$$

qui convergent vers la mesure de Dirac. Soit

$$f(x) \in \mathcal{S}_\alpha(\{M_p\}, \{N_p\}).$$

Considérons les régularisées

$$f_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\,\rho_n(x-\xi)\,d\xi.$$

L'inégalité

$$\left\| f_n^{(p)}(x)\, e^{N\left(\frac{|x|}{K+k}\right)} \right\|_\alpha \leqq \left\| \rho_n^{(p)}(x)\, e^{N\left(\frac{|x|}{k}\right)} \right\|_1 . \left\| f(x)\, e^{N\left(\frac{|x|}{K}\right)} \right\|_\alpha$$

montre que $f_n(x) \in \mathcal{S}_\alpha(\{p\,!\}, \{N_p\})$. D'après la proposition 4, les $f_n(x)$ convergent vers $f(x)$ dans $\mathcal{S}_\alpha(\{M_p\}, \{N_p\})$.

Proposition 6. — *Si $\{M_p\} \in \mathfrak{M}$ et $N_p < +\infty$, on a*

$$\mathcal{D}(\{M_p\}) \subset \mathcal{S}_\alpha(\{M_p\}, \{N_p\})$$

et $\mathcal{D}(\{M_p\})$ est dense dans $\mathcal{S}_\alpha(\{M_p\}, \{N_p\})$.

La relation d'inclusion est à peu près évidente. Soit

$$f(x) \in \mathcal{S}_\alpha(\{M_p\}, \{N_p\}).$$

Prenons dans $\mathcal{D}(\{M_p\})$ des fonctions $\varphi_n(x)$ égales à 1 sur $|x| \leqq n$, par exemple $\varphi_n(x) = \int_{-n-\varepsilon}^{n+\varepsilon} \rho_\varepsilon(x-\xi)\,d\xi$, où $\rho_\varepsilon(x)$ est la fonction définie p. 84. On voit ainsi qu'on a $|\varphi_n^{(p)}(x)| \leqq BH^p M_p$, B et H étant des constantes indépendantes de n. On a, d'autre part,

$$|f^{(p)}(x)| \leqq A h^p M_p\, e^{N\left(\frac{|x|}{k}\right)}.$$

On déduit de ces inégalités

$$\begin{aligned} |(\varphi_n f)^{(p)}| &\leqq \sum_{r=0}^{p} C_p^r |\varphi_n^{(r)} f^{(p-r)}| \\ &\leqq AB\, e^{N\left(\frac{|x|}{k}\right)} \sum_{r=0}^{\infty} C_p^r H^r h^{p-r} M_r M_{p-r} \leqq ABM_0\, e^{N\left(\frac{|x|}{k}\right)} (H+h)^p M_p, \end{aligned}$$

ce qui montre que $\varphi_n f$, qui est à support compact, est dans $\mathcal{D}(\{M_p\})$.

D'autre part, posons $\psi_n = \varphi_n - 1$; on a $\psi_n f = 0$ pour $|x| \leqq n$. D'où, pour $\delta > 1$,

$$|(\psi_n f)^{(p)}|\, e^{\mathrm{N}\left(\frac{|x|}{\delta k}\right)} \leqq \mathrm{A}(\mathrm{B}+1)\left[e^{\mathrm{N}\left(\frac{n}{\delta k}\right)-\mathrm{N}\left(\frac{n}{k}\right)}\right] \sum_{r=0}^{\infty} \mathrm{C}_p^r,$$

$$\mathrm{H}^{p-r} h^r \mathrm{M}_r \mathrm{M}_{p-r} \leqq \mathrm{ABM}_0 (\mathrm{H}+h)^p \mathrm{M}_p\, e^{\mathrm{N}\left(\frac{n}{\delta k}\right)-\mathrm{N}\left(\frac{n}{k}\right)}.$$

On a, d'après (2.1.5),

$$\lim_{n\to\infty}\left(\mathrm{N}\left(\frac{n}{k}\right)-\mathrm{N}\left(\frac{n}{\delta k}\right)\right) = +\infty,$$

ce qui permet de conclure.

3. — Les espaces $\mathcal{S}'_\alpha(\{\mathrm{M}_p\}, \{\mathrm{N}_p\})$.

On désignera par $\mathcal{S}'_\alpha(\{\mathrm{M}_p\}, \{\mathrm{N}_p\})$ le dual de $\mathcal{S}_\alpha(\{\mathrm{M}_p\}, \{\mathrm{N}_p\})$.

Proposition 1. — *$\{\mathrm{N}_p\}$ vérifiant* (2.2.7), *on peut identifier $\mathcal{S}'_\alpha(\{\mathrm{M}_p\}, \{\mathrm{N}_p\})$ à un sous-espace vectoriel de $\mathcal{S}'_\alpha(\{p\,!\}, \{\mathrm{N}_p\})$.*

En effet, toute distribution généralisée $\mathrm{S} \in \mathcal{S}'_\alpha(\{\mathrm{M}_p\}, \{\mathrm{N}_p\})$ définit par restriction une forme linéaire $\overline{\mathrm{S}}$ sur $\mathcal{S}_\alpha(\{p\,!\}, \{\mathrm{N}_p\})$ continue pour la topologie induite par $\mathcal{S}_\alpha(\{\mathrm{M}_p\}, \{\mathrm{N}_p\})$. Réciproquement, toute forme linéaire $\overline{\mathrm{S}} \in \mathcal{S}'_\alpha(\{p!\}, \{\mathrm{N}_p\})$ continue pour la topologie induite par $\mathcal{S}_\alpha(\{\mathrm{M}_p\}, \{\mathrm{N}_p\})$ peut être prolongée en une forme linéaire continue S sur $\mathcal{S}_\alpha(\{\mathrm{M}_p\}, \{\mathrm{N}_p\})$, et de façon unique puisque $\mathcal{S}_\alpha(\{p\,!\}, \{\mathrm{N}_p\})$ est dense dans $\mathcal{S}(\{\mathrm{M}_p\}, \{\mathrm{N}_p\})$.

La proposition 1 montre que les seuls éléments nouveaux introduits dans ce chapitre sont les éléments des espaces $\mathcal{S}'_\alpha(\{p\,!\}, \{\mathrm{N}_p\})$.

Proposition 2. — *Si $\{\mathrm{M}_p\} \in \mathfrak{M}$ et $\mathrm{N}_p < +\infty$, on peut identifier $\mathcal{S}'_\infty(\{\mathrm{M}_p\}, \{\mathrm{N}_p\})$ à un sous-espace de $\mathcal{D}'(\{\mathrm{M}_p\})$.*

Même démonstration que la proposition 1.

Théorème 2. — *La réunion des $\mathcal{S}'_\alpha(\{\mathrm{M}_p\}, \{\mathrm{N}_p\})$ lorsque $\{\mathrm{N}_p\}$ parcourt l'ensemble des suites positives logarithmiquement convexes vérifiant* (2.2.7) *est un espace vectoriel sur le corps des nombres complexes.*

Il suffit de montrer qu'étant donné deux suites $\{\mathrm{N}_p\}$ et $\{\mathrm{N}'_p\}$ vérifiant (2.2.7), il existe une suite $\{\mathrm{R}_p\}$ vérifiant aussi (2.2.7) et

$$\frac{\mathrm{R}_p}{\mathrm{R}_{p-1}} = \mathrm{O}\left(\frac{\mathrm{N}_p}{\mathrm{N}_{p-1}}\right); \qquad \frac{\mathrm{R}_p}{\mathrm{R}_{p-1}} = \mathrm{O}\left(\frac{\mathrm{N}'_p}{\mathrm{N}'_{p-1}}\right).$$

Posons

$$n_p = \frac{\mathrm{N}_p}{\mathrm{N}_{p-1}}; \qquad n'_p = \frac{\mathrm{N}'_p}{\mathrm{N}'_{p-1}}.$$

Il existe a et a' tels que $\sum^{\infty} e^{-an_p} < +\infty$; $\sum^{\infty} e^{-a'n'_p} < +\infty$. Soit $\{r_p\}$ la suite obtenue en rangeant par ordre de grandeur croissante les nombres an_p, $a'n'_p$. La suite $\{r_1, r_2, \ldots, r_p\}$ répond à la question.

Proposition 3. — $\bigcup\limits_{\{M_p\}\in\mathfrak{M}} \mathcal{S}'_\alpha(\{M_p\}, \{N_p\})$ *est un espace vectoriel sur le corps des nombres complexes.*

La démonstration est la même que celle du théorème 2 du chapitre I.

Théorème 3. — *Soient* $g_p(x)$ *des fonctions* $\in L^\beta\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1,\ 1<\beta\leqq\infty\right.$; *resp. des mesures*$\Big)$ *vérifiant, quels que soient h et k,*

$$\left\| g_p(x)\, e^{-N\left(\frac{|x|}{k}\right)} \right\|_\beta = O\left(\frac{1}{h^p M_p}\right) \qquad (p\to\infty), \tag{2.3.1}$$

$$\textit{resp.} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |\, dg_p(x)\,|\, e^{-N\left(\frac{|x|}{k}\right)} = O\left(\frac{1}{h^p M_p}\right) \qquad (p\to\infty).$$

Alors la formule

$$\varphi = \sum_{p=0}^{\infty} D^p g_p(x) \tag{2.3.2}$$

définit une distribution généralisée $\varphi\in\mathcal{S}'_\alpha(\{M_p\}, \{N_p\})$ [*resp.* $\varphi\in\mathcal{S}'_\infty(\{M_p\}, \{N_p\})$]. *Réciproquement toute distribution généralisée* $\varphi\in\mathcal{S}'_\alpha(\{M_p\}, \{N_p\})$ [*resp.* $S\in\mathcal{S}'_\infty(\{M_p\}, \{N_p\})$] *peut être mise sous cette forme.*

La première partie du théorème résulte de ce que l'hypothèse (2.3.1) et la condition (2.2.2) assurent la convergence absolue de la série

$$\sum_p (-1)^p \int_{-\infty}^{+\infty} f^{(p)}(x)\, g_p(x)\, dx.$$

Démontrons la réciproque en supposant $\alpha < +\infty$ pour fixer les idées; on utilise l'espace $E(L^\alpha, \{M_p\}, \{N_p\})$ déjà considéré pour définir la topologie de $\mathcal{S}_\alpha(\{M_p\}, \{N_p\})$. Le dual de $E(L^\alpha, \{M_p\}, \{N_p\})$ est l'espace des suites $\{g_{pq}(x)\}$, où $g_{pq}(x)\in L^\beta$, vérifiant

$$\| g_{pq}(x)\|_\beta = O\left(\frac{1}{h^p k^q M_p N_q}\right) \qquad (p\to\infty,\ q\to\infty) \text{ quels que soient } h,\ k. \tag{2.3.3}$$

Soit $\varphi\in\mathcal{S}'(\{M_p\}, \{N_p\})$; d'après le théorème de Hahn-Banach, on peut prolonger φ à l'espace $\mathcal{S}_\alpha(\{M_p\}, \{N_p\})$. Il existe donc une suite $\{g_{pq}(x)\}$ vérifiant (2.3,3) telle qu'on ait, pour toute $f\in\mathcal{S}_\alpha(\{M_p\}, \{N_p\})$

$$\int \varphi(x) f(x)\, dx = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} (-1)^p \int_{-\infty}^{+\infty} x^q f^{(p)} g_{pq}(x)\, dx. \tag{2.3.4}$$

On obtient (2.3.2) en posant

$$g_p(x) = \sum_{q=0}^{\infty} x^q g_{pq}(x);$$

on a, quel que soit k,

$$\left\| g_p(x)\, e^{-\mathrm{N}\left(\frac{|x|}{k}\right)} \right\|_\beta \leq \sum_{q=0}^{\infty} \left\| x^q g_{pq}(x)\, e^{-\mathrm{N}\left(\frac{|x|}{k}\right)} \right\|_\beta \leq \sum_{q=0}^{\infty} k^q \mathrm{N}_q \,\| g_{pq}(x) \|$$

ce qui donne l'inégalité (2.3.1),

THÉORÈME 4. — *On suppose que la suite* $\{\mathrm{N}_p\}$ *vérifie* (2.2.7) *et la condition de dérivabilité* (*cf.* p. 57).

Soit $\varphi(z)$ *une fonction analytique de la variable complexe* $z = x + iy$ *holomorphe pour* $y \neq 0$, *possédant la propriété suivante :*

Quels que soient h, H, k, *il existe une constante* A *telle que*

$$|\varphi(x+iy)| \leq \mathrm{A}\, e^{\mathrm{N}\left(\frac{|x|}{k}\right)} \quad \text{pour} \quad \frac{1}{\mathrm{H}} \leq |y| \leq \frac{1}{h}. \tag{2.3.5}$$

Alors les formules

$$\varphi_s(x) = \lim_{\substack{y \to 0 \\ y > 0}} \varphi(x+iy); \qquad \varphi_i(x) = \lim_{\substack{y \to 0 \\ y < 0}} \varphi(x+iy) \tag{2.3.6}$$

définissent deux distributions généralisées $\varphi_s(x)$, $\varphi_i(x) \in \mathcal{S}'_\infty(\{p\,!\}, \{\mathrm{N}_p\})$. *Réciproquement toute distribution généralisée* $\varphi \in \mathcal{S}'_\infty(\{p\,!\}, \{\mathrm{N}_p\})$ *peut se mettre sous la forme* $\varphi = \varphi_i - \varphi_s$, φ_i *et* φ_s *ayant la même signification que ci-dessus.*

Soit $\varphi(z)$ une fonction holomorphe dans $y \neq 0$ vérifiant l'hypothèse. On peut poser, pour toute fonction $f(z) \in \mathcal{H}_\infty(\{\mathrm{N}_p\})$, holomorphe dans la bande $|y| \leq \frac{1}{h}$ et vérifiant (2.2.5) (avec $\alpha = \infty$).

$$\int \varphi_s(x) f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x+iy) f(x+iy)\, dx \qquad \left(0 < y < \frac{1}{h}\right). \tag{2.3.7}$$

L'intégrale de droite est absolument convergente d'après (2.2.5), (2.3.5) et le lemme 3 du paragraphe 1; d'après le théorème de Cauchy, sa valeur ne dépend pas de y, et elle définit une forme linéaire φ_s sur $\mathcal{H}_\infty(\{\mathrm{N}_p\})$. De plus, si des $f_j(x)$ forment un ensemble borné dans $\mathcal{H}_\infty(\{\mathrm{N}_p\})$, elles sont holomorphes dans une même bande $|y| \leq \frac{1}{h}$ et majorées par une même fonction $\mathrm{A}\, e^{\mathrm{N}\left(\frac{|x|}{k}\right)}$. On voit alors facilement que les $\int \varphi_s(x) f(x)\, dx$ sont bornées, ce qui montre que φ_s est une fonction linéaire continue.

La fonction $f(z)$ étant donnée, considérons les fonctions $f_\eta(z)$ définies par $f_\eta(z)=f(z-i\eta)\left(0\leqq\eta<\frac{1}{h}\right)$. On aura

$$\int\varphi_s(x)f_\eta(x)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_s(x+i\eta)f(x+i\eta)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_s(x+i\eta)f(x)\,dx.$$

Lorsque η tend vers zéro, les fonctions $f_\eta(z)$ convergent évidemment vers $f(z)$ dans $\mathcal{H}_\infty(\{N_p\})$; les $\int\varphi_s(x)f_\eta(x)\,dx$ convergent vers $\int\varphi_s(x)f(x)\,dx$, ce qui donne (2.3.6). On définit de même φ_i.

Pour démontrer la réciproque, reprenons la formule (2.3.4) qui s'écrit

$$\varphi=\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}D^p[x^q g_{pq}(x)] \qquad [g_{pq}(x)\text{ mesures}]. \tag{2.3.8}$$

Posons

$$G_{pq}(x+iy)=\frac{1}{2i\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{g_{pq}(\xi)\,d\xi}{x-\xi+iy}. \tag{2.3.9}$$

On déduit de là, en dérivant r fois

$$|G_{pq}^{(r)}(x+iy)|\leqq\frac{r\,!}{2\pi y^{r+1}}\int_{-\infty}^{+\infty}|dg_{pq}(\xi)|$$

et ensuite, pour $\frac{1}{H}\leqq y\leqq\frac{1}{h}$,

$$\begin{aligned}\left|\frac{d^p}{dz^p}[z^q G_{pq}(z)]\right|&\leqq\frac{1}{2\pi|y|}\sum_{r=\infty}^{\infty}\frac{p(p-1)\ldots(p-r+1)}{r\,!}q(q-1)\ldots(q-r+1)\\&\quad\times|z|^{q-r}\frac{(p-r)\,!}{|y|^{p-r}}\int_{-\infty}^{+\infty}|dg_{pq}(x)|\\&\leqq\frac{p\,!\,|z|^q}{2\pi|y|^{p+1}}\int_{-\infty}^{+\infty}|dg_{pq}(x)|\sum_{r=0}^{\infty}C_q^r\left|\frac{y}{z}\right|^r\\&\leqq\frac{1}{2\pi}H^{p+1}p\,!\,(2|z|)^q\int_{-\infty}^{+\infty}|dg_{pq}(x)|.\end{aligned}$$

Posons maintenant

$$\varphi(z)=\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\frac{d^p}{dz^p}[z^q G_{pq}(z)]. \tag{2.3.10}$$

On déduit des inégalités ci-dessus, quel que soit k,

$$|\varphi(z)|\leqq\frac{H}{2\pi}\left\{\sup_{q\geqq0}\frac{|z|^q}{k^q N_q}\right\}\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}H^p p\,!\,(2k)^q N_q\int_{-\infty}^{+\infty}|dg_{pq}|.$$

Ce calcul montre que la série du second membre de (2.3.10) converge absolument et uniformément lorsque z parcourt un domaine compact ne coupant pas l'axe réel. Cette formule définit donc une fonction $\varphi(z)$ holomorphe pour $y\neq 0$. De plus, la dernière inégalité obtenue donne (2.3.5).

