

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

ANDRÉ ARAGNOL

Sur la géométrie différentielle des espaces fibrés

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 75, n° 4 (1958), p. 257-407

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1958_3_75_4_257_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1958, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LA GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE

DES

ESPACES FIBRÉS

PAR M. ANDRÉ ARAGNOL.

INTRODUCTION.

L'objet de ce travail est l'étude de certains espaces fibrés ou faisceaux associés à un espace fibré principal différentiable ⁽¹⁾ $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ de base \mathcal{X} et de groupe G . Le premier de ces espaces est le quotient $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ de $G \times \mathcal{E}$ par la relation d'équivalence

$$(s, y) \equiv (\text{Int}(g^{-1})s, y \cdot s) \quad (y \in \mathcal{E} \text{ et } s, g \in G).$$

C'est un espace fibré à fibre-groupe qui opère à gauche sur \mathcal{E} et que nous appellerons *espace structural gauche* de $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$. Le deuxième est l'espace fibré $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ des formes tensorielles de type adjoint sur $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$. C'est un espace gradué

$$\mathcal{L}(\mathcal{E}) = \bigcup_p \mathcal{L}^p(\mathcal{E})$$

et les fibres de $\mathcal{L}^0(\mathcal{E})$ s'identifient aux algèbres de Lie des fibres de $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ qui opère donc sur $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ par l'intermédiaire de la représentation adjointe. Pour abrégé, $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ sera appelé l'*espace de Lie* de $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$. L'étude de ces deux espaces est complétée par celle du *faisceau des connexions* $C(\mathcal{E})$ de $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$, faisceau dont les sections globales sont les connexions infinitésimales sur $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ invariantes par les translations à droite. $C(\mathcal{E})$ est étroitement lié à $L(\mathcal{E})$ [faisceau des sections différentiables de $\mathcal{L}(\mathcal{E})$], d'abord parce que $L^1(\mathcal{E})$ opère sur $C(\mathcal{E})$ de façon simplement transitive, ensuite parce qu'à toute

(1) Dans la suite, « différentiable » signifiera toujours « de classe C^∞ ».

connexion ω est associé un opérateur de différentiation covariante sur $L(E)$ et une section de $L^2(E)$ qui n'est autre que la courbure $\Omega(\omega)$ de ω .

Les problèmes que nous abordons dans cette thèse concernent, en gros, l'équivalence de l'espace fibré $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ d'une part, et de l'ensemble des espaces $\mathcal{N}(\mathcal{E})$, $\mathcal{L}(\mathcal{E})$, $C(E)$, d'autre part, ou, ce qui revient à peu près au même, compte tenu des structures énoncées ci-dessus, l'équivalence de $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ et de $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ muni de l'opérateur de différentiation covariante Δ et de la courbure associés à une connexion ω , c'est-à-dire à une section de $C(E)$. Plus précisément, nous examinerons, parallèlement aux théorèmes de Lie, les questions suivantes :

A. L'espace structural gauche, l'espace de Lie, le faisceau des connexions d'un sous-espace fibré principal différentiable $\mathcal{E}_1(\mathcal{X}, G_1)$ ($\mathcal{E}_1 \subset \mathcal{E}$ et $G_1 \subset G$) de $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ s'identifient à des sous-espaces (en un sens qui sera précisé) \mathcal{N}_1 , \mathcal{L}_1 , C_1 de $\mathcal{N}(\mathcal{E})$, $\mathcal{L}(\mathcal{E})$, $C(E)$. Il en résulte que le faisceau L_1 des sections différentiables de \mathcal{L}_1 est stable pour la différentiation covariante associée à une section ω de C_1 et que $\Omega(\omega)$ est une section de L_1^2 . Inversement, à partir d'une connexion ω de $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ et d'un sous-espace \mathcal{L}_1 de $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ stable pour la différentiation covariante associée à ω et contenant la courbure $\Omega(\omega)$, peut-on remonter à un sous-espace de $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$?

B. Étant donnés deux espaces fibrés principaux différentiables $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ et $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, G')$ de base commune \mathcal{X} , tout couple d'homomorphismes compatibles

$$\begin{aligned} h : \mathcal{E} &\rightarrow \mathcal{E}' \\ \varphi : G &\rightarrow G' \end{aligned} \quad [h(y \cdot s) = h(y) \cdot \varphi(s), y \in \mathcal{E}, s \in G],$$

détermine des homomorphismes

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathcal{N}(\mathcal{E})}^h &: \mathcal{N}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{N}'(\mathcal{E}'), \\ \varphi_{\mathcal{L}(\mathcal{E})}^h &: \mathcal{L}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{L}'(\mathcal{E}'), \\ \varphi_{C(E)}^h &: C(E) \rightarrow C'(E') \end{aligned}$$

de l'espace structural gauche de $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ dans celui de $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, G')$, de l'espace de Lie de $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ dans l'espace de Lie de $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, G')$ et du faisceau des connexions de $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ dans le faisceau des connexions de $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, G')$. Si Δ est la différentiation covariante associée à une connexion ω de $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ et si Δ' est associée à $\omega' = \varphi_{C(E)}^h(\omega)$, on a

$$(1) \quad \begin{cases} \Delta' \circ \varphi_{L(E)}^h = \varphi_{L(E)}^h \circ \Delta, \\ \Omega(\omega') = \varphi_{L(E)}^h(\Omega(\omega)). \end{cases}$$

Réciproquement, si les espaces structuraux gauches de $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ et $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, G')$ sont liés par un homomorphisme

$$\psi_{\mathcal{N}(\mathcal{E})} : \mathcal{N}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{N}'(\mathcal{E}')$$

auquel est associé l'homomorphisme

$$\psi_{\mathcal{E}(\mathcal{S})} : \mathcal{L}(\mathcal{S}) \rightarrow \mathcal{L}'(\mathcal{S}')$$

de leurs espaces de Lie, et si les différentiations covariantes et les courbures associées à deux connexions définies sur $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ et $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, G')$ respectivement, se correspondent par $\psi_{L(E)}$, est-il possible de trouver un couple d'homomorphismes compatibles (φ, h) tels que

$$(2) \quad \varphi_{\mathcal{M}(\mathcal{S})}^h = \psi_{\mathcal{M}(\mathcal{S})}, \quad \varphi_{\mathcal{L}(\mathcal{S})}^h = \psi_{\mathcal{L}(\mathcal{S})}, \quad \varphi_{L(E)}^h(\omega) = \omega' \quad ?$$

C. Soit $\tilde{\mathcal{L}}^0$ un espace fibré différentiable de base \mathcal{X} , à fibre-algèbre de Lie. Notons $\tilde{\mathcal{L}}$ l'espace fibré des formes différentielles sur \mathcal{X} à valeurs dans $\tilde{\mathcal{L}}^0$. Si le faisceau \tilde{L} des sections différentiables de $\tilde{\mathcal{L}}$ est muni d'un opérateur $\tilde{\Delta}$ satisfaisant aux principales règles de différentiations covariantes et si $\tilde{\Delta}$ est lié à une section $\tilde{\Omega}$ de \tilde{L}^2 par

$$\tilde{\Delta}\tilde{\Omega} = 0 \quad \text{et} \quad \tilde{\Delta}^2\theta = [\tilde{\Omega}, \theta] \quad (\theta \in \tilde{L}),$$

nous dirons qu'un espace fibré principal admet $(\tilde{\mathcal{L}}, \tilde{\Delta}, \tilde{\Omega})$ si son espace de Lie s'identifie à $\tilde{\mathcal{L}}$ et s'il possède une connexion ω dont la différentiation covariante et la courbure coïncident avec $\tilde{\Delta}$ et $\tilde{\Omega}$. Le problème qui se pose est donc un problème d'existence : existe-t-il un espace fibré principal de groupe donné admettant $(\tilde{\mathcal{L}}, \tilde{\Delta}, \tilde{\Omega})$?

Cette thèse se divise donc en deux parties : l'étude des techniques utilisées occupe les chapitres I à IV inclus, leur application aux problèmes A, B, C est l'objet des chapitres suivants.

Le premier chapitre est consacré à la notion très générale de « modelage » qui n'est que la généralisation de la relation d'équivalence utilisée pour définir l'espace structural gauche $\mathcal{M}(\mathcal{S})$ de $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$, et qui permet, dès qu'on dispose d'un espace fibré (en un sens très large) M à fibres-groupes opérant sur d'autres espaces fibrés $E, L, L', \text{ etc.}$, de définir lorsque M est simplement transitif sur E , des « modelés » $L(E), L'(E), \text{ etc.}$, associés à E . Moyennant certaines conditions générales, toutes les structures existant entre $L, L', \text{ etc.}$, se retrouvent entre $L(E), L'(E), \text{ etc.}$ Cette notion, appliquée à la géométrie différentielle des espaces fibrés permet de ramener l'étude des propriétés classiques des connexions infinitésimales, différentiations covariantes, etc., à la vérification de conditions de compatibilité et à la démonstration de ces propriétés dans le cas d'espaces triviaux.

C'est dans cet esprit que les chapitres II et III ⁽²⁾ reprennent la théorie des

(²) Ces deux chapitres sont consacrés en grande partie à exposer, d'une façon nouvelle, croyons-nous, des résultats classiques. Leur lecture détaillée n'est donc pas indispensable pour la suite. Il est néanmoins nécessaire de lire le paragraphe III.1 ainsi que les résultats relatifs aux couples d'homomorphismes (φ, h) .

espaces fibrés différentiables à fibre vectorielle, des connexions et des différentiations covariantes, de façon aussi globale que possible. On met en évidence le rôle de l'espace fibré des repères de $\mathcal{L}^0(\mathcal{E})$, noté \mathcal{R} , et l'on définit des homomorphismes adjoints, de \mathcal{E} dans \mathcal{R} d'abord, mais aussi de l'espace structural gauche, de l'espace de Lie et du faisceau des connexions de \mathcal{E} dans les espaces correspondants associés à \mathcal{R} . Le faisceau des connexions qui s'identifie, bien entendu, au faisceau des sections différentiables de l'espace fibré des connexions, est l'objet d'une définition directe. On montre ainsi que le faisceau $M(E)$ des sections différentiables de $\mathcal{N}(\mathcal{E})$ opère sur $C(E)$ et l'on est directement conduit à la notion de faisceau d'invariance d'une connexion et à celle de faisceau des connexions réduites.

