ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

W. POGORZELSKI

Propriétés des intégrales généralisées de Poisson-Weierstrass et problème de Cauchy pour un système parabolique

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 76, nº 2 (1959), p. 125-149

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1959_3_76_2_125_0>

PROPRIÉTÉS

DES

INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES DE POISSON-WEIERSTRASS

ET

PROBLÈME DE CAUCHY POUR UN SYSTÈME PARABOLIQUE

PAR W. POGORZELSKI.

(Varsovie).

1. Introduction et formules principales. — Soit un système de $N \geqq 1$ équations aux dérivées partielles

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \hat{\Psi}^{(\alpha)}(u_1, \ldots, u_N) = & \sum_{1 \leqq j \leqq N}^{k_1+\ldots+k_n=M} A_{\alpha j}^{k_1 \ldots k_n}(X, t) \frac{\partial^M u_j}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} \\ & + \sum_{1 \leqq j \leqq N}^{k_1+\ldots+k_n<M} B_{\alpha j}^{k_1 \ldots k_n}(X, t) \frac{\partial^{k_1+\ldots+k_n} u_j}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} \\ & + \sum_{1 \leqq j \leqq N} C_{\alpha j}(X, t)\, u_j - \frac{\partial u_\alpha}{\partial t} = 0 \\ & (\alpha = 1, 2, \ldots, N) \end{aligned}\right.$$

d'ordre $M \geqq 2$ aux N fonctions inconnues $u_1(X, t), \ldots, u_N(X, t)$.

Nous admettons les hypothèses suivantes :

I. Les coefficients des dérivées d'ordre le plus élevé M sont des fonctions réelles, définies et bornées dans tout l'espace euclidien E des variables réelles $X(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dans l'intervalle fini $0 \leqq t \leqq T$. Ces coefficients vérifient la condition de Hölder, par rapport aux variables spatiales et la variable t, de la forme

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} & \left| A_{\alpha j}^{k_1 \ldots k_n}(X, t) - A_{\alpha j}^{k_1 \ldots k_n}(X_1, t_1) \right| < \mathrm{Cte}\left[|XX_1|^h + |t - t_1|^{h'} \right] \\ & \qquad (\alpha, j = 1, 2, \ldots, N), \end{aligned}\right.$$

où h et h' sont des constantes positives, non supérieures à l'unité, $|XX_1|$ désigne la distance euclidienne des deux points arbitraires X et X_1 de l'espace E, t et t_1 sont les deux valeurs arbitraires de l'intervalle (o, T).

II. Les coefficients $B_{\alpha j}$, $C_{\alpha j}$ des dérivées d'ordre inférieur à M sont des fonctions réelles, définies et bornées dans tout l'espace E et pour l'intervalle $0 \leqq t \leqq T$. Ces coefficients vérifient la condition de Hölder par rapport aux variables spatiales

$$(3) \qquad \begin{cases} |B_{\alpha j}^{k_1 \ldots k_n}(X, t) - B_{\alpha j}^{k_1 \ldots k_n}(X_1, t)| < \mathrm{Cte}\, |XX_1|^h, \\ |C_{\alpha j}(X, t) - C_{\alpha j}(X_1, t)| < \mathrm{Cte}\, |XX_1|^h \end{cases}$$

et sont uniformément continues par rapport à la variable t. La condition de Hölder par rapport à cette variable n'est pas nécessaire.

III. Conformément à la définition du système *parabolique*, donnée par Petrovsky [1], l'équation en λ

$$(4) \qquad \det_{\alpha, j} \left| \sum_{k_1 + \ldots + k_n = M} A_{\alpha j}^{k_1 \ldots k_n}(X, t)\, (is_1)^{k_1} \ldots (is_n)^{k_n} - \delta_\alpha^j \lambda \right| = 0,$$

où δ_α^j est le symbole de Kronecker, admet les racines en λ, dont toutes les parties réelles sont inférieures à un nombre négatif fixé $-\delta$

$$(5) \qquad \mathrm{Re}(\lambda) < -\delta < 0$$

pour toutes les valeurs des variables réelles $s_1, s_2, \ldots, s_n$ vérifiant l'égalité

$$(6) \qquad s_1^2 + s_2^2 + \ldots + s_n^2 = 1$$

et pour tout point de la région

$$X \in E, \qquad 0 \leqq t \leqq T.$$

L'hypothèse III exige donc que le degré M des équations (1) soit *pair*.

Les hypothèses I et II sont plus générales que dans le travail [4] de S. Eidelmann consacré au système parabolique.

Dans le travail [2] nous avons construit, sous les hypothèses I, II et III, une matrice, dite des solutions fondamentales, dont les éléments sont donnés par les formules

$$(7) \quad \Gamma_{\alpha\beta}(X, t; Y, \tau) = W_{\alpha\beta}^{Y, \tau}(X, t; Y, \tau) + \int_\tau^t \sum_{\gamma=1}^{N} W_{\alpha\gamma}^{\Pi, \zeta}(X, t; \Pi, \zeta)\, \Phi_{\gamma\beta}(\Pi, \zeta; Y, \tau)\, d\Pi\, d\zeta,$$

où $X(x_1, \ldots, x_n)$, $Y(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ sont deux points arbitraires différents de l'espace E et $\tau < t$ deux valeurs arbitraires dans l'intervalle (o, T). Les fonctions $W_{\alpha\beta}$ sont les élements d'une matrice, dite des quasi-solutions, données par les formules

$$(8)\qquad \left\{ \begin{array}{l} W_{\alpha\beta}^{Z,\zeta}(X, t; Y, \tau) = \dfrac{1}{(2\pi)^n} \displaystyle\iiint_E v_\alpha^\beta(t, \tau; Z, \zeta; S)\, e^{i\sum_{\nu=1}^{n} s_\nu(x_\nu - \xi_\nu)}\, dS \\ \qquad\qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, N) \end{array} \right.$$

étendues à tout l'espace euclidien E des variables réelles $S(s_1, s_2, \ldots, s_n)$. Z désigne un point arbitraire de l'espace E, ζ, une valeur arbitraire dans l'intervalle $(0, T)$. Les fonctions $v_1^\beta, v_2^\beta, \ldots, v_N^\beta$ $(\beta = 1, 2, \ldots, N)$, pour β fixé, forment une solution du système d'équations différentielles ordinaires

$$(9)\qquad \frac{dv_\alpha^\beta}{dt} = \sum_{1 \leq j \leq N}^{k_1+\ldots+k_n = M} A_{\alpha j}^{k_1 \ldots k_n}(Z, \zeta)\,(is_1)^{k_1} \ldots (is_n)^{k_n}\, v_j^\beta(t, \tau; Z, \zeta; S)$$

(où Z, ζ, s_ν jouent le rôle des paramètres fixés), avec la condition initiale $v_\alpha^\beta \to \delta_\alpha^\beta$ si $t \to \tau$.

Les fonctions $\Phi_{\alpha\beta}$ dans les formules (7) forment, pour β fixé, une solution du système d'équations intégrales singulières de Volterra

$$(10)\qquad \left\{ \begin{array}{l} \Phi_{\alpha\beta}(X, t; Y, \tau) = \hat{\Psi}_{X,t}^{(\alpha)}[W_{j\beta}^{Y,\tau}(X, t; Y, \tau)] \\ \qquad + \displaystyle\int_\tau^t \iiint_E \sum_{\gamma=1}^{N} \hat{\Psi}_{X,t}^{(\alpha)}[W_{j\gamma}^{\Pi,\zeta}(X, t; \Pi, \zeta)]\, \Phi_{\gamma\beta}(\Pi, \zeta; Y, \tau)\, d\Pi\, d\zeta \\ \qquad\qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, N), \end{array} \right.$$

où $\hat{\Psi}_{X,T}^{(\alpha)}(u_j)$ désigne une opération différentielle sur le système de fonctions $u_j(u_1, \ldots, u_N)$ par rapport aux variables (X, t) définies par les formules (1). Les fonctions $\Gamma_{1\beta}, \Gamma_{2\beta}, \ldots, \Gamma_{N\beta}$, pour β fixé, forment une solution du système (1) en tout point $X \neq Y$ de l'espace E pour $0 < \tau < t < T$.

Nous allons citer encore deux théorèmes dont nous aurons besoin dans nos considérations ultérieures et qui sont un peu généralisés par rapport aux théorèmes que nous avons démontrés dans le travail [2].

THÉORÈME 1. — *Si les fonctions $\rho_\beta(Y, \tau)$ sont définies, bornées et continues dans la région*

$$Y \in E \qquad (0 \leq \tau \leq T),$$

les fonctions

$$(11)\qquad I_\alpha(X, T, \tau) = \iiint_E \sum_{\beta=1}^{N} W_{\alpha\beta}^{Y,\tau}(X, t; Y, \tau)\, \rho_\beta(Y, \tau)\, dY$$

(*analogues à l'intégrale de Poisson-Weierstrass*) *définies pour* $X \in E$, $0 \leq \tau < t \leq T$, *ont la propriété de limite suivante :*

$$(12)\qquad \lim_{\tau \to t} I_\alpha(X, t, \tau) = \rho_\alpha(X, t) \qquad (\alpha = 1, \ldots, N)$$

uniformément dans tout domaine borné $\Omega \subset E$.

THÉORÈME 2. — *Si les fonctions* $\rho_\beta(Y, \tau)$, *définies dans la région*

$$Y \in E \qquad (0 < \tau \leqq T),$$

et intégrables dans tout domaine borné de l'espace E (*pour* $0 < \tau \leqq T$), *vérifient l'inégalité*

$$|\rho_\beta(Y, \tau)| < \frac{\mathrm{Cte}}{\tau^{\mu'}}$$

et, en outre, une condition de Hölder

$$(13) \qquad \begin{cases} |\rho_\beta(Y, \tau) - \rho_\beta(Y_1, \tau)| < \dfrac{\mathrm{Cte}}{\tau^{\mu_0}} |YY_1|^{h_\rho} \\ (0 < h_\rho < 1,\ 0 < \mu' < 1,\ 0 < \mu_0 < 1) \end{cases}$$

dans un domaine borné $\Omega \subset E$ *pour* $0 < \tau \leqq T$, *alors les fonctions*

$$(14) \qquad U_\alpha(X, t) = \int_0^t \iiint_E \sum_{\beta=1}^{N} W_{\alpha\beta}^{Y,\tau}(X, t;\, Y, \tau)\, \rho_\beta(Y, \tau)\, dY\, d\tau,$$

dites composantes du quasi-potentiel de charge spatiale, admettent les dérivées spatiales d'ordre $m = 1, 2, \ldots, M$ *et la dérivée par rapport à la variable t en tout point intérieur* $X \in \Omega$ *pour* $0 < t < T$, *qui vérifient le système d'équations suivant :*

$$(15) \qquad \sum_{\substack{1 \leqq j \leqq N}}^{k_1+\ldots+k_n=M} A_{\alpha j}^{k_1\ldots k_n}(X, t) \frac{\partial^M U_\alpha(X, t)}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}} - \frac{\partial}{\partial t}[U_\alpha(X, t)]$$
$$= -\rho_\alpha(X, t) + \int_0^t \iiint_E \sum_{1 \leqq \beta, j \leqq N}^{k_1+\ldots+k=M} [A_{\alpha j}^{k_1\ldots k_n}(X, t) - A_{\alpha j}^{k_1\ldots k_n}(Y, \tau)]$$
$$\times \frac{\partial^M W_{j\beta}^{Y,\tau}(X, t;\, Y, \tau)}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}} \rho_\beta(Y, \tau)\, dY\, d\tau \qquad (\alpha = 1, \ldots, N).$$