Pour démontrer que $\varphi = \varphi_s - \varphi_i$, remarquons que

$$G_{pq}(x+iy) - G_{pq}(x-iy) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y\, g_{pq}(\xi)\, d\xi}{(x-\xi)^2+y^2} \qquad (y > 0).$$

La fonction $\frac{1}{\pi}\frac{y}{x^2+y^2}$ converge vers la mesure de Dirac lorsque y tend vers zéro par valeurs positives, de sorte que $G_{pq}(x-iy) - G_{pq}(x+iy)$ converge vers $g_{pq}(x)$. La formule $\varphi = \varphi_i - \varphi_s$ résulte alors de (2.3.8) et (2.3.10), la convergence ayant lieu naturellement dans $\mathcal{S}'_8(\{p!\}, \{N_p\})$.

Remarque. — La fonction $\frac{1}{z-\xi}$, comme fonction de ξ, est dans $\mathcal{S}_\alpha(\{p!\}, \{+\infty\})$ pour $\alpha > 1$ et z non réel ($\{+\infty\}$ désigne la suite $N_p = +\infty$ pour $p > 0$). Si $\varphi \in \mathcal{S}'_\alpha(\{p!\}, \{+\infty\})$, c'est-à-dire si φ est de la forme

$$\varphi = \sum_{p=0}^{\infty} D^p g_p(x), \qquad \text{avec} \quad \|g_p(x)\|_\alpha = O\left(\frac{1}{h^p p!}\right) \qquad (p \to +\infty) \quad \text{quel que soit } h,$$

on voit que la formule (2.3.10) qui définit $\varphi(z)$ peut s'écrire

$$\varphi(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(\xi(d\xi}{z-\xi}, \tag{2.3.11}$$

cette expression ayant alors un sens, alors qu'elle n'est pas définie en général.

Proposition 4. — *Les notations sont celles du théorème 4. On a $\varphi_i - \varphi_s = 0$ si et seulement si $\varphi(z)$ est une fonction entière.*

D'après (2.3.7) et le théorème de Cauchy, il est clair que

$$\int [\varphi_i(x) - \varphi_s(x)] f(x)\, dx = 0$$

si $\varphi(z)$ est une fonction entière. Pour établir la réciproque, remarquons que si $\varphi_i - \varphi_s = 0$, on a

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x+iy) f(x+iy)\, dx \\ &\quad = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x-iy) f(x-iy)\, dx \qquad \left(0 < y < \frac{1}{h}\right) \end{aligned} \tag{2.3.12}$$

pour toute $f(z) \in \mathcal{H}_\infty(\{N_p\})$ holomorphe dans $|y| \leqq \frac{1}{h}$. Posons

$$\begin{aligned} H(z) = &\frac{1}{2i\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(\xi - ic)\,\alpha(\xi - ic)}{z - \xi + ic}\, d \\ &- \frac{1}{2i\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(\xi + ic)\,\alpha(\xi + ic)}{z - \xi - ic} \qquad \left(0 < c < \frac{\pi}{2a}\right), \end{aligned}$$

où $\alpha(z)$ est la fonction définie par (2.1.11). On vérifie immédiatement que

$H(z)$ est holomorphe dans la bande $|y| \leq c$. Supposons $y > 0$; en appliquant (2.3.12) à la fonction $\frac{\alpha(\zeta)}{z-\zeta}$ de la variable $\zeta = \xi + i\eta$ holomorphe dans la bande $-c < \eta < y$, on peut écrire

$$H(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(\xi+id)\,\alpha(\xi+id)}{z-\xi-id}\,d\xi$$
$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(\xi+ic)\,\omega(\xi+ic)}{z-\xi-ic} \qquad (0 < d < y < c),$$

ce qui donne, d'après le théorème de Cauchy

$$H(z) = \varphi(z)\,\alpha(z) \qquad \text{pour} \quad 0 < y < c.$$

Ainsi la fonction $\frac{H(z)}{\alpha(z)}$, holomorphe dans la bande $|y| < c$ réalise le prolongement analytique de $\varphi(z)$ sur la bande $|y| < c$.

Support d'une distribution généralisée $\varphi \in \mathcal{S}'_\infty(\{p!\}), \{N_p\})$. — Le principal intérêt du théorème 4 est de permettre de définir le support d'une distribution généralisée $\varphi \in \mathcal{S}'_\infty(\{p!\}), \{N_p\})$: on dira que $\varphi \in \mathcal{S}'_\infty(\{p!\}, \{N_p\})$ est nulle sur un ouvert Ω de l'axe Ox si la fonction $\varphi(z)$ se prolonge analytiquement en une fonction holomorphe sur Ω. La proposition 4 montre que cette propriété est bien indépendante de la fonction $\varphi(z)$ particulière utilisée pour représenter φ.

On peut dire que le support de φ est l'ensemble des points singuliers de $\varphi(z)$.

Si $\{M_p\} \in \mathfrak{M}$ et $N_p < +\infty$, on a

$$\mathcal{S}'_\infty(\{M_p\}, \{N_p\} \subset \mathcal{D}(\{M_p\}).$$

Il faut alors montrer que le support que nous venons de définir coïncide avec celui défini au chapitre I.

a. Supposons que $\varphi(z)$ soit prolongeable analytiquement sur l'intervalle ouvert Ω de Ox. Alors, lorsque y tend vers zéro, $\varphi(x+iy) - \varphi(x-iy)$ converge vers zéro uniformément lorsque x parcourt un segment I contenu dans Ω et $\int[\varphi(x+iy)-\varphi(x-iy)]f(x)\,dx$ converge vers zéro uniformément lorsque $f(x)$ a son support contenu dans I et vérifie $|f(x)| \leq M$. On a donc $\varphi = 0$ sur Ω au sens du chapitre I.

b. Soit K le support de φ au sens du chapitre I. Il faut montrer que toute fonction $\varphi(z)$ représentant φ peut être prolongée analytiquement sur le complémentaire de K. Comme une telle fonction est définie à une fonction entière près, il suffit de montrer que pour tout ouvert Ω contenu dans le complémentaire de K, il existe une fonction $\varphi_\Omega(z)$ représentant φ et holomorphe sur Ω. Pour cela, remarquons, en raisonnant comme dans la démonstration du théorème 5 du chapitre I, qu'on peut, dans la formule (2.3.4), supposer que $g_{pq}(x) = 0$ sur Ω. Alors, la formule (2.3.9) définit des fonctions $G_{pq}(z)$ holomorphes sur Ω et la fonction $\varphi(z)$ définie par (2.3.10) est aussi holomorphe sur Ω.

Exemples. — La formule (2.3.11) montre que la mesure de Dirac est représentée par la fonction $\frac{1}{2i\pi z}$. On voit de même que la distribution « valeur principale de $\frac{1}{x}$ » est représentée par la fonction $\varphi(z)$ égale à $-\frac{1}{2z}$ pour $y > 0$ et à $+\frac{1}{2z}$ pour $y < 0$.

THÉORÈME 5. — *Toute distribution généralisée $\varphi \in \mathcal{S}'_\alpha(\{p!\}, \{N_p\})$ de support origine est la somme d'une série convergente dans $\mathcal{S}'_\alpha(\{p!\}, \{N_p\})$*

$$\varphi = \sum_{p=0}^{\infty} c_p \delta^{(p)} \qquad (\delta, \textit{ mesure de Dirac}).$$

En effet, si φ a pour support l'origine, $\varphi(z)$ est holomorphe dans tout le plan, l'origine exclue; $\varphi(z)$ est donc développable en une série de Laurent, et puisqu'on peut toujours lui retrancher une fonction entière, on peut supposer que $\varphi(z)$ est de la forme

$$\varphi(z) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{a_p}{z^p};$$

le théorème est établi, car $\delta^{(p)}$ est représentée par $\frac{p!}{2iz^{p+1}}$.

THÉORÈME 6. — *Soit $\varphi \in \mathcal{S}'_\alpha(\{M_p\}, \{N_p\})$. Il existe φ_+ et φ_- appartenant aussi à $\mathcal{S}'_\alpha(\{M_p\}, \{N_p\})$ vérifiant*

$$\varphi = \varphi_+ + \varphi_-; \qquad \varphi_+ = 0 \quad \text{sur } x < 0; \qquad \varphi_- = 0 \quad \text{sur } x > 0.$$

Démonstration immédiate au moyen du théorème 3, en décomposant chaque $g_p(x)$ en deux fonctions de supports $(-\infty, 0)$ et $(0, +\infty)$.

Remarque. — Soient $\varphi(z)$, $\varphi_+(z)$ et $\varphi_-(z)$ les fonctions analytiques représentant φ, φ_+ et φ_-. Le théorème 6 donne le théorème de décomposition de Poincaré pour la fonction $\varphi(z)$.

THÉORÈME 7. — *Toute distribution généralisée $\varphi \in \mathcal{S}'_\alpha(\{p!\}, \{N_p\})$ est égale à la somme d'une série de la forme (2.3.2) convergente dans $\mathcal{S}'_\alpha(\{p!\}, \{N_p\})$, les mesures $g_p(x)$ ayant leurs supports contenus dans le segment-support de φ.*

Soit (a, b) le segment-support de φ. D'après le théorème 3, on a $\varphi = \sum_p D^p g_p$ (g_p, mesures); chaque g_p peut se décomposer suivant la formule

$$g_p = g_p^1 + g_p^2 + g_p^3,$$

les mesures g_p^1, g_p^2, g_p^3 ayant leurs supports contenus respectivement dans $(-\infty, a)$, (a, b), $(b+\infty)$ et vérifiant

$$\int e^{-N\left(\frac{|x|}{k}\right)} |dg_p| = \int e^{-N\left(\frac{|x|}{k}\right)} |dg_p^1| + \int e^{-N\left(\frac{|x|}{k}\right)} |dg_p^2| + \int e^{-N\left(\frac{|x|}{k}\right)} |dg_p^3|.$$

Posons

$$\varphi_1 = \sum_p D^p g_p^1; \qquad \varphi_2 = \sum_p D^p g_p^2; \qquad \varphi_3 = \sum_p D^p g_p^3.$$

On a

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3.$$

Pour φ_2 le théorème est vrai d'après la définition même de φ_2. Quant à φ_1 et φ_3, ce sont des distributions généralisées de supports ponctuels pour lesquelles le théorème est vrai (théorème 5).

Remarque. — On verra au chapitre III que les théorèmes 5 et 7 deviennent faux si l'on remplace dans leur énoncé $p!$ par M_p (*cf.* théorème 3 du chapitre III et la remarque qui suit).

4. Opérations dans les $\mathcal{S}'_\alpha(\{M_p\}, \{N_p\})$.

Pour définir convenablement le produit multiplicatif et le produit de convolution dans les espaces $\mathcal{S}'_\alpha(\{M_p\}, \{N_p\})$, il faut introduire des sous-espaces de $\mathcal{S}'_\alpha(\{M_p\}, \{N_p\})$ qui seront des espaces d'opérateurs.

On suppose naturellement que les suites $\{M_p\}$ et $\{N_p\}$ vérifient (2.2.4) et (2.2.7). Pour simplifier, nous nous bornerons à définir le produit multiplicatif et la convolution dans $\mathcal{S}'_\infty(\{M_p\}, \{N_p\})$.

Produit multiplicatif. — On désigne par $\Omega(\{M_p\}, \{N_p\})$ l'espace vectoriel sur le corps des nombres complexes des fonctions à valeurs complexes définies et indéfiniment dérivables sur la droite, possédant la propriété :

Quel que soit k, il existe des constantes A, h (pouvant dépendre de k) telles que

$$|f^{(p)}(x)| \leq A h^p M_p e^{N\left(\frac{|x|}{k}\right)} \qquad (p = 0, 1, 2, \ldots), \tag{2.4.1}$$

h et k étant des constantes données, soit $\Omega(\{M_p\}, \{N_p\}, h, k)$ l'espace des fonctions vérifiant (2.4.1) muni de la topologie naturelle définie par la norme

$$\sup_{p \geq 0} \left[\frac{1}{h^p M_p} \sup_x |f^{(p)}(x)| e^{-N\left(\frac{|x|}{k}\right)} \right].$$

Soit $\Omega(\{M_p\}, \{N_p\}, k)$ la réunion des $\Omega(\{M_p\}, \{N_p\}, h, k)$ lorsque h varie, muni de la topologie limite inductive de celles des $\Omega(\{M_p\}, \{N_p\}, h, k)$.

L'espace $\Omega(\{M_p\}, \{N_p\})$ est l'intersection des $\Omega(\{M_p\}, \{N_p\}, k)$ et sa topologie sera la limite projective de celles des $\Omega(\{M_p\}, \{N_p\}, k)$.

PROPOSITION 1. — *Quelles que soient les suites $\{M'_p\}$, $\{N'_p\}$ vérifiant les mêmes hypothèses que $\{M_p\}$, $\{N_p\}$, on a*

$$\mathcal{S}_\infty(\{M_p\}, \{N'_p\}) \subset \Omega(\{M_p\}, \{N_p\}) \subset \mathcal{S}'_1(\{M'_p\}, \{N_p\})$$

conséquence immédiate des définitions et du théorème 3.

PROPOSITION 2. — *L'opération qui fait correspondre au couple $f(x)$, $g(x)$,*

$$(f(x) \in \mathcal{S}_\infty(\{M_p\}, \{R_p\}); \; g(x) \in \Omega(\{M_p\}, \{N'_p\}))$$

le produit $f(x)g(x)$ est une application bilinéaire hypocontinue de

$$\mathcal{S}_\infty(\{M_p\}, \{R_p\} \times \Omega(\{M_p\}, \{N'_p\}) \quad \textit{dans} \; \mathcal{S}_\infty(\{M_p\}, \{N_p\}) \qquad \left(R_p = \inf_{q \leqq p} N_q N'_{p-q}\right).$$

En effet, la fonction associée à la suite $\{R_p\}$ est $N(x) + N'(x)$. On a

$$|f^{(p)}(x)| \leqq A h^p M_p e^{-N\left(\frac{|x|}{k}\right) - N'\left(\frac{|x|}{k}\right)}; \qquad |g^{(p)}(x)| \leqq BH^p M_p e^{N'\left(\frac{|x|}{k}\right)};$$

d'où l'on déduit

$$\begin{aligned} |(fg)^{(p)}| &\leqq AB\, e^{-N\left(\frac{|x|}{k}\right)} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{p(p-1)\ldots(p-q+1)}{q!} h^q H^{p-q} M_q M_{p-q} \\ &\leqq ABM_0(H+h)^p M_p e^{-N\left(\frac{|x|}{k}\right)}, \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure.

La proposition 2 permet de justifier l'énoncé suivant :

DÉFINITION ET PROPOSITION 3. — *Soient*

$$\varphi \in \mathcal{S}'_\infty(\{M_p\}, \{N_p\}) \qquad \textit{et} \qquad f \in \Omega(\{M_p\}, \{N'_p\}).$$

Le produit $f(x)\varphi$ est un élément de $\mathcal{S}'_\infty(\{M_p\}, \{R_p\}) \left(R_p = \inf_{q \leqq p} N_q N'_{p-q}\right)$ *défini par*

$$\int [f(x)\,\varphi(x)]\,g(x)\,dx = \int \varphi(x)\,[f(x)\,g(x)]\,dx, \tag{2.4.2}$$

où $g(x)$ est un élément arbitraire de $\mathcal{S}_\infty(M_p, R_p)$.

L'opération qui fait correspondre au couple φ, $f(x)$ le produit $f(x)\varphi$ est une application bilinéaire hypocontinue de

$$\mathcal{S}'_\infty(\{M_p\}, \{N_p\}) \times \Omega(\{M_p\}, \{N'_p\}) \quad \text{dans} \; \mathcal{S}'_\infty(\{M_p\}, \{R_p\}.$$

RÉGULARISATION.

DÉFINITION ET PROPOSITION 4. — *Soient*

$$\varphi \in \mathcal{S}'_\alpha(\{M'_p\}, \{N_p\}) \qquad et \qquad f(x) \in \mathcal{S}_\alpha(\{Q_p\}, \{N_p\}) \qquad \left(Q_p = \inf_{q \leq p} M_q M'_{p-q}\right).$$

la formule

$$\varphi \star f(x) = \int \varphi(\xi) f(x-\xi)\, d\xi \tag{2.4.3}$$

définit une fonction $\varphi \star f \in \Omega(\{M_p\}, \{N_p\})$ *appelée régularisée de* φ *par* $f(x)$. *L'opération qui fait correspondre au couple* φ, $f(x)$ *la régularisée* $\varphi \star f$ *est une application bilinéaire hypocontinue de*

$$\mathcal{S}'_\alpha(\{M'_p\}), \{N_p\}) \times \mathcal{S}_\alpha(\{Q_p\}, \{N_p\}) \quad dans \ \Omega(\{M_p\}, \{N_p\}).$$

En effet, on peut écrire, d'après le théorème 3,

$$\varphi \star f = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \int_{-\infty}^{+\infty} f^{(p)}(x-\xi)\, g_p(\xi)\, d\xi.$$

En utilisant l'inégalité

$$N\left(\frac{|x|}{K}\right) \geq N\left(\frac{|\xi|}{K+k}\right) - N\left(\frac{|\xi - x|}{k}\right)$$

déjà vue p. 75, on a, quel que soit K,

$$|(\varphi \star f)^{(p)}|\, e^{-N\left(\frac{|x|}{K}\right)} \leq \sum_{r=0}^{\infty} \left\| f^{(p+r)} e^{N\left(\frac{|x|}{k}\right)} \right\|_\alpha \cdot \left\| g_p(\xi)\, e^{-N\left(\frac{|\xi|}{K+k}\right)} \right\|_\beta,$$

d'où

$$|(\varphi \star f)^{(p)}|\, e^{-N\left(\frac{|x|}{k}\right)} \leq A h^p M_p \sum_{r=0}^{\infty} h^r M'_r \left\| g_p(x)\, e^{-N\left(\frac{|x|}{K+k}\right)} \right\|_\beta,$$

ce qui permet de conclure

CONVOLUTION. — Pour définir le produit de convolution, il faut faire intervenir un nouvel espace d'opérateurs : $O'(\{M_p\}, \{N_p\})$ sera le sous-espace de $\mathcal{S}'_\infty(\{M_p\}, \{N_p\})$ formé des distributions généralisées φ possédant la propriété : il existe un nombre k tel que lorsque λ parcourt l'ensemble des nombres réels, les distributions généralisées $\varphi(x+\lambda)\, e^{N\left(\frac{|\lambda|}{k}\right)}$ forment un ensemble borné dans $\mathcal{S}'_\infty(\{M_p\}, \{N_p\})$; $\varphi(x+\lambda)$ désigne la translatée de φ définie par

$$\int \varphi(x+\lambda) f(x)\, dx = \int \varphi(x) f(x-\lambda)\, d\lambda.$$

On dira que des φ_j convergent vers zéro (resp. forment un ensemble borné) dans $O'(\{M_p\}, \{N_p\})$ s'il existe un nombre k tel que les $\varphi_j(x+\lambda)\, e^{N\left(\frac{|\lambda|}{k}\right)}$ convergent vers zéro (resp. forment un ensemble borné) dans $\mathcal{S}'_\infty(\{M_p\}, \{N_p\})$ uniformément lorsque λ varie.