La théorie de l'holonomie est reprise dans le chapitre IV. Un lacet en x définit un élément m de la fibre $\mathcal{N}_x(\mathcal{E})$ de l'espace structural gauche de $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$. Le groupe d'holonomie en x apparaît donc comme un sous-groupe de $\mathcal{N}_x(\mathcal{E})$. L'étude des opérations de $M(E)$ sur $C(E)$, comparée à celles de $\mathcal{N}(\mathcal{E})$ sur \mathcal{E} , permet de montrer que le faisceau d'invariance d'une connexion est étroitement lié aux groupes d'holonomie locale de cette connexion. Enfin, on trouvera certains résultats valables lorsque G est abélien, ou relatifs aux rapports existant entre les opérations du centre de $M(E)$ sur $C(E)$ et les formes différentielles sur \mathcal{X} , à valeurs dans le centre de l'algèbre de Lie de G ; ces résultats seront utilisés par la suite,

C'est la résolution du problème A qui occupe le chapitre suivant. On y introduit la notion *du champ normal* associé à une connexion et à un sous-espace \mathcal{L}_1 de l'espace de Lie $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ de $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$. Le résultat essentiel est le théorème V.4.1 qui fixe les conditions d'intégrabilité d'un champ normal. Ce théorème permet de construire un sous-espace fibré principal correspondant à un sous-espace \mathcal{L}_1 lorsque ce dernier contient la courbure d'une connexion ω et lorsque le faisceau L_1 , déduit de \mathcal{L}_1 , est stable pour la différentiation covariante associée à ω . Le sous-espace fibré en question est alors une variété intégrale du champ normal correspondant à \mathcal{L}_1 et à ω . Comme application de ce résultat, on retrouve le théorème d'Ambrose sur les groupes d'holonomie,

Les chapitres VI et VII sont consacrés à la résolution du problème B. On montre d'abord, d'une façon tout à fait générale, que si les couples (φ, h) et (ψ, g) déterminent les mêmes homomorphismes, c'est-à-dire, si

$$\varphi_{\mathcal{N}(\mathcal{E})}^h = \psi_{\mathcal{N}(\mathcal{E})}^g, \quad \varphi_{\mathcal{L}(\mathcal{E})}^h = \psi_{\mathcal{L}(\mathcal{E})}^g, \quad \varphi_{C(E)}^h = \psi_{C(E)}^g,$$

on passe de φ à ψ par un automorphisme intérieur $\text{Int}(s^{-1})$ et de h à g par la translation à droite D_s sur \mathcal{E}' . Mais ensuite, le cas simplement connexe et le cas général sont traités séparément, bien que la résolution du premier soit une conséquence du second. Si \mathcal{X} est simplement connexe, on donne une démonstration directe de l'existence d'un couple d'homomorphismes remplissant les condi-

tions (2). Dans le cas général, on commence par construire un couple d'homomorphismes compatibles liant $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ au quotient $\mathcal{E}'_r(\mathcal{X}, G'_r)$ de $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, G')$ par le centre H' de G' (on suppose G et G' connexes). En même temps, on détermine le premier des homomorphismes (φ, h) cherchés, c'est-à-dire $\varphi : G \rightarrow G'$. On passe ensuite à la recherche des conditions d'existence de h . Ces conditions se présentent sous la forme d'un homomorphisme χ' du premier groupe d'homologie de \mathcal{X} , à coefficients entiers, dans H' . Pour que h existe, il faut et il suffit que χ' soit trivial. En fin de chapitre, on cherche s'il n'est pas possible, dans certains cas, de résoudre le problème en utilisant une connexion différente de ω' . Divers résultats sont obtenus lorsque l'image du premier groupe d'homologie, par χ' , est un sous-groupe de la composante connexe de l'élément neutre dans H' . Le cas le plus intéressant est alors celui où la variété \mathcal{X} est compacte.

L'existence d'un espace fibré principal différentiable de groupe donné G admettant $(\tilde{\mathcal{L}}, \tilde{\Delta}, \tilde{\Omega})$ est traitée au chapitre VIII. On commence par fixer les axiomes auxquels doivent satisfaire $\tilde{\Delta}$ et $\tilde{\Omega}$. On s'occupe ensuite du cas où le centre de $\tilde{\mathcal{L}}$ se réduit à 0 et, plus généralement de celui du quotient de $\tilde{\mathcal{L}}$ par son centre. La construction de l'espace fibré principal s'inspire alors du cas correspondant de la théorie des groupes de Lie : on le détermine comme variété intégrale d'un champ normal défini dans l'espace des repères de $\tilde{\mathcal{L}}^0$. Dans le cas général (en supposant cependant \mathcal{X} simplement connexe), le problème n'admet pas toujours une solution. On donne cependant une condition nécessaire et suffisante d'existence qui se présente sous la forme d'un homomorphisme appliquant le deuxième groupe d'homologie de \mathcal{X} à coefficients entiers dans le centre H de G . Pour que $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ admettant $(\tilde{\mathcal{L}}, \tilde{\Delta}, \tilde{\Omega})$ existe, il faut et il suffit que cet homomorphisme soit trivial. S'il n'en est pas ainsi, il est parfois possible de modifier G ou $\tilde{\Omega}$ pour se ramener à un cas résoluble.

Le dernier chapitre est consacré à quelques applications. En particulier, en cherchant à construire un espace fibré principal $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ admettant $(\tilde{\mathcal{L}}, \tilde{\Delta}, \tilde{\Omega})$ lorsque G est simplement connexe, on est conduit à la notion d'espace fibré principal maximal. Un tel espace (dont le groupe n'est pas nécessairement simplement connexe) possède les propriétés suivantes :

a. S'il existe un espace fibré principal admettant $(\tilde{\mathcal{L}}, \tilde{\Delta}, \tilde{\Omega})$ il existe aussi un espace fibré maximal admettant $(\tilde{\mathcal{L}}, \tilde{\Delta}, \tilde{\Omega})$ et ce dernier est un revêtement du premier.

b. L'espace fibré maximal admettant $(\tilde{\mathcal{L}}, \tilde{\Delta}, \tilde{\Omega})$ est unique [à un couple (φ, h) près]. Plus généralement, si $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ est maximal, le problème B peut être résolu à partir de la donnée du *seul* homomorphisme $\varphi_{\mathcal{E}(\mathcal{S})}$ vérifiant (1).

Dans le même chapitre, on définit aussi divers types de classes caractéris-

tiques ⁽³⁾ et l'on généralise les notions de connexion et de transport parallèle au cas d'un espace fibré principal différentiable à « espace structural » (au sens du chapitre : I). La totale symétrie existant entre l'espace structural (ou espace structural droit) et l'espace structural « gauche » apparaît alors complètement. Il y a même lieu de distinguer un espace de Lie à droite et un espace de Lie à gauche, une courbure à droite et une courbure à gauche, etc.

La plupart des chapitres sont précédés d'introductions auxquelles on se référera pour plus de détails. Signalons aussi que ces résultats ont été annoncés d'une façon généralement schématique et légèrement optimiste par endroits dans cinq Notes aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* [1], [2], [3], [4], [5].

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à M. Lichnerowicz dont les conseils m'ont toujours été utiles et les encouragements, souvent nécessaires.

CHAPITRE I.

ESPACES FIBRÉS. GÉNÉRALITÉS.

1. TERMINOLOGIE ET NOTATIONS. — Afin de donner toute leur généralité aux notions décrites dans ce chapitre, nous appellerons *espace fibré s. l.* (sens large), tout ensemble E muni d'une « projection » $p_E : E \rightarrow \mathcal{X}$ de E sur un autre ensemble \mathcal{X} appelé base. L'expression « espace fibré » sera strictement réservée aux espaces localement triviaux, au sens qui sera précisé ci-dessous.

La projection d'un espace fibré s. l. sera notée, en général, par la lettre p munie, en indice, du symbole représentant l'espace en question. Cependant, lorsque aucune confusion ne sera possible ou lorsque la projection n'interviendra pas dans les raisonnements en cours en tant que fonction, on négligera l'indice. Par ailleurs, étant donné un sous-ensemble U de \mathcal{X} , on posera toujours $E_U = p_E^{-1}(U)$.

On appelle *fibre* l'image réciproque d'un point quelconque de la base par la projection. S'il existe dans chaque fibre une structure algébrique d'un type déterminé, par exemple, de groupe ou d'algèbre de Lie, on dira que E est à fibres-groupes ou à fibres-algèbres de Lie, ou encore, que c'est un espace fibre de groupes ou d'algèbres de Lie.

On appelle *produit fibré* de deux espaces fibrés s. l. E et E' de même base \mathcal{X} , la partie du produit $E \times E'$ qui se projette sur la diagonale de $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$, identifiée à \mathcal{X} . On notera $E \boxtimes E'$ ce produit fibré. Il est clair que c'est un espace fibré s. l. de base \mathcal{X} .

⁽³⁾ L'une de ces classes, liée à l'existence de la forme $\tilde{\Omega}$, permet de résoudre le problème de l'extension d'un espace fibré principal différentiable.

Enfin, on dira qu'un espace fibré s. l. de groupes M opère sur un espace fibré E de même base lorsque chaque fibre M_x de $M(x \in X)$ opère sur la fibre correspondante E_x de E .

2. ESPACE FIBRÉ PRINCIPAL S. L. MODELAGE. — Un *espace fibré principal s. l.* $E(\mathcal{X}, M)$ est défini par la donnée d'un espace fibré s. l. E de base \mathcal{X} et d'un espace fibré s. l. de groupes M , de même base, qui opère à droite sur E , M_x étant simplement transitif sur E_x , quel que soit $x \in \mathcal{X}$. On dira que M est l'*espace structural droit* (ou simplement espace structural) de $E(\mathcal{X}, M)$. On notera $y.m$ le transformé de $y \in E_x$ par $m \in M_x$ et l'application $y \rightarrow y.m$ sera la translation à droite correspondante, notée aussi $D_m : E_x \rightarrow E_x$.

Soit, d'autre part, L un espace fibré s. l. de base \mathcal{X} sur lequel M opère à *gauche*. On notera, $R(m)l$ le transformé de $l \in L_x$ par $m \in M_x$.

Soit $L(E)$ le quotient de $E \boxtimes L$ par la relation d'équivalence suivante :

$$(y', l') \equiv (y, l) \quad \text{si} \quad p(y) = p(y') = p(l) = p(l')$$

et s'il existe $m \in M$ tel que

$$y' = y.m \quad \text{et} \quad l' = R(m^{-1})l \quad [y, y' \in E \text{ et } l, l' \in L].$$

On dira que $L(E)$ est obtenu en *modelant* L sur E , M opérant sur L par $R(m)$, ou encore que $L(E)$ est l'espace associé à $E(\mathcal{X}, M)$, de type $(L, R(m))$. Il est clair que $L(E)$ est un espace fibré s. l. de base \mathcal{X} . On notera α l'application canonique $\alpha : E \boxtimes L \rightarrow L(E)$.

3. L'APPLICATION $i_L(y)$. — Étant donné $y \in E [p(y) = x]$, on définit une application biunivoque

$$i_L(y) : L_x \rightarrow L_x(E)$$

en faisant correspondre à $l \in L_x$, la classe d'équivalence $\alpha(y, l) = i_L(y)l$ dont (y, l) fait partie. Cette application est bien biunivoque car, par définition, $(y, l) \equiv (y, l')$ implique $l = l'$. Elle est manifestement *sur*.