2. PROPRIÉTÉS DES INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES DE POISSON-WEIERSTRASS.

LEMME. — *Les éléments de la matrice des solutions fondamentales* $\Gamma_{\alpha\beta}$, *données par les formules* (7), *et ses dérivées spatiales d'ordre* $m \leqq M - 1$ *vérifient dans le cas* $|XY| \leqq \rho_0$ *les inégalités*

$$(16) \qquad \begin{cases} |D_X^{(m)}[\Gamma_{\alpha\beta}(X, t;\, Y, \tau)]| < \dfrac{C}{(t-\tau)^{\mu'}} \dfrac{1}{|XY|^{m+n-M\mu'}} \\ X \neq Y,\ 0 \leqq \tau < t \leqq T, \end{cases}$$

μ' *est une constante arbitrairement fixée à l'intérieur de l'intervalle*

$$\left(0, \frac{m+n}{M}\right) \qquad \text{si} \quad m + n < M;$$
$$(0, 1) \qquad \text{si} \quad m + n \geqq M;$$

dans le cas $|XY| > \rho_0$, *on a*

$$(17) \qquad |D_X^{(m)}\Gamma_{\alpha\beta}(X, t; Y, \tau)]| < C'|t-\tau|^{\mu_1}\exp[-k|XY|],$$

où C, C′, k, μ_1, ρ_0 *sont des constantes positives; en outre, nous signalons que les constantes positives* k, ρ_0, μ_1 *peuvent être arbitrairement fixées et qu'on a posé*

$$D_X^{(0)}[\Gamma_{\alpha\beta}] = \Gamma_{\alpha\beta}.$$

Démonstration. — La limitation (16), pour $|XY| \leqq \rho_0$, a été établie dans notre travail [3]. Pour donner la preuve de la limitation (17), nous nous appuierons sur la limitation des éléments (8) de la matrice des quasi-solutions et de ses dérivées d'ordre m arbitraire

$$(18) \qquad |D_X^{(m)}[W_{\alpha\beta}^{Z,\zeta}(X, t; Y, \tau)]| < \frac{C_m}{(\sqrt[M]{t-\tau})^{m+n}}\exp\left[-\frac{c_m|XY|^q}{\sqrt[M-1]{t-\tau}}\right]$$

$\left(q = \dfrac{M}{M-1}\right)$ établie dans notre travail [2] (p. 161).

L'inégalité (18) concerne aussi le cas $m = 0$, si nous posons

$$D_X^{(0)}[W_{\alpha\beta}] = W_{\alpha\beta}.$$

Décomposons la constante positive $c = \min(c_0, c_1, \ldots, c_{M-1})$ d'une façon arbitraire en somme $c = c' + c''$ des deux constantes positives c', c'' et séparons les singularités de la façon indiquée dans le travail [2]. Nous obtiendrons alors une limitation de la forme ($0 \leqq m \leqq M-1$)

$$(19) \qquad |D_X^{(m)}[W_{\alpha\beta}^{Z,\zeta}(X, t; Y, \tau)]| < \frac{\mathrm{Cte}\,|t-\tau|^{\mu_1}}{|XY|^{m+n+M\mu_1}}\exp[-k'|XY|^q],$$

où μ_1 est une constante positive, arbitrairement fixée, et

$$k' = \frac{c''}{\sqrt[M-1]{T}}.$$

Posons maintenant

$$(20) \qquad \begin{cases} \Phi_{\alpha\beta}^{\star}(X, t; Y, \tau) = \Phi_{\alpha\beta}(X, t; Y, \tau)\exp[k_0|XY|], \\ N_{\alpha\beta}^{\star}(X, t; Y, \tau) = \Psi_{X,t}^{(\alpha)}[W_{j\beta}^{Y,\tau}(X, t; Y, \tau)]\exp[k_0|XY|], \end{cases}$$

k_0 étant une constante positive arbitrairement fixée. Alors, d'après les équations (10), les fonctions nouvelles $\Phi_{\alpha\beta}^{\star}$ vérifient le système d'équations intégrales

$$(21) \qquad \left\{ \begin{aligned} \Phi_{\alpha\beta}^{\star}(X, t; Y, \tau) &= N_{\alpha\beta}^{\star}(X, t; Y, \tau) \\ &+ \int_\tau^t \iiint_E \sum_{\gamma=1}^{N} N_{\alpha\gamma}^{\star}(X, t; \Pi, \zeta)\exp\{-k_0[|X\Pi| + |\Pi Y| - |XY|]\} \\ &\times \Phi_{\gamma\beta}^{\star}(\Pi, \zeta; Y, \tau)\,d\Pi\,d\zeta \\ &(\alpha = 1, 2, \ldots, N), \end{aligned} \right.$$

β étant fixé. Or, nous avons l'inégalité

$$|X\Pi| + |\Pi Y| - |XY| \geqq 0$$

quels que soient les points X, Y, Π dans l'espace E, donc d'après les formules (19) et (20), les noyaux $N^{\star}_{\alpha\gamma}$ des équations (21) vérifient les inégalités

$$(22) \qquad |N^{\star}_{\alpha\beta}(X, t; \Pi, \zeta)| \exp\{-k[|X\Pi| + |\Pi Y| - |XY|]\} < \frac{\mathrm{Cte}\,|t-\zeta|^{\mu_1}}{|X\Pi|^{n+M\mu_1}}$$

si $|XY| \geqq \rho_0$, où μ_1 et ρ_0 sont des constantes positives arbitrairement fixées. Nous rappelons que les noyaux $N^{\star}_{\alpha\beta}$, d'après notre travail [2] (p. 179), vérifient une limitation sans modification

$$(23) \qquad |N^{\star}_{\alpha\beta}(X, t; Y, \tau)| < \frac{\mathrm{Cte}}{(t-\tau)^{\mu}} \frac{1}{|XY|^{n+M(1-\mu)-h_1}}$$

si $|XY| < \rho_0$, où la constante μ est fixée par

$$(24) \qquad 1 - \frac{1}{M} h_1 < \mu < 1, \qquad h_1 = \min(h, 2h').$$

Les inégalités (22) et (23) ont la même forme que les inégalités admises pour les fonctions $\Psi^{\star(\alpha)}_{X,t}[W^{Y,\tau}_{j\beta}(X, t; Y, \tau)]$ dans le travail [2] (p. 178-184), donc, en répétant pour le système (21) le raisonnement que nous y avons développé, nous arrivons aux inégalités

$$(25) \qquad |\Phi^{\star}_{\alpha\beta}(X, t; Y, \tau)| < \frac{\mathrm{Cte}}{(t-\tau)^{\mu}} \frac{1}{|XY|^{n+M(1-\mu)-h_1}} \qquad \text{si} \quad |XY| \leqq \rho_0,$$

et

$$(26) \qquad |\Phi^{\star}_{\alpha\beta}(X, t; Y, \tau)| < \frac{\mathrm{Cte}\,|t-\tau|^{\mu_1}}{|XY|^{n+M\mu_1}} \qquad \text{si} \quad |XY| > \rho_0,$$

analogues aux inégalités (106) et (106') du travail [2].

Il en résulte l'inégalité

$$(27) \qquad |\Phi_{\alpha\beta}(X, t; Y, \tau)| < \frac{\mathrm{Cte}\,|t-\tau|^{\mu_1}}{|XY|^{n+M\mu_1}} \exp[-k_0|XY|] \qquad \text{si} \quad |XY| > \rho_0$$

et l'inégalité de la même forme que (25), si $|XY| \leqq \rho_0$. Ces inégalités nous permettent de déduire la limitation (17) pour les éléments de la matrice des solutions données par la formule (7). Étudions donc les intégrales

$$(28) \qquad \left\{ \begin{array}{l} I(X, t; Y, \tau) = \displaystyle\int_{\tau}^{t} \iiint_{E} D_X^{(m)}[W^{\Pi,\zeta}_{\alpha\gamma}(X, t; \Pi, \zeta)] \Phi_{\gamma\beta}(\Pi, \zeta; Y, \tau)\, d\Pi\, d\zeta \\ \qquad\qquad\qquad\qquad (m = 0, 1, \ldots, M-1) \end{array} \right.$$

en supposant $|XY| > 2\rho_0$. Soient les deux sphères K_X et K_Y centrées aux points X, Y et de rayon ρ_0. Nous décomposons l'intégrale (28) en la somme des intégrales

(29) $$I = I^{K_X} + I^{K_Y} + I^{E-K_X-K_Y}$$

étendues aux domaines K_X, K_Y, $E - K_X - K_Y$.

La première intégrale vérifie l'inégalité

$$|I^{K_X}(X, t; Y, \tau)| < \text{Cte} \int_\tau^t \frac{(\zeta-\tau)^{\mu_1}\,d\zeta}{(t-\zeta)^{\mu'}} \iiint_{K_X} \frac{\exp[-k_0 |\Pi Y|]\,d\Pi}{|X\Pi|^{m+n-M\mu'}\,|Y\Pi|^{n+M\mu_1}}.$$

Remarquons maintenant qu'on a $2|\Pi Y| > |XY|$ si $\Pi \in K_X$, il en résulte

(30) $$|I^{K_X}| < \text{Cte}\,\frac{(t-\tau)^{\mu_1+1-\mu'}}{|XY|^{n+M\mu_1}} \exp\left[-\frac{1}{2}k_0|XY|\right].$$

D'une façon analogue, d'après les limitations (19) et (25), on obtient

(31) $$|I^{K_Y}| < \text{Cte}\,\frac{(t-\tau)^{\mu_1+1-\mu'}}{|XY|^{n+M\mu_1}} \exp\left[-\frac{1}{2}k_0|XY|\right] \qquad \text{si} \quad |XY| > 2\rho_0.$$

Le dernier membre de la somme (29), d'après les limitations (19) et (27), vérifie une inégalité

$$|I^{E-K_X-K_Y}| < \text{Cte} \int_\tau^t (t-\zeta)^{\mu_1}(\zeta-\tau)^{\mu_1}\,d\zeta \iiint_{E-K_X-K_Y} \frac{\exp[-k_0|\Pi X| - k_0|\Pi Y|\,d\Pi}{|X\Pi|^{n+M\mu_1}\,|\Pi Y|^{n+M\mu_1}}.$$

Or, nous avons $|\Pi X| + |\Pi Y| \geqq |XY|$ quels que soient les points X, Y, Π, donc

(32) $$|I^{E-K_X-K_Y}| < \text{Cte}\,|t-\tau|^{2\mu_1+1} \exp[-k_0|XY|] \iiint_{E-K_X-K_Y} \frac{d\Pi}{|\Pi X|^{n+M\mu_1}\,|\Pi Y|^{n+M\mu_1}}.$$

La dernière intégrale est bornée, par conséquent, en vertu des résultats (30), (31), (32), en tenant compte de la formule (7) et du théorème sur la dérivation des intégrales de volume (*voir* [2]), nous arrivons à la conclusion (17) de notre lemme.