Les théorèmes 2 et 5 du chapitre III donneront une indication plus concrète sur la structure des distributions généralisées de $O'(\{M_p\}, \{N_p\})$.

PROPOSITION 5. — *La régularisation est une application bilinéaire hypocontinue de*

$$O'(\{M'_p\}, \{N_p\}) \times \mathcal{S}_\infty(\{Q_p\}, \{N_p\}) \quad \textit{dans} \ \mathcal{S}_\infty(\{M_p\}, \{N_p\}) \qquad \left(Q_p = \inf_{q \leq p} M_q M'_{p-q}\right).$$

Soit

$$f \in \mathcal{S}_\infty(\{Q_p\}, \{N_p\}) \qquad \text{et} \qquad \varphi \in O'(\{M'_p\}, \{N_p\}).$$

On a

$$|f^{(p+r)}(\xi)| \leq A h^{p+r} M_p M'_r \, e^{-N\left(\frac{|\xi|}{k}\right)},$$

ce qui montre que les fonctions $\frac{f^{(p)}(\xi)}{h^p M_p}$ forment un ensemble borné dans $\mathcal{S}_\infty(\{M'_p\}, \{N_p\})$. D'autre part, par hypothèse, les distributions $\varphi(x-\xi)\, e^{N\left(\frac{|x|}{K}\right)}$ de la variable ξ forment un ensemble borné dans $\mathcal{S}'_\infty(\{M'_p\}, \{N_p\})$. On en déduit que les fonctions

$$\frac{1}{h^p M_p} (\varphi \star f^{(p)})\, e^{N\left(\frac{|x|}{k}\right)} = \int \varphi(x-\xi)\, e^{N\left(\frac{|x|}{K}\right)} \frac{f^{(p)}(\xi)}{h^p M_p} d\xi$$

sont bornées dans leur ensemble lorsque p parcourt l'ensemble des entiers positifs, ce qui permet de conclure.

La proposition 5 permet de justifier l'énoncé suivant :

DÉFINITION ET PROPOSITION 6. — *Soient*

$$\varphi \in \mathcal{S}'_\infty(\{M_p\}, \{N_p\}) \qquad \textit{et} \qquad \psi \in O'(\{M'_p\}, \{N_p\}).$$

Le produit de convolution $\varphi \star \psi$ est un élément de $\mathcal{S}'_\infty(\{Q_p\}, \{N_p\})$ défini par la formule

$$\int (\varphi \star \psi) f(x)\, dx = \int \varphi(x) [\psi(-x) \star f(x)]\, dx,$$

où $f(x)$ est un élément arbitraire de

$$\mathcal{S}_\infty(\{Q_p\}, \{N_p\}) \qquad \left(Q_p = \inf_{q \leq p} M_q M'_{p-q}\right).$$

L'opération qui fait correspondre au couple φ, ψ le produit de convolution $\varphi \star \psi$ est une application bilinéaire hypocontinue de

$$\mathcal{S}'_\infty(\{M_p\}, \{N_p\}) \times O'(\{M'_p\}, \{N_p\}) \quad \textit{dans} \ \mathcal{S}'_\infty(\{Q_p\}, \{N_p\}).$$

Le théorème 7 permet d'étendre à $\mathcal{S}'(\{M_p\}, \{N_p\})$ les propriétés habituelles du produit de convolution de deux distributions.

5. Distributions généralisées rapidement croissantes.

Le théorème 4 s'applique aux espaces $\mathcal{S}_\infty(\{M_p\}, \{N_p\})$ vérifiant les conditions (2.2.3) et (2.2.8). Ces conditions expriment que $\mathcal{S}_\infty(\{M_p\}, \{N_p\})$ contient un sous-espace $\mathcal{H}_\infty(\{N_p\})$ dense dans $\mathcal{S}_\infty(\{M_p\}, \{N_p\})$ et formé de fonctions holomorphes dans une bande rectiligne. On peut étendre la théorie développée dans les paragraphes précédents aux espaces $\mathcal{S}_\infty(\{M_p\}, \{N_p\})$ qui contiennent un sous-espace dense de fonctions analytiques, c'est-à-dire de fonctions holomorphes dans un voisinage de l'axe réel (ce voisinage ne contenant généralement pas une bande rectiligne).

Les espaces $\mathcal{H}(\{R_p\}, \Omega(z))$. — Soient $\{R_p\}$ une suite positive logarithmiquement convexe et $\Omega(z)$ une fonction entière de la forme

$$\Omega(z) = 1 + \sum_{p=1}^{\infty} c_p z^{2p}; \qquad c_p \geqq 0; \qquad \lim_{p \to \infty} (c_p)^{\frac{1}{p}} = 0. \tag{2.5.1}$$

On désigne par $\mathcal{H}(\{N_p\}, \Omega(z))$ l'espace vectoriel sur le corps des nombres complexes des fonctions analytiques $f(z)$ possédant la propriété :

Il existe des constantes A, h, k telles que :

$$\left\{\begin{array}{ll} a. & f(z) \text{ est holomorphe dans } D_h; \\ b. & |f(z)| \leqq A\, e^{-R\left(\frac{|x|}{k}\right)} \text{ dans } D_h, \end{array}\right. \tag{2.5.2}$$

où $R(x)$ désigne la fonction associée à la suite $\{R_p\}$ et D_h le domaine

$$|y| \leqq \frac{1}{h\,\Omega(x)}.$$

Nous nous limiterons au cas où $\Omega(z)$ est un polynome. On peut alors, sans diminuer la généralité, supposer

$$\Omega(z) = 1 + z^{2\rho} \qquad (\rho \text{ entier} \geqq 0). \tag{2.5.3}$$

On désignera par $\mathcal{H}(\{N_p\}, \rho)$ l'espace $\mathcal{H}(\{N_p\}, \Omega(z))$ correspondant. L'étude du cas général n'introduit vraisemblablement que des complications techniques.

On utilisera la fonction $S(z)$ définie par

$$S(z) = \int_0^z \Omega(u)\,du = z + \frac{z^{2\rho+1}}{2\rho+1}. \tag{2.5.4}$$

et la représentation conforme $z \to Z = S(z)$ qui applique le plan de la variable $z = x + iy$ dans le plan de la variable $Z = X + iY$.

LEMME 1. — *Il existe des constantes* A, $\beta > 1$, *telles qu'on ait, dans le domaine* D *défini par* $|y| \leqq \frac{A}{\Omega(x)}$,

$$\frac{\Omega(x)}{\beta} \leqq \mathcal{R}\,\Omega(z) \leqq \beta\,\Omega(x), \tag{2.5.5}$$

$$\frac{\Omega(x)}{\beta} \leqq \frac{Y(x, y)}{y} \leqq \beta\,\Omega(x). \tag{2.5.6}$$

En effet, on a, pour $|y| \leqq \frac{A}{\Omega(x)}$,

$$|\mathcal{R}\,\Omega(z) - \Omega(x)| \leqq |(x+iy)^{2\rho} - x^{2\rho}| \leqq 2\rho\,|y|\,(x^2+y^2)^{\rho-\frac{1}{2}} \leqq 2\rho\,A\,\frac{(x^2+A^2)^{\rho-\frac{1}{2}}}{1+x^{2\rho}}.$$

On peut donc toujours choisir A assez petit pour avoir

$$|\mathcal{R}\,\Omega(z) - \Omega(x)| \leqq \frac{1}{2},$$

ce qui conduit à (2.5.5); l'inégalité (2.5.6) en découle, car, d'après la formule des accroissements finis, on a

$$\frac{Y(x, y)}{y} = \frac{\partial Y(x, \theta y)}{\partial y} \quad (0 \leqq \theta \leqq 1) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial Y}{\partial y} = \mathcal{R}\,\Omega(z).$$

La relation (2.5.5) montre que $\frac{\partial X}{\partial x} > 0$ et $\frac{\partial Y}{\partial y} > 0$ pour $z \in D$. Il en résulte que la fonction $S(z)$ est univalente dans D et applique biunivoquement D sur un domaine D′ du plan Z. D'après (2.5.6), si $|y| \geqq \frac{A}{\Omega(x)}$, on a $y \geqq \frac{A}{\beta}$; cela montre que D′ contient la bande $Y \leqq \frac{A}{\beta}$.

Désignons maintenant par Δ_h le domaine du plan z défini par

$$|Y(x, y)| \leqq \frac{1}{h} \qquad \left(h \geqq \frac{A}{\beta}\right).$$

Alors, la relation (2.5.6) montre que, quel que soit h, on a

$$D_{\beta h} \subset \Delta_h \qquad \text{et} \qquad \Delta_{\beta h} \subset D_h.$$

LEMME 2. — *Quel que soit* $h > 1$, *il existe* H *tel que les cercles centrés sur* Ox, *de centre* x, *de rayon* $\frac{1}{H\,\Omega(x)}$ *soient contenus dans* D_h.

Posons

$$g(x) = \frac{1}{\Omega(x)};$$

on a évidemment $g'(x) > -\alpha$ pour un certain α. Il suffit de montrer que les points

$$\xi = x + \frac{g(x)}{H}; \qquad \eta = \Big|\, g\overset{(x)}{H}$$

sont dans D_h, c'est-à-dire que $|\eta| \leqq \frac{g(\xi)}{h}$. Or, on a

$$g(\xi) = g\left(x + \frac{g(x)}{H}\right) \geqq g(x) - \frac{\alpha}{H} g(x) = \left(1 - \frac{\alpha}{H}\right) g(x).$$

On a l'inégalité voulue si

$$1 - \frac{\alpha}{H} \geqq \frac{1}{h}; \qquad H \geqq \frac{\alpha h}{h-1}.$$

Proposition 1. — *Une condition nécessaire et suffisante pour que $f(z) \in \mathcal{H}(\{R_p\}, \rho)$ est qu'il existe des constantes* A, h, k *telles que*

$$|f^{(p)}(x)| \leqq A h^p p! \,(1 + x^{2\rho})^p\, e^{-R\left(\frac{|x|}{k}\right)} \qquad (p = 0, 1, 2, \ldots). \tag{2.5.7}$$

Soit d'abord $f(z) \in \mathcal{H}(\{R_p\}), \rho)$, vérifiant (2.5.2). Utilisons la formule de Cauchy

$$f^{(p)}(x) = \frac{1}{p!} \int_{C_x} \frac{f(z)\, dz}{(z-x)^{p+1}},$$

C_x désignant le cercle de centre x et de rayon $\frac{1}{H\,\Omega(x)}$. D'après le lemme 2, on peut toujours choisir H assez grand pour que ces cercles soient dans D_h. On a alors

$$\begin{aligned} |f^{(p)}(x)| &\leqq p!\, H^p (1 + x^{2\rho})^p \sup_{z \in C_x} |f(z)| \\ &\leqq A p!\, H^p (1 + x^{2\rho})^p \exp\left[-R\left(\frac{1}{k}\left(x - \frac{1}{h(1+x^{2\rho})}\right)\right)\right] \\ &\leqq A p!\, H^p (1 + x^{2\rho})^p\, e^{-R\left(\frac{|x|}{k}\right)} \quad \text{pour un } K > k. \end{aligned}$$

Réciproquement, soit $f(x)$ vérifiant (2.5.7). On voit d'abord que la série de Taylor $f(x)$ a un rayon de convergence au moins égal à $\frac{1}{h(1+x^{2\rho})}$ au point x, ce qui montre que $f(z)$ est holomorphe dans D_h. De plus, on a, pour $z \in D_H (H > h)$

$$|f(z)| \leqq A\, e^{-R\left(\frac{|x|}{k}\right)} \sum_{p=0}^{\infty} \left(\frac{h}{H}\right)^p = \frac{AH}{H-h} e^{-R\left(\frac{|x|}{k}\right)},$$

ce qui permet de conclure.

Proposition 2. — *Les conditions équivalentes*

$$\left\{ \begin{array}{ll} a. & \displaystyle\int^{\infty} R(x)\, e^{-ax^{2\rho+1}}\, dx < +\infty \quad \textit{pour un certain } a; \\ b. & \displaystyle\sum^{\infty} e^{-a\left(\frac{R_p}{R_{p-1}}\right)^{2\rho+1}} < +\infty \quad \textit{pour un certain } a \end{array} \right. \tag{2.5.8}$$

sont nécessaires pour que $\mathcal{H}(\{R_p\}, \rho)$ contienne des fonctions non nulles. Elle est *suffisante pour que* $\mathcal{H}(\{R_p\}, \rho)$ *contienne une suite de fonctions* $\rho_n(z)$ *qui convergent vers la mesure de Dirac.*

Pour établir l'équivalence de (2.5.8, a) et (2.5.8, b), on voit d'abord que (2.5.8, a) équivaut à

$$\int^{\infty} r(x)\, e^{-ax^{2\rho+1}}\, x^{2\rho}\, dx < +\infty.$$

Ensuite, en posant

$$s_p = e^{a\left(\frac{R_p}{R_{p-1}}\right)^{2\rho+1}} \qquad \text{et} \qquad u = e^{ax^{2\rho+1}},$$

on se ramène aux formes habituelles de la condition de quasi-analyticité pour la suite $\{s_1, s_2, \ldots, s_p\}$.

Posons $F(Z) = f(S^{-1}(Z))$. D'après le lemme 1, on peut remplacer D_h par Δ_h dans la définition de $\mathcal{H}(\{R_p\}, \Omega(z))$. La condition $f(z) \in \mathcal{H}(\{R_p\}, \Omega(z))$ équivaut alors à :

Il existe A, h, k tels qu'on ait $F(Z)$ holomorphe dans $|Y| \leq \frac{1}{h}$ et

$$\operatorname{Log}|F(Z)| \leq A - R\left(\frac{|x(Z)|}{k}\right) \qquad \text{pour} \quad |Y| \leq \frac{1}{h}.$$

D'après le lemme 1, on peut remplacer $x(Z)$ par $x(X) = S^{-1}(X)$ dans la relation précédente qui équivaut alors à :

Il existe A, h, k tels qu'on ait $F\left(\frac{2Z}{\pi h}\right)$ holomorphe dans $|Y| \leq \frac{\pi}{2}$ et

$$\operatorname{Log}\left|F\left(\frac{2Z}{\pi h}\right)\right| \leq A - R\left[\frac{1}{k} S^{-1}\left(\frac{2X}{\pi h}\right)\right].$$

Les résultats de Mandelbrojt ([21], chap. II) donnent alors la condition nécessaire et suffisante

$$\int^{\infty} R\left[\frac{1}{k} S^{-1}\left(\frac{2X}{\pi h}\right)\right] e^{-X}\, dx < +\infty \quad \text{pour un } h, \text{ un } k;$$

en posant $u = \frac{1}{k} S^{-1}\left(\frac{2X}{\pi h}\right)$, cette condition devient

$$\int^{\infty} R(u)\, e^{-HS(ku)} S'(ku)\, du < +\infty \quad \text{pour un H, un } k$$

qui est manifestement équivalente à (2.5.8) pour $\Omega(z) = 1 + z^{2\rho}$.

La condition (2.5.8) étant satisfaite, soit $\alpha(z)$ une fonction positive $\in \mathcal{H}(\{R_p\}, \rho)$. Posons

$$A(Z) = \alpha(S^{-1}(Z))\,;\ \rho_n(Z) = \frac{1}{K_n} A(nS(z)),$$

avec

$$K_n = \int^{\infty} \rho_n(x)\, dx.$$

Si $\lim_{x \to 0} \alpha(x) = 0$, ce qu'on peut toujours supposer, les fonctions $\rho_n(x)$ convergent vers la mesure de Dirac.

PROPOSITION 3. — *Soient* $\{M_p\}$, $\{N_p\}$ *deux suites positives logarithmiquement convexes vérifiant la condition de dérivabilité et les conditions :*

$$\left.\begin{array}{l} a.\ \dfrac{m_p}{p} \text{ non décroissant;} \\ b.\ \sum^{\infty} \exp[-a(n_p)^{2\rho+1}] < +\infty \\ c.\ \sum^{\infty} \exp\left[-a\left(\dfrac{m_p}{p}\right)^{1+\frac{1}{2\rho}}\right] < +\infty \end{array}\right\} \text{pour un certain } a.$$

Alors, il existe une suite $\{R_p\}$ *telle que*

$$\mathcal{H}(\{R_p\}, \rho) \subset \mathcal{S}_\infty(\{M_p\}, \{N_p\}).$$

De plus, $\mathcal{H}(\{R_p\}, \rho)$ *muni de la topologie induite par* $\mathcal{S}_\infty(\{M_p\}, \{N_p\})$ *est dense dans* $\mathcal{S}_\infty(\{M_p\}, \{N_p\})$.