On pose $j_L(y) = (i_L(y))^{-1}$ et l'on vérifie facilement les formules

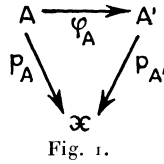
$$(I.3.1) \quad \begin{cases} i_L(y.m)l = i_L(y)(R(m)l) & (l \in L), \\ j_L(y.m)\lambda = R(m^{-1})j_L(y)\lambda & [\lambda \in L(E)]. \end{cases}$$

4. SOUS-ESPACES ET HOMOMORPHISMES. — Un *sous-espace fibré s. l.* d'un espace fibré s. l. A est un sous-ensemble A' de A , muni de la projection induite et tel que $A' \cap A_x \neq \emptyset$ quel que soit $x \in \mathcal{X}$. Si A est à fibres algébriques, on suppose que A'_x est, en outre, quel que soit $x \in \mathcal{X}$, une sous-structure de A_x .

Un *homomorphisme* d'un espace fibré s. l. dans un autre espace fibré s. l. de même base est une application

$$\varphi_A : A \rightarrow A'$$

du premier espace dans le second, telle que le diagramme



soit commutatif. Un homomorphisme d'espaces fibrés s. l. à fibres munies de structures algébriques est en outre, un homomorphisme de ces structures algébriques.

Dans ces conditions, en reprenant les notations du paragraphe 2, un *sous-espace fibré principal s. l.* de $E(\mathcal{X}, M)$ est constitué par un couple de sous-espaces fibrés s. l. E' (de E) et M' (de M) tels que M'_x opérant sur E_x comme sous-groupe de M_x , soit simplement transitif sur E'_x ($x \in \mathcal{X}$).

Étant donnés deux espaces fibrés principaux s. l. $E(\mathcal{X}, M)$ et $E'(\mathcal{X}, M')$, de même base, on dira que deux homomorphismes

$$\varphi_E : E \rightarrow E' \quad \text{et} \quad \varphi_M : M \rightarrow M'$$

sont *compatibles* si l'on a la relation

$$(I.4.1) \quad \varphi_E(y \cdot m) = \varphi_E(y) \cdot \varphi_M(m) \quad (y \in E_x, m \in M_x, x \in \mathcal{X}).$$

On dira alors que φ_E est un φ_M -*homomorphisme* et, si φ_M est l'identité, que φ_E est un *M-isomorphisme*.

Remarque. — Bien que, pour des raisons de simplicité, la terminologie ne soit fixée ici que pour des homomorphismes induisant l'identité sur \mathcal{X} , on peut envisager des homomorphismes d'espaces fibrés de bases différentes, conservant les fibres et induisant une application d'une base dans l'autre. Ce sera le cas des *homomorphismes induits* (§ I.7) pour lesquels nous utiliserons le vocabulaire précédent.

Plus généralement, étant donnés deux espaces fibrés s. l. L et L' sur lesquels M et M' opèrent respectivement à gauche par R et R' , un homomorphisme $\varphi_L : L \rightarrow L'$ est compatible avec φ_M , si l'on a

$$(I.4.2) \quad \varphi_L(R(m)l) = R'(\varphi_M(m))\varphi_L(l) \quad (m \in M \text{ et } l \in L).$$

5. CONSERVATION DES STRUCTURES PAR MODELAGE. — On a les propositions suivantes :

PROPOSITION I.5.1. — *Si L est un espace fibré s. l. de structures algébriques pour lesquelles les opérations de M sur L sont des automorphismes, la relation d'équivalence du paragraphe 2 est compatible avec les structures algébriques induites dans $E \boxtimes L$ et il existe dans $L(E)$ des structures-quotients pour lesquelles les applications $i_L(y)$ sont des isomorphismes.*

PROPOSITION I.5.2. — Si $\varphi_E : E \rightarrow E'$, $\varphi_M : M \rightarrow M'$ et $\varphi_L : L \rightarrow L'$ sont des homomorphismes compatibles, il existe un homomorphisme

$$\varphi_{L(E)} : L(E) \rightarrow L'(E')$$

pour lequel on a

$$i_{L'}(\varphi_E(y)) \varphi_L(l) = \varphi_{L(E)}(i_L(y) l) \quad (l \in L_x, y \in E_x).$$

PROPOSITION I.5.3. — Si L_1 est un espace fibré s. l. de groupes opérant à gauche (resp. à droite) sur L_2 et si M opère à gauche sur L_1 et L_2 avec la relation

$$(R_1(m) l_1) (R_2(m) l_2) = R_2(m) l_1 l_2, \quad (l_1 \in L_1, l_2 \in L_2, m \in M),$$

alors, $L_1(E)$ est un espace fibré de groupes opérant à gauche (resp. à droite) sur $L_2(E)$ et l'on a

$$(i_{L_1}(y) l_1) (i_{L_2}(y) l_2) = i_{L_2}(y) l_1 l_2.$$

Bien entendu, si les opérations de L_1 sur L_2 sont des automorphismes des structures algébriques de L_2 , il en est de même pour $L_1(E)$ et $L_2(E)$.

6. ESPACE STRUCTURAL GAUCHE. — L'espace structural M de l'espace fibré principal s. l. $E(\mathcal{X}, M)$ opérant sur lui-même par l'intermédiaire des automorphismes intérieurs [$\text{Int}(m)q = m q m^{-1}$], on peut modeler M sur E et obtenir ainsi, conformément à la proposition I.5.1, un espace fibré s. l. de groupes noté $M(E)$ et appelé *espace structural gauche* de $E(\mathcal{X}, M)$. Les formules (I.3.4) s'écrivent dans ce cas :

$$(I.6.1) \quad \begin{cases} i_M(y.m) q = i_M(y) m q m^{-1} & (y \in E, m, q \in M), \\ j_M(y.m) \mu = m^{-1} (j_M(y) \mu) m & [\mu \in M(E)]. \end{cases}$$

D'autre part, M opère à gauche sur l'espace fibré s. l. W , sous-jacent à M . Nous allons voir que $W(E)$ est isomorphe à E .

En effet, soit e_x l'élément neutre de M_x . Considérons l'application

$$f' : E \rightarrow E \boxtimes W$$

définie par $f'(y) = (y, e_x)$, puis l'application $f = \alpha \circ f'$. Toute classe d'équivalence $u \in W(E)$ admet un représentant et un seul du type (y, e_x) . En effet, soit (y, m) un représentant quelconque de u , on a bien $(y', e_x) \equiv (y, m)$ pour $y' = y.m$. Comme, d'autre part, pour que $(y', e_x) \equiv (y, e_x)$ il faut et il suffit que $y = y'$, on voit que f est une application biunivoque de E sur $W(E)$. Comme elle conserve les fibres, c'est un isomorphisme. De la proposition I.5.3 dont les hypothèses sont vérifiées, on déduit alors que $M(E)$ opère à gauche sur $W(E)$ et que $M_x(E)$ est simplement transitif sur $W_x(E)$. En identifiant $W(E)$ et E par f , on peut donc énoncer :

PROPOSITION I.6.1. — $M(E)$ opère à gauche sur E et $M_x(E)$ est simplement transitif sur E_x quel que soit $x \in \mathcal{X}$.

Ces opérations seront notées $\mu \cdot \gamma$ [$\mu \in M(E)$, $\gamma \in E_x$] et on les appellera *translations à gauche* de $M(E)$ sur E . On notera $G_\mu : E_x \rightarrow E_x$ l'application définie par $G_\mu(\gamma) = \mu \cdot \gamma$ [$\mu \in M_x(E)$, $\gamma \in E_x$].

PROPOSITION I.6.2. — *On a la formule*

$$\mu \cdot \gamma = \gamma \cdot (j_M(\gamma) \mu) \quad [\mu \in M(E), \gamma \in E].$$

En effet, on a successivement :

$$\begin{aligned} \mu \cdot \gamma &= \mu \cdot \alpha(\gamma, e_x) \\ &= \alpha(\gamma, (j_M(\gamma) \mu) e_x) \\ &= \alpha(\gamma \cdot j_M(\gamma) \mu, e_x) \\ &= f(\gamma \cdot j_M(\gamma) \mu). \end{aligned}$$

PROPOSITION I.6.3. — *Les opérations de $M(E)$ commutent avec celles de M .*

En effet, en utilisant le résultat précédent, on a successivement :

$$\begin{aligned} \mu \cdot (\gamma \cdot m) &= (\gamma \cdot m) \cdot (j_M(\gamma \cdot m) \mu) \quad [\mu \in M(E), m \in M] \\ &= (\gamma \cdot m) \cdot (m^{-1} (j_M(\gamma) \mu) m) \\ &= \gamma \cdot (j_M(\gamma) \mu) m \\ &= (\gamma \cdot j_M(\gamma) \mu) \cdot m \\ &= (\mu \cdot \gamma) \cdot m. \end{aligned}$$

En outre, comme conséquence immédiate de la proposition I.5.3, on a :

PROPOSITION I.6.4. — *Si M opère à gauche sur L [notation $R(m)l$], $M(E)$ opère également à gauche sur $L(E)$ [notation $R(\mu)\lambda$]. Si les opérations de M sont des automorphismes des structures algébriques de L , les opérations de $M(E)$ sont des automorphismes des structures algébriques de $L(E)$.*

Dans ces conditions, on est amené à remodeler $L(E)$ sur E par la relation d'équivalence $(\gamma, \lambda) \equiv (\mu \cdot \gamma, R(\mu)\lambda)$. Soit L' l'espace ainsi obtenu. On a alors les formules

$$(I.6.2) \quad \begin{cases} i_{L(E)}(\mu \cdot \gamma) (R(\mu)\lambda) = i_{L(E)}(\gamma) \lambda & [\lambda \in L(E)], \\ R(\mu^{-1}) (j_{L(E)}(\mu \cdot \gamma) l) = j_{L(E)}(\gamma) l & (l \in L') \end{cases}$$

et la proposition :

PROPOSITION I.6.5. — *L' est isomorphe à L .*

En effet, soit $h : E \boxtimes L(E) \rightarrow L$ l'application définie par

$$h(\gamma, \lambda) = j_L(\gamma) \lambda \quad [\lambda \in L(E), \gamma \in E].$$

On vérifie facilement que h est compatible avec la relation d'équivalence et que, une fois passée au quotient, elle est biunivoque.

Cette proposition permet d'identifier les applications $i_{L(E)}$ et j_L et les formules (I.6.2) entraînent les formules suivantes qu'on peut d'ailleurs vérifier directement :

$$(I.6.3) \quad \begin{cases} j_L(\mu \cdot y)(R(\mu)\lambda) = j_L(y)\lambda \\ R(\mu^{-1})(i_L(\mu \cdot y)l) = i_L(y)l \end{cases} \quad [y \in E, l \in L, \lambda \in L(E)].$$

En particulier, on retombe sur M en remodelant $M(E)$ sur E , de sorte qu'en modelant sur E un espace admettant $M(E)$ pour espace structural, on obtient un espace admettant M pour espace structural.