Passons maintenant à la démonstration des deux théorèmes suivants, donnant certaines propriétés des intégrales généralisées de Poisson-Weierstrass relativement au système (1).

THÉORÈME 3. — *Si les fonctions $f_\alpha(X)$, définies et continues dans tout l'espace* E, *vérifient les inégalités*

(33) $$|f_\alpha(X)| \leqq a \exp[b|XX_0|],$$

où a, b sont des constantes positives données, X_0 *un point fixé de l'espace* E, *alors les intégrales singulières*

(34) $$J_\alpha(X, t) = \iiint_E \sum_{\beta=1}^{N} \Gamma_{\alpha\beta}(X, t; Y, 0) f_\beta(Y)\,dY \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, N)$$

sont absolument convergentes pour $X \in E$, $0 < t \leqq T$, *ont la propriété limite*

$$\lim_{t \to 0} J_\alpha(X, t) = f_\alpha(X) \tag{35}$$

et admettent les dérivées spatiales d'ordre $m \leqq M - 1$, *déterminées par les intégrales absolument convergentes*

$$D_X^{(m)}[J_\alpha(X, t)] = \iiint_E \sum_{\beta=1}^{N} D_X^{(m)}[\Gamma_{\alpha\beta}(X, t; Y, 0)] f_\beta(Y)\, dy \tag{36}$$

en tout point X *de l'espace* E *pour* $0 < t < T$.

Démonstration. — La convergence absolue des intégrales doublement singulières (34) et (36) est assurée pour $|XY| \to 0$ et pour $|XY| \to \infty$, grâce aux inégalités (16) et (17), où l'on peut poser $k > b$, la constante k étant arbitraire. La preuve que les intégrales (36) représentent alors les dérivées spatiales des fonctions (34) est bien connue et donnée dans nos travaux [2] et [3].

Pour démontrer la propriété limite (35), nous décomposons les intégrales (34) en sommes

$$J_\alpha(X, t) = J_\alpha^\Omega(X, t) + J_\alpha^{E-\Omega}(X, t) \tag{37}$$

des intégrales étendues au voisinage Ω du point X, borné et mesurable, et au domaine extérieur $E - \Omega$.

Ensuite nous écrivons

$$J_\alpha^\Omega(X, t) = \overset{*}{J}{}_\alpha^\Omega(X, t) + \overset{**}{J}{}_\alpha^\Omega(X, t) \tag{38}$$

en posant

$$\left\{\begin{aligned} \overset{*}{J}{}_\alpha^\Omega(X, t) &= \iiint_\Omega \sum_{\beta=1}^{N} W_{\alpha\beta}^{Y,0}(X, t; Y, 0) f_\beta(Y)\, dY, \\ \overset{**}{J}{}_\alpha^\Omega(X, t) &= \iiint_\Omega \sum_{\beta=1}^{N} \overline{W}_{\alpha\beta}(X, t; Y, 0) f_\beta(Y)\, dY, \end{aligned}\right. \tag{39}$$

où l'on a désigné par $\overline{W}_{\alpha\beta}$ l'intégrale dans la somme (7). D'après le théorème cité, nous avons

$$\lim_{t \to 0} \overset{*}{J}{}_\alpha^\Omega(X, t) = f_\alpha(X). \tag{40}$$

La seconde des intégrales (39), en vertu des limitations (16) et (25), vérifie l'inégalité

$$\overset{**}{J}{}_\alpha^\Omega(X, t) < \mathrm{Cte} \sup_\Omega |f_\alpha|\, t^{1-(\mu+\mu')}. \tag{41}$$

Or, μ étant fixé dans l'intervalle (24), on peut choisir la constante μ' suffisamment petite pour qu'on ait $1 - (\mu + \mu') > 0$; il en résulte que

$$\lim_{t \to 0} \overset{**}{J}{}_\alpha^\Omega(X, t) = 0,$$

par conséquent

$$\lim_{t \to 0} J_\alpha^\Omega(X, t) = f_\alpha(X). \tag{42}$$

Quant au second composant de la somme (37), en nous appuyant sur l'inégalité (17) ($k > b$), nous aurons une limitation

$$|J_\alpha^{E-\Omega}(X, t)| < \mathrm{Cte}\, t^{\mu_1},$$

d'où

$$\lim_{t \to 0} J^{E-\Omega}(X, t) = 0. \tag{43}$$

En réunissant les résultats (42) et (43), on arrive à la formule (35) du théorème 3.

Théorème 4. — *Si les fonctions* $f_\alpha(X)$, *définies dans tout l'espace* E, *sont intégrables dans tout domaine* $\Omega \subset E$ *borné et mesurable et, en outre, vérifient l'inégalité* (33), *alors les intégrales généralisées de Poisson-Weierstrass* $J_1(X, t), \ldots, J_N(X, t)$ *déterminées par les formules* (34), *forment une solution du système* (1) *pour* $t > 0$, *c'est-à-dire vérifient le système d'équations*

$$\hat{\Psi}_{X,t}^{r(\alpha)}[J_1(X, t), \ldots, J_N(X, t)] = 0 \tag{44}$$

en tout point X *de l'espace* E *pour* $0 < t < T$.

Démonstration. — D'après la formule (7), nous pouvons écrire les intégrales étudiées (34) sous la forme d'une somme

$$J_\alpha(X, t) = \overset{*}{J}_\alpha(X, t) + \overset{**}{J}_\alpha(X, t) \tag{45}$$

de l'intégrale

$$\overset{*}{J}_\alpha(X, t) = \iiint_{E(Y)} \sum_{\mu=1}^{N} W_{\alpha\beta}^{Y,\tau}(X, t; Y, 0) f_\beta(Y)\, dY \tag{46}$$

et de quasi-potentiel de charge spatiale

$$\overset{**}{J}_\alpha(X, t) = \int_0^t \iiint_{E(\Pi)} \sum_{\beta=1}^{N} W_{\alpha\beta}^{\Pi,\zeta}(X, t; \Pi, \zeta)\, \rho_\beta(\Pi, \zeta)\, d\Pi\, d\zeta \tag{47}$$

de densité $\{\rho_\beta\}$ déterminée par les intégrales

$$\rho_\beta(\Pi, \zeta) = \iiint_{E(Y)} \sum_{\gamma=1}^{N} \Phi_{\beta\gamma}(\Pi, \zeta; Y, 0) f_\gamma(Y)\, dY. \tag{48}$$

Nous signalons que, d'après les limitations (16), (19), (25), (27), (33), toutes les intégrales (46), (47) et (48) ont un sens et sont absolument convergentes pour $0 < t < T$ ou $0 < \zeta < T$. L'étude des intégrales (46) n'offre pas de difficulté, puisque, en tenant compte de l'inégalité (18), nous pouvons affirmer qu'elles sont régulières et admettent des dérivées spatiales de tout ordre m et la dérivée par rapport à la variable t, données par les intégrales régulières

$$(49)\qquad D_X^{(m)}\big[\overset{*}{J}_\alpha(X, t)\big] = \iiint_{E(Y)} \sum_{\beta=1}^{N} D_X^{(m)}\big[W_{\alpha\beta}^{Y,\tau}(X, t; Y, 0)\big] f_\beta(Y)\, dY,$$

$$(49')\qquad D_t\big[\overset{*}{J}_\alpha(X, t)\big] = \iiint_{E(Y)} \sum_{\beta=1}^{N} D_t\big[W_{\alpha\beta}^{Y,\tau}(X, t; Y, 0)\big] f_\beta(Y)\, dY$$

en tout point $X \in E$, pour $0 < t < T$.

Pour démontrer l'existence des dérivées d'ordre $m = 1, 2, \ldots, M$ des intégrales (47), il faut étudier d'abord les fonctions (48), en montrant qu'elles vérifient une condition de Hölder de la forme

$$(50)\qquad |\rho_\beta(\Pi, \zeta) - \rho_\beta(\Pi_1, \zeta)| < \frac{C_\Omega}{\zeta^\mu} |\Pi\Pi_1|^{\theta h_1}$$

dans un domaine borné, arbitraire $\Omega \subset E$; μ et θ sont des constantes positives fixées par

$$1 - \frac{h_1}{M} < \mu < 1, \qquad 0 < \theta < 1 \qquad [h_1 = \min(h, 2h')],$$

l'une de ces constantes peut être fixée arbitrairement et l'autre est alors déterminée par l'une des formules

$$(50')\qquad \left\{ \begin{aligned} \theta &= 1 - (1-\mu)\frac{M}{h_1}, \\ \mu &= 1 - (1-\theta)\frac{h_1}{M}, \end{aligned} \right.$$

C_Ω est une constante positive, dépendant du domaine Ω.

La preuve de l'inégalité (50) s'appuie sur les propriétés (25), (27) des fonctions $\Phi_{\alpha\beta}$, sur les équations intégrales (10) et sur les limitations (18). Cette preuve n'est pas facile, mais elle est tout à fait analogue à la démonstration du théorème que nous avons donnée pour les fonctions de la forme semblable à (48) dans notre travail [3], nous omettons donc de reproduire cette démonstration. Nous signalons encore que, d'après les inégalités (25), (27), (33), les fonctions (48) vérifient une limitation

$$(51)\qquad |\rho_\beta(\Pi, \zeta)| < \frac{\mathrm{Cte}}{\zeta^\mu} \qquad \left(1 - \frac{h_1}{M} < \mu < 1\right).$$

En tenant compte des propriétés (50), (51) et du théorème 2 cité, nous concluons que les fonctions (47) admettent les dérivées spatiales d'ordre $m = 1, 2, \ldots, M$ et la dérivée par rapport à la variable t qui vérifient le système d'équations

$$(52)\qquad \sum_{1\leq j\leq N}^{k_1+\ldots+k_n=M} A_{\alpha j}^{k_1\ldots k_n}(X,t)\frac{\partial^M \overset{**}{J}_\alpha(X,t)}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}} - \frac{\partial}{\partial t}\left[\overset{**}{J}_\alpha(X,t)\right]$$
$$= -\rho_\alpha(X,t) + \int_0^t \iiint_{E(\Pi)} \sum_{1\leq\beta,j\leq N}^{k_1+\ldots+k_n=M}\left[A_{\alpha j}^{k_1\ldots k_n}(X,t) - A_{\alpha j}^{k_1\ldots k_n}(\Pi,\zeta)\right]$$
$$\times\frac{\partial^M\left[W_{j\beta}^{Y,\tau}(X,t;\Pi,\zeta)\right]}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}}\rho_\beta(\Pi,\zeta)\,d\Pi\,d\zeta$$

pour $X\in E$, $0<t<T$. En rapprochant les égalités (49), (49′), (52), nous pouvons affirmer que les fonctions (45) vérifient le système d'équations suivantes ($\alpha=1, 2, \ldots, N$) :

$$(53)\qquad \hat{\Psi}_{X,t}^{(\alpha)}[J_1(X,t),\ \ldots,\ J_N(X,t)]$$
$$= -\rho_\alpha(X,t) + \iiint_{E(Y)}\sum_{\beta=1}^{N}\hat{\Psi}_{X,t}^{(\alpha)}\left[W_{1\beta}^{Y,\tau}(X,t;Y,0),\ \ldots,\ W_{N\beta}^{Y,\tau}(X,t;Y,0)\right]f_\beta(Y)\,dY$$
$$+\int_0^t\iiint_{E(\Pi)}\sum_{\gamma=1}^{N}\hat{\Psi}_{X,t}^{(\alpha)}[W_{1\gamma}^{\Pi,\zeta}(X,t;\Pi,\zeta),\ \ldots,\ W_{N}^{\Pi,\zeta}(X,t;\Pi,\zeta)]\rho_\gamma(\Pi,\zeta)\,d\Pi\,d\zeta.$$