Posons

$$\mu_{2(p-1)\rho+1} = \mu_{2(p-1)\rho+2} = \ldots = \mu_{2p\rho} = \left(\frac{m_p}{p}\right)^{\frac{1}{2\rho}} \qquad (p = 1, 2, \ldots)$$

et soit r_p la suite obtenue en rangeant par ordre de grandeur croissante les nombres n_p, μ_p. Les hypothèses entraînent

$$\sum^{\infty} \exp[-a(\mu_p)^{2\rho+1}] < +\infty; \qquad \sum^{\infty} [-a(r_p)^{2\rho+1}] < +\infty; \qquad (r_p)^{\frac{1}{p}} = o(1).$$

Soit alors $K(x)$, $R(x)$ les fonctions associées respectivement aux suites $\{\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_p\}$ et $\{r_1, r_2, \ldots, r_p\}$. On a

$$R(x) = K(x) + N(x);$$
$$\operatorname{Log} \frac{M_p}{p!} = \sup_{x>0} \left[2p\rho \operatorname{Log} \frac{x}{k} - K\left(\frac{x}{k}\right)\right].$$

On a donc, quels que soient x et p,

$$k^{2p\rho} \frac{M_p}{p!} \geqq x^{2p\rho} e^{-K\left(\frac{|x|}{k}\right)}$$

et, pour un certain H,

$$H^p M_p e^{-N\left(\frac{|x|}{k}\right)} \geqq p!(1+x^{2\rho})^p e^{-R\left(\frac{|x|}{k}\right)},$$

ce qui montre que

$$\mathcal{H}(\{R_p\}, \rho) \subset \mathcal{S}_\infty(\{M_p\}, \{N_p\}).$$

Soit maintenant

$$f(x) \in \mathcal{S}(\{M_p\}, \{N_p\}).$$

Les fonctions $\rho_n(x)$ étant celles considérées dans la proposition 2, posons

$$f_{n,r}(x) = \int_{-r}^{r} f(\lambda)\,\rho_n(x-\lambda)\,d\lambda; \qquad f_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\,\rho_n(x-\lambda)\,d\lambda.$$

Il est facile de voir que

$$f_{n,r}(x) \in \mathcal{H}(\{R_p\}, \rho);$$

d'après la proposition 4 du paragraphe 2, les $f_n(x)$ convergent vers $f(x)$ dans $\mathcal{S}_\infty(\{M_p\}, \{N_p\})$. Il suffit donc de montrer que lorsque r tend vers l'infini, les $f_{n,r}(x)$ convergent vers $f_n(x)$ dans $\mathcal{S}_\infty(\{M_p\}, \{N_p\})$. Cela résulte encore de la proposition 4 du paragraphe 2 : Pour n fixé, $\rho_n(x) \in \mathcal{S}(\{M_p\}, \{N_p\})$ et la fonction μ_r définie par $\mu_r(x) = 0$ pour $|x| \leqq r$ et $\mu_r(x) = f(x)$ pour $|x| \geqq r$ converge bien vers zéro dans le sens voulu, car on a

$$\int_r^\infty |f(\lambda)|\, e^{N\left(\frac{\lambda}{k}\right)}\,d\lambda \leqq \int_r^\infty e^{N\left(\frac{\lambda}{K}\right) - N\left(\frac{\lambda}{k}\right)}\,d\lambda$$

et il suffit d'appliquer le lemme 3 du paragraphe 1.

Lorsque les suites $\{M_p\}$, $\{N_p\}$ vérifient les hypothèses de la proposition 3, on est assuré que l'espace $\mathcal{S}_\infty(\{M_p\}, \{N_p\})$ contient des fonctions non nulles, et l'on peut envisager son dual $\mathcal{S}'_\infty(\{M_p\}, \{N_p\})$ qui sera un espace de distributions généralisées.

Le théorème 3 se prolonge immédiatement à ces espaces $\mathcal{S}'_\infty(\{M_p\}, \{N_p\})$. Le résultat suivant montre qu'on peut encore considérer ces distributions généralisées comme valeurs limites de fonctions holomorphes dans un demi-plan.

Théorème 8. — *Les suites $\{M_p\}$, $\{N_p\}$ vérifient les hypothèses de la propostion 3. Toute distribution généralisée $\varphi \in \mathcal{S}'_\infty(\{M_p\}, \{N_p\})$ peut se mettre sous la forme*

$$\varphi(x = \lim_{\substack{y > 0 \\ y \to 0}} [\varphi(x - iy) - \varphi(x + iy)], \tag{2.5.9}$$

où $\varphi(z)$ est une fonction holomorphe pour $y \neq 0$ possédant la propriété :

Quels que soient h, k, il existe une constante A telle que

$$|\varphi(x+iy)| \leqq A\, e^{N\left(\frac{|x|}{k}\right) + \mu\left(\frac{1}{h|y|}\right)} \qquad (y \neq 0), \tag{2.5.10}$$

où l'on pose

$$\mu(r) = \sup_{p \geq 0}\left(p \operatorname{Log} r - \operatorname{Log}\frac{M_p}{p!}\right).$$

La démonstration est tout à fait semblable à celle de la deuxième partie du théorème 4. En conservant les mêmes notations, on a

$$\left|\frac{d^p}{dz^p}[z^q G_{pq}(z)]\right| \leqq \frac{p!}{2\pi y^{p+1}}(2|z|)^q \int_{-\infty}^{+\infty} |dg_{pq}|$$

et ensuite

$$|\varphi(z)| \leqq \frac{1}{2\pi} \sup_{q\geqq 0}\left(\frac{|z|^q}{k^q N_q}\right) \sup_{p\geqq 0}\left(\frac{(p+1)!}{(hy)^{p+1} M_{p+1}}\right) \sum_p \sum_q h^{p+1}(2k)^q M_p N_q \int_{-\infty}^{+\infty} |dg_{pq}|,$$

ce qui donne les inégalités (2.5.10).

Proposition 4. — *Les notations et les hypothèses sont celles du théorème 8. Alors, si $f(z) \in \mathcal{H}(\{R_p\}, \rho)$, on a*

$$\int \varphi(x) f(x)\, dx = \int_{L'_h} \varphi(z) f(z)\, dz - \int_{L_h} \varphi(z) f(z)\, dz, \tag{2.5.11}$$

en désignant par L_h et L'_h les courbes

$$y = \frac{1}{h\,\Omega(x)}, \qquad y = \frac{-1}{h\,\Omega(x)}$$

orientées dans le sens des x croissants : h est choisi assez grand pour que L_h et L'_h soient dans le domaine d'holomorphie de $f(z)$.

En effet, sur L_h, on a

$$|\varphi(x+iy)| \leqq A \exp\left[N\left(\frac{|x|}{k}\right) + \mu\left(\frac{h\,\Omega(x)}{H}\right)\right]$$

quels que soient k, H ; en utilisant les notations de la proposition 3, on voit qu'on a, γ désignant une constante,

$$\begin{aligned}
\exp\left(\frac{h\,\Omega(x)}{H}\right) &= \sup_p \frac{h^p(1+x^{2\rho})^p p!}{H^p M_p} \leqq \sup_p \frac{\gamma^p h^p x^{2p} p!}{H^p M_p} \\
&= \sup_p \frac{\gamma^p h^p x^{2p\rho}}{H^p \mu_1\mu_2\ldots\mu_{2p\rho}} \leqq \sup\left(\frac{\gamma h}{H}\right)^{\frac{p}{2\rho}} \frac{x^p}{\mu_1\mu_2\ldots\mu_\rho} \\
&= \exp\left\{K\left[\left(\frac{H}{\gamma h}\right)^{\frac{1}{2\rho}} x\right]\right\}.
\end{aligned}$$

Si l'on choisit H de façon que $\left(\frac{\gamma h}{H}\right)^{\frac{1}{2\rho}} \leqq \frac{1}{k}$, on aura

$$\exp\left(\frac{h\,\Omega(x)}{H}\right) \leqq e^{K\left(\frac{|x|}{k}\right)} \qquad \text{et} \qquad |\varphi(x+iy)| \leqq A\, e^{N\left(\frac{|x|}{k}\right)+K\left(\frac{x}{k}\right)}.$$

D'où

$$\varphi(z) = O\left[e^{R\left(\frac{|x|}{k}\right)}\right] \qquad \text{pour} \quad z \in L_h, \quad \text{quel que soit } k. \tag{2.5.12}$$

Cela montre que les intégrales $\int_{L_h} \varphi_s(z) f(z)\, dz$ et $\int_{L'_h} \varphi_i(z) f(z)\, dz$ sont absolument convergentes, et, en vertu du théorème de Cauchy, indépendantes de h.

Il faut donc montrer que

$$\lim_{\substack{y \to 0 \\ y > 0}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x+iy) f(x)\, dx = \int_{L_h} \varphi(z) f(z)\, dz$$

et la relation analogue pour $\varphi_i(z)$.

Soient A et A′ les points d'intersection de L_h avec la parallèle à Ox d'ordonnée y, $-X$ et $+X$ leurs abscisses. On peut remplacer dans l'intégrale de droite l'arc de L_h compris entre A et A′ par le segment AA′. On est ainsi conduit à démontrer que

$$\lim_{y \to 0} \int_{-X}^{X} \varphi_s(x+iy)\,[f(x+iy) - f(x)]\, dx = 0.$$

En utilisant la formule de Cauchy et (2.5.2), on voit que, dans un voisinage D_H de l'axe réel, on a

$$f'(z) = O\left[\Omega(x)\, e^{-R\left(\frac{|x|}{k}\right)}\right] \qquad \text{et} \qquad |f(x+iy) - f(x)| \leq A\,|y|\,\Omega(x)\, e^{-R\left(\frac{|x|}{k}\right)},$$

d'où

$$\int_{-X}^{X} \varphi_s(x+iy)\,[f(x+iy) - f(x)]\, dx = O\left(\frac{1}{h}\right),$$

ce qui permet de conclure, car h peut être choisi aussi grand qu'on veut.

Proposition 5. — *Les notations sont celles du théorème* 8. *Si* $\varphi = 0$, $\varphi(z)$ *est une fonction entière.*

Démonstration analogue à celle de la proposition 4 du paragraphe 2.

Grâce au théorème 8 et à la proposition 5, il est possible d'étendre la définition du support donnée au paragraphe 3 à ces espaces $\mathcal{S}'(\{M_p\}, \{N_p\})$.

CHAPITRE III.

Transformation de Fourier des distributions généralisées. Applications.

1. Transformation de Fourier dans les espaces $\mathcal{S}_2(\{M_p\}, \{N_p\})$ et $\mathcal{S}'_2(\{M_p\}, \{N_p\})$.

Nous étudions dans ce paragraphe la transformation de Fourier dans les espaces $\mathcal{S}_2(\{M_p\}, \{N_p\})$ et $\mathcal{S}'_2(\{M_p\}, \{N_p\})$ pour lesquels les suites $\{M_p\}$, $\{N_p\}$ vérifient les conditions

(3.1.1) $$\varliminf_{p \to \infty} \frac{1}{p} \frac{M_p}{M_{p-1}} > 0; \qquad \varliminf_{p \to +\infty} \frac{1}{p} \frac{N_p}{N_{p-1}} > 0.$$

Il est immédiat que la deuxième de ces conditions entraîne (2.2.8).

Proposition 1. — *Les suites* $\{M_p\}$ *et* $\{N_p\}$ *vérifiant* (3.1.1), *la transformation de Fourier et son inverse, définies par*

$$(3.1.2)\qquad F(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,e^{-iux}\,dx;\qquad f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} F(u)\,e^{iux}\,du$$

définissent deux isomorphismes topologiques entre $\mathcal{S}_2(\{M_p\},\{N_p\})$ *et* $\mathcal{S}_2(\{N_p\},\{M_p\})$.

En effet, $(iu)^p F^{(q)}(u)$ est la transformée de Fourier de $((ix)^q f(x))^{(p)}$; en utilisant la formule de Parseval et (2.2.1), on obtient

$$\begin{aligned}\| u^p F^{(q)}(u)\|_2 &= \|(x^q f(x))^{(p)}\|_2\\ &\leq \sum_{r=0}^{p}\frac{p(p-1)\ldots(p-r+1)\,q(q-1)\ldots(q-r+1)}{r!}\|x^{q-r} f^{(p-r)}(x)\|_2\\ &\leq A\sum_{r=0}^{\infty}\frac{p(p-1)\ldots(p-r+1)\,q(q-1)\ldots(q-r+1)}{r!}k^{q-r}h^{p-r}M_{p-r}N_{q-r}.\end{aligned}$$

D'après (3.1.1), il existe une constante β telle que $\frac{M_p}{M_{p-1}}\geq\frac{p}{\beta}$; on obtient alors,

$$\|u^p F^{(q)}(u))\|_2\leq Ah^p M_p N_q\sum_r\frac{q(q-1)\ldots(q-r+1)}{r!}k^{q-r}\left(\frac{\beta}{h}\right)^r = Ah^p\left(k+\frac{\beta}{h}\right)^q M_p N_q,$$

ce qui montre que

$$F(u)\in\mathcal{S}_2(\{N_p\},\{M_p\});$$

de plus, $F(u)$ converge vers zéro dans $\mathcal{S}_2(\{N_p\},\{M_p\})$ lorsque $f(x)$ converge vers zéro dans $\mathcal{S}_2(\{M_p\},\{N_p\})$.

La proposition 1 permet de justifier l'énoncé suivant :

Définition. — Les suites $\{M_p\}$, $\{N_p\}$ vérifiant (3.1.1), soit

$$\varphi(x)\in\mathcal{S}'_2(\{M_p\},\{N_p\}).$$

Sa transformée de Fourier est une distribution généralisée

$$\mathcal{C}(\varphi)=\Phi(u)\in\mathcal{S}'_2(\{N_p\},\{M_p\})$$

définie par la formule

$$(3.1.3)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(u)\,F(u)\,du=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\,f(-x)\,dx,$$

où $F(u)$ est un élément arbitraire de $\mathcal{S}_2(\{N_p\},\{M_p\})$ et $f(x)$ sa transformée de Fourier inverse.

Lorsque φ se réduit à une distribution ordinaire, la formule (3.1.3) définit bien sa transformée de Fourier habituelle.

La formule (3.1.3) définit tout aussi bien la transformée de Fourier inverse φ d'un élément $\Phi\in\mathcal{S}'_2(\{N_p\},\{M_p\})$.

PROPOSITION 2. — *La transformation de Fourier et son inverse, définies par la formule* (3.1.3) *sont deux isomorphismes topologiques entre* $\mathcal{S}'_2(\{M_p\}, \{N_p\})$ *et* $\mathcal{S}'_2(\{N_p\}, \{M_p\})$.

PROPOSITION 3. — *Soient*

$$\varphi \in \mathcal{S}'_\infty(\{p!\}, \{p!\}) \quad et \quad \psi \in O'(\{p!\}, \{M_p\}).$$

On a

$$\mathcal{C}(\varphi \star \psi) = \mathcal{C}(\varphi)\,\mathcal{C}(\psi).$$

Il suffit d'utiliser deux fois les relations

$$\int \mathcal{C}(\varphi \star \psi)\,\mathcal{C}(g)\,du = \int [\varphi(x) \star \psi(x)]\,g(-x)\,dx$$
$$= \int \varphi(x)\,[\psi(-x) \star g(-x)]\,dx = \int \mathcal{C}(\varphi)\,\mathcal{C}(\psi)\,\mathcal{C}(g)\,dx,$$

où

$$g \in \mathcal{S}_\infty(\{p!\}, \{p!\}),$$

en supposant d'abord que ψ est une fonction.

Transformée de Fourier complexe. — Soit maintenant

$$\varphi \in \mathcal{S}'_2(\{p!\}, \{p!\}).$$

Posons, en utilisant le théorème 6 du chapitre II,

$$\varphi = \varphi_+ + \varphi_-;$$

$$\varphi_+ = \sum_{p=0}^{\infty} D^p g_p(x); \qquad g_p(x) = 0 \quad \text{pour } x < 0; \qquad \left\| g_p(x)\, e^{-\frac{|x|}{k}} \right\|_2 = O\left(\frac{1}{h^p p!}\right);$$

$$\varphi_- = \sum_{p=0}^{\infty} D^p h_p(x); \qquad h_p(x) = 0 \quad \text{pour } x > 0; \qquad \left\| h_p(x)\, e^{\frac{|x|}{k}} \right\|_2 = O\left(\frac{1}{h^p p!}\right);$$

$$G_p(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty g_p(x)\, e^{-iwx}\, dx \qquad (v < 0);$$

$$H_p(w) = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 h_p(x)\, e^{-iwx}\, dx \qquad (v > 0).$$

On aura, pour $v \leqq -\frac{1}{k}$,

$$|G_p(x)| \leqq \int_0^\infty |g_p(x)|\, e^{-\frac{x}{k}}\, dx \leqq \sqrt{k} \left\| g_p(x)\, e^{-\frac{|x|}{k}} \right\|_2.$$

D'où

$$G_p(w) = O\left(\frac{1}{h^p p!}\right) \quad \text{et, de même,} \quad H_p(w) = O\left(\frac{1}{h^p p!}\right) \qquad (p \to \infty).$$

On peut alors poser

$$\Phi(w) = \sum_{p=0}^{\infty} (iw)^p \, G_p(w) \qquad (v < 0);$$

$$\Phi(w) = \sum_{p=0}^{\infty} (iw)^p \, H_p(w) \qquad (v > 0).$$

On voit que $\Phi(w)$ est une fonction holomorphe pour $v \neq 0$ possédant la propriété : *Quels que soient h, k, il existe* A *tel que*

$$(3.1.4) \qquad |\Phi(u+iv)| \leq A\, e^{\frac{|w|}{h}} \qquad \text{pour} \quad |v| \geq \frac{1}{k}.$$

Lorsque v tend vers zéro par valeurs positives, $\Phi(u-iv)$ et $\Phi(u+iv)$ convergent respectivement vers $\mathcal{C}(\varphi_+)$ et vers $\mathcal{C}(\varphi_-)$ et l'on peut écrire

$$(3.1.5) \qquad \mathcal{C}(\varphi) = \Phi = \lim_{\substack{v \to 0 \\ v \geq 0}} [\Phi(u-iv) - \Phi(u+iv)].$$

Lorsque φ est une fonction, $\Phi(w)$ est sa transformée de Fourier-Carleman [10].