7. ESPACES FIBRÉS S. L. INDUITS PAR UNE APPLICATION. — Soit A un espace fibré s. l. de base \mathcal{X} et $\psi : \mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{X}$ une application d'un ensemble \mathcal{X}' dans \mathcal{X} . Considérons le produit $B = \mathcal{X}' \times A$ comme un espace fibré s. l. de base $\mathcal{X}' \times \mathcal{X}$, dont la projection est définie par

$$p_B(x', y) = (x', p_A(y)) \quad (x' \in \mathcal{X}' \text{ et } y \in A).$$

L'espace fibré s. l. induit par ψ est, par définition, la partie de B qui se projette sur le graphe de ψ , identifié à \mathcal{X}' . Plus précisément, c'est l'ensemble des points (x', y) de B tels que $p_A(y) = \psi(x')$. On le notera $\psi^{-1}(A)$.

Il existe alors une application $\psi_A^\# : \psi^{-1}(A) \rightarrow A$ définie par

$$\psi_A^\#(x', y) = y \quad (x' \in \mathcal{X}' \text{ et } y \in A),$$

qui applique biunivoquement chaque fibre de $\psi^{-1}(A)$ sur une fibre de A , plus précisément, $(\psi^{-1}(A))_{x'}$ sur $A_{\psi(x')}$, C'est l'*homomorphisme induit*.

Si A est un espace fibré s. l. de structures algébriques d'un type donné, $\psi^{-1}(A)$ est un espace fibré s. l. de structures algébriques de même type pour lesquelles $\psi_A^\#$ est un homomorphisme. Si M est un espace fibré s. l. à fibres-groupes opérant sur $L(M)$ et L de base \mathcal{X} , $\psi^{-1}(M)$ opère sur $\psi^{-1}(L)$. Si $E(\mathcal{X}, M)$ est un espace fibré principal s. l. et si M opère sur L , on peut modeler $\psi^{-1}(L)$ sur $\psi^{-1}(E)$ parce que, conformément à ce qui vient d'être dit, $\psi^{-1}(M)$ opère de façon simplement transitive sur $\psi^{-1}(E)$ dont il est l'espace structural droit et qu'il opère également sur $\psi^{-1}(L)$. On vérifie facilement :

PROPOSITION I.7.1. — $\psi^{-1}(L(E))$ est isomorphe à $\psi^{-1}(L)(\psi^{-1}(E))$.

Précisons maintenant quelques conventions que nous utiliserons constamment par la suite :

$M \rightrightarrows E$ signifiera que M opère sur E de façon simplement transitive ;

$M \rightarrow L$ signifiera que M opère sur L (éventuellement $M \xrightarrow{R(m)} L$ pour préciser les notations) ;

$A \rightarrow A'$ représentera un homomorphisme et $A \rightrightarrows A'$, un isomorphisme.

Dans ces conditions, on a le diagramme suivant qui est *compatible*, en ce sens que les homomorphismes $\psi^\#$ qui y figurent et les opérations des divers espaces M sur les espaces E ou L sont liés par les relations (I.7.1) et (I.7.2) ci-dessous, qu'on peut rapprocher de (I.4.1) et (I.4.2) (*voir* aussi la remarque du paragraphe (I.4) :

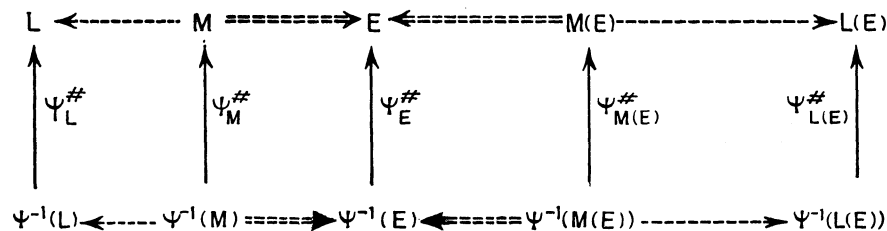


Fig. 2.

Formules de compatibilité :

$$(I.7.1) \quad \begin{cases} \psi_E^\#(y \cdot m) = \psi_E^\#(y) \cdot \psi_M^\#(m) & [m \in \psi^{-1}(M), y \in \psi^{-1}(E)], \\ \psi_E^\#(\mu \cdot \gamma) = \psi_{M(E)}^\#(\mu) \cdot \psi_E^\#(\gamma) & [\mu \in \psi^{-1}(M(E))]; \end{cases}$$

$$(I.7.2) \quad \begin{cases} \psi_L^\#(R(m)l) = R(\psi_M^\#(m)) \psi_L^\#(l) & [l \in \psi^{-1}(L)], \\ \psi_{L(E)}^\#(R(\mu)\lambda) = R(\psi_{M(E)}^\#(\mu)) \psi_{L(E)}^\#(\lambda) & [\lambda \in \psi^{-1}(L(E))]. \end{cases}$$

Enfin étant donné une section $\sigma : U \rightarrow A$, c'est-à-dire une application d'un sous-ensemble U de \mathcal{X} dans A telle que $p_A \circ \sigma = \text{identité}$, et un sous-ensemble V de \mathcal{X}' tel que $\psi(V) \subset U$, on dira que la restriction à $\psi^{-1}(A)$ de la section σ' de $\mathcal{X}' \times A$ définie sur $V \times U$ par

$$\sigma'(x', x) = (x', \sigma(x)) \quad (x' \in V \text{ et } x \in U)$$

est la *section induite* sur V par ψ à partir de σ . On la notera $\sigma^\#$. Elle est complètement définie par l'égalité

$$\psi_A^\#(\sigma^\#(x')) = \sigma(\psi(x')) \quad (x' \in V).$$

8. ESPACES FIBRÉS DIFFÉRENTIABLES. — Sous des hypothèses très larges, les notions précédentes s'étendent au cas où les espaces fibrés s. l. considérés sont des espaces topologiques et où les projections sont des applications continues : on applique alors aux topologies les opérations effectuées (topologie-quotient, induite, etc.). De plus, le modelage conserve certaines classes d'espaces fibrés, et, en précisant pour chacune de ces catégories les notions de sous-espaces, d'homomorphismes, etc., les résultats ci-dessous se transposent mot pour mot, à la substitution près des termes « espace fibré s. l. » par ceux qui désignent la classe des fibres envisagée. C'est en particulier le cas des espaces fibrés différentiables et celui des faisceaux.

Un *espace fibré différentiable* est une variété différentiable \mathcal{A} qu'une projec-

tion p_{α} applique sur une autre variété différentiable \mathcal{X} (base) de telle sorte que, quel que soit $x \in \mathcal{X}$, il existe un voisinage U de x et un homéomorphisme différentiable

$$\psi_U : A_U \rightarrow U \times F \quad [p_{\alpha}(\psi_U^{-1}(y, z)) = y, y \in U, z \in F]$$

de A_U sur le produit de U par une fibre-type F . Pour pouvoir parler d'homéomorphisme différentiable, il est évidemment nécessaire de supposer en outre que F est une réunion de variétés différentiables. On remarquera que, comme \mathcal{X} et \mathcal{A} sont connexes par arcs, deux composantes connexes quelconques de F sont nécessairement différentiablement homéomorphes.

L'espace fibré différentiable \mathcal{A} est à fibre-groupe de Lie (resp. algèbre de Lie, vectorielle, etc.), si l'espace fibré s. l. sous-jacent est à fibres-groupes, si F est un groupe de Lie (resp. algèbre de Lie, espace vectoriel etc.), et si les ψ_U sont des *isomorphismes*.

Étant donnés deux espaces fibrés différentiables \mathcal{A} et \mathcal{A}' de même base \mathcal{X} , une application $h : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ est un *homomorphisme d'espaces fibrés différentiables* si, quel que soit $x \in \mathcal{X}$, il existe un voisinage ouvert U de x , deux homéomorphismes différentiables ψ_U et ψ'_U et une application différentiable régulière $\mu : F \rightarrow F'$ de la fibre-type de \mathcal{A} dans celle de \mathcal{A}' , tels que le diagramme

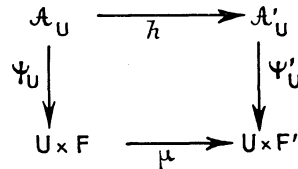


Fig. 3.

soit commutatif. Il en résulte évidemment que h est différentiable et régulière. Si les fibres de \mathcal{A} et \mathcal{A}' sont munies de structures algébriques de même type, on suppose de plus que h et μ sont des homomorphismes de ces structures.

Un sous-espace fibré s. l. \mathcal{A}' de \mathcal{A} est un *sous-espace fibré différentiable* de \mathcal{A} si :

- 1° \mathcal{A}' est un espace fibré différentiable ;
- 2° l'inclusion $I : \mathcal{A}' \rightarrow \mathcal{A}$ est un isomorphisme d'espaces fibrés différentiables.

Il en résulte que \mathcal{A}' est une sous-variété de \mathcal{A} et l'on remarquera que la topologie d'un sous-espace fibré différentiable n'est pas nécessairement la topologie induite. En particulier, la fibre-type F' de \mathcal{A}' est une réunion de sous-variétés de F mais chacune de ces sous-variétés est ouverte dans F' .

Un espace fibré différentiable \mathcal{M} à fibre-groupe de Lie opère sur un espace fibré différentiable \mathcal{A} de même base si la fibre-type G de \mathcal{M} opère sur la fibre-type F de \mathcal{A} par $R(g)$ de telle sorte que l'application $(g, y) \rightarrow R(g)y (g \in G$

et $y \in F$) soit différentiable, si l'espace fibré s. l. sous-jacent à \mathcal{N} opère sur \mathcal{A} par $R(m)$, et si, quel que soit $x \in \mathcal{X}$, il existe un voisinage U de x et des homéomorphismes $\psi'_v : A_v \rightarrow U \times F$, $\psi_v : \mathcal{N}_v \rightarrow U \times G$ tels que l'égalité

$$\psi_v(m) = (x, g) \quad \text{et} \quad \psi'_v(z) = (x, y) \quad (m \in \mathcal{N}, x \in \mathcal{X}, g \in G, y \in F, z \in \mathcal{A})$$

entraîne

$$\psi'_v(R(m)z) = (x, R(g)y).$$

Dans ces conditions, un *espace fibré principal différentiable à espace structural* est défini par la donnée d'un espace fibré différentiable \mathcal{N} à fibre-groupe de Lie opérant à droite de façon simplement transitive sur un espace fibré différentiable \mathcal{E} de même base. Remarquons qu'on rejoint la notion habituelle d'espace fibré principal à *groupe structural* lorsque l'espace structural est le produit de \mathcal{X} par un groupe de Lie G . On notera $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ un tel espace et, étant donné un deuxième espace fibré principal différentiable à groupe structural de même base, noté $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, G')$, on parlera de φ -homomorphisme $h : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$ si φ est un homomorphisme de G dans G' tel que $h(y.g) = h(y).\varphi(g)$. On dira aussi que φ et h sont compatibles et que h est un G -isomorphisme si φ est l'identité. De même, un *sous-espace fibré principal différentiable à groupe structural* $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, G')$ de $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ est un sous-espace fibré principal s. l. de l'espace fibré principal s. l. sous-jacent à $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ tel que :

1° \mathcal{E}' soit un sous-espace fibré différentiable de \mathcal{E} ;

2° $\mathcal{N}' \subset \mathcal{N} = \mathcal{X} \times G$ s'identifie au produit $\mathcal{X} \times G'$ de \mathcal{X} par un sous-groupe G' de G , sous-groupe muni, non de la topologie induite mais de la réunion de cette dernière et de la topologie de G' dont les seuls ouverts sont les composantes connexes par arcs de G' dans G . La composante connexe de l'identité de G' est alors un sous-groupe analytique de la composante connexe de G et G' , un groupe de Lie.