En tenant compte des formules (48) et en remarquant que les résultats des opérations différentielles $\hat{\Psi}$ sont des fonctions à singularités faibles, nous aurons ensuite

$$\Psi_{X,t}^{(\alpha)}[J_1(X,t),\ \ldots,\ J_N(X,t)]$$
$$=\iiint_{E(Y)}\sum_{\beta=1}^{N}\Bigg\{\hat{\Psi}_{X,t}^{(\alpha)}\left[W_{j\beta}^{Y,\tau}(X,t;Y,0)\right] - \Phi_{\alpha\beta}(X,t;Y,0)$$
$$+\int_\tau^t\iiint_{E(\Pi)}\sum_{\gamma=1}^{N}\hat{\Psi}_{X,t}^{(\alpha)}\left[W_{j\gamma}^{\Pi,\zeta}(X,t;\Pi,\zeta)\right]\Phi_{\gamma\beta}(\Pi,\zeta;Y,\tau)\,d\Pi\,d\zeta\Bigg\}f_\beta(Y)\,dY.$$

Il en résulte, d'après le système d'équations intégrales (10), que

$$\Psi_{X,t}^{(\alpha)}[J_1(X,t),\ \ldots,\ J_N(X,t)]=0$$

en tout point $X\in E$ pour $0<t<T$.

Le théorème 4 est donc démontré.

THÉORÈME 5. — *Sous les mêmes hypothèses concernant les fonctions* $f_\alpha(X)$, *que dans le théorème* 4, *les dérivées spatiales d'ordre* $m\leqq M-1$ *des intégrales de Poisson-Weierstrass* (34) *vérifient une condition de Hölder de la forme* ($0<t<t_1\leqq T$)

$$(54)\qquad |D_X^{(m)}[J_\alpha(X,t)] - D_X^{(m)}[J_\alpha(X_1,t_1)]| < \frac{\text{Cte}\exp[b\,|XX_0|]}{t^{\mu_m}}\left[|XX_1|^{\theta_m} + |t-t_1|^{\theta_m\left(1-\frac{m}{M}\right)}\right],$$

où les constantes μ_m et θ_m vérifient les inégalités :

$$\frac{m}{M} < \mu_m < 1, \qquad 0 < \theta_m < 1 \qquad \text{si} \quad m+n \geqq M, \tag{55}$$

$$\frac{m}{M} < \mu_m < \frac{m+n}{M}, \qquad 0 < \theta_m < \frac{n}{M-m} \qquad \text{si} \quad m+n < M; \tag{55'}$$

l'une de ces constantes peut être choisie arbitrairement et l'autre est alors déterminée par l'une des formules

$$\left\{\begin{aligned} \theta_m &= \frac{\mu_m - m M^{-1}}{1 - m M^{-1}}, \\ \mu_m &= \frac{m}{M} + \theta_m\left(1 - \frac{m}{M}\right); \end{aligned}\right. \tag{55''}$$

on a ensuite $\theta'_m = 1$ si $m = 0, 1, \ldots, (M-2)$ et $\theta'_m = \theta_m$ si $m = M-1$.

Démonstration. — La présence dans l'inégalité (54) du terme $|XX_1|^{\theta'_m}$, avec $\theta'_m = 1$ si $m = 1, 2, \ldots, (M-2)$, est évidente immédiatement, puisque les fonctions (34), en vertu des limitations (16) et (17), admettent les dérivées spatiales d'ordre $m \leqq M-1$, vérifiant une inégalité

$$|D_X^{(m)}[J_\alpha(X, t_1)]| < \text{Cte}\, t^{-\bar{\mu}} \exp[b\,|XX_0|] \tag{56}$$

pour $X \in E$, $0 < t \leqq T$, où $\bar{\mu}$ est un nombre choisi arbitrairement à l'intérieur de l'intervalle $\left(\frac{m}{M}, 1\right)$.

Pour étudier la différence des dérivées (54), pour les valeurs t et t_1, décomposons l'intégrale J_α en sommes (45) des deux intégrales (46), (47). Étudions d'abord la différence

$$\left\{\begin{aligned} \check{I} &= D_X^{(m)}\left[\check{J}_\alpha(X, t_1)\right] - D_X^{(m)}\left[\check{J}_\alpha(X, t)\right] \\ &= \iiint_{E(Y)} \sum_{\beta=1}^{N} \left\{ D_X^{(m)}\left[W_{\alpha\beta}^{Y,0}(X, t_1; Y, 0)\right] - D_X^{(m)}\left[W_{\alpha\beta}^{Y,0}(X, t; Y, 0)\right]\right\} f_\beta(Y)\, dY \\ &\qquad\qquad (0 < t < t_1 \leqq T) \end{aligned}\right. \tag{57}$$

en la décomposant en somme des intégrales

$$\check{I} = \check{I}^{\Delta} + \check{I}^{E-\Delta}$$

étendues à la sphère Δ de rayon r_Δ, centrée au point X, et au domaine extérieur $E - \Delta$. Remarque faite de la limitation (16), nous aurons

$$|\check{I}^{\Delta}| < \text{Cte}\, t^{-\mu_m} \sup_{\Delta} |f_\alpha| \iiint_{\Delta} \frac{dY}{|XY|^{n+m-M\mu_m}} < \text{Cte}\, t^{-\mu_m} \sup_{\Delta} |f_\alpha|\, r_\Delta^{M\mu_m - m}, \tag{57'}$$

où

$$\frac{m}{M} < \mu_m < 1 \quad \text{si } m+n \geqq M \qquad \text{et} \qquad \frac{m}{M} < \mu_m < (m+n)M^{-1} \quad \text{si } m+n < M.$$

Pour limiter l'intégrale étendue au domaine $E - \Delta$, remarquons que la dérivée par rapport à la variable t de la dérivée spatiale d'ordre m de la fonction $W_{\alpha\beta}$ admet, d'après (9), une limitation de la même forme que la dérivée spatiale d'ordre $M + m$ de la fonction $W_{\alpha\beta}$, nous aurons donc, en tenant compte des inégalités (18) et (19),

$$\left| D_{X,t}^{(m+1)}\left[W_{\alpha\beta}^{Y,\tau}(X, t; Y, \tau)\right]\right| < \frac{\text{Cte}}{(t-\tau)^{\mu_*}} \frac{1}{|XY|^{m+n+M(1-\mu_*)}} \qquad (0 < \mu_* < 1)$$

si $|XY| \leqq \rho_0$ et

$$\left| D_{X,t}^{(m+1)}\left[W_{\alpha\beta}^{Y,\tau}(X, t; Y, \tau)\right]\right| < \text{Cte } (t-\tau)^{\mu'_*} \exp[-k|XY|]$$

si $|XY| > \rho_0 \geqq r_\Delta$, où μ'_*, ρ_0 et k sont des constantes positives fixées arbitrairement ($k > b$).

Nous en concluons [*voir* (33)] (K_{ρ_0} désigne une sphère de centre X et de rayon ρ_0)

$$(57'') \quad \left|\check{I}^{E-\Delta}\right| < \frac{\text{Cte}\exp[b|X_0X|]}{t^{\mu_*}}\left\{\iiint_{K_{\rho_0}-\Delta}\frac{dY}{|XY|^{m+n+M(1-\mu_*)}} + \iiint_{E-K_{\rho_0}}\exp[-(k-b)|XY|]\,dY\right\}.|t-t_1|$$
$$< \text{Cte } t^{-\mu_*}\exp[b|X_0X|].|t-t_1|\left[r_\Delta^{M(\mu_*-1)-m} + \rho_0^{M(\mu_*-1)-m} + \omega_n\int_{\rho_0}^{\infty} r^{n-1}e^{-(k-b)r}\,dr\right].$$

Posons maintenant $r_\Delta = \text{Cte } |t-t_1|^\alpha \leqq \rho_0$, en choisissant la constante positive α de façon que

$$1 - \alpha[M(1-\mu_*) + m] = (M\mu_2 - m)\alpha > 0 \qquad (\mu_2 = \mu_*)$$

et nous aurons $\alpha = \frac{1}{M}$. En rapprochant les résultats (57′) et (57″), nous en concluons que la différence des dérivées (57) vérifie l'inégalité de Hölder

$$(57''') \quad \begin{cases} \left|D_X^{(m)}\left[\check{J}_\alpha(X, t_1)\right] - D_X^{(m)}\left[\check{J}_\alpha(X, t)\right]\right| < \text{Cte } t^{-\mu_m}\exp[b|XX_0|].|t-t_1|^{\mu_m - \frac{m}{M}} \\ (m = 0, 1, 2, \ldots, M-1). \end{cases}$$

D'une façon analogue, on peut étudier la différence

$$\check{\check{I}} = D_X^{(m)}\left[\check{\check{J}}_\alpha(X, t_1)\right] - D_X^{(m)}\left[\check{\check{J}}_\alpha(X, t)\right]$$

des intégrales (47) exprimant le quasi-potentiel de charge spatiale de densité (48). En remarquant que les fonctions (48) vérifient, d'après (25) et (27), l'inégalité

$$|\rho_\beta(\mathbf{II}, \zeta)| < \text{Cte } \zeta^{-\mu}\exp[b|XX_0|],$$

on arrive, en répétant le calcul pour la fonction $\overset{*}{\mathrm{I}}$, à la limitation

$$(58)\qquad \left|\overset{**}{\mathrm{I}}\right| < \mathrm{Cte}\; t^{-\mu_m-\mu+1} \exp[b\,|\mathrm{XX}_0|].|t-t_1|^{\mu_m-\frac{m}{\mathrm{M}}}.$$

Il reste à étudier la différence (54), correspondant aux variables spatiales X, X_1 dans le cas $m = \mathrm{M} - 1$.