THÉORÈME 1. — *Pour que $\Phi(w)$ soit la transformée de Fourier complexe d'un élément $\varphi \in \mathcal{S}'_2(\{p!\}, \{p!\})$ de support contenu dans le segment $[a, b]$, il faut et il suffit que $\Phi(w)$ soit une fonction entière vérifiant*

$$(3.1.6) \qquad \begin{cases} \overline{\lim_{r\to\infty}} \dfrac{1}{r} \operatorname{Log} |\Phi(r\, e^{i\theta})| \leq a \sin\theta & (\sin\theta \leq 0), \\ \overline{\lim_{r\to\infty}} \dfrac{1}{r} \operatorname{Log} |\Phi(r\, e^{i\theta})| \leq b \sin\theta & (\sin\theta \geq 0). \end{cases}$$

Montrons d'abord que si $\varphi \in \mathcal{S}'_2(\{p!\}, \{p!\})$ et a son support contenu dans $[a, b]$, les conditions (3.1.6) sont satisfaites. Utilisons le théorème 7 du chapitre II. On a

$$\varphi = \sum_{p=0}^{\infty} D^p g_p(x),$$

avec $g_p(x) = 0$ pour $x < a$ et $x > b$;

$$\| g_p(x) \|_2 = O\left(\frac{1}{h^p p!}\right) \qquad (p \to \infty) \qquad \text{pour tout } h.$$

Posons

$$G_p(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b g_p(x)\, e^{-iwx}\, dx;$$

on a, pour $v \geq 0$, pour tout h, A désignant une constante

$$|G_p(w)| \leq \frac{e^{bv}}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{b-a}\, \| g_p(x) \|_{L^2}.$$

D'où

$$|\Phi(w)| \leqq \sqrt{\frac{b-a}{2\pi}}\, e^{bv}\left(\sup_p \frac{|w|^p}{h^p p\,!}\right)\sum_{p=0}^{\infty} h^p p\,!\, \|g_p(x)\|_2 \leqq \mathrm{A}\, e^{bv+\frac{|w|}{h}} \qquad (\mathrm{A}=\mathrm{Cte}).$$

D'où

$$\overline{\lim}\, \frac{1}{r}\, \mathrm{Log}\, |\Phi(r e^{i\theta})| \leqq b \sin\theta + \frac{1}{h},$$

ce qui donne la deuxième condition (3.1.6). La première s'obtient de même.

Montrons la réciproque. Les conditions (3.1.6) entraînent d'abord

$$\overline{\lim_{u\to\pm\infty}}\, \frac{1}{u}\, \mathrm{Log}\, |\Phi(u)| = 0 \quad ([3], \text{ théorème } 5.4.4),$$

d'où

$$\Phi(u) \in \mathcal{S}'_2(\{p\,!\}, \{p\,!\}).$$

Il existe $\varphi \in \mathcal{S}'_2(\{p\,!\}, \{p\,!\})$ dont $\Phi(u)$ est la transformée de Fourier. On aura

$$\varphi = \lim_{\substack{y\to 0\\ y>0}} [\varphi(x-iy) - \varphi(x+iy)];$$

$$\varphi(z) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty} \Phi(u)\, e^{iuz}\, du \qquad (y>0);$$

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0} \Phi(u)\, e^{iuz}\, du \qquad (y<0).$$

On voit facilement que la formule

$$\varphi_1(z) = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty} \Phi(ir)\, e^{-rz}\, dr$$

définit une fonction holomorphe pour $x>b$ qui réalise le prolongement analytique de $\varphi(z)$ sur la demi-droite $x>b$. On a donc $\varphi=0$ pour $x>b$; on établit de même que $\varphi=0$ pour $x<a$.

Proposition 4. — *Soit $\varphi \in \mathcal{S}'_\infty(\{\mathrm{M}_p\}\{+\infty\})$. Sa transformée de Fourier est une fonction continue $\Phi(u)$ vérifiant, quel que soit h,*

$$(3.1.7) \qquad \mathrm{Log}\, |\Phi(u)| = \mathrm{M}\left(\frac{|u|}{h}\right) + o(1) \qquad (u \to \pm\infty).$$

Utilisons le théorème 3 du chapitre II. On a

$$\varphi = \sum_{p=0}^{\infty} \mathrm{D}^p g_p(x),$$

les $g_p(x)$ étant des mesures vérifiant

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g_p(x)|\, dx = \mathrm{O}\left(\frac{1}{h^p \mathrm{M}_p}\right).$$

Posons

$$G_p(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g_p(x)\, e^{-iux}\, dx.$$

On a

$$|G_p(u)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |g_p(x)|\, dx;$$

$$\Phi(u) = \sum_{p=0}^{\infty} (iu)^p\, G_p(u);$$

$$|\Phi(u)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\sup_{p\geq 0} \frac{|u|^p}{h^p M_p}\right) \sum_{p=0}^{\infty} h^p M_p \int_{-\infty}^{+\infty} |g_p(x)|\, dx,$$

ce qui donne (3.1.7). Les $G_p(u)$ étant continues, $\Phi(u)$ aussi.

PROPOSITION 5. — *Soient $f(x) \in \mathcal{D}(\{M_p\}$ de support contenu dans (a, b); $F(w)$ sa transformée de Fourier complexe. Il existe des constantes A, h, telles que*

$$(3.1.8)\qquad \begin{cases} \operatorname{Log}|F(w)| \leq A - M\left(\dfrac{|u|}{h}\right) + bv & (v \geq 0), \\ \operatorname{Log}|F(w)| \leq A - M\left(\dfrac{|u|}{h}\right) + av & (v \leq 0). \end{cases}$$

On a, en effet,

$$(iw)^p\, |F(w)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b f^p(x)\, e^{-iwx}\, dx,$$

et, d'après (1.2.1),

$$|w|^p\, |F(w)| \leq \frac{A(b-a)}{\sqrt{2\pi}}\, e^{bv}\, h^p M_p \quad \text{pour tout } p.$$

D'où

$$|F(w)| \leq \frac{A(b-a)}{\sqrt{2\pi}}\, e^{bv} \inf_{p\geq 0} \frac{h^p M_p}{|w|^p},$$

ce qui donne la première relation (3.1.8); l'autre s'obtient de même.

2. Structure des distributions généralisées construites sur une classe non quasi analytique.

LEMME. — *Soit $\{Q_p\} \in \mathfrak{M}$ et vérifiant $(Q_p)^{\frac{1}{p}} = O\left[\left(Q_{p-1})^{\frac{1}{p}}\right)\right]$. Il existe une distribution généralisée*

$$\gamma \in \bigcup_{\{R_p\}\in\mathfrak{M}} \mathcal{E}(\{R_p\}),$$

de support origine, et une fonction

$$\omega(x) \in \mathcal{S}_\infty(\{Q_p\}, \{p\,!\})$$

nulle pour $x \leqq 0$ *vérifiant*

$$\gamma \star \omega(x) = \delta \quad \text{(mesure de Dirac)}. \tag{3.2.1}$$

Posons, en effet,

$$\Gamma(w) = \prod_{p=1}^{\infty}\left(1 + \frac{iw}{q_p}\right); \qquad q_p = \frac{Q_p}{Q_{p-1}}. \tag{3.2.2}$$

$\Gamma(w)$ est une fonction entière de la variable complexe $w = u + iv$. Montrons d'abord que $\Gamma(w)$ est de type exponentiel nul : on peut écrire, en désignant par $q(r)$ la fonction de distribution de la suite $\{q_p\}$

$$\frac{1}{r}\operatorname{Log}|\Gamma(re^{i\theta})| = \mathrm{I} + \mathrm{J},$$

avec

$$\mathrm{I} = \frac{1}{r}\int_0^a \operatorname{Log}\left(1 + \frac{r}{\rho}\right) dq(\rho) \leqq \frac{q(a)}{r}\operatorname{Log}\left(1 + \frac{r}{q_1}\right);$$

$$\mathrm{J} = \frac{1}{r}\int_a^{\infty} \operatorname{Log}\left(1 + \frac{r}{\rho}\right) dq(\rho) \leqq \int_a^{\infty}\frac{dq(\rho)}{\rho}.$$

On peut toujours choisir a assez grand pour avoir $\mathrm{J} \leqq \frac{\varepsilon}{2}$, puis r assez grand pour avoir $\mathrm{I} \leqq \frac{\varepsilon}{2}$, d'où

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{r}\operatorname{Log}|\Gamma(r\,e^{i\theta})| = 0. \tag{3.2.3}$$

Montrons maintenant qu'il existe une suite $\{\mathrm{R}_p\} \in \mathfrak{M}$, de fonction associée $\mathrm{R}(r)$ vérifiant

$$\Gamma(u) = \mathrm{O}\left[e^{\mathrm{R}\left(\frac{|u|}{k}\right)}\right] \qquad (u \to \pm\infty), \qquad \text{quel que soit } k. \tag{3.2.4}$$

On a, en effet,

$$\operatorname{Log}|\Gamma(u)| = \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\operatorname{Log}\left(1 + \frac{u^2}{\rho^2}\right) dq(\rho).$$

On vérifie facilement que $\operatorname{Log}|\Gamma(u)|$ vérifie les hypothèses du lemme 2. Il existe donc une suite $\{\mathrm{R}_p\} \in \mathfrak{M}$ dont la fonction associée $\mathrm{R}(r)$ vérifie, quel que soit k,

$$\lim_{|u|\to\infty}\left[\mathrm{R}\left(\frac{u}{k}\right) - \operatorname{Log}|\Gamma(u)|\right] = +\infty,$$

ce qui donne (3.2.4).

Enfin, on a, pour $v \leqq \eta\,(0 \leqq \eta < q_1)$,

$$\left|1 + \frac{iw}{q_p}\right| \geqq 1 - \frac{\eta}{q_p} \qquad \text{et} \qquad \left|1 + \frac{iw}{q_p}\right| \geqq \frac{|u|}{q_p}.$$

d'où l'on déduit

$$|\Gamma(w)| \geqq \mathrm{K}(\eta)\sup\frac{|u|^p}{q_1 q_2 \ldots q_p} = \mathrm{K}(\eta)\,e^{\mathrm{Q}(|u|)} \qquad (v \leqq \eta), \tag{3.2.5}$$

avec

$$K(\eta) = \prod_{p=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\eta}{q_p}\right),$$

$Q(r)$ désignant la fonction associée à $\{Q_p\}$. D'après (3.2.3) et le théorème 1, $\Gamma(w)$ est la transformée de Fourier d'une distribution généralisée γ de support origine. On a $R(r) \geqq Q(r)$ et la suite $\{R_p\}$ vérifie aussi $(R_p)^{\frac{1}{p}} = O\left[(R_{p-1})^{\frac{1}{p}}\right]$; d'après (3.2.4) et la proposition 1 du chapitre II, on a

$$\Gamma(u) \in \mathcal{S}'_2(\{p!\}, \{R_p\})$$

donc

$$\gamma \in \mathcal{S}'_2(\{R_p\}, \{p!\}), \qquad \text{puis} \quad \gamma \in \mathcal{S}'_\infty(\{R_p\}, \{p!\}),$$

et, puisque γ est à support compact, $\gamma \in \mathcal{E}'(\{R_p\})$. Par ailleurs, d'après (3.2.5),

$$\frac{1}{\Gamma(w)} \in \mathcal{H}_\infty(\{Q_p\}, \qquad \text{donc} \quad \frac{1}{\Gamma(u)} \in \mathcal{S}_2(\{p!\}), (\{Q_p\}).$$

$\dfrac{1}{\Gamma(u)}$ est la transformée de Fourier d'une fonction

$$\omega(x) \in \mathcal{S}_2(\{Q_p\}, \{p!\}), \qquad \text{donc} \quad \omega(x) \in \mathcal{S}_\infty(\{Q_p\}, \{p!\});$$

$\omega(x)$ est donnée par

$$\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iux}\,du}{\Gamma(u)};$$

en remplaçant l'intégrale le long de l'axe réel par une intégrale prise le long d'un demi-cercle de grand rayon, de centre O, tracée dans le demi-plan $v \leqq 0$, on voit facilement, d'après (3.2.5), que $\omega(x) = 0$ pour $x < 0$. Enfin, la relation $\omega(u) \dfrac{1}{\Gamma(u)} = 1$ donne (3.2.2).

Théorème 2. — *Soient $\{M_p\} \in \mathfrak{M}$ et $\{M'_p\} \in \mathfrak{M}$. Il existe une distribution généralisée $\gamma \in \bigcup_{\{R_p\} \in \mathfrak{M}} \mathcal{E}'(\{R_p\})$ de support origine, ne dépendant que des suites $\{M_p\}$, $\{M'_p\}$, possédant la propriété suivante :*

Toute distribution généralisée $\varphi \in \mathcal{D}'_+(\{M_p\})$ est de la forme

$$\varphi = \gamma \star f(x); \qquad f(x) \in \mathcal{D}_+(\{M'_p\}); \tag{3.2.6}$$

de plus, si

$$\varphi \in \mathcal{S}'_\infty(\{M_p\}, \{N_p\}) \qquad [\textit{resp.}\ \varphi \in O'(\{M_p\}, \{N_p\})],$$

on a

$$f \in \Omega(\{M'_p\}, \{N_p\}) \qquad [\textit{resp.}\ f \in \mathcal{S}_\infty(\{M'_p\}, \{N_p\})].$$

Soit, en effet, $Q_p = \inf_{q \geqq 0} M_q M'_{p-q}$; quitte à remplacer $\{Q_p\}$ par une suite

« plus petite », par exemple $\inf_{q \leq p} Q_{p-q} e^{q^2}$ (¹), on peut supposer que $\{Q_p\}$ vérifie $(Q_p)^{\frac{1}{p}} = O\left[(Q_{p-1})^{\frac{1}{p}}\right]$. D'après le lemme, il existe γ et $\omega(x)$ vérifiant (3.2.1), avec $\omega(x) \in \mathcal{S}_\infty(\{Q_p\}, \{p!\})$ et $\omega(x) = 0$ pour $x < 0$. Si $\varphi \in \mathcal{D}'_+(\{M_p\})$, la régularisée $f(x) = \varphi \star \omega(x)$ est dans $\mathcal{D}'(\{M_p\})$. En effectuant la convolution par γ, on obtient (3.2.6). De plus, on voit que si

$$\varphi \in \mathcal{S}'_\infty(\{M_p\}, \{N_p\}) \qquad [\text{resp. } O'(\{M_p\}, \{N_p\})],$$

on a

$$f \in \Omega(\{M'_p\}, \{N_p\}) \qquad [\text{resp. } \mathcal{S}_\infty(\{M'_p\}, \{N_p\})].$$

THÉORÈME 3. — *Soient φ et ψ appartenant à $\bigcup_{\{M_p\} \in \mathfrak{M}} \mathcal{E}'(\{M_p\})$. Alors, le segment-support de $\varphi \star \psi$ est la somme des segments-supports de φ et ψ.*

Ce résultat a été démontré dans le cas où φ et ψ sont des fonctions par Titchmarsch ([24], p. 324). Dans le cas général, c'est une conséquence immédiate d'un théorème de Lévinson ([20], chap. III) : D'après ce théorème, le théorème 1 et la proposition 4 du paragraphe 1, la « densité » des zéros de la transformée de Fourier d'un élément

$$\varphi \in \bigcup_{\{M_p\} \in \mathfrak{M}} \mathcal{E}'(\{M_p\})$$

de segment-support (a, b) est $\frac{b-a}{\pi}$. D'où il résulte que la longueur du segment-support de $\varphi \star \psi$ est la somme des longueurs des segments-supports de φ et ψ. On sait, d'autre part, que le support de $\varphi \star \psi$ est contenu dans la somme des supports de φ et ψ, ce qui permet de conclure.

THÉORÈME 4. — *Soit $\{Q_p\}$ une suite positive logarithmiquement convexe vérifiant*

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{Q_{p-1}}{Q_p} \operatorname{Log} \frac{Q_p}{Q_{p-1}} < +\infty. \tag{3.2.7}$$

Alors, toute distribution généralisée $\varphi \in \mathcal{E}'(\{Q_p\})$ est égale à une série de la forme (1.3.2) convergente dans un certain $\mathcal{E}'(\{R_p\})$ ($\{R_p\} \in \mathfrak{M}$), les mesures μ_p ayant leurs supports contenus dans le segment-support de φ.