On peut reprendre avec ces notions les propositions des paragraphes précédents à condition de supposer évidemment, en ce qui concerne l'induction des espaces fibrés, que l'application $\psi : \mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{X}$ est différentiable. Si $\mathcal{E}(\mathcal{X}, \mathcal{N})$ est un espace fibré principal différentiable et si \mathcal{N} opère sur un autre espace fibré différentiable \mathcal{L} de base \mathcal{X} , $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ est aussi différentiable, $\mathcal{N}(\mathcal{E})$ opère sur $\mathcal{L}(\mathcal{E})$, etc. De même, $\psi^{-1}(\mathcal{E})$, $\psi^{-1}(\mathcal{N})$, $\psi^{-1}(\mathcal{L})$ sont des espaces fibrés différentiables, la section induite par ψ sur un ouvert V de \mathcal{X}' à partir d'une section différentiable de \mathcal{E} (resp. \mathcal{N} , \mathcal{L} , ...) sur un ouvert U de \mathcal{X} ($\psi(V) \subset U$) est une section différentiable, etc.

9. FAISCEAUX. — Un espace topologique E muni d'une projection continue p_E sur une base \mathcal{X} est un *faisceau* si, quel que soit $y \in E$, il existe un voisinage ouvert V de y dans E tel que la restriction de p_E à V soit un homéomorphisme de V sur $p_E(V)$.

Un *sous-faisceau* E' de E est un sous-espace fibré s. l. *ouvert* dans E .

Un homomorphisme d'un faisceau dans un autre est un homomorphisme des espaces fibrés s. l. sous-jacents qui est *continu*.

De même, un faisceau est à fibres-groupes (ou faisceau de groupes) si l'espace fibré s. l. sous-jacent est à fibres-groupes et si ces lois de groupe sont continues pour la topologie du faisceau. On peut donner une définition semblable pour toute autre espèce de structures algébriques.

Un faisceau M à fibres-groupes opère sur un faisceau E de même base si l'espace fibré s. l. sous-jacent à M opère sur E et si ces opérations sont continues pour les topologies de M et E .

La notion de faisceau principal découle de cette définition et l'on peut reprendre avec les faisceaux, les résultats des premiers paragraphes de ce chapitre, à condition de supposer, en ce qui concerne l'induction, que l'application ψ est continue. Si $E(\mathcal{X}, M)$ est un faisceau principal et si M opère sur un faisceau L de même base, $L(E)$ est un faisceau, $M(E)$ opère sur $L(E)$, etc. De même, si $\psi : \mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{X}$ est une application continue, $\psi^{-1}(E)$, $\psi^{-1}(M)$, $\psi^{-1}(L)$ sont des faisceaux, les sections continues sur des ouverts induits et des sections continues, etc.

10. FAISCEAU DES SECTIONS DIFFÉRENTIABLES D'UN ESPACE FIBRÉ DIFFÉRENTIABLE \mathcal{E} . —

Un *germe* de sections différentiables passant par $y \in \mathcal{E}$ est un ensemble non vide z de sections locales différentiables $\bar{\sigma}$ de \mathcal{E} passant par y tel que, si $\bar{\sigma}$ et $\bar{\sigma}'$ appartiennent à z , il existe un voisinage ouvert U de $p_{\mathcal{E}}(y)$ au-dessus duquel $\bar{\sigma}$ et $\bar{\sigma}'$ coïncident et que, inversement, si une section locale quelconque différentiable $\bar{\sigma}'$ de \mathcal{E} coïncide sur un voisinage ouvert de $p_{\mathcal{E}}(y)$ avec $\bar{\sigma} \in z$, alors, $\bar{\sigma}' \in z$. L'ensemble E de tous les germes de sections différentiables de \mathcal{E} est donc muni d'une application notée $z \rightarrow \hat{z}$ qui associe à tout germe z le point \hat{z} de \mathcal{E} par lequel passent toutes les sections qui constituent z , et d'une projection $p_E : E \rightarrow \mathcal{X}$ définie par $p_E(z) = p_{\mathcal{E}}(\hat{z})$. D'autre part, toute section différentiable $\bar{\sigma} : U \rightarrow \mathcal{E}$ de \mathcal{E} sur un ouvert U de \mathcal{X} , détermine en tout point $x \in U$ un germe $\underline{\sigma}(x)$ qui est celui auquel elle appartient et qui passe par $\bar{\sigma}(x) = \hat{\underline{\sigma}}(x)$. On dira que $\bar{\sigma} : U \rightarrow \mathcal{E}$ est la section de E associée à $\bar{\sigma}$. Le *faisceau* E des sections différentiables de \mathcal{E} est alors l'ensemble des germes de sections différentiables de \mathcal{E} , muni de la topologie engendrée par tous $\underline{\sigma}(U)$ (U ouvert dans \mathcal{X} et $\bar{\sigma}$ section différentiable de \mathcal{E} sur U). Il est immédiat de voir qu'il s'agit bien d'un faisceau. L'application $\underline{\sigma}$ associée à toute section différentiable $\bar{\sigma} : U \rightarrow \mathcal{E}$ est alors une *section continue* de E et, réciproquement, l'application $\bar{\sigma} : U \rightarrow \mathcal{E}$ définie à partir d'une section continue $\underline{\sigma} : U \rightarrow E$ quelconque par $\bar{\sigma}(x) = \hat{\underline{\sigma}}(x)$ est une section différentiable de \mathcal{E} . Ces notations (point, surlignage et sous-lignage ainsi que les majuscules d'imprimerie pour désigner les faisceaux de sections différentiables d'espaces fibrés symbolisés par des majuscules manuscrites) seront conservées par la suite.

Soit M le faisceau des sections différentiables d'un espace fibré différentiable \mathcal{M} à fibre-groupe de Lie et de base \mathcal{X} . Soient z et z' deux germes de sections différentiables de projection $x \in \mathcal{X}$. On définit le produit zz' en choisissant une section $\underline{\sigma}$ de M passant par z [$\underline{\sigma}(x) = z$] et une section $\underline{\sigma}'$ passant par z' définies l'une et l'autre sur un voisinage ouvert U de x (il est clair qu'il existe toujours de telles sections), en définissant une section différentiable $\bar{\sigma}''$ de \mathcal{E} par $\bar{\sigma}''(t) = \bar{\sigma}(t)\bar{\sigma}'(t)$ ($t \in U$) et en posant $zz' = \bar{\sigma}''(x)$. On vérifie sans peine que zz' ne dépend pas du choix des sections $\underline{\sigma}$ et $\underline{\sigma}'$. M est alors un faisceau de groupes et, pour cette structure de groupe, l'application « point » est un homomorphisme. Plus généralement, s'il existe dans les espaces fibrés différentiables \mathcal{E} , \mathcal{M} , \mathcal{L} ou entre ces espaces, diverses structures algébriques, on peut définir les mêmes structures dans les faisceaux E , M , L de leurs sections différentiables, ou entre ces faisceaux. Les applications « points » sont alors des homomorphismes.

En particulier, soit $\mathcal{E}(\mathcal{X}, \mathcal{M})$ un espace fibré principal d'espace structural \mathcal{M} . Le faisceau des sections différentiables de \mathcal{M} est le faisceau structural du faisceau principal $E(\mathcal{X}, M)$ défini comme faisceau des sections différentiables de \mathcal{E} . Supposons de plus que \mathcal{M} opère sur un troisième espace fibré différentiable \mathcal{L} et soit L le faisceau des sections différentiables de \mathcal{L} . M opère alors sur L et l'on a

$$(I.10.1) \quad \dot{y} \cdot \dot{m} = \dot{y} \cdot \dot{m} \quad \text{et} \quad R(\dot{m})\dot{l} = R(\dot{m})\dot{l} \quad (m \in M, y \in E, l \in L).$$

On peut donc modéliser L sur E en même temps que \mathcal{L} sur \mathcal{E} . Il résulte de la proposition I.5.2 qu'il existe une application de $L(E)$ sur $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ qui provient de l'application « point » et qu'on notera également $l \rightarrow \dot{l}$. On vérifie facilement, en utilisant des sections locales de E et les isomorphismes $i(y)$ correspondants que $L(E)$ est le faisceau des sections différentiables de $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ et que l'application « point » obtenue par modelage s'identifie à l'application « point » définie par les sections différentiables de $\mathcal{L}(\mathcal{E})$. En particulier, c'est un homomorphisme des structures algébriques de $L(E)$ et $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ et l'on a entre $M(E)$, $L(E)$ et E des formules du type (I.10.1).

Enfin, si $\psi : \mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{X}$ est une application différentiable, et si E est le faisceau des sections différentiables d'un espace fibré \mathcal{E} de base \mathcal{X} , il existe une application $y \rightarrow \dot{y}$ de $\psi^{-1}(E)$ sur $\psi^{-1}(\mathcal{E})$, induite par ψ à partir de l'application « point » de E sur \mathcal{E} et définie par

$$\psi_E^\#(y) \rightarrow \psi_{\mathcal{E}}^\#(\dot{y}) \quad [y \in \psi^{-1}(E)].$$

Mais, en général, $\psi^{-1}(E)$ ne s'identifie pas au faisceau des sections différentiables de $\psi^{-1}(\mathcal{E})$. Cependant, si l'on pose $\psi^{-1}(\mathcal{E}) = \mathcal{E}^\#$ et si l'on désigne par $E^\#$ le faisceau des sections différentiables de $\mathcal{E}^\#$, il existe un homomorphisme de faisceaux

$$\psi^{-1}(E) \rightarrow E^\#$$

qui résulte du fait que l'application « point » induite par ψ permet d'associer à toute section continue de $\psi^{-1}(E)$ une section différentiable de $\psi^{-1}(\mathcal{E})$.

CHAPITRE II.

ESPACES FIBRÉS A FIBRE VECTORIELLE.

ESPACE DE LIE D'UN ESPACE FIBRÉ PRINCIPAL DIFFÉRENTIABLE.