Décomposons de nouveau les intégrales J_α en sommes (45) et étudions la différence

$$(58')\qquad \begin{aligned}\overset{*}{\mathrm{R}} &= \mathrm{D}_{\mathrm{X}}^{(\mathrm{M}-1)}\left[\overset{*}{\mathrm{J}}_\alpha(\mathrm{X}, t)\right] - \mathrm{D}_{\mathrm{X}}^{(\mathrm{M}-1)}\left[\overset{*}{\mathrm{J}}_\alpha(\mathrm{X}_1, t)\right] \\ &= \iiint_{\mathrm{E(Y)}} \sum_{\beta=1}^{\mathrm{N}} \left\{ \mathrm{D}_{\mathrm{X}}^{(\mathrm{M}-1)}\left[\mathrm{W}_{\alpha\beta}^{\mathrm{Y},0}(\mathrm{X}, t;\, \mathrm{Y}, 0)\right] - \mathrm{D}_{\mathrm{X}}^{(\mathrm{M}-1)}\left[\mathrm{W}_{\alpha\beta}^{\mathrm{Y},0}(\mathrm{X}_1, t;\, \mathrm{Y}, 0)\right]\right\} f_\beta(\mathrm{Y})\, d\mathrm{Y}\end{aligned}$$

que nous décomposons en somme des intégrales

$$\overset{*}{\mathrm{R}} = \overset{*}{\mathrm{R}}{}^{\mathrm{K}} + \overset{*}{\mathrm{R}}{}^{\mathrm{E}-\mathrm{K}}$$

étendues à la sphère K de rayon $2|\mathrm{XX}_1|$ et au domaine extérieur E — K. En supposant que $|\mathrm{XX}_1| \leqq \rho_0$, nous aurons, remarque faite de l'inégalité (16),

$$(58'')\qquad \left\{\begin{aligned} &\left|\overset{*}{\mathrm{R}}{}^{\mathrm{K}}\right| < \mathrm{Cte}\; t^{-\mu'} \sup_{\mathrm{K}} |f(\mathrm{Y})| \int_0^{3|\mathrm{XX}_1|} r^{\mathrm{M}\,\mu-\mathrm{M}}\, dr = \mathrm{Cte}\; t^{-\mu'} \exp[b\,|\mathrm{XX}_0|].|\mathrm{XX}_1|^{\mathrm{M}(\mu'-1)+1} \\ &\qquad\qquad \left(1 - \frac{1}{\mathrm{M}} < \mu' < 1\right).\end{aligned}\right.$$

Pour limiter l'intégrale $\overset{*}{\mathrm{R}}{}^{\mathrm{E}-\mathrm{K}}$, nous écrivons

$$\begin{aligned}&\mathrm{D}_{\mathrm{X}}^{(\mathrm{M}-1)}\left[\mathrm{W}_{\alpha\beta}^{\mathrm{Y},\tau}(\mathrm{X}, t;\, \mathrm{Y}, \tau)\right] - \mathrm{D}_{\mathrm{X}}^{(\mathrm{M}-1)}\left[\mathrm{W}_{\alpha\beta}^{\mathrm{Y},\tau}(\mathrm{X}_1, t;\, \mathrm{Y}, \tau)\right] \\ &\qquad = \sum_{\nu=1}^{n} \left\{\frac{\partial}{\partial x_\nu} \mathrm{D}_{\mathrm{X}}^{(\mathrm{M}-1)}\left[\mathrm{W}_{\alpha\beta}^{\mathrm{Y},\tau}(\mathrm{X}, t;\, \mathrm{Y}, \tau)\right]\right\}_{\mathrm{X}_*} (x_\nu - x'_\nu),\end{aligned}$$

où $(x'_1, \ldots, x'_n)$ désignent les coordonnées du point X_1 et X_* désigne un point du segment XX_1. Remarque faite de la limitation (18) pour $m = \mathrm{M}$ et de l'inégalité

$$\frac{|\mathrm{X}_*\mathrm{Y}|}{|\mathrm{XY}|} > \frac{1}{2},$$

si $\mathrm{Y} \in \mathrm{E} - \mathrm{K}$, nous aurons

$$\left|\mathrm{D}_{\mathrm{X}}^{(\mathrm{M}-1)}[\mathrm{W}^{\mathrm{Y},\tau}(\mathrm{X}, t;\, \mathrm{Y}, \tau)] - \mathrm{D}_{\mathrm{X}}^{(\mathrm{M}-1)}[\mathrm{W}^{\mathrm{Y},\tau}(\mathrm{X}_1, t;\, \mathrm{Y}, \tau)]\right| < \frac{\mathrm{Cte}}{(t-\tau)^{\mu'}}\, \frac{|\mathrm{XX}_1|}{|\mathrm{XX}|^{n+\mathrm{M}(1-\mu')}}$$

si $|\mathrm{XY}| \leqq \rho_0$ et

$$\left|\mathrm{D}_{\mathrm{X}}^{(\mathrm{M}-1)}\left[\mathrm{W}_{\alpha\beta}^{\mathrm{Y},\tau}(\mathrm{X}, t;\, \mathrm{Y}, \tau)\right] - \mathrm{D}_{\mathrm{X}}^{(\mathrm{M}-1)}\left[\mathrm{W}_{\alpha\beta}^{\mathrm{Y},\tau}(\mathrm{X}_1, t;\, \mathrm{Y}, \tau)\right]\right| < \mathrm{Cte}\, \frac{(t-\tau)^{\mu_1}}{|\mathrm{XY}|^{n-1}} \exp[-k\,|\mathrm{XY}|]$$

si $|XY| > \rho_0$. Il en résulte

$$(58''') \quad \left|\overset{*}{\mathrm{R}}^{\mathrm{E-K}}\right| < \mathrm{Cte}\, t^{-\mu'} \exp[b\,|XX_0|].|XX_1|\left[\int_{2|XX_1|}^{\rho_0} r^{\mathrm{M}(1-\mu)+1}\,dr + \int_{\rho_0}^{\infty} \exp[-(k-b)r]\,dr\right]$$
$$< \mathrm{Cte}\, t^{-\mu'} \exp[b\,|XX_0|].|XX_1|^{1-\mathrm{M}(1-\mu')} \qquad \left(1-\frac{1}{\mathrm{M}} < \mu' < 1\right).$$

En réunissant les résultats (58″) et (58‴), nous aurons une limitation

$$(59) \qquad \left|\overset{*}{\mathrm{R}}\right| < \mathrm{Cte}\, t^{-\mu'} \exp[b\,|XX_0|].|XX_1|^{1-\mathrm{M}(1-\mu')}.$$

D'après (56), cette inégalité restera vraie aussi pour $|XX_1| > \rho_0$, si l'on choisit suffisamment grand le coefficient constant.

D'une façon tout à fait analogue on étudiera la différence

$$\overset{**}{\mathrm{R}} = \mathrm{D}_{\mathrm{X}}^{(\mathrm{M}-1)}\left[\overset{**}{\mathrm{J}}_\alpha(\mathrm{X}, t)\right] - \mathrm{D}_{\mathrm{X}}^{(\mathrm{M}-1)}\left[\overset{**}{\mathrm{J}}_\alpha(\mathrm{X}_1, t)\right] = \int_0^t \iiint_{\mathrm{E}(\Pi)} \sum_{\beta=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{W}_{\alpha\beta}^{\Pi,\zeta}(\mathrm{X}, t; \Pi, \zeta)\,\rho_\beta(\Pi, \zeta)\,d\Pi\,d\zeta$$

et l'on aura une limitation de même forme que (59)

$$(59') \qquad \left|\overset{**}{\mathrm{R}}\right| < \mathrm{Cte}\, t^{-\mu'} \exp[b\,|XX_0|].|XX_1|^{1-\mathrm{M}(1-\mu')}.$$

En rapprochant les résultats (57‴), (58), (59) et (59′), on arrive à l'énoncé du théorème 5. Nous remarquons encore que la propriété (55) est vraie aussi pour la fonction J_α elle-même, si nous posons $m = 0$.

3. Propriétés du potentiel généralisé de charge spatiale.

Théorème 6. — *Si les fonctions $\rho_\alpha(\mathrm{X}, t)$, définies dans la région $[\mathrm{X} \in \mathrm{E};\, 0 < t \leqq \mathrm{T}]$ et intégrables dans tout domaine borné et mesurable dans l'espace* E, *vérifient les inégalités*

$$(60) \qquad |\rho_\alpha(\mathrm{X}, t)| < a t^{-\mu_1} \exp[b\,|XX_0|]$$

et une condition de Hölder

$$(60^{\mathrm{I}}) \qquad |\rho_\alpha(\mathrm{X}, t) - \rho_\alpha(\mathrm{X}_1, t)| < \mathrm{Cte}\, t^{-\mu_1} |XX_1|^{h_\rho}$$

dans un domaine borné $\Omega \subset \mathrm{E}$, où a, b, μ_1, h_ρ sont des constantes positives données ($0 < \mu_1 < 1$, $0 < h_\rho \leqq 1$), alors le système d'intégrales

$$(60^{\mathrm{II}}) \qquad \mathrm{V}_\alpha(\mathrm{X}, t) = \int_0^t \iiint_{\mathrm{E}} \sum_{\beta-1}^{\mathrm{N}} \Gamma_{\alpha\beta}(\mathrm{X}, t; \mathrm{Y}, \tau)\,\rho_\beta(\mathrm{Y}, \tau)\,d\mathrm{Y}\,d\tau,$$

dit potentiel de charge spatiale de densité $\{\rho_\beta\}$, vérifie le système suivant d'équations généralisées de Poisson

$$(60^{\mathrm{III}}) \qquad \hat{\Psi}_{\mathrm{X},t}^{(\alpha)}[\mathrm{V}_1(\mathrm{X}, t), \ldots, \mathrm{V}_{\mathrm{N}}(\mathrm{X}, t)] = -\rho_\alpha(\mathrm{X}, t) \qquad (\alpha = 1, \ldots, \mathrm{N})$$

en tout point intérieur $\mathrm{X} \in \Omega$ pour $0 < t < \mathrm{T}$.

Démonstration. — Le théorème 5 est une extension du théorème donné dans notre travail [3] et nous le démontrerons d'une façon analogue. Nous écrivons notamment les fonctions (60) sous la forme des sommes

$$(60^{\text{IV}}) \qquad V_\alpha(X, t) = \int_0^t \iiint_{E(Y)} \sum_{\beta=1}^{N} W_{\alpha\beta}^{Y,\tau}(X, t; Y, \tau)\,\rho_\beta(Y, \tau)\, dY\, d\tau + \int_0^t \iiint_{E(\Pi)} \sum_{\gamma=1}^{N} W_{\alpha\gamma}^{\Pi,\zeta}(X, t; \Pi, \zeta)\,\bar{\rho}_\gamma(\Pi, \zeta)\, d\Pi\, d\zeta$$

des composants des quasi-potentiels de densité donnée $\{\rho_\beta\}$ et de densité $\{\bar{\rho}_\beta\}$ donnée par les formules

$$(60^{\text{V}}) \qquad \bar{\rho}_\gamma(\Pi, \zeta) = \int_0^\zeta \iiint_{E(Y)} \sum_{\beta=1}^{N} \Phi_{\gamma\beta}(\Pi, \zeta; Y, \tau)\,\rho_\beta(Y, \tau)\, dY\, d\tau.$$

On voit, d'après les limitations (25), (27) et (60), que les fonctions (60^{V}) sont définies et continues en tout point ($\Pi \in E$, $0 < \zeta \leqq T$) et vérifient une inégalité

$$(60^{\text{VI}}) \qquad |\bar{\rho}_\gamma(\Pi, \zeta)| < \text{Cte}\, \zeta^{-(\mu+\mu_1-1)} \exp[b\,|\Pi X_0|],$$

μ étant une constante positive, vérifiant les inégalités $1 - \frac{h_1}{M} < \mu < 1$.