L'hypothèse (3.2.7) permet de remplacer (3.2.4) par une inégalité analogue, mais valable dans tout le plan. D'abord, l'hypothèse (3.2.7) équivaut à

$$\int^{\infty} \frac{q(\rho) \operatorname{Log} \rho}{\rho^2} d\rho < +\infty, \tag{3.2.8}$$

(¹) D'après le lemme 4, p. 55, la suite obtenue appartient à $\mathfrak{M}$.

en effet, on a

$$\sum^{\infty} \frac{Q_{p-1}}{Q_p} \operatorname{Log} \frac{Q_p}{Q_{p-1}} = \int^{\infty} \operatorname{Log}\rho \frac{dq(\rho)}{\rho} = \lim_{r \to \infty} \left[\frac{q(r) \operatorname{Log} r}{r} + \int^{r} \frac{q(\rho)}{\rho^2} (\operatorname{Log}\rho - 1)\, d\rho \right],$$

d'où

$$\int^{\infty} \frac{q(\rho)}{\rho^2} (\operatorname{Log}\rho - 1)\, d\rho \leqq \sum^{\infty} \frac{Q_{p-1}}{Q_p} \operatorname{Log} \frac{Q_p}{Q_{p-1}},$$

ce qui montre que (3.2.7) entraîne (3.2.8). D'autre part, on a

$$\int_r^{2r} \frac{q(\rho)}{\rho^2} (\operatorname{Log}\rho - 1)\, d\rho \geqq \frac{q(r)}{2r} \operatorname{Log} \frac{r}{2},$$

ce qui montre que (3.2.8) entraîne

$$\lim_{r \to \infty} \frac{q(r) \operatorname{Log} r}{r} = 0 \qquad \text{et} \qquad \sum^{\infty} \frac{Q_{p-1}}{Q_p} \operatorname{Log} \frac{Q_p}{Q_{p-1}} < +\infty.$$

D'autre part, on a

$$\int_1^{R} \frac{\operatorname{Log}|\Gamma(-ir)|}{r^2} dr = \int_1^{R} \frac{dr}{r} \int_0^{\infty} \frac{1}{r+\rho} \frac{q(\rho)}{\rho} d\rho = \int_0^{\infty} \frac{q(\rho)}{\rho} d\rho \int_1^{R} \frac{dr}{r(1+\rho)}$$
$$= \int_0^{\infty} \left[\operatorname{Log}(\rho+1) - \operatorname{Log}\left(1 + \frac{\rho}{R}\right) \right] \frac{q(\rho)}{\rho^2} d\rho \leqq \int_0^{\infty} \frac{q(\rho) \operatorname{Log}(\rho+1)}{\rho^2} d\rho,$$

d'où

$$\int^{\infty} \frac{\operatorname{Log}|\Gamma(-ir)|}{r^2} dr < \infty.$$

On déduit de là qu'il existe une suite $\{R_p\} \in \mathfrak{M}$ telle qu'on ait, quel que soit k,

$$|\Gamma(r e^{i\theta})| \leqq A\, e^{R\left(\frac{r}{k}\right)} \qquad (A = \text{Cte}). \tag{3.2.9}$$

En raisonnant comme pour le théorème 7 du chapitre II, on voit qu'il suffit de démontrer le théorème 4 dans le cas où φ a pour support l'origine. Sa transformée de Fourier est une fonction entière vérifiant

$$\Phi(r e^{i\theta}) = O(e^{\varepsilon r}) \qquad \text{quel que soit } \varepsilon > 0, \tag{3.2.10}$$

$$\Phi(u) = O\left[e^{Q\left(\frac{|u|}{k}\right)}\right] \qquad \text{quel que soit } k \qquad (u \text{ réel}). \tag{3.2.11}$$

La fonction $\frac{\Phi(w)}{\Gamma(w)}$ est holomorphe dans le demi-plan $v < 0$. D'après (3.2.5) et (3.2.10), on a

$$\left|\frac{\Phi(w)}{\Gamma(w)}\right| \leqq B_\varepsilon e^{\varepsilon r} \quad \text{pour tout } \varepsilon > 0,$$

et, d'après (3.2.5) et (3.2.11), on a

$$\frac{\Phi(u)}{\Gamma(u)} = o(1) \qquad (u \to \pm\infty).$$

D'après un théorème de Phragmen-Lindelöf, on a alors

$$|\Phi(w)| \leqq B\,|\Gamma(w)|$$

dans tout le demi-plan $v \leqq 0$ ($B = \mathrm{Cte}$). D'après (3.2.9), on a donc, quel que soit k,

$$(3.2.12) \qquad |\Phi(w)| \leqq AB\, e^{R\left(\frac{|w|}{k}\right)} \qquad (v \leqq 0).$$

Considérons alors le développement de Taylor de $\Phi(w)$,

$$(3.2.13) \qquad |\Phi(w)| = \sum_{p=0}^{\infty} C_p (iw)^p.$$

On sait qu'on a

$$|C_p|\, r^p \leqq \sup_{\rho \leqq r} |\Phi(r e^{i\theta})|, \qquad \text{d'où} \qquad |C_p|\, r^p \leqq AB\, e^{R\left(\frac{r}{k}\right)},$$

$$|C_p| \leqq AB \inf_p \left(r^{-p} e^{R\left(\frac{r}{R}\right)}\right) = \frac{AB}{k^p R_p}; \qquad \lim_{p \to \infty} (R_p |C_p|)^{\frac{1}{p}} \leqq \frac{1}{k}$$

et, puisque k est arbitraire,

$$\lim_{p \to \infty} (R_p |C_p|)^{\frac{1}{p}} = 0.$$

Il en résulte que la série $\sum_{p=0}^{\infty} C_p \delta^{(p)}$ converge dans $\mathcal{D}'(\{R_p\})$ et qu'on peut écrire

$$\varphi = \sum_{p=0}^{\infty} C_p \delta^{(p)},$$

ce qui achève la démonstration.

Remarque. — On ne peut pas, dans l'énoncé du théorème 4 remplacer la condition (3.2.7) par une condition moins restrictive. En reprenant le calcul fait ci-dessus, on a

$$\int_1^R \operatorname{Log} |\Gamma(-ir)| \frac{dr}{r^2} = \int_0^\infty \operatorname{Log} \frac{R(\rho+1)}{\rho+R} \frac{q(\rho)}{\rho^2}\, d\rho$$
$$\geqq \int_0^{\sqrt{R}} \operatorname{Log} \frac{R(\rho+1)}{\rho+R} \frac{q(\rho)}{\rho^2}\, d\rho \geqq \int_0^{\sqrt{R}} q(\rho) \operatorname{Log} \rho \frac{d\rho}{\rho^2}.$$

$\left(\text{On utilise le fait que } \frac{R}{\rho+R} \text{ croît avec R et } R \geqq \rho^2.\right)$ Si l'on suppose

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{Q_{p-1}}{Q_p} \operatorname{Log} \frac{Q_p}{Q_{p-1}} = +\infty,$$

c'est-à-dire

$$\int^\infty \frac{q(\rho) \operatorname{Log} \rho}{\rho^2}\, d\rho = +\infty,$$

on a

$$\int^\infty \frac{\operatorname{Log} |\Gamma(-ir)|\, dr}{r^2} = +\infty.$$

Alors, si l'on pose

$$\Gamma(w)=\sum_{p=0}^{\infty} C_p(iw)^p,$$

on a

$$\Gamma(-ir)=\sum_{p=0}^{\infty} C_p r^p.$$

Les C_p sont positifs. On a

$$C_{p+1}C_{p-1}=\sum\frac{1}{q_{\alpha_1}q_{\alpha_2}\ldots q_{\alpha_{p-1}}q_{\beta_1}q_{\beta_2}\ldots q_{\beta_{p+1}}}=\sum\frac{1}{q_{\alpha_1}q_{\alpha_2}\ldots q_{\alpha_{p-1}}}\sum\frac{1}{q_{\beta_1}q_{\beta_2}\ldots q_{\beta_{p+1}}},$$

les sommations étant étendues à tous les systèmes d'indices vérifiant

$$\alpha_1<\alpha_2\ldots<\alpha_{p-1};\qquad \beta_1<\beta_2\ldots<\beta_p<\beta_{p+1};$$

$$(C_p)^2=\sum\frac{1}{q_{\alpha_1}q_{\alpha_2}\ldots q_{\alpha_p}q_{\beta_1}q_{\beta_2}\ldots q_{\beta_p}}=\sum\frac{1}{q_{\alpha_1}q_{\alpha_2}\ldots q_{\alpha_{p-1}}}\sum\frac{1}{q_{\alpha_p}q_{\beta_1}q_{\beta_2}\ldots q_{\beta_p}}$$

$$(\alpha_1<\alpha_2\ldots<\alpha_{p-1}<\alpha_p;\ \beta_1<\beta_2\ldots<\beta_p).$$

Et il est facile de voir que $C_p \geqq C_{p-1}C_{p+1}$, ce qui montre que la suite $\{C_p\}$ est logarithmiquement concave. Posons

$$C(r)=\sup_{p\geqq 0} C_p r^p;$$

on a

$$\Gamma\left(-i\frac{r}{2}\right)\leqq C(r)\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{2^p}=2C(r),\qquad \text{d'où}\qquad \int^{\infty}\frac{C(r)\,dr}{r^2}=+\infty,$$

ce qui montre que la série $\sum_{p=0}^{\infty} C_p\delta^{(p)}$ ne converge dans aucun $\mathcal{D}'(\{M_p\})$ (théorème 3 du chapitre I).

3. Structure des distributions généralisées construites sur une classe de fonctions analytiques.

Étude de certains produits canoniques. — Soit $\{\lambda_p\}$ une suite positive, non décroissante, vérifiant

(3.3.1) $$a.\quad \lim_{p\to\infty}\frac{\lambda_p}{p}=+\infty;\qquad b.\quad \sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_p}=+\infty.$$

Soit ε_p une suite de nombres égaux à $+1$ ou à -1; on pose

(3.3.2) $$S(r)=\sum_{\lambda_p\leqq r}\frac{\varepsilon_p}{\lambda_p};\qquad a=\underline{\lim}_{r\to\infty} S(r);\qquad b=\overline{\lim}_{r\to\infty} S(r).$$

La série $\sum^{\infty} \frac{1}{\lambda_p^2}$ étant convergente d'après (3.3.1, a) on peut définir une fonction entière $\Gamma(w)$ par

$$\Gamma(w) = \prod_{p=1}^{\infty} \left(1 + \frac{i\varepsilon_p w}{\lambda_p}\right) e^{-\frac{i\varepsilon_p w}{\lambda_p}} \qquad (w = u + iv = r e^{i\theta}), \tag{3.3.3}$$

ce qu'on peut écrire $\Gamma(w) = \Gamma_1(w)\Gamma_2(w)$, avec

$$\Gamma_1(w) = \prod_{\varepsilon_p = +1} \left(1 + \frac{iw}{\lambda_p}\right) e^{-\frac{iw}{\lambda_p}}; \qquad \Gamma_2(w) = \prod_{\varepsilon_p = -1} \left(1 - \frac{iw}{\lambda_p}\right) e^{\frac{iw}{\lambda_p}}.$$

On désigne par $\lambda_1(r)$ et $\lambda_2(r)$ respectivement les fonctions de distributions des modules des zéros des fonctions $\Gamma_1(w)$ et $\Gamma_2(w)$.

On pose

$$\lambda(r) = \lambda_1(r) + \lambda_2(r); \qquad \mu(r) = \lambda_1(r) - \lambda_2(r),$$

$\lambda(r)$ est la fonction de distribution de la suite λ_p. Les hypothèses (3.3.1) s'écrivent aussi

$$a.\ \lim_{r \to \infty} \frac{\lambda(r)}{r} = 0; \qquad b.\ \int^{\infty} \frac{d\lambda(r)}{r} = +\infty; \tag{3.3.4}$$

et entraîne

$$\lim_{r \to \infty} \frac{\lambda_1(r)}{r} = \lim_{r \to \infty} \frac{\lambda_2(r)}{r} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{r \to \infty} \frac{\mu(r)}{r} = 0.$$

D'autre part, on a

$$S(r) = \int_0^r \frac{d\mu(\rho)}{\rho} = \frac{\mu(r)}{r} + \int_0^r \frac{\mu(\rho)}{\rho^2} d\rho;$$

d'où

$$\overline{\lim_{r \to \infty}} \int_0^r \frac{\mu(\rho)}{\rho^2} d\rho = b; \qquad \underline{\lim_{r \to \infty}} \int_0^r \frac{\mu(\rho)}{\rho^2} d\rho = a. \tag{3.3.5}$$

On peut écrire

$$|\Gamma(u)|^2 = \prod_{p=1}^{\infty} \left(1 + \frac{u^2}{\lambda_p^2}\right) \qquad (u \text{ réel}), \tag{3.3.6}$$

$$\operatorname{Log}|\Gamma(ir)| = H_1(r) + K(r); \qquad \operatorname{Log}|\Gamma(-ir)| = H_2(r) - K(r); \tag{3.3.7}$$

$$\left\{\begin{aligned} H_1(r) &= \int_0^{\infty} \operatorname{Log}\left|1 - \frac{r^2}{\rho^2}\right| d\lambda_1(\rho); \qquad H_2(r) = \int_0^{\infty} \operatorname{Log}\left|1 - \frac{r^2}{\rho^2}\right| d\lambda_2(\rho); \\ K(r) &= \int_0^{\infty} \left[\frac{r}{\rho} - \operatorname{Log}\left(1 + \frac{r}{\rho}\right)\right] d\mu(\rho) = \int_0^{\infty} \frac{r^2}{(r+\rho)} \frac{\mu(\rho)}{\rho^2} d\rho \\ &= \int_0^{\infty} \frac{r^2}{(r+\rho)^2} \left\{\int_0^{\rho} \frac{\mu(u)}{u^2} du\right\} d\rho. \end{aligned}\right. \tag{3.3.8}$$

LEMME 1. — *On a*

$$\overline{\lim_{u\to\infty}} \frac{1}{|u|} \operatorname{Log} |\Gamma(u)| = 0$$

découle de (3.3.6) et d'un résultat de Carlson ([4], Note II).

LEMME 2. — $\Gamma(w)\Gamma(-w)$ *est une fonction entière de type exponentiel nul.*

En effet,

$$|\Gamma(w)\Gamma(-w)| = \Pi \left| 1 - \frac{w^2}{\lambda_p^2} \right| \leqq \Pi \left(1 + \frac{r^2}{\lambda_p^2} \right) = |\Gamma(r)|^2$$

découle alors du lemme 1.

LEMME 3. — *On a*

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{H_1(r)}{r} = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{H_2(r)}{r} = 0.$$

De plus, quels que soient $\varepsilon > 0$ *et* $\gamma > 1$, *on a*

(3.3.9) $$H_1(r) \geqq -\varepsilon r; \qquad H_2(r) \geqq -\varepsilon r$$

pour un r *vérifiant* $\frac{R}{\gamma} \leqq r \leqq \gamma R$ *dès que* $R \geqq R_0(\varepsilon, \gamma)$.

Considérons la fonction entière

$$C(w) = \prod_{\varepsilon_p = +1} \left(1 - \frac{w^2}{\lambda_p^2} \right).$$

On a

$$H_1(r) = \operatorname{Log} |C(r)|.$$

D'après le résultat cité de Carlson, $C(w)$ est de type exponentiel nul, d'où

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{H_1(r)}{r} \leqq 0;$$

la formule de Carleman appliquée à la fonction $C(w)$ dans le demi-plan $v > 0$ montre alors que

$$\lim_{R\to\infty} \int^{R} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{R^2} \right) \operatorname{Log} |C(r)| \, dr$$

existe. Supposons qu'on ait, pour une infinité de R_j tendant vers l'infini, $H_1(r) \leqq -\varepsilon r$ sur les intervalles $\frac{R_j}{\gamma} \leqq r \leqq \gamma R_j$. On aurait alors

$$\int_{\frac{R_j}{\gamma}}^{\gamma R_j} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{\gamma^2 R_j^2} \right) H_1(r) \, dr \leqq -2\varepsilon \operatorname{Log} \gamma + \frac{\varepsilon}{2} \left(1 - \frac{1}{\gamma^4} \right),$$

ce qui entraîne une contradiction. Le principe de cette démonstration est dû à M. Kahane ([16], p. 88).

Lemme 4. — *On a*

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{1}{r}\operatorname{Log}|\Gamma(ir)|\leqq b;\qquad \overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{1}{r}\operatorname{Log}|\Gamma(-ir)|\leqq -a. \tag{3.3.10}$$

D'après (3.3.7) et le lemme 3, il suffit de montrer que

$$\overline{\lim}\frac{K(r)}{r}\leqq b\qquad \text{et}\qquad \underline{\lim}\frac{K(r)}{r}\geqq a.$$

On a, d'après (3.3.5)

$$\int_0^\rho \frac{\mu(u)}{u^2}\,du\leqq b+\varepsilon\qquad \text{dès que}\quad \rho\geqq R_0(\varepsilon).$$

D'autre part, d'après (3.3.8) on a $\frac{K(r)}{r}=I+J$, avec

$$I=\int_0^{R_0}\frac{r}{(r+\rho)^2}\left\{\int_0^\rho\frac{\mu(u)}{u^2}\,du\right\}d\rho;\qquad |I|\leqq\frac{R_0}{R_0+r}\sup_{\rho\geqq 0}\left(\left|\int_0^\rho\frac{\mu(u)}{u^2}\,du\right|\right)$$

$$J=\int_{R_0}^\infty\frac{r}{(r+\rho)^2}\left\{\int_0^\rho\frac{\mu(u)}{u^2}\,du\right\}d\rho\leqq(b+\varepsilon)\int_{R_0}^\infty\frac{r\,d\rho}{(r+\rho)^2}\leqq b+\varepsilon,$$

R_0 étant choisi, on peut toujours choisir r assez grand pour avoir

$$|I|\leqq\varepsilon,\qquad \text{d'où}\qquad \overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{K(r)}{r}\leqq b+2\varepsilon,$$

et, puisque ε est arbitraire,

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{K(r)}{r}\leqq b.$$

L'inégalité

$$\underline{\lim_{r\to\infty}}\frac{K(r)}{r}\geqq a$$

s'obtient de façon analogue.

Lemme 5. — *On donne les nombres a, b finis. On peut toujours choisir les ε_p de manière à satisfaire les conditions suivantes :*

a. $$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{K(r)}{r}=b;\qquad \underline{\lim_{r\to\infty}}\frac{K(r)}{r}=a;$$

b. Quels que soient $\varepsilon>0$ et $\gamma>1$, il existe une infinité de R_q croissant et tendant vers l'infini, une infinité de R'_q croissant et tendant vers l'infini, telles que

$$\begin{cases} K(r)\geqq(b-5\varepsilon)\,r & \textit{pour}\quad \dfrac{R_q}{\gamma}\leqq r\leqq\gamma R_q,\\[2mm] K(r)\leqq(a+5\varepsilon)\,r & \textit{pour}\quad \dfrac{R'_q}{\gamma}\leqq r\leqq\gamma R'_q.\end{cases} \tag{3.3.11}$$

On voit d'abord qu'on peut choisir les ε_p de manière à avoir les propriétés suivantes :

a. $$\overline{\lim}\,S(r)=b;\qquad \underline{\lim}\,S(r)=a;$$

b. Il existe des nombres R_q croissant et tendant vers l'infini, des nombres R'_q croissant tendant vers l'infini, tels qu'on ait, quel que soit $\varepsilon > 0$,

$$\left.\begin{array}{ll} S(r) \geqq b - \varepsilon & \text{pour } \dfrac{R_q}{q} \leqq r \leqq q R_q \\ S(r) \leqq a + \varepsilon & \text{pour } \dfrac{R'_q}{q} \leqq r \leqq q R'_q \end{array}\right\} \quad \text{et} \quad r \geqq R_0(\varepsilon);$$

cela découle immédiatement des propriétés classiques des séries divergentes.