INTRODUCTION. — La première notion exposée dans ce chapitre est celle d'espace fibré des formes différentiables tensorielles de type R associé à un espace fibré principal différentiable à groupe structural $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$. Un tel espace $\mathfrak{R}(\mathcal{E})$ s'obtient en modelant sur $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ l'espace \mathfrak{R} des formes différentielles sur \mathcal{X} à valeurs dans un espace vectoriel \mathfrak{R}_0 sur lequel G opère par l'intermédiaire d'une représentation R. Un cas particulièrement important est celui où R est la représentation adjointe de G. L'espace $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ qu'on obtient ainsi est appelé *espace de Lie* de $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ (ou espace des formes différentielles tensorielles du type adjoint). Il est intrinsèquement associé à $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$, gradué, et $\mathcal{L}^0(\mathcal{E})$ s'identifie à l'espace des algèbres de Lie des fibres de l'espace structural gauche $\mathfrak{M}(\mathcal{E})$ de $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$,

Le but des paragraphes 2 et 3 est de mettre en évidence les propriétés intervenant entre $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ et l'espace $\mathcal{R}(\mathfrak{R}^0(\mathcal{E}))$ des repères de $\mathfrak{R}^0(\mathcal{E})$, qui est fibré principal de groupe $Gl(m, R)$. On constate d'abord que les espaces intrinsèquement associés à $\mathcal{R}(\mathfrak{R}^0(\mathcal{E}))$ (espace structural gauche et espace de Lie), ainsi que $\mathfrak{R}(\mathcal{E})$ peuvent s'obtenir soit par des opérations de modelage sur $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$, soit par des opérations de modelage sur $\mathcal{R}(\mathfrak{R}^0(\mathcal{E}))$. En outre, toute base f de \mathfrak{R}_0 détermine un homomorphisme $\psi^f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{R}(\mathfrak{R}^0(\mathcal{E}))$ qui est compatible avec l'homomorphisme $R^f : G \rightarrow Gl(m, R)$ déduit de R. Dans le cas de $\mathcal{L}(\mathcal{E})$, l'homomorphisme ψ^f est noté $a^f_{\mathcal{E}} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{R}(\mathcal{L}^0(\mathcal{E}))$. Il est compatible avec l'homomorphisme adjoint $a^f : G \rightarrow Gl(n, R)$ exprimé par rapport à la base f de l'algèbre de Lie de G, et nous dirons que c'est un *homomorphisme adjoint* de $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$. Plus généralement, on se donne au paragraphe 6 deux espaces fibrés principaux différentiables $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ et $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, G')$ et l'on montre qu'à tout couple d'homomorphisme compatibles $\varphi : G \rightarrow G'$ et $h : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$, sont associés des homomorphismes $\varphi^h_{\mathfrak{M}(\mathcal{E})}$ et $\varphi^h_{\mathcal{L}(\mathcal{E})}$ des espaces structuraux gauches et des espaces de Lie de \mathcal{E} et \mathcal{E}' . On vérifie ensuite que les homomorphismes $a_{\mathfrak{M}(\mathcal{E})}$ et $a_{\mathcal{L}(\mathcal{E})}$ de $\mathfrak{M}(\mathcal{E})$ dans l'espace structural gauche de $\mathcal{R}(\mathcal{L}^0(\mathcal{E}))$ et de $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ dans l'espace de Lie de $\mathcal{R}(\mathcal{L}^0(\mathcal{E}))$, ainsi associés au couple $(a^f, a^f_{\mathcal{E}})$, sont indépendants de la base f choisie. On les appelle respectivement les *$\mathfrak{M}(\mathcal{E})$ -et $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ -homomorphismes adjoints*.

1. NOTATIONS. — \mathcal{E}^1 désigne l'espace fibré des vecteurs tangents à une variété

différentiable \mathcal{X} de dimension d et \mathfrak{E}^q , l'espace fibré de base \mathcal{X} dont la fibre \mathfrak{E}_x^q est la $q^{\text{ième}}$ puissance extérieure de $\mathfrak{E}_x^1(x \in \mathcal{X})$. Soit \mathfrak{F}^q l'espace fibré des formes différentielles ordinaires sur \mathcal{X} : \mathfrak{F}_x^q s'identifie au dual de \mathfrak{E}_x^q . Le faisceau des formes différentielles sur \mathcal{X} de degré q , c'est-à-dire le faisceau des sections différentiables de \mathfrak{F}^q , est noté F^q . On pose

$$\mathfrak{E} = \bigcup_{q=1, \dots, d} \mathfrak{E}^q \quad \text{et} \quad \mathfrak{F} = \bigcup_{q=0, \dots, d} \mathfrak{F}^q,$$

\mathfrak{E} et \mathfrak{F} sont des espaces fibrés différentiables sur \mathcal{X} . De même,

$$F = \bigcup_{q=0, \dots, d} F^q$$

est un faisceau sur \mathcal{X} .

Soit G l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie G de centre H et de dimension n . Soit \mathfrak{V}_0 un espace vectoriel de dimension m sur lequel G opère par l'intermédiaire d'une représentation $R : G \rightarrow \Gamma(\mathfrak{V}_0)$ de G dans le groupe $\Gamma(\mathfrak{V}_0)$ des automorphismes linéaires de \mathfrak{V}_0 . A toute base $f = (f_i) (i = 1, \dots, m)$ de \mathfrak{V}_0 est associée une représentation $R^f : G \rightarrow \text{Gl}(m, \mathbb{R})$.

Nous nous donnons d'autre part, un espace fibré principal différentiable $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ de groupe structural G .

Nous désignerons par \mathfrak{V}_0^* le dual de \mathfrak{V}_0 , par $f^* = (f^i)$, la base duale de f et nous poserons $\underline{\mathfrak{V}}_0 = \mathfrak{V}_0^* \otimes \mathfrak{V}_0$. Muni de la multiplication définie par

$$[a, b] = \sum_{i, j, k=1}^m (a^i_j a^j_k - b^i_j a^j_k) f^k \otimes f_i$$

pour

$$a = \sum_{i, j=1}^m a^i_j (f^j \otimes f_i) \quad \text{et} \quad b = \sum_{i, j=1}^m b^i_j (f^j \otimes f_i),$$

$\underline{\mathfrak{V}}_0$ s'identifie à l'algèbre de Lie de $\Gamma(\mathfrak{V}_0)$.

Nous utiliserons les notations suivantes :

\mathfrak{V}^p , espace fibré des p -formes différentielles sur \mathcal{X} à valeurs dans \mathfrak{V}_0 ;

W^p , faisceau des p -formes différentielles sur \mathcal{X} à valeurs dans \mathfrak{V}_0 ;

\mathfrak{V}^p^* , espace fibré des p -formes différentielles sur \mathcal{X} à valeurs dans \mathfrak{V}_0^* ;

\dot{W}^p , faisceau des p -formes différentielles sur \mathcal{X} à valeurs dans \mathfrak{V}_0^* ;

$\langle \theta, \dot{\theta} \rangle$, produit scalaire antisymétrisé de $\theta \in \mathfrak{V}_x$ et $\dot{\theta} \in \mathfrak{V}_x^*$;

$\underline{\mathfrak{V}}^p$, espace fibré des p -formes différentielles sur \mathcal{X} à valeurs dans $\underline{\mathfrak{V}}_0$;

\underline{W}^p , faisceau des p -formes différentielles sur \mathcal{X} à valeurs dans $\underline{\mathfrak{V}}_0$.

$$\begin{aligned} \underline{\mathfrak{V}} &= \bigcup_{p=0, \dots, d} \underline{\mathfrak{V}}^p & \text{et} & & \underline{W} &= \bigcup_{p=0, \dots, d} \underline{W}^p. \\ \mathfrak{V} &= \bigcup_{p=0, \dots, d} \mathfrak{V}^p, & W &= \bigcup_{p=0, \dots, d} W^p, & \mathfrak{V}^* &= \bigcup_{p=0, \dots, d} \mathfrak{V}^p^*, & \dot{W} &= \bigcup_{p=0, \dots, d} \dot{W}^p. \end{aligned}$$

Naturellement, $\mathfrak{R}\mathcal{V}(\mathcal{E})$, $\mathfrak{R}^*\mathcal{V}(\mathcal{E})$, $\underline{\mathfrak{R}\mathcal{V}}(\mathcal{E})$, $W(E)$, $\bar{W}(E)$ désigneront les modelés sur \mathcal{E} et sur E (faisceau des sections différentiables de \mathcal{E}) des espaces ci-dessus, G opérant sur $\mathfrak{R}\mathcal{V}$, $\mathfrak{R}^*\mathcal{V}$, $\underline{\mathfrak{R}\mathcal{V}}$ par R et par les représentations qui s'en déduisent. $\mathfrak{R}\mathcal{V}(\mathcal{E})$ est l'espace des formes tensorielles de type R . Il est clair que $\mathfrak{R}\mathcal{V}(\mathcal{E})$ est muni d'une graduation correspondant à celle de $\mathfrak{R}\mathcal{V}$ et que tout $\mathfrak{R}\mathcal{V}^p(\mathcal{E})$ est à fibre vectorielle.

Remarque. — A toute section $\theta : U \rightarrow \mathfrak{R}\mathcal{V}(\mathcal{E})$ de $\mathfrak{R}\mathcal{V}(\mathcal{E})$ correspond une forme différentielle sur \mathcal{E}_U à valeurs dans $\mathfrak{R}\mathcal{V}_0$ dont l'expression au point $y \in \mathcal{E}_x$ ($x \in U$), est

$$[j_{\mathfrak{R}\mathcal{V}}(y) \theta(x)] \circ [dp_{\mathcal{E}}]_y.$$

Nous n'introduirons pas de nouvelle notation pour désigner cette forme : elle sera représentée par θ également et nous nous contenterons de préciser éventuellement s'il convient de considérer ce symbole comme une section de $\mathfrak{R}\mathcal{V}(\mathcal{E})$ ou comme une forme différentielle sur \mathcal{E}_U . Il nous arrivera aussi de dire que $j_{\mathfrak{R}\mathcal{V}}(y) \theta(x)$ est la restriction à $y \in \mathcal{E}_x$ de la forme θ ou, plus généralement, si \bar{y} est une section différentiable de \mathcal{E}_U , que $j_{\mathfrak{R}\mathcal{V}}(\bar{y}) \theta$ est la restriction de la forme θ à la section locale \bar{y} .

Rappels. — 1° On définit un isomorphisme de $\mathfrak{R}\mathcal{V}^p(\mathcal{E})$ sur l'espace fibré des p -formes différentielles sur \mathcal{X} à valeurs dans $\mathfrak{R}\mathcal{V}^0(\mathcal{E})$, en faisant correspondre à $\theta \in \mathfrak{R}\mathcal{V}_x^p(\mathcal{E})$, l'application linéaire $i_{\mathfrak{R}\mathcal{V}^0}(y) \circ (j_{\mathfrak{R}\mathcal{V}}(y) \theta)$, indépendante de $y \in \mathcal{E}_x$ (*).