En outre, comme dans notre travail [3], on peut démontrer que les fonctions (60^{V}) vérifient une condition de Hölder de la forme

$$(60^{\text{VII}}) \qquad |\bar{\rho}_\gamma(\Pi, \zeta) - \bar{\rho}_\gamma(\Pi_1, \zeta)| < C_\Omega \zeta^{-(\mu+\mu_1-1)} |\Pi\Pi_1|^{0h_1}$$

dans tout domaine borné Ω de l'espace E pour $0 < \zeta \leqq T$.

En appliquant maintenant aux intégrales (60^{IV}) le théorème 2 qui est aussi vrai pour les densités ρ_γ et $\bar{\rho}_\gamma$ vérifiant les inégalités (60), (60^{I}), (60^{VI}), (60^{VII}), on conclut que les fonctions (60^{II}) admettent les dérivées spatiales d'ordre M vérifiant le système d'équations (60^{III}) en tout point intérieur $X \in \Omega$, pour $0 < t < T$.

THÉORÈME 7. — *Si les fonctions $\rho_\alpha(X, t)$, définies dans la région $[X \in E, 0 < t \leqq T]$ sont intégrables dans tout domaine borné et mesurable et vérifient les inégalités* (60), *alors le potentiel de charge spatiale, déterminé par les formules* (60^{II}), *et ses dérivées d'ordre $m \leqq M - 1$ vérifient une condition de Hölder de la forme*

$$(60^{\text{VIII}}) \qquad |D_X^{(m)}[V_\alpha(X, t)] - D_X^{(m)}[V_\alpha(X_1, t_1)]| < \text{Cte}\, t^{-\mu_m} \exp[b\,|XX_0|].\left[|XX_1|^{\theta'_m} + |t - t_1|^{\theta_m\left(1 - \frac{m}{M}\right)}\right] \qquad (0 < t < t_1 \leqq T),$$

où $\theta'_m = 1$ si $m = 0, 1, \ldots, (M-2)$; $\theta'_{M-1} = \theta_{M-1}$, θ_m et μ_m sont des constantes positives, inférieures à l'unité, comprises dans les intervalles (55) *ou* (55′) *et liées par les relations* (55″).

Démonstration. — En exprimant les fonctions (60^{II}) sous la forme des sommes (60^{IV}) des deux quasi-potentiels de charge spatiale, on applique le même raisonnement que dans la démonstration du théorème 5, d'où résulte l'inégalité (60^{VIII}).

Les propriétés démontrées des intégrales généralisées de Poisson-Weierstrass et du potentiel généralisé de charge spatiale nous permettent de résoudre le problème de Cauchy pour le système d'équations (1).

4. Énoncé du problème de Cauchy. — Soit un système quasi-linéaire de $N \geqq 1$ équations aux dérivées partielles d'ordre $M \geqq 2$ de la forme

$$\hat{\Psi}^{(\alpha)}(u) = F_\alpha[X, t, (u), (D^1 u), (D^2 u), \ldots, (D^{M-1} u)] \qquad (\alpha = 1, \ldots, N) \tag{61}$$

où l'on a désigné par (u) le système de fonctions $u_1(X, t), \ldots, u_N(X, t)$ et par $(D^\beta u)$ une matrice de toutes les dérivées spatiales d'ordre fixé β

$$\frac{\partial^\beta u_j}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \ldots \partial x_n^{k_n}} = D^\beta_{(\gamma)} u_j \qquad (\beta = 1, 2, \ldots, M-1) \tag{62}$$

qu'on obtient en donnant aux entiers non négatifs $k_1, k_2, \ldots, k_n$ toutes les valeurs telles qu'on ait $k_1 + k_2 + \ldots + k_n = \beta$ et pour j, les valeurs $1, 2, \ldots, N$.

On a désigné par γ le numéro d'une suite $1, 2, \ldots, n_\beta$ suivant laquelle on a ordonné toutes les combinaisons $k_1, k_2, \ldots, k_n$ des nombres entiers non négatifs dont la somme est égale à $\beta (n_0 = 1)$.

Désignons par (v^β) une matrice des éléments réels $v^\beta_{j\gamma}$ à deux indices $j = 1, 2, \ldots, N$; $\gamma = 1, 2, \ldots, n_\beta$, β étant un nombre fixé dans la suite $1, 2, \ldots, M-1$. Désignons ensuite par R_β un ensemble de toutes les matrices (v^β) aux éléments réels $v^\beta_{j\gamma}$, où β est fixé. R_0 désigne un ensemble de toutes les suites (v^0) des nombres réels $v_1, v_2, \ldots, v_N$.

Nous supposons que les fonctions réelles

$$F_\alpha[X, t, (v^0), (v^1), (v^2), \ldots, (v^{M-1})] \tag{63}$$

sont définies et continues dans la région

$$\begin{cases} X \in E, & 0 \leqq t \leqq T, \\ (v^\beta) \in R_\beta & (\beta = 0, 1, \ldots, M-1). \end{cases} \tag{64}$$

Pour faciliter l'écriture, nous admettons l'identité des symboles

$$v^0_j = v^0_{j1} \qquad (n_0 = 1).$$

On admet ensuite que les fonctions F_α vérifient l'inégalité

$$|F_\alpha[X, t, (v^0), \ldots, (v^{M-1})]| < m_F \sum_{\substack{j=1,\ldots,N \\ \gamma=1,\ldots,n_\beta}}^{\beta=0,1,\ldots,M-1} |v^\beta_{j\gamma}|^g + m'_F e^{b|XX_0|} \tag{65}$$

et une condition de Hölder

$$
(66)\qquad \begin{aligned} &|F_\alpha[X, t, (v^0), \ldots, (v^{M-1})] - F_\alpha[X', t, (v^0)', \ldots, (v^{M-1})']| \\ &< k_F\left[\sum_{\substack{\beta=0,1,\ldots,M-1 \\ j=1,\ldots,N \\ \gamma=1,\ldots,n_\beta}} |v^\beta_{j\gamma} - v'^\beta_{j\gamma}|^{h_F} + |XX'|^{h_F} e^{b|XX_0|}\right]\end{aligned}
$$

$(v^\beta)'$ désigne une matrice des éléments $v'^\beta_{j\gamma}$; m_F, m'_F, k_F, b, h_F, g sont des constantes positives données. On suppose $0 \leq g < 1$. Nous posons le problème de la recherche d'une suite de fonctions

$$
u = [u_1(X, t), \ldots, u_N(X, t)]
$$

qui vérifient le système (61) en tout point $X \in E$ pour $0 < t < T$ et qui satisfont à la condition initiale

$$
(67)\qquad \lim_{t \to 0} u_\alpha(X, t) = f_\alpha(X) \qquad (\alpha = 1, \ldots, N),
$$

où $f_\alpha(X)$ sont des fonctions continues, définies dans tout l'espace E et vérifiant l'inégalité

$$
(68)\qquad |f_\alpha(X)| < a\, e^{b|XX_0|},
$$

a et b étant deux constantes positives, X_0 un point fixé.

5. Résolution du problème. — Nous allons chercher la solution du problème proposé sous la forme d'un système des sommes $(\alpha = 1, 2, \ldots, N)$

$$
(69)\qquad \begin{aligned} u_\alpha(X, t) = &\iiint_E \sum_{j=1}^{N} \Gamma_{\alpha j}(X, t; Y, 0) f_j(Y)\, dY \\ &- \int_0^t \iiint_E \sum_{j=1}^{N} \Gamma_{\alpha j}(X, t; Y, \tau) F_j[Y, \tau, (u), (D^1_Y u), \ldots, (D^{M-1}_Y u)]\, dY\, d\tau \end{aligned}
$$

des intégrales de Poisson-Weierstrass généralisées et des composantes d'un potentiel de charge spatiale, relativement au système (1). Pour résoudre le système d'équations intégro-différentielles (69), considérons le système d'équations intégrales suivantes :

$$
(70)\qquad \left\{\begin{aligned} v^0_\alpha(X, t) = &\iiint_E \sum_{j=1}^{N} \Gamma_{\alpha j}(X, t; Y, 0) f_j(Y)\, dY \\ &- \int_0^t \iiint_E \sum_{j=1}^{N} \Gamma_{\alpha j}(X, t; Y, \tau) F_j[Y, \tau, (v^0), (v^1), \ldots, (v^{M-1})]\, dY\, d\tau, \\ v^\beta_{\alpha\gamma}(X, t) = &\iiint_E \sum_{j=1}^{N} \underset{(\gamma)}{D^\beta_X}(X[\Gamma_{\alpha j}(X, t; Y, 0)] f_j(Y)\, dY \\ &- \int_0^t \iiint_E \sum_{j=1}^{N} \underset{(\gamma)}{D^\beta_X}[\Gamma_{\alpha j}(X, t; Y, \tau)] F_j[Y, \tau, (v^0), (v^1), \ldots, (v^{M-1})]\, dY\, d\tau \end{aligned}\right.
$$

aux fonctions inconnues $v^0_\alpha(X, t)$, $v^\beta_{\alpha\gamma}(X, t)$ $(\alpha = 1, \ldots, N;\ \beta = 1, \ldots, M-1;\ \gamma = 1, 2, \ldots, n_\beta)$.

Les intégrales, qui figurent dans ces équations, ne sont pas bornées, si $t \to 0$ et si $|XX_0| \to \infty$.

Le système d'équations intégrales (70) n'étant pas résoluble par les méthodes de l'Analyse classique, nous l'étudierons par l'application du théorème topologique de J. Schauder [5] :

Si dans un espace linéaire, normé et complet, une transformation continue transforme un ensemble fermé et convexe en son sous-ensemble compact, alors dans l'ensemble donné existe au moins un point invariant relativement à la transformation.

Considérons donc un espace fonctionnel Λ composé de tous les systèmes de fonctions réelles continues

$$[v^{\beta}_{\alpha\gamma}(X, t)],$$

où l'on a posé $v^0_{\alpha 1} = v^0_\alpha$, $n_0 = 1$ ($\alpha = 1, 2, \ldots, N$; $\beta = 0, 1, \ldots, M-1$; $\gamma = 1, 2, \ldots, n_\beta$) définies dans la région $[X \in E,\ 0 < t \leq T]$ et vérifiant l'inégalité

$$(71) \qquad |v^{\beta}_{\alpha\gamma}(X, t)| < \frac{\mathrm{Cte}\exp[b'|XX_0|]}{t^{\mu+h}} \qquad (b' > b);$$

b étant une constante positive figurant dans la supposition (68), μ étant une constante positive, fixée arbitrairement à l'intérieur de l'intervalle $(1 - M^{-1}, 1)$, h et b' sont des constantes positives fixées arbitrairement de façon qu'on ait

$$(72) \qquad \mu + h < 1; \qquad (\mu + h)g \leq \mu; \qquad b < b' < \frac{b}{g}$$

où le nombre positif $g < 1$ figure dans les conditions (65).

On a l'identité

$$v^0_{\alpha\gamma} = v^0_\alpha \qquad (n_0 = 1).$$

Les constantes positives b', μ, h ont des valeurs fixées pour tout l'espace Λ, mais la constante du numérateur dans l'inégalité (71) admet toutes les valeurs positives.