On a

$$\frac{|\mu(r)|}{r} \leqq \varepsilon \qquad \text{pour} \quad r \geqq R_1(\varepsilon) \geqq R_0(\varepsilon).$$

On aura alors

$$\left.\begin{array}{ll} \displaystyle\int_0^r \frac{\mu(r)}{r^2}\,dr \geqq b - 2\varepsilon & \text{pour } \dfrac{R_q}{q} \leqq r \leqq q R_q \\ \displaystyle\int_0^r \frac{\mu(r)}{r^2}\,dr \leqq a - 2\varepsilon & \text{pour } \dfrac{R'_q}{q} \leqq r \leqq q R' \end{array}\right\} \quad \text{et} \quad r \geqq R_1(\varepsilon).$$

Posons $K(r) = I_1 + I_2 + I_3$;

$$I_1 = \int_0^{\frac{R_q}{q}} \frac{r}{(r+\rho)^2} \left\{ \int_0^\rho \frac{\mu(u)}{u^2}\,du \right\} d\rho;$$

$$I_2 = \int_{\frac{R_q}{q}}^{q R_q} \frac{r}{(r+\rho)^2} \{ \ldots \} d\rho; \qquad I_3 = \int_{q R_q}^{\infty} \frac{r}{(r+\rho)^2} \{ \ldots \} d\rho,$$

avec

$$\frac{R_q}{q} \geqq R_1(\varepsilon) \qquad \text{et} \qquad \frac{R_q}{q} \leqq \frac{R_q}{\gamma} \leqq r \leqq \gamma R_q \leqq q R_q.$$

On a, en posant $M = \sup_{\rho > 0} \left| \int_0^\rho \frac{\mu(u)}{u^2}\,du \right|$

$$|I_1| \leqq M \int_0^{\frac{R_q}{q}} \frac{r\,dp}{(r+\rho)^2} = \frac{M R_q}{qr + R_q} \leqq \frac{M\gamma}{q+\gamma};$$

$$|I_3| \leqq M \int_{q R_q}^{\infty} \frac{r\,d\rho}{(r+\rho)^2} = \frac{M r}{r + q R_q} \leqq \frac{M\gamma}{q+\gamma}$$

et

$$I_2 \leqq (b - 2\varepsilon) \int_{\frac{R_q}{q}}^{q R_q} \frac{r\,d\rho}{(r+\rho)^2} = (b - 2\varepsilon) \frac{(q^2 - 1)\, r R_p}{(r + q R_q)(rq + R_q)}.$$

La dernière expression obtenue est invariante lorsqu'on change r en $\frac{R_q^2}{r}$; lorsque r parcourt l'intervalle $\left(\frac{R_q}{\gamma}, \gamma R_q\right)$, son minimum est atteint aux extrémités de cet intervalle et vaut $(b-2\varepsilon)\dfrac{\gamma(q^2-1)}{(\gamma q+1)(\gamma+q)}$. On voit qu'en prenant q assez grand, on aura

$$I_2 \geqq b-3\varepsilon; \qquad |I_1| \leqq \varepsilon; \qquad |I_3| \leqq \varepsilon;$$

d'où la première inégalité (3.3.11). La deuxième s'obtient de façon analogue.

Le résultat suivant intéressant en lui-même, est à rapprocher d'un théorème analogue de MM. Kahane et Rubel [17] établi par une méthode tout à fait différente.

Théorème 5. — *On donne deux nombres a, b et une suite positive m_p vérifiant les conditions suivantes :*

$\dfrac{m_p}{p}$ *est non décroissante*;

$$\lim_{n\to\infty}\frac{m_p}{p}=+\infty; \qquad \sum^{\infty}\frac{1}{m_p}=+\infty.$$

Soit $M(r)$ *la fonction associée à la suite* $\{M_p\}=\{m_1, m_2, \ldots, m_p\}$. *Alors, il existe une fonction entière* $\Gamma(w)$ *vérifiant*

$$\text{(3.3.12)} \qquad \operatorname{Log}|\Gamma(u)| \leqq M(|u|) \qquad (u \text{ réel})$$

de type exponentiel a dans le demi-plan inférieur, de type exponentiel b dans le demi-plan supérieur, et telle que le produit $\Gamma(w)\Gamma(-w)$ *soit de type exponentiel nul.*

La fonction $\Gamma(w)$ sera donnée par (3.3.3). La suite $\{\lambda_p\}$ étant fixée, le lemme 1 montre que $\Gamma(w)$ est de type exponentiel nul sur l'axe réel; les lemmes 3 et 5 montrent qu'on peut choisir les ε_p de manière à avoir

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\operatorname{Log}|\Gamma(ir)|}{r}=b; \qquad \overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\operatorname{Log}|\Gamma(-ir)|}{r}=a.$$

Un théorème connu de Phragmen-Lindelöf montre alors que $\Gamma(w)$ est de type exponentiel a dans le demi-plan inférieur et b dans le demi-plan supérieur. Enfin le lemme 2 montre que $\Gamma(w)\Gamma(-w)$ est de type exponentiel nul.

Il reste à montrer qu'on peut choisir les λ_p de manière à satisfaire (3.3.12). Montrons qu'il suffit de poser $\lambda_p=m_{2p}$. En effet, la suite $\dfrac{\lambda_p}{p}$ est alors non décroissante, et la fonction $\dfrac{\lambda(r)}{r}$ est non croissante.

On a d'abord

$$\int_0^r\frac{\lambda(\rho)}{\rho}\,d\rho \geqq \frac{\lambda(r)}{r}\int_0^r d\rho=\lambda(r).$$

Ensuite, on déduit de

$$\text{(3.3.6)} \qquad \operatorname{Log}|\Gamma(r)|=\int_0^\infty\frac{r^2}{r^2+\rho^2}\frac{\lambda(\rho)}{\rho}\,d\rho \leqq \int_0^r\frac{\lambda(\rho)}{\rho}\,d\rho+\frac{\lambda(r)}{r}\int_r^\infty\frac{r^2}{r^2+\rho^2}\,d\rho$$
$$\leqq \int_0^r\frac{\lambda(\rho)}{\rho}\,d\rho+\frac{\pi}{4}\lambda(r) \leqq \left(1+\frac{\pi}{4}\right)\int_0^r\frac{\lambda(\rho)}{\rho}\,d\rho \leqq 2\int_0^r\frac{\lambda(\rho)}{\rho}\,d\rho,$$

c'est-à-dire

$$\Gamma(r) \leq \sup_{p \geq 0} \frac{r^{2p}}{\lambda_1^2 \lambda_2^2 \ldots \lambda_p^2} \leq \sup_{p \geq 0} \frac{r^{2p}}{m_1 m_2 \ldots m_{2p}} \leq \sup_{p \geq 0} \frac{r^p}{m_1 m_2 \ldots m_p},$$

ce qui achève la démonstration.

APPLICATIONS AUX DISTRIBUTIONS GÉNÉRALISÉES.

THÉORÈME 6. — *Soient* $\{M_p\}$ *et* $\{M'_p\}$ *deux suites positives logarithmiquement convexes vérifiant*

$$\lim_{p \to \infty} \frac{1}{p} \frac{M_p}{M_{p-1}} = +\infty; \qquad \lim_{p \to \infty} \frac{1}{p} \frac{M'_p}{M'_{p-1}} = +\infty. \tag{3.3.13}$$

Il existe une distribution généralisée γ *de support origine, ne dépendant que des suites* $\{M_p\}$, $\{M'_p\}$, *possédant la propriété suivante :*

Toute distribution généralisée

$$\varphi \in \mathcal{S}'_\infty(\{M_p\}, \{N_p\}) \qquad [resp.\ O'(\{M_p\}, \{N_p\})]$$

est de la forme

$$\varphi = \gamma \star f(x); \qquad f(x) \in \Omega(\{M'_p\}, \{N_p\}) \qquad [resp.\ f(x) \in \mathcal{S}'_\infty(\{M_p\}, \{N_p\})]. \tag{3.3.14}$$

Il suffit de montrer qu'il existe

$$\omega(x) \in \mathcal{S}_\infty(\{Q_p\}, \{p!\}) \qquad (Q_p = \inf_{q \leq p} M_q M'_{p-q})$$

et γ de support origine vérifiant $\gamma \star \omega(x) = \delta$. On peut d'ailleurs supposer que $\{Q_p\}$ vérifie $(Q_p)^{\frac{1}{p}} = O\left[(Q_{p-1})^{\frac{1}{p}}\right]$.

Si $\{M_p\} \in \mathfrak{M}$ et $\{M'_p\} \in \mathfrak{M}$, le théorème résulte du lemme du paragraphe 2. Si l'une des suites $\{M_p\}$, $\{M'_p\}$ n'est pas dans $\mathfrak{M}$, il en est de même de $\{Q_p\}$. De plus les conditions (3.3.13) qui s'écrivent

$$\lim \frac{m(r)}{r} = \lim \frac{m'(r)}{r} = 0 \qquad \text{entraînent} \quad \lim \frac{q(r)}{r} = 0$$

puisque

$$q(r) = m(r) + m'(r), \qquad \text{donc} \quad \lim_{p \to \infty} \frac{1}{p} \frac{Q_p}{Q_{p-1}} = 0.$$

Considérons alors la fonction $\Gamma(w)$ définie par (3.3.3), avec $\lambda_p = \frac{Q_p}{Q_{p-1}}$; de plus, les ε_p sont choisis de façon que $a = b = 0$. Alors, d'après les lemmes 1 et 4 et le théorème de Phragmen-Lindelöf, $\Gamma(w)$ est une fonction entière de type exponentiel nul, transformée de Fourier d'une distribution généralisée γ de support origine. On a, d'autre part, pour $|v| \leq \eta (0 < \eta < \lambda_p)$,

$$\left|1 + \frac{i\varepsilon_p w}{\lambda_p}\right| \geq 1 - \frac{\varepsilon_p v}{\lambda_p} \qquad \text{et} \qquad \left|1 + \frac{i\varepsilon_p w}{\lambda_p}\right| \geq \frac{|u|}{\lambda_p}.$$

Posons

$$A = \prod_{q=1}^{p} e^{\frac{\varepsilon_q v}{\lambda_q}}; \qquad B = \prod_{q=p+1}^{\infty} \left(1 - \frac{\varepsilon_q v}{\lambda_q}\right) e^{\varepsilon_q \frac{v}{\lambda_q}}.$$

On aura quel que soit p,

$$|\Gamma(w)| \geqq AB \frac{|u|^p}{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_p};$$

d'autre part, on a

$$\operatorname{Log} A \geqq -\eta M, \qquad \text{si} \quad M = \sup_{r \geqq 0} \left| \sum_{\lambda_p \leqq r} \frac{\varepsilon_p}{\lambda_p} \right|$$

et

$$B \geqq \prod_{q=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\eta}{\lambda_p}\right) e^{\frac{\eta}{\lambda_p}} = B(\eta).$$

[On utilise les inégalités faciles à vérifier $(1-x)\, e^x < (1+x) e^{-x} < 1$ pour $x > 0$.] D'où finalement

$$|\Gamma(w)| \geqq B(\eta)\, e^{-M\eta + Q(|u|)} \qquad \text{pour} \quad |v| \leqq \eta.$$

On a donc

$$\frac{1}{\Gamma(u)} \in \mathcal{S}_\infty(\{p!\}, \{Q_p\});$$

$\frac{1}{\Gamma(u)}$ est transformée de Fourier d'une fonction

$$\omega(x) \in \mathcal{S}_\infty(\{Q_p\}, \{p!\})$$

et l'on a $\omega(x) \star \gamma = \delta$, ce qui permet de conclure.

THÉORÈME 7. — *Soit un segment (a,b) et une suite $\{M_p\}$ positive logarithmiquement convexe vérifiant*

$$\frac{1}{p-1} \frac{M_p}{M_{p-1}} \textit{ non décroissante}; \qquad \sum_{p=1}^{\infty} \frac{M_{p-1}}{M_p} = +\infty.$$

Alors, l'espace $\mathcal{S}'_2(\{M_p\}, \{+\infty\})$ contient une distribution généralisée $\gamma(x)$ ayant pour segment-support (a, b) et telle que le produit de convolution $\gamma(x) \star \gamma(-x)$ ait pour support l'origine.

Par la transformation de Fourier, on se ramène à montrer qu'il existe une fonction entière $\Gamma(w)$ de type exponentiel $-a$ dans le plan $v \leqq 0$, de type exponentiel b dans le plan $v \geqq 0$, et vérifiant

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Gamma(u)|^2\, e^{-2M\left(\frac{|u|}{k}\right)} du < +\infty \quad \text{quel que soit } k,$$

et telle que $\Gamma(w)\Gamma(-w)$ soit de type exponentiél nul. D'après le théorème 5 il suffit de construire une suite $\{M'_p\}$ vérifiant les conditions :

a. $\dfrac{m'_p}{p}$ non décroissante ;

b. $\lim\limits_{p\to\infty} \dfrac{m'_p}{p} = +\infty$;

c. $\sum \dfrac{1}{m'_p} = +\infty$;

d. $M'(r) \leqq M\left(\dfrac{r}{k}\right) - \operatorname{Log}\dfrac{r}{k}$ quel que soit k.

La condition d équivaut à :

d'. $\lim\limits_{p\to\infty} \dfrac{m'_p}{m_{p-1}} = +\infty$.

La suite $\{m'_p\}$ définie par

$$m'_p = m_{p+1}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \ldots + \frac{1}{m_p}\right)$$

satisfait aux conditions voulues : c'est à peu près évident pour a, b, d'. Pour c il suffit de poser

$$s_p = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \ldots + \frac{1}{m_p}$$

et de remarquer que le produit infini

$$\prod_p \left(1 - \frac{1}{m'_p}\right) = \prod_p \frac{s_p}{s_{p+1}}$$

est évidemment divergent.

THÉORÈME 8. — *Si φ est une distribution généralisée à support ponctuel et ψ une distribution généralisée à support compact. le segment-support de $\varphi \star \psi$ est la somme des segments-supports de φ et ψ.*

C'est une conséquence immédiate d'un résultat de R.P. Boas, théorème 5.4.12.

4. Application à l'étude des équations de convolution.

LEMME. — *Soit $\varphi \in \bigcup\limits_{\{M_p\}\in\mathfrak{M}} \mathcal{S}'_\infty(\{M_p\}, \{p\,!\})$ vérifiant $\varphi = 0$ pour $x < 0$. Alors, la transformée de Fourier $\Phi(u)$ de φ est prolongeable en une fonction $\Phi(w)$ de la variable complexe $w = u + iv$, holomorphe dans $v < 0$ possédant la propriété suivante : Il existe une fonction non décroissante $\chi(r)$ vérifiant $\int^\infty \frac{\chi(r)}{r^2}\,dr < +\infty$ et telle qu'on ait, quels que soient $\varepsilon > 0$ et $k > 0$,*

$$\operatorname{Log}|\Phi(w)| \leqq A + \chi(|u|) + \varepsilon|v| \qquad \text{pour} \quad v \leqq -\frac{1}{k}, \tag{3.4.1}$$

A, *constante pouvant dépendre de ε et de k.*

Utilisons la formule (3.2.6) avec $M'_p = +\infty$ pour $p > 0$; on a

$$\varphi = \gamma \star f(x), \qquad \text{avec } f(x) \in \Omega(\{+\infty\}, \{p!\}) \quad \text{et} \quad f(x) = 0 \quad \text{pour } x < 0.$$

Passons aux transformées de Fourier

$$\Phi(w) = \mathfrak{F}(\varphi); \qquad \Gamma(w) = \mathfrak{F}(\gamma); \qquad F(w) = \mathfrak{F}(f).$$

Ce sont des fonctions holomorphes pour $v < 0$. On a pour $v \leqq -\frac{1}{k}$,

$$(3.4.2) \qquad |F(w)| \leqq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty |f(x)| e^{vx}\, dx$$
$$\leqq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\sup_x \left| f(x)\, e^{-\frac{x}{2k}} \right| \right) \int_0^\infty e^{-\frac{x}{2k}}\, dx \leqq B \qquad (B = \text{Cte}).$$

D'autre part, la formule (3.2.2) donne, pour $v \leqq 0$,

$$|\Gamma(w)| \leqq \prod_{p=1}^{\infty} \left[\left(1 - \frac{v}{q_p}\right)^2 + \frac{u^2}{q_p^2} \right]^{\frac{1}{2}} = \prod_{p=1}^{\infty} \left(1 - \frac{v}{q_p}\right) \prod_{p=1}^{\infty} \left[1 + \frac{u^2}{q_p^2 \left(1 - \frac{v}{q_p}\right)^2} \right]^{\frac{1}{2}}$$
$$\leqq \Gamma(iv) \prod_{p=1}^{\infty} \left(1 + \frac{u^2}{q_p^2}\right)^{\frac{1}{2}} \leqq \Gamma(iv)\, |\Gamma(u)|.$$

Posons

$$\chi(r) = \operatorname{Log} |\Gamma(r)|.$$

La formule (3.4.1) découle alors de $\Phi(w) = \Gamma(w) F(w)$, de l'inégalité précédente et des inégalités (3.2.3), (3.4.2).