2° Il existe une multiplication $\alpha \wedge \theta$ ($\alpha \in \mathcal{F}'_x$ et $\theta \in \mathfrak{R}\mathcal{V}_x^p$) notée simplement $\alpha \theta$ si θ est de degré 0. Cette multiplication se transmet à $\mathfrak{R}\mathcal{V}(\mathcal{E})$ sous la même notation $\alpha \wedge \theta$ [$\alpha \in \mathcal{F}'_x$ et $\theta \in \mathfrak{R}\mathcal{V}_x^p(\mathcal{E})$] et, dans les deux cas, on a les propriétés suivantes :

a. Si (ρ_i) est une base de $\mathfrak{R}\mathcal{V}_x^0$ [resp. $\mathfrak{R}\mathcal{V}_x^0(\mathcal{E})$], tout $\theta \in \mathfrak{R}\mathcal{V}_x^p$ [resp. $\mathfrak{R}\mathcal{V}_x^p(\mathcal{E})$] admet une décomposition et une seule de la forme

$$\theta = \sum_{i=1}^m \theta^i \rho_i \quad (\theta^i \in \mathcal{F}'_x).$$

b. Le produit par les formes de la base se traduit par la formule

$$\alpha \wedge \theta = \sum_{i=1}^m (\alpha \wedge \theta^i) \rho_i \quad (\alpha \in \mathcal{F}').$$

3° Étant donnés $\theta \in \mathfrak{R}\mathcal{V}_x^p(\mathcal{E})$ et $\check{\theta} \in \mathfrak{R}^*\mathcal{V}_x^q(\mathcal{E})$, le produit scalaire

$$\langle j_{\mathfrak{R}\mathcal{V}}(y) \theta, j_{\mathfrak{R}^*\mathcal{V}}(y) \check{\theta} \rangle$$

(*) On considère dans cette formule que $i_{\mathfrak{R}\mathcal{V}^0}(y)$ est un isomorphisme de $\mathfrak{R}\mathcal{V}_0$ sur $\mathfrak{R}\mathcal{V}_x^0(\mathcal{E})$, et non de $\mathfrak{R}\mathcal{V}_x^0$ sur $\mathfrak{R}\mathcal{V}_x^0(\mathcal{E})$. Cela a un sens car $\mathfrak{R}\mathcal{V}^0 = \mathcal{X} \times \mathfrak{R}\mathcal{V}_0$.

est une $(p+q)$ -forme différentielle ordinaire sur \mathcal{X} , indépendante de $y \in \mathcal{E}_x$. On peut donc poser

$$\langle \theta, \check{\theta} \rangle = \langle j_{\mathfrak{R}\varphi}(y)\theta, j_{\mathfrak{R}\varphi}^*(y)\check{\theta} \rangle,$$

ce qui permet, en particulier, de définir $\mathfrak{R}\omega_x^*(\mathcal{E})$ comme le dual de $\mathfrak{R}\omega_x^0(\mathcal{E})$. On a également

$$(II.1.1) \quad \langle R(m)\theta, \check{R}(m)\check{\theta} \rangle = \langle \theta, \check{\theta} \rangle \quad [m \in \mathfrak{N}(\mathcal{E})],$$

où \check{R} désigne la représentation duale de R .

4° L'isomorphisme $X \otimes Y \rightarrow i_{\mathfrak{R}\varphi}(y)(j_{\mathfrak{R}\varphi}^*(y)X \otimes j_{\mathfrak{R}\varphi}(y)Y) [X \in \mathfrak{R}\omega_x^0(\mathcal{E}), Y \in \mathfrak{R}\omega_x^0(\mathcal{E})]$ est indépendant de $y \in \mathcal{E}_x$ et permet d'identifier $\mathfrak{R}\omega^0(\mathcal{E})$ et $\mathfrak{R}\omega_x^0(\mathcal{E}) \otimes \mathfrak{R}\omega_x^0(\mathcal{E})$.

Enfin, on posera $\mathfrak{N}_{\mathfrak{R}\varphi} = \mathcal{X} \times \Gamma(\mathfrak{R}\omega_0)$ et $M_{\mathfrak{R}\varphi}$ sera le faisceau des sections différentiables de $\mathfrak{N}_{\mathfrak{R}\varphi}$. G opère sur $\mathfrak{N}_{\mathfrak{R}\varphi}$ par l'intermédiaire des automorphismes intérieurs de $\Gamma(\mathfrak{R}\omega_0)$, ce qui permet de construire $\mathfrak{N}_{\mathfrak{R}\varphi}(\mathcal{E})$ et $M_{\mathfrak{R}\varphi}(E)$. Il est clair que $\mathfrak{N}_{\mathfrak{R}\varphi}(\mathcal{E})$ s'identifie à l'espace fibré des automorphismes linéaires des fibres de $\mathfrak{R}\omega^0(\mathcal{E})$. En outre, il existe une représentation déduite de R :

$$R_{\mathfrak{N}(\mathcal{E})} : \mathfrak{N}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathfrak{N}_{\mathfrak{R}\varphi}(\mathcal{E}).$$

2. ESPACE DES REPÈRES DE $\mathfrak{R}\omega^0(\mathcal{E})$. — L'espace des q -repères $\mathcal{R}^q(\mathfrak{R}\omega^0(\mathcal{E}))$ est l'ensemble des q -repères des fibres de $\mathfrak{R}\omega^0(\mathcal{E})$, muni d'une structure évidente d'espace fibré différentiable ⁽⁵⁾. Il est clair que $\mathfrak{N}_{\mathfrak{R}\varphi}(\mathcal{E})$ opère à gauche sur $\mathcal{R}^q(\mathfrak{R}\omega^0(\mathcal{E}))$.

L'espace des m -repères, noté simplement $\mathcal{R}(\mathfrak{R}\omega^0(\mathcal{E}))$, ou même \mathcal{R} , est muni d'une structure d'espace fibré principal différentiable de base \mathcal{X} et de groupe structural $Gl(m, \mathbb{R})$. Le translaté à droite de $\rho = (\rho_i)$ par $A = (A^i_j)$ est le repère $\rho.A$ constitué par les vecteurs

$$\rho'_i = \sum_{j=1}^m A^i_j \rho_j \quad (i=1, \dots, m).$$

A $\rho \in \mathcal{R}(\mathfrak{R}\omega^0(\mathcal{E}))$ est associé canoniquement un isomorphisme

$$j'_{\mathfrak{R}\varphi}(\rho) : \mathfrak{R}\omega_x(\mathcal{E}) \rightarrow \mathfrak{V}_{m,x},$$

où \mathfrak{V}_m désigne l'espace fibré des formes différentielles sur \mathcal{X} à valeurs dans \mathbb{R}^m , isomorphisme défini par

$$j'_{\mathfrak{R}\varphi}(\rho)\theta = (\theta^i) \quad \text{pour } \rho = (\rho_i) \quad (i=1, \dots, m) \quad \text{et} \quad \theta = \sum_{i=1}^m \theta^i \rho_i.$$

⁽⁵⁾ Cette définition est évidemment valable pour tout espace fibré différentiable à fibre vectorielle. $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ n'y joue aucun rôle.

On a alors

$$j'_{\mathfrak{R}\varphi}(\rho \cdot A)\theta = \sum_{j=1}^m \bar{A}^{-1} i_j \theta_j = \bar{A}^{-1} \cdot j'_{\mathfrak{R}\varphi}(\rho)\theta.$$

PROPOSITION II.2.1. — *Il existe des isomorphismes canoniques*

$$j'_{\mathfrak{R}\varphi}(\rho) : \mathfrak{V}_x(\mathcal{E}) \rightarrow \mathfrak{V}_{m,x}$$

pour lesquels

$$(II.2.1) \quad j'_{\mathfrak{R}\varphi}(\rho \cdot A)\theta = \bar{A}^{-1} j'_{\mathfrak{R}\varphi}(\rho)\theta.$$

L'espace structural de \mathcal{R} est $\mathfrak{N}_m = \mathfrak{X} \times \text{Gl}(m, \mathbb{R})$ et l'on notera \mathcal{L}_m^0 le produit de \mathfrak{X} par l'algèbre de Lie $\text{Gl}(m, \mathbb{R})$ du groupe linéaire. Par modelage de \mathfrak{V}_m , \mathfrak{N}_m , \mathcal{L}_m sur \mathcal{R} , on obtient $\mathfrak{V}_m(\mathcal{R})$, $\mathfrak{N}_m(\mathcal{R})$, $\mathcal{L}_m(\mathcal{R})$ avec les isomorphismes correspondants : $j_{\mathfrak{N}_m}(\rho)$, $j_{\mathfrak{V}_m}(\rho)$ et $i_{\mathcal{L}_m}(\rho)$ ($\rho \in \mathcal{R}$). La formule (II.2.1) permet de vérifier la proposition :

PROPOSITION II.2.2. — *L'application $h_{\mathfrak{R}\varphi} = i_{\mathfrak{V}_m}(\rho) \circ j'_{\mathfrak{R}\varphi}(\rho)$, indépendante de $\rho \in \mathcal{R}_x$, est un isomorphisme de $\mathfrak{V}_x(\mathcal{E})$ sur $\mathfrak{V}_m(\mathcal{R})$.*

Par ailleurs, puisque $\mathfrak{V}_x^0(\mathcal{E})$ s'identifie au dual de $\mathfrak{V}_x(\mathcal{E})$, que

$$\underline{\mathfrak{V}}_x^0(\mathcal{E}) = \mathfrak{V}_x^0(\mathcal{E}) \otimes \mathfrak{V}_x^0(\mathcal{E}),$$

et que $\mathfrak{N}_{\mathfrak{R}\varphi,x}(\mathcal{E})$ n'est autre que le groupe des automorphismes linéaires de $\mathfrak{V}_x^0(\mathcal{E})$, on associe à $\rho \in \mathcal{R}$, par l'intermédiaire de $j'_{\mathfrak{R}\varphi}(\rho)$, des isomorphismes

$$j'_{\mathfrak{V}_m}(\rho) : \mathfrak{V}_x^0(\mathcal{E}) \rightarrow \mathfrak{V}_{m,x}^0, \quad j'_{\underline{\mathfrak{V}}_m}(\rho) : \underline{\mathfrak{V}}_x^0(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{L}_{m,x}, \quad j'_{\mathfrak{N}_{\mathfrak{R}\varphi}}(\rho) : \mathfrak{N}_{\mathfrak{R}\varphi,x}(\rho) \rightarrow \mathfrak{N}_{m,x}.$$

On a alors des résultats analogues à la proposition II.2.2 :

PROPOSITION II.2.3. — *Les applications*

$$h_{\mathfrak{V}_m}^* = i_{\mathfrak{V}_m}^*(\rho) \circ j'_{\mathfrak{V}_m}(\rho), \quad h_{\underline{\mathfrak{V}}_m} = i_{\mathcal{L}_m}(\rho) \circ j'_{\underline{\mathfrak{V}}_m}(\rho), \quad h_{\mathfrak{N}_{\mathfrak{R}\varphi}} = i_{\mathfrak{N}_m}(\rho) \circ j'_{\mathfrak{N}_{\mathfrak{R}\varphi}}(\rho),$$

ne dépendant que de la projection de ρ sur \mathfrak{X} , sont des isomorphismes.

Dans la suite, nous identifierons complètement $\mathfrak{V}_m(\mathcal{R})$ et $\mathfrak{V}_x(\mathcal{E})$, $\mathfrak{V}_m^*(\mathcal{R})$ et $\mathfrak{V}_x^0(\mathcal{E})$, $\mathcal{L}_m(\mathcal{R})$ et $\underline{\mathfrak{V}}_x(\mathcal{E})$, $\mathfrak{N}_m(\mathcal{R})$ et $\mathfrak{N}_{\mathfrak{R}\varphi}(\mathcal{E})$.