Nous définirons pour l'espace Λ d'une façon connue les opérations linéaires

$$(73) \qquad \begin{cases} [v^{\beta}_{\alpha\gamma}(X, t)] + [\overset{*}{v}{}^{\beta}_{\alpha\gamma}(X, t)] = [v^{\beta}_{\alpha\gamma} + \overset{*}{v}{}^{\beta}_{\alpha\gamma}], \\ \lambda[v^{\beta}_{\alpha\gamma}(X, t)] = [\lambda v^{\beta}_{\alpha\gamma}(X, t)]. \end{cases}$$

Ensuite, nous allons définir la norme d'un élément $[v^{\beta}_{\alpha\gamma}(X, t)]$ par la formule

$$(74) \qquad \|[v^{\beta}_{\alpha\gamma}]\| = \max_{\alpha,\beta,\gamma} \sup_{\substack{X \in E \\ t \in (0, T)}} |t^{\mu+h} e^{-b'|XX_0|} v^{\beta}_{\alpha\gamma}(X, t)|.$$

La distance des deux pionts $V = [v^{\beta}_{\alpha\gamma}]$ et $V^* = [\overset{*}{v}{}^{\beta}_{\alpha\gamma}]$ est définie par la formule

$$(75) \qquad \delta(V, V^*) = \|[v^{\beta}_{\alpha\gamma}] - [\overset{*}{v}{}^{\beta}_{\alpha\gamma}]\|.$$

L'espace Λ est linéaire et normé; en outre, on peut montrer qu'il est complet, c'est-à-dire que la condition de Cauchy est à la fois nécessaire et suffisante pour la convergence d'une suite arbitraire de points de l'espace Λ au sens de la norme (74).

Soit donc une suite de points $V_m = \left[\overset{(m)}{v}{}^{\beta}_{\alpha\gamma}(X, t)\right]$ de l'espace Λ vérifiant la condition de Cauchy au sens de la norme (74)

$$\|V_m - V_{m'}\| < \varepsilon, \qquad \text{si} \quad m, m' > M(\varepsilon). \tag{76}$$

Soient les fonctions

$$\overset{(m)}{\varphi}_{\alpha\beta\gamma}(X, t) = e^{-b'|XX_0|}\, t^{\mu+h}\, \overset{(m)}{v}{}^{\beta}_{\alpha\gamma}(X, t), \tag{77}$$

α, β, γ étant fixés. En tenant compte de l'inégalité (76) et de la formule (74), nous aurons

$$\sup \left| \overset{(m)}{\varphi}_{\alpha\beta\gamma}(X, t) - \overset{(m')}{\varphi}_{\alpha\beta\gamma}(X, t) \right| < \varepsilon \qquad \text{si} \quad m, m' > M(\varepsilon),$$

par conséquent la suite de fonctions $\overset{(m)}{\varphi}_{\alpha\beta\gamma}(X, t)$ converge uniformément au sens habituel vers une fonction continue et bornée $\varphi_{\alpha\beta\gamma}(X, t)$ dans la région $[X \in E,\ t \in (0, T)]$.

Alors le point

$$V = [t^{-\mu-h} e^{b'|XX_0|} \varphi_{\alpha\beta\gamma}(X, t)]$$

de l'espace Λ est un point limite de la suite donnée.

L'espace Λ est donc un espace de Banach.

Soit maintenant dans l'espace Λ l'ensemble $\mathcal{E}_\rho$ de tous les points $V = [v^{\beta}_{\alpha\gamma}(X, t)]$ vérifiant une inégalité

$$\|V\| \leq \rho, \tag{78}$$

ρ étant un nombre positif fixé arbitrairement. L'ensemble $\mathcal{E}_\rho$ est évidemment convexe et fermé.

En tenant compte des équations (70), transformons l'ensemble $\mathcal{E}_\rho$ par les relations

$$\left\{\begin{aligned} w^{\beta}_{\alpha\gamma}(X, t) = {} & \iiint_E \sum_{j=1}^{N} \underset{(\gamma)}{D}{}^{\beta}_{X} [\Gamma_{\alpha j}(X, t; Y, 0)] f_j(Y)\, dY \\ & - \int_0^t \iiint_E \sum_{j=1}^{N} \underset{(\gamma)}{D}{}^{\beta}_{X} [\Gamma_{\alpha j}(X, t; Y, \tau)]\, F_j[Y, \tau, (v^0), (v^1), \ldots, (v^{M-1})]\, dY\, d\tau \\ & (\alpha = 1, \ldots, N;\ \beta = 0, 1, \ldots, M-1;\ \gamma = 1, \ldots, n_\beta), \qquad \text{où} \quad \underset{(\gamma)}{D}{}^{0}[\Gamma_{\alpha j}] = \Gamma_{\alpha j}. \end{aligned}\right. \tag{79}$$

Montrons que les intégrales (79) ont un sens et cherchons leurs limitations. La première, I_1, des intégrales (79) a un sens, d'après le théorème 3. Sa limitation est la suivante [*voir* (56)] :

$$|I_1(X, t)| < P t^{-\mu} \exp[b\,|XX_0|] \qquad \left(1 - \frac{1}{M} < \mu < 1\right), \tag{80}$$

où P est une constante positive.

Pour étudier la seconde, I_2, des intégrales (79), remarquons que, d'après la définition (74) de la norme et l'inégalité (78), les fonctions $v^{\beta}_{\alpha\gamma}(X, t)$, liées avec l'ensemble $\mathcal{E}_{\rho}$, vérifient les inégalités

$$t^{\mu+h}\, e^{-b'|XX_0|}\, |v^{\beta}_{\alpha\gamma}(X, t)| \leqq \rho. \tag{81}$$

Donc, d'après l'inégalité admise (65), les fonctions F_j sous les signes des secondes intégrales (79) vérifient les inégalités

$$\begin{aligned} &|F_j[Y, \tau, (v^0), (v^1), \ldots, (v^{M-1})]| \\ &\quad < m_F Q N \rho^g \tau^{-(\mu+h)g}\, e^{b'g|YX_0|} + m'_F\, e^{b|YX_0|} \qquad (j = 1, 2, \ldots, N), \end{aligned} \tag{82}$$

où l'on a posé

$$Q = \sum_{\beta=0}^{M-1} n_{\beta}. \tag{83}$$

Il en résulte, d'après le lemme établi précédemment, que la seconde, I_2, des intégrales (79) a un sens et est absolument convergente. Pour trouver sa limitation, nous nous appuierons sur les inégalités (16), (17), (82) et nous aurons ($b < k$)

$$\begin{aligned} |I_2(X, t)| < {} & NC \int_0^t \frac{d\tau}{\tau^{(\mu+h)g}(t-\tau)^{\mu}} \\ & \times \iiint_{K\rho_0} \frac{[m_F N Q \rho^g e^{b'g|YX_0|} + m'_F T^{(\mu+h)g} e^{b|YX_0|}]}{|XY|^{\beta+n-M\mu}}\, dY \\ & + C'NQ \int_0^t \frac{(t-\tau)^{\mu_1}\, d\tau}{\tau^{(\mu+h)g}} \\ & \times \iiint_{E-K\rho_0} \frac{[m_F N Q \rho^g e^{b'g|YX_0|} + m'_F T^{(\mu+h)g} e^{b|YX_0|}]\, e^{-k|XY|}}{|XY|^{n+M\mu_1}}\, dY. \end{aligned} \tag{84}$$

En réunissant les résultats (80) et (84), nous concluons que les fonctions (79) vérifient une inégalité de la forme

$$|w^{\beta}_{\alpha\gamma}(X, t)| < t^{-\mu} \exp[b|XX_0|] . [P_1 m_F \rho^g + P_2 m'_F + P_3], \tag{85}$$

P_1, P_2 et P_3 étant des constantes positives déterminées, indépendantes des fonctions F_{ν}. Il en résulte, d'après l'inégalité (71) définissant l'espace Λ, que les relations (79) font correspondre à tout point $V = [v^{\beta}_{\alpha\gamma}(X, t)]$ de l'ensemble $\mathcal{E}_{\rho}$ un point $V' = [w^{\beta}_{\alpha\gamma}(X, t)]$ de l'espace Λ. En tenant compte de la définition (74) de la norme, nous pouvons affirmer que l'ensemble $\mathcal{E}_{\rho}$ des points transformés V' fera partie de l'ensemble $\mathcal{E}_{\rho}$, si l'inégalité suivante est vérifiée

$$\sup \{ t^h \exp[-(b'-b)|XX_0|] . [P_1 m_F \rho^g + P_2 m'_F + P_3] \} \leqq \rho,$$

donc, si les constantes du problème vérifient la condition

$$T^h (P_1 m_F \rho^g + P_2 m'_F + P_3) \leqq \rho. \tag{86}$$

Or, le choix de la constante ρ étant arbitraire et g ayant une valeur inférieure à l'unité, nous pouvons toujours fixer la constante ρ suffisamment grande pour que l'inégalité (86) soit vérifiée, si grandes que soient les constantes du problème T, P_1, m_F, P_2, m'_F, P_3. Avant d'appliquer le théorème de Schauder, nous démontrerons encore les deux lemmes suivants :

LEMME 1. — *La transformation de l'ensemble $\mathcal{E}_\rho$, définie par les relations* (79), *est continue dans l'espace* Λ,

Démonstration. — Soit une suite arbitraire de points $V_m = \left[\overset{(m)}{\varphi}{}_{\alpha\gamma}(X, t)\right]$ de l'espace Λ convergeant vers un point $V = [\varphi^\beta_{\alpha\gamma}(X, t)]$ de cet espace, au sens de la norme (74), c'est-à-dire que l'on a

$$(87)\qquad \max_{\alpha,\beta,\gamma} \sup_{\substack{X\in E\\ t\in(0,T)}} \left\{ t^{\mu+h} e^{-b'|XX_0|} \left| \overset{(m)}{\varphi}{}^\beta_{\alpha\gamma}(X, t) - \varphi^\beta_{\alpha\gamma}(X, t) \right| \right\} \to 0$$

si $m \to \infty$. Pour démontrer le lemme, il est nécessaire et suffisant de démontrer que la suite $\{V'_m\}$ de points $V'_m = \left[\overset{(m)}{w}{}^\beta_{\alpha\gamma}(X, t)\right]$, transformés par les relations (79), converge vers un point limite $V' = [w^\beta_{\alpha\gamma}(X, t)]$ de l'espace E, qui correspond au point limite V par les mêmes relations (79). Considérons donc la différence

$$(88)\qquad \overset{(m)}{w}{}^\beta_{\alpha\gamma}(X, t) - w^\beta_{\alpha\gamma}(X, t)$$
$$= -\int_0^t \iiint_E \sum_{j=1}^N D^{(\beta)}_{X\,(\gamma)}[\Gamma_{\alpha j}(X, t; Y, \tau)] \left\{ F_j\left[Y, \tau, (\overset{(m)}{\varphi}{}^0), (\overset{(m)}{\varphi}{}^1), \ldots, (\overset{(m)}{\varphi}{}^{M-1})\right] \right.$$
$$\left. - F_j[Y, \tau, (\varphi^0), (\varphi^1), \ldots, (\varphi^{M-1})] \right\} dY\, d\tau.$$

D'après les inégalités (16), (17) et (66), nous pouvons écrire

$$(89)\qquad \left| \overset{(m)}{w}{}^\beta_{\alpha\gamma}(X, t) - w^\beta_{\alpha\gamma}(X, t) \right|$$
$$< \mathrm{Cte}\, t^{-(\mu+h)h_F} e^{b'h_F|XX_0|} \max_{\alpha,\beta,\gamma} \sup_{\substack{Y\in E\\ \tau\in(0,T)}} \left\{ \tau^{\mu+h} e^{-b'|YX_0|} \left| \overset{(m)}{\varphi}{}^\beta_{\alpha\gamma}(Y, \tau) - \varphi^\beta_{\alpha\gamma}(Y, \tau) \right| \right\}^{h_F}$$
$$\times \left[\iiint_{K_X} \frac{dY}{|XY|^{n-1+M(1-\mu)}} + \iiint_{E-K_X} e^{-(k-b'h_F)|XY|}\, dY \right] \qquad (k > b'h_F).$$

La somme des intégrales entre les crochets est bornée pour $X \in E$, donc, d'après la supposition (87), nous concluons que

$$\| V_m - V' \| = \max_{\alpha,\beta,\gamma} \sup_{\substack{X\in E\\ t\in(0,T)}} \left\{ t^{\mu+h} e^{-b'|XX_0|} \left| \overset{(m)}{w}{}^\beta_{\alpha\gamma}(X, t) - w^\beta_{\alpha\gamma}(X, t) \right| \right\} \to 0$$

si $m \to \infty$. Le lemme 1 est, par conséquent, démontré.