THÉORÈME 9. — *Soit* $\varphi \in \bigcup_{\{M_p\} \in \mathfrak{M}} \mathfrak{S}'_\infty(\{M_p\}, \{p!\})$, *vérifiant* $\varphi = 0$ *pour* $x < 0$; $\Phi(w)$ *sa transformée de Fourier. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une distribution généralisée* $\rho \in \bigcup_{\{M_p\} \in \mathfrak{M}} \mathcal{D}'_+(\{M_p\})$ *vérifiant*

$$(3.4.3) \qquad \varphi \star \rho = \delta$$

est qu'il existe deux fonctions $\sigma(r)$, $\tau(r)$ *définies pour* $r > 0$, *non décroissantes, vérifiant*

$$(3.4.4) \qquad \int^{\infty} \frac{\sigma(r)}{r^2}\, dr < +\infty; \qquad \int^{\infty} \frac{\tau(r)}{r^2}\, dr < +\infty$$

et telle qu'on ait, quel que soit $\varepsilon > 0$,

$$(3.4.5) \qquad \operatorname{Log} |\Phi(w)| \geqq A - \sigma(|u|) - \varepsilon |v| \qquad \textit{pour} \quad v + \tau(|u|) \leqq 0,$$

A, *constante pouvant dépendre de* ε.

La condition est nécessaire : Soit $\rho \in \mathcal{D}'_+(\{M_p\})$ vérifiant (3.4.3). $T > 0$ étant donné, soit ρ_T une distribution généralisée nulle pour $x > T$ et égale à ρ pour

$x < T$. La valeur de $\varphi \star \rho$ sur $(-\infty, T)$ ne dépendant que des valeurs de ρ sur $(-\infty, T)$, on peut écrire

$$\varphi \star \rho_T = \delta + h_T, \qquad \text{avec} \quad h_T \in \bigcup_{\{M_p\} \in \mathfrak{M}} \mathcal{S}'_\infty(\{M_p\}, \{p!\})$$

et $h_T = 0$ pour $x < T$. Prenons les transformées de Fourier

$$\Phi(w) = \mathfrak{F}(\varphi); \qquad R_T(w) = \mathfrak{F}(\rho_T) \qquad \text{et} \qquad H_T(w) = \mathfrak{F}(h_T).$$

Ce sont des fonctions holomorphes dans $v < 0$ vérifiant

$$\Phi(w)\, R_T(w) = 1 + H_T(w). \tag{3.4.6}$$

α, k, T étant fixés, on a, en appliquant le lemme à la distribution déduite de h_T par la translation $-T$,

$$\operatorname{Log}|H_T(w)| \leqq A + \chi(|u|) + \alpha|v| - T|v| \qquad \text{pour} \quad v \leqq -\frac{1}{k}.$$

Posons $\tau(r) = \sup\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{T-\alpha}(A + \chi(r) + \operatorname{Log} 2)\right)$. $\tau(r)$ satisfait bien aux conditions de l'énoncé ; de plus, la relation

$$v + \tau(|u|) \leqq 0 \qquad \text{entraîne} \quad |H_T(w)| \leqq \frac{1}{2}$$

et, d'après (3.4.6)

$$|\Phi(w)|\,.\,|R_T(w)| \geqq \frac{1}{2}. \tag{3.4.7}$$

D'autre part, d'après le lemme, on a, pour $v + \tau(|u|) \leqq 0$,

$$\operatorname{Log}|R_T(w)| \leqq A_1 + \chi_1(|u|) + \varepsilon|v| \quad \text{pour tout } \varepsilon > 0,$$

d'où l'on déduit

$$\operatorname{Log}|\Phi(w)| \geqq -A_1 - \operatorname{Log} 2 - \chi_1(|u|) - \varepsilon|v|),$$

ce qui donne (3.4.5), avec $\sigma(r) = \chi_1(r)$.

La condition est suffisante. Soit

$$\varphi \in \bigcup_{\{M_p\} \in \mathfrak{M}} \mathcal{S}'_\infty(\{M_p\}, \{N_p\})$$

satisfaisant aux conditions de l'énoncé. Posons

$$\rho_\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{L_\alpha} \frac{e^{iwx}\, dw}{\Phi(w)}, \tag{3.4.8}$$

où L_α désigne l'arc de courbe $v + \tau(|u|) = 0$, $|u| \leqq \alpha$, orienté dans le sens des u croissants. Soit $f(x) \in \mathcal{D}(\{M_p\})$ de support contenu dans (a, b), $F(w)$ sa transformée de Fourier. Calculons le produit scalaire $\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_\alpha(x) f(x)\, dx$. On a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_\alpha(x) f(x)\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx \int_{L_\alpha} \frac{e^{iwx}\, dx}{\Phi(w)}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{L_\alpha} \frac{dw}{\Phi(w)} \int_{+\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{iwx}\, dx = \int_{L_\alpha} \frac{F(-w)}{\Phi(w)} dw.$$

On a d'après l'hypothèse et la proposition 5 du paragraphe 1,

$$(3.4.9) \quad \left|\frac{F(w)}{\Phi(w)}\right| \leqq C \exp\left[(b+\varepsilon)|v| - M\left(\frac{|u|}{h}\right) + \sigma(|u|)\right] \qquad (v + \tau(|u|) \leqq 0)$$

et sur L_α,

$$\left|\frac{F(w)}{\Phi(w)}\right| \leqq C \exp\left[(b+\varepsilon)\tau(|u|) + \sigma(|u|) - M\left(\frac{|u|}{h}\right)\right].$$

D'après le lemme 3 de la page 67, on voit que l'intégrale $\int_L \frac{F(-w)}{\Phi(w)}$ sera absolument convergente si la suite $\{M_p\}$ vérifie (1.2.16) et

$$(3.4.10) \qquad \lim_{r\to\infty}\left[M\left(\frac{r}{h}\right) - k\tau(r) - \sigma(r)\right] = +\infty \quad \textit{quels que soient } h \textit{ et } k.$$

D'après le lemme 2 de la page 67, il existe, pour chaque k, une suite $\{M_p\}_k \in \mathfrak{M}$ vérifiant (3.4.10) quel que soit h et, d'après le lemme 5 de la page 56. il existe une suite $\{M_p\} \in \mathfrak{M}$ vérifiant

$$\frac{M_p}{M_{p-1}} \leqq h_k \frac{M_{p,k}}{M_{p-1,k}} \quad \text{quel que soit } k,$$

ce qui entraîne $M\left(\frac{r}{h_k}\right) \leqq M_k(r)$ et par suite

$$\lim_{r\to\infty}\left[M\left(\frac{r}{h}\right) - k\tau(r) - \sigma(r)\right] \geqq \lim_{r\to\infty}\left[M_k\left(\frac{h_k}{h} r\right) - k\tau(r) - \sigma(r)\right] = +\infty.$$

La suite $\{M_p\}$ étant ainsi choisie, l'intégrale $\int_L \frac{F(-w)}{\Phi(w)} dw$ où L désigne la courbe $v + \tau(|u|) = 0$, converge absolument et uniformément lorsque f parcourt un ensemble borné dans $\mathcal{D}(\{M_p\})$. Il en résulte que $\rho_\alpha(x)$ converge dans $\mathcal{D}'(\{M_p\})$ vers une distribution généralisée ρ donnée par

$$(3.4.11) \qquad \rho = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_L \frac{e^{-iwx}}{\Phi(w)} dw.$$

Montrons maintenant que $\rho = 0$ pour $x < 0$; pour cela, reprenons la formule

$$\int \rho_\alpha f(x)\, dx = \int_{L_\alpha} \frac{F(-w)}{\Phi(w)} dw$$

et supposons $b < 0$; on peut d'ailleurs choisir ε de manière à avoir $b + \varepsilon < 0$.

On montre alors facilement que $\int \rho_\alpha f(x)\,dx$ tend vers zéro lorsque α tend vers l'infini, en remplaçant l'intégrale sur L_α par une intégrale prise sur un cercle de rayon α tracé dans le demi-plan $y < 0$, et en utilisant (3.4.9).

Il reste à montrer que $\varphi \star \rho = \delta$, c'est-à-dire que pour toute $f(x) \in \mathcal{D}(\{M_p\})$, on a

$$\int (\varphi \star \rho) f(x)\,dx = f(0).$$

Or, on a

$$\int (\varphi \star \rho) f(x)\,dx = \int \rho(x)\,[\varphi(-x) \star f(x)]\,dx$$
$$= \int_{L} \frac{1}{\Phi(w)} (\Phi(w)\,F(-w))\,dw = \int_{-\infty}^{+\infty} F(-u)\,du = f(0).$$

Remarque. — En précisant un peu la démonstration, on voit facilement que la restriction de ρ à l'intervalle $(-\infty, T)$ appartient à la classe $\mathcal{D}'(\{M_p\})$ s'il existe un nombre $\alpha > 1$, tel que

$$\varliminf_{r \to \infty} \left[M\left(\frac{r}{h}\right) - T\tau(r) - \sigma(r) - \alpha \operatorname{Log} r \right] > -\infty \quad \text{quel que soit } h.$$

Par exemple, si l'on a $|\Phi(w)| \geqq A|u|^\alpha$ $(\alpha > 1)$ dans un demi-plan $v \leqq c$, on voit que ρ est une mesure.

Lemme. — *Les suites $\{M_p\}$, $\{N_p\}$ vérifient (2.2.4) et*

$$\varlimsup_{p \to \infty} \frac{1}{p} \frac{N_p}{N_{p-1}} < +\infty. \tag{3.4.12}$$

Soit $f(x) \in \mathcal{S}_\infty(\{M_p\}, \{N_p\})$. Sa transformée de Fourier est une fonction entière $F(w)$ vérifiant

$$\operatorname{Log}|F(w)| \leqq A - M\left(\frac{|u|}{h}\right) + g(k|v|) \quad \textit{pour un } A, \textit{ un } h, \textit{ un } k.$$

$M(r)$ désignant la fonction associée à la suite $\{M_p\}$ et $g(r)$ la fonction associée à la suite $\left\{\frac{p!}{N_p}\right\}$.

En effet, d'après la proposition 1 du paragraphe 1, on a

$$|F^{(p)}(u)| \leqq A k^p N_p\, e^{-M\left(\frac{|u|}{h}\right)}$$

et la formule de Taylor donne, pour $K > k$,

$$|F(w)| \leqq A \sup \frac{K^p |v|^p N_p}{p!}\, e^{-M\left(\frac{|u|}{h}\right)} \sum_{p=0}^{\infty} \left(\frac{k}{K}\right)^p,$$

ce qui permet de conclure.

THÉORÈME 10. — *Soit* $\varphi \in \mathcal{S}'_\infty(\{p!\}, \{p!\})$ *vérifiant* $\varphi = 0$ *pour* $x < 0$. *On suppose de plus qu'il existe une suite* $\{N_p\}$ *vérifiant* (2.2.8) *et* (3.4.12), *une fonction* $T(r)$ *non décroissante vérifiant*

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{T(r)} \sup_{p>0}\left(p \operatorname{Log} kr - \operatorname{Log}\frac{p!}{N_p}\right) = 0 \quad \textit{quel que soit } k$$

possédant la propriété : quel que soit $\varepsilon > 0$, *il existe* A *tel que*

$$\operatorname{Log}|\Phi(w)| \geqq A - \varepsilon|w| \qquad \text{pour } |u| \leqq T(-v) \qquad (v \leqq 0).$$

Alors il existe une distribution généralisée $\rho \in \mathcal{S}'_\infty(\{p!\}, \{N_p\})$ *nulle pour* $x < 0$ *vérifiant*

$$\rho \star \varphi = \delta.$$

Pour la démonstration, posons

$$\rho_q = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{L_q} \frac{e^{iwx}\,dw}{\Phi(w)}.$$

On désigne par L la ligne $|u| = T(-v)$ orientée dans le sens des u croissants et par L_q l'arc de cette courbe défini par $v \geqq -q$. Soit

$$f(x) \in \mathcal{S}_\infty(\{p!\}, \{N_p\}).$$

On a

$$|\rho_q(x)| \leqq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{q|x|} \int_{L_q} \frac{dw}{|\Phi(w)|}.$$

On peut donc calculer le produit scalaire $\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_q(x) f(x)\,dx$ et l'on a

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_q(x) f(x)\,dx &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx \int_{L_q} \frac{e^{iwx}\,dw}{\Phi(w)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{L_q} \frac{dw}{\Phi(w)} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,e^{iwx}\,dx = \int_{L_q} \frac{F(-w)}{\Phi(w)}\,dw.\end{aligned}$$

Or, on a, d'après le lemme et l'hypothèse,

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(-w)}{\Phi(w)}\right| &\leqq C \exp\left[-\frac{|u|}{h} + \varepsilon|w| + g(k|v|)\right] \\ &\leqq C e^{-\frac{|u|}{2h}} \exp\left[\left(-\frac{1}{2h} + \varepsilon\right)|u| + \varepsilon|v| + g(k|v|)\right] \qquad (C = \text{Cte}).\end{aligned}$$

Sur la ligne L, on a

$$\left(-\frac{1}{2h} + \varepsilon\right)|u| + \varepsilon|v| + g(k|v|) \leqq |u|\left[\left(-\frac{1}{2h} + \varepsilon\right) + \varepsilon\frac{|v|}{T(|v|)} + \frac{g(k|v|)}{T(|v|)}\right].$$

Comme $p! \geqq \frac{p!}{N_p}$, on a

$$r \leqq g(r) \qquad \text{et} \qquad \lim_{r\to\infty} \frac{r}{T(r)} = 0.$$

Il résulte des hypothèses que le crochet tend vers $-\frac{1}{2h}+\varepsilon$ lorsque v tend vers l'infini. Comme on peut toujours choisir $\varepsilon<\frac{1}{2h}$, on déduit de là que l'intégrale $\int_{L_p}\frac{F(-w)}{\Phi(w)}\,dw$ converge absolument et uniformément lorsque F parcourt un ensemble borné dans $\mathcal{S}_\infty(\{p!\},\{N_p\})$. C'est dire que ρ_q converge dans $\mathcal{S}'_\infty(\{p!\},\{N_p\})$ vers une distribution généralisée ρ définie par

$$\rho=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lim_{q\to\infty}\int_{L_q}\frac{e^{iwx}\,dw}{\Phi(w)}. \tag{3.4.13}$$

Montrons que $\rho=0$ pour $x<0$. Pour cela, on considère la fonction analytique $\rho(z)$ définie par

$$\rho(z)=\frac{-1}{\sqrt{2\pi}}\int_{L-}\frac{e^{iwz}\,dw}{\Phi(w)} \qquad (y>0);$$

$$\rho(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{L+}\frac{e^{iwz}\,dw}{\Phi(w)} \qquad (y<0),$$

où L^- et L^+ désignent respectivement la partie de L située dans $u<0$ et celle située dans $u>0$; on remarque que la fonction définie par

$$\rho_1(z)=\frac{-i}{\sqrt{2\pi}}\int_{q_0}^{\infty}\frac{e^{rz}\,dr}{\Phi(-ir)}$$

est holomorphe dans $x<0$ et égale à $\rho(z)$ si $y\neq 0$.

Il reste à montrer que $\varphi\star\rho=\delta$. Cela s'obtient comme dans le théorème 8.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Babenko, *Sur un nouveau problème de quasi-analyticité et sur la représentation de Fourier des fonctions entières* (en russe) (*Troudi de Moscou*, t. 5, 1956, p. 522).

[2] S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, Varsovie, 1932.

[3] Th. Bang, *On quasi-analytiske funktioner* (Thèse), Copenhague, 1946,

[4] V. Bernstein, *Leçons sur les progrès récents de la théorie des séries de Dirichlet*, Gauthier-Villars, Paris, 1933.

[5] R. P. Boas, *Entire functions*, New-York, 1954.

[6] E. Borel, *Leçons sur la théorie de la croissance*, Gauthier-Villars, Paris 1910.

[7] N. Bourbaki, *Espaces vectoriels topologiques*, Hermann, Paris, 1953.

[8] N. Bourbaki, *Sur certains espaces vectoriels topologiques* (*Ann. Inst. Fourier*, t. 2, 1950, p. 516).

[9] T. Carleman, *Les fonctions quasi analytiques*, Gauthier-Villars, Paris, 1926.

[10] T. Carleman, *L'intégrale de Fourier et questions qui s'y rattachent*, Uppsala, 1944.

[11] J. Dieudonné et L. Schwartz, *La dualité dans les espaces $\mathcal{F}$ et* L($\mathcal{F}$) (*Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, t. 1, 1949, p. 61-101).

[12] L. Fantappie, *Théoria de los funcionales analyticos y sus aplicaciones*, Barcelone, 1943.

[13] I. M. GELFAND et G. E. SILOV, *Quelques applications de la théorie des fonctions généralisées* (*J. Math. pures et appl.*, t. 35, 1956, p. 383-413).

[14] A. GROTHENDIECK, *Sur les espaces* $\mathcal{F}$ *et* $\mathcal{DF}$ (*Summa Brasiliensis mathematicae*, t. 3, 1954, p. 57).

[15] A. GROTHENDIECK, *Sur certains espaces de fonctions holomorphes* (*J. Reine Angew. Math.*, t. **192**, 1955, p. 35-64 et 77-95).

[16] J.-P. KAHANE, *Sur quelques problèmes d'unicité et de prolongement relatifs aux fonctions approchables par des sommes d'exponentielles* (*Ann. Inst. Fourier*, t. 5, 1953).

[17] J.-P. KAHANE et L. RUBEL, *Sur les produits canoniques de type nul sur l'axe réel* (*C. R. Acad. Sc.*, **248**, 1959, p. 3102).

[18] KOTHE, *Die Stufenraüme, eine einfache Klasse linearer vollkommener Raüme* (*Math. Z.*, t. **51**, 1948, p. 317-345).

[19] KOTHE, *Die Randverteilungen analytischer Funktionen* (*Math. Z.*, t. **57**, 1953, p. 13).

[20] N. LEVINSON, *Gap et density theorems*, Colloquium, New-York, 1940.

[21] S. MANDELBROJT, *Séries adhérentes, régularisation des suites. Applications*, Gauthier-Villars, Paris, 1952.

[22] L. SCHWARTZ, *Théories des distributions*, 2 vol., Herman, Paris, 1950 et 1951.

[23] G. E. SILOV, *Sur un problème de quasi-analyticité* [*C. R. Acad. Sc. U.R.S.S.* (*Doklady*), t. **102**, n° 5, 1955, p. 893-896].

[24] TITCHMARSH, *Theory of Fourier Integrals*, 2^e^ édit., Oxford, 1948.