LEMME 2. — *L'ensemble $\mathcal{E}'_\rho$, transformé de l'ensemble $\mathcal{E}_\rho$ par les relations* (79), *est compact.*

Démonstration. — Conformément à la définition, l'ensemble $\mathcal{E}'_\rho$ est compact, si de toute suite $\{V'_m\}$ de ses points on peut extraire une suite partielle $\{V'_{k_m}\}$ convergente au sens de la norme (73).

Soit donc une suite arbitraire de points $V'_m = \left[\overset{(m)}{w}{}^\beta_{\gamma\alpha}(X, t)\right]$ de l'ensemble $\mathcal{E}'_\rho$. Tous ces points vérifient l'inégalité (85), donc pour tout nombre positif ε, nous pouvons construire une sphère S_ε de centre X_0 et de rayon R_ε suffisamment grand, pour qu'on ait

$$t^{\mu+h}\, e^{-b'|XX_0|}\left|\overset{(m)}{w}{}^\beta_{\alpha\gamma}(X, t)\right| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{90}$$

si $X \in E - S_\varepsilon$, $t \in (0, T)$, m quelconque. Ensuite, au nombre ε faisons correspondre un nombre positif t_ε pour qu'on ait

$$t^{\mu+h}\, e^{-b'|XX_0|}\left|\overset{(m)}{w}{}^\beta_{\alpha\gamma}(X, t)\right| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{91}$$

si $X \in E$, $0 < t \leq t_\varepsilon$.

La sphère S_ε et l'intervalle $(0, t_\varepsilon)$ étant fixés, nous démontrerons que toutes les fonctions $\overset{(m)}{w}{}^\beta_{\alpha\gamma}(X, t)$ sont également continues et également bornées dans la région

$$[X \in S_\varepsilon;\ t_\varepsilon \leq t \leq T] = \Omega_\varepsilon. \tag{92}$$

En effet, d'après la limitation (85), les fonctions $\overset{(m)}{w}{}^\beta_{\alpha\gamma}(X, t)$ sont également bornées dans la région (92). Ensuite, d'après les théorèmes 5 et 7, elles vérifient dans la région Ω_ε une inégalité de Hölder

$$\left|\overset{(m)}{w}{}^\beta_{\alpha\gamma}(X, t) - \overset{(m)}{w}{}^\beta_{\alpha\gamma}(X_1, t_1)\right| < k_{\Omega_\varepsilon}\left[|XX_1|^\theta + |t - t_1|^{\frac{\theta'}{M}}\right], \tag{93}$$

avec un coefficient k_{Ω_ε} commun pour toutes les fonctions, où θ et θ' sont les deux constantes positives, inférieures à l'unité. Les fonctions $\overset{(m)}{w}{}^\beta_{\alpha\gamma}(X, t)$ (m arbitraire) sont donc également continues, par conséquent, d'après un théorème connu d'Arzelà, on peut, de la suite de fonctions $\left\{\overset{(m)}{w}{}^\beta_{\alpha\gamma}(X, t)\right\}$, extraire une suite partielle $\left\{\overset{(k_m)}{w}{}^\beta_{\alpha\gamma}(X, t)\right\}$ convergente uniformément au sens habituel dans la région Ω_ε. Nous pouvons donc au nombre ε faire correspondre un nombre N_ε tel, qu'on ait dans la région Ω_ε

$$T^{\mu+h}\left|\overset{(k_m)}{w}{}^\beta_{\alpha\gamma}(X, t) - \overset{(k_s)}{w}{}^\beta_{\alpha\gamma}(X, t)\right| < \varepsilon$$

si $m, s > N_\varepsilon$. En somme, nous aurons, d'après (90) et (91),

$$t^{\mu+h}\, e^{-b'|XX_0|}\left|\overset{(k_m)}{w}{}^\beta_{\alpha\gamma}(X, t) - \overset{(k_s)}{w}{}^\beta_{\alpha\gamma}(X, t)\right| \leq \varepsilon$$

si $X \in E$, $0 < t \leq T$, $m, s > N_\varepsilon$, ce qui confirme la convergence de la suite partielle de points $V'_{k_m} = \left[\overset{(k_m)}{w}{}^\beta_{\alpha\gamma}(X, t)\right]$ au sens de la norme (73) dans l'espace Λ. Le lemme 2 est donc démontré.

En s'appuyant sur les résultats précédents et sur le théorème cité de Schauder, nous en concluons l'existence dans l'ensemble $\mathcal{E}_\rho$ au moins d'un point $\overset{*}{V} = \left[\overset{*}{v}{}^\beta_{\alpha\gamma}(X, t)\right]$ *invariant* relativement à la transformation (79). Il existe donc au moins un système de fonctions $\overset{*}{v}{}^{\beta}_{\alpha\gamma}(X, t)$ vérifiant le système d'équations intégrales (70) en tout point X de l'espace E pour $0 < t < T$. D'après les propriétés des intégrales dans les expressions (70), étudiées dans notre travail [2], nous avons

$$\overset{*}{v}{}^{\beta}_{\alpha\gamma}(X, t) = \underset{(\gamma)}{D^{\beta}_{X}}[\overset{*}{v}{}^{0}_{\alpha}(X, t)] \qquad (\beta = 1, 2, \ldots, M-1)$$

en tout point $X \in E$ pour $0 < t < T$. Les fonctions trouvées

$$\overset{*}{v}{}^{0}_{1}(X, t), \quad \overset{*}{v}{}^{0}_{2}(X, t), \quad \ldots, \quad \overset{*}{v}{}^{0}_{N}(X, t) \tag{94}$$

forment donc une solution du système d'équations intégro-différentielles (69).

Remarquons maintenant que les fonctions $\overset{*}{v}{}^{\beta}_{\alpha\gamma}(X, t)$, d'après les relations (70) et les propriétés des intégrales analogues au potentiel, exprimées dans les théorèmes 5 et 7, vérifient une condition de Hölder de la forme

$$|\overset{*}{v}{}^{\beta}_{\alpha\gamma}(X, t) - \overset{*}{v}{}^{\beta}_{\alpha\gamma}(X_1, t)| < \frac{\text{Cte}\, e^{b|XX_0|}}{t^{\mu}} |XX_1|^{\theta} \qquad \theta = 1 - M(1 - \mu).$$

Il en résulte, remarque faite des suppositions (66), que les fonctions

$$\Phi_j(Y, \tau) = F_j[Y, \tau, (\overset{*}{v}{}^{0}), (\overset{*}{v}{}^{1}), \ldots, (\overset{*}{v}{}^{M-1})]$$

vérifient une condition de Hölder de la forme

$$|\Phi_j(Y, \tau) - \Phi_j(Y_1, \tau)| < \frac{\text{Cte}\exp[b|YX_0|]}{\tau^{\mu h_F}} |YY_1|^{\theta h_F}.$$

Par conséquent, en s'appuyant sur le théorème 6, nous pouvons affirmer que les fonctions

$$\overset{*}{v}{}^{0}_{1}(X, t), \quad \ldots, \quad \overset{*}{v}{}^{0}_{N}(X, t), \tag{95}$$

vérifiant le système d'équations intégro-différentielles (69), vérifient le système parabolique donné (61) en tout point X de l'espace E, pour $0 < t < T$.

Enfin nous démontrerons que les fonctions (95) vérifient la condition initiale

$$\lim_{t \to 0} \overset{*}{v}{}^{\alpha}_{0}(X, t) = f_{\alpha}(X) \qquad (\alpha = 1, \ldots, N). \tag{96}$$

En effet, la première des intégrales (69) a pour limite $f_{\alpha}(X)$, si $t \to 0$. Quant à la seconde, que nous désignerons par I, elle vérifie, d'après les limitations (16), (17), (82) une inégalité de la forme

$$|I| < \text{Cte} \int_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{\mu'} \tau^{(\mu+h)g}}.$$

Or, $\mu + h$ étant fixé, on peut toujours choisir la constante μ' suffisamment petite pour qu'on ait

$$\mu' + (\mu + h)g - 1 < 0,$$

par conséquent l'intégrale I tend vers zéro avec t et la propriété (96) est vérifiée. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME 8. — *Si les fonctions* $F_\alpha[X, t, (v^0), (v^1), \ldots, (v^{M-1})]$, *définies et continues dans la région* (64), *vérifient les conditions* (65) *et* (66); *si, en outre, les fonctions* $f_\alpha(X)$, *définies et continues dans l'espace* E, *vérifient la condition* (68), *alors il existe toujours* (*si grandes que soient les constantes du problème*) *au moins un système de fonctions*

$$u_1(X, t), \quad \ldots, \quad u_N(X, t)$$

qui vérifie le système parabolique donné (61) *en tout point* X *de l'espace* E, *pour* $0 < t < T$, *et la condition initiale*

$$\lim_{t \to 0} u_\alpha(X, t) = f_\alpha(X).$$

BIBLIOGRAPHIE.

[1] J. PETROVSKY, *Ueber das Cauchysche Problem für ein System linearer partieller Differentialgleichungen im Gebiete der nichtanalytischen Funktionen* (*Bull. Univ. Moscou*, fasc. 7, 1938).

[2] W. POGORZELSKI, *Étude de la matrice des solutions fondamentales du système parabolique d'équations aux dérivées partielles* (*Ric. Matem.*, Napoli, t. 7, 1958).

[3] W. POGORZELSKI, *Propriétés des solutions du système parabolique d'équations aux dérivées partielles* (*Math. Scand.*, 1959).

[4] S. EIDELMANN, *Sur les solutions fondamentales des systèmes paraboliques* (en russe) (*Matem. Sbornik*, t. 38, 1956).

[5] J. SCHAUDER, *Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen* (*Studia Mathematica*, 1930).