3. LE R^f -HOMOMORPHISME $\psi^f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{R}$. — Choisissons une base

$$f = (f_i) \quad (i = 1, \dots, m),$$

de \mathfrak{V}_0 . La représentation $R : G \rightarrow \Gamma(\mathfrak{V}_0)$ s'exprime, par rapport à f , par un homomorphisme $R^f : G \rightarrow \text{Gl}(m, \mathbb{R})$. On pose $R^f(s) = (A^i_j(s))$ ($i, j = 1, \dots, m$),

avec $R(s)f_i = \sum_{j=1}^m A^j_i(s) f_j$ et $s \in G$. On peut alors définir un homomorphisme ψ^f , associé à R et à f , par l'égalité

$$(II.3.1) \quad \psi^f(y) = (i_{\mathcal{R}\mathcal{G}}(y)f_i) \quad (i=1, \dots, m \text{ et } y \in \mathcal{E}).$$

C'est un R^f -homomorphisme. En effet :

PROPOSITION II.3.1. — On a la formule

$$\psi^f(y.s) = \psi^f(y).R^f(s) \quad (y \in \mathcal{E} \text{ et } s \in G)$$

Démonstration :

$$\begin{aligned} i_{\mathcal{R}\mathcal{G}}(y.s)f_i &= i_{\mathcal{R}\mathcal{G}}(y)(R(s)f_i) \\ &= i_{\mathcal{R}\mathcal{G}}(y) \left(\sum_{j=1}^m A^j_i(s) f_j \right) \\ &= \sum_{j=1}^m A^j_i(s) (i_{\mathcal{R}\mathcal{G}}(y)f_j) \\ &= \psi^f(y).R^f(s). \end{aligned}$$

En outre :

PROPOSITION II.3.2. — On a la formule $\psi^{f.A} = D_A \circ \psi^f$ où $A = (A^j_i)$ est une matrice de $Gl(m, R)$ et D_A est la translation à droite sur \mathcal{R} définie par A , tandis que $f.A$ est le repère $\left(\sum_{j=1}^m A^j_i f_j \right)$.

En effet,

$$\begin{aligned} \psi^{f.A}(y) &= i_{\mathcal{R}\mathcal{G}}(y) \left(\sum_{j=1}^m A^j_i f_j \right) \\ &= \left(\sum_{j=1}^m A^j_i i_{\mathcal{R}\mathcal{G}}(y) f_j \right) \\ &= \psi^f(y).A. \end{aligned}$$

4. ESPACE DE LIE D'UN ESPACE FIBRÉ PRINCIPAL DIFFÉRENTIABLE A GROUPE STRUCTURAL.

— Nous considérons toujours un groupe de Lie G de dimension n et un espace fibré principal différentiable $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ de base \mathcal{X} et de groupe G . On appellera *espace de Lie* de $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$, l'espace $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ obtenu en modelant sur $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$

l'espace $\mathcal{L} = \bigcup_p \mathcal{L}^p$ ($p=1, \dots, d$) des formes différentielles sur \mathcal{X} à valeurs

dans l'algèbre de Lie \underline{G} de G , G opérant sur \mathcal{L} par l'intermédiaire de la représentation adjointe. $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ est donc, en appliquant la terminologie indiquée ci-dessus, l'espace des formes tensorielles de type adjoint de $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$. Mais sa structure est plus complexe que celle d'un espace fibré de formes tensorielles

ordinaires : en plus des opérations linéaires, les fibres de $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ sont munies d'un crochet. D'où le nom d'espace de Lie, qui se trouvera en outre justifié ultérieurement par une certaine similitude dans les rapports existant entre un espace fibré principal et son espace de Lie d'une part, entre un groupe de Lie et son algèbre, d'autre part,

On vérifie sans aucune difficulté que \mathcal{L} est muni des structures suivantes pour lesquelles les transformations adjointes sont des automorphismes, ce qui entraîne l'existence des mêmes structures dans les fibres de $\mathcal{L}(\mathcal{E})$, en vertu des propositions du paragraphe 5 :

1° Chaque \mathcal{L}_x^q [resp. $\mathcal{L}_x^q(\mathcal{E})$] est muni d'une structure d'espace vectoriel et il existe une multiplication extérieure par les formes différentielles ordinaires de la base, multiplication notée

$$\alpha \wedge \theta \quad (\alpha \in \mathcal{F}_x^r, \theta \in \mathcal{L}_x^q \text{ [resp. } \alpha \in \mathcal{F}_x^r, \theta \in \mathcal{L}_x^q(\mathcal{E})]),$$

et déjà signalée à propos de \mathfrak{L}^2 (§ II.4).

2° En outre, il existe dans chaque fibre de \mathcal{L} [resp. $\mathcal{L}(\mathcal{E})$] une loi de composition interne, combinant le crochet de l'algèbre de Lie et la multiplication extérieure, qu'on continue à appeler « crochet » et à noter

$$[\theta, \theta'] \quad (\theta \in \mathcal{L}_x^p, \theta' \in \mathcal{L}_x^q \text{ [resp. } \theta \in \mathcal{L}_x^p(\mathcal{E}), \theta' \in \mathcal{L}_x^q(\mathcal{E})]).$$

On a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} & [\theta, \theta'] + (-1)^{pq} [\theta', \theta] = 0, \\ [[\theta, \theta'], \theta''] + (-1)^{pqr} [[\theta', \theta''], \theta] + (-1)^{pqr} [[\theta'', \theta], \theta'] = 0 \quad (\theta'' \in \mathcal{L}_x^r \text{ [resp. } \mathcal{L}_x^r(\mathcal{E})]), \end{aligned}$$

qui généralisent l'antisymétrie des algèbres de Lie et l'identité de Jacobi.

Il en résulte immédiatement que des opérations de même type existent dans les fibres des faisceaux L et $L(E)$ des sections différentiables de \mathcal{L} et $\mathcal{L}(\mathcal{E})$, que ces opérations sont continues pour les topologies de faisceaux et que les applications « point » sont des homomorphismes de ces structures.

On a, bien entendu :

$$\begin{aligned} (\alpha + \alpha') \wedge \theta &= \alpha \wedge \theta + \alpha' \wedge \theta & [\alpha, \alpha' \in \mathcal{F}_x^p, \theta \in \mathcal{L}_x^q(\mathcal{E})], \\ \alpha \wedge (\theta + \theta') &= \alpha \wedge \theta + \alpha \wedge \theta' & [\theta' \in \mathcal{L}_x^q(\mathcal{E})], \\ \alpha \wedge (\beta \wedge \theta) &= (\alpha \wedge \beta) \wedge \theta & (\beta \in \mathcal{F}_x^r) \\ \alpha \wedge [\theta, \theta'] &= [\alpha \wedge \theta, \theta']. \end{aligned}$$

Enfin, $\mathfrak{N}(\mathcal{E})$ opère sur $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ par des transformations provenant des transformations adjointes de G (prop. I.5.3) et notées également Adj.

Remarquons que l'espace $\mathcal{L}_m(\mathcal{R})$, considéré au paragraphe II.2 et identifié à $\mathfrak{L}^2(\mathcal{E})$, est l'espace de Lie de $\mathcal{R}(\mathcal{L}^0(\mathcal{E}))$. Dans le cas où $\mathfrak{L}_0 = \hat{G}$, l'espace $\mathfrak{N}_{\mathfrak{L}_0}$, directement lié à \mathfrak{N} , sera noté $\underline{\mathfrak{N}}$; de même, \mathfrak{L}_0 devient $\underline{\mathcal{L}}$. L'espace structural gauche de $\mathcal{R}(\mathcal{L}^0(\mathcal{E}))$ est donc $\underline{\mathfrak{N}}(\mathcal{E})$ et son espace de Lie est $\underline{\mathcal{L}}(\mathcal{E})$.

Comme, par définition, $\mathfrak{N} = \mathfrak{X} \times \mathbf{G}$, nous considérerons $j_{\mathfrak{N}}(y)$ comme un isomorphisme $\mathfrak{N}_x(\mathcal{E}) \rightarrow \mathbf{G}$ [resp. $i_{\mathfrak{N}}(y) : \mathbf{G} \rightarrow \mathfrak{N}_x(\mathcal{E})$]. De même, $j_{\mathcal{E}^0}(y)$ peut être considéré comme un isomorphisme $\mathcal{E}_x^0(\mathcal{E}) \rightarrow \underline{\mathbf{G}}$ [resp. $i_{\mathcal{E}^0}(y) : \underline{\mathbf{G}} \rightarrow \mathcal{E}_x^0(\mathcal{E})$]. Soit $\underline{i}_{\mathfrak{N}}(y)$ l'isomorphisme de $\underline{\mathbf{G}}$ sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{N}_x(\mathcal{E})$ de $\mathfrak{N}_x(\mathcal{E})$ associé à $i_{\mathfrak{N}}(y)$. Si l'on pose

$$k(y) = \underline{i}_{\mathfrak{N}}(y) \circ j_{\mathcal{E}^0}(y),$$

on obtient un isomorphisme

$$k(y) : \mathcal{E}_x^0(\mathcal{E}) \rightarrow \underline{\mathfrak{N}}_x(\mathcal{E}).$$

On vérifie immédiatement que $k(y)$ ne dépend que de la projection x de y sur \mathfrak{X} , et non du choix de y dans \mathcal{E}_x . Cela permet d'énoncer :

PROPOSITION II.4.1. — *Il existe un isomorphisme canonique*

$$k : \mathcal{E}^0(\mathcal{E}) \rightarrow \underline{\mathfrak{N}}(\mathcal{E})$$

de $\mathcal{E}^0(\mathcal{E})$ sur l'espace fibré $\underline{\mathfrak{N}}(\mathcal{E})$ des algèbres de Lie des fibres de $\mathfrak{N}(\mathcal{E})$, isomorphisme défini par l'égalité

$$k = \underline{i}_{\mathfrak{N}}(y) \circ j_{\mathcal{E}^0}(y) \quad (y \in \mathcal{E}).$$

Remarque. — Ce résultat est évidemment plus général et il reste valable pour des espaces fibrés $\mathfrak{X}(\mathcal{E})$ et $\mathfrak{Z}^0(\mathcal{E})$ obtenus en modelant sur $\mathcal{E}(\mathfrak{X}, \mathbf{G})$ les produits $\mathfrak{X} = \mathfrak{X} \times \Gamma$ de \mathfrak{X} par un groupe de Lie Γ sur lequel \mathbf{G} opère comme groupe d'automorphismes, et $\mathfrak{Z}^0 = \underline{\Gamma} \times \mathfrak{X}$ de l'algèbre de Lie de Γ sur laquelle \mathbf{G} opère par les automorphismes associés, par \mathfrak{X} également.

On vérifie de plus qu'on a

$$\text{Adj}(m) k(l) = k(\text{Adj}(m)l) \quad [l \in \mathcal{E}^0(\mathcal{E}) \text{ et } m \in \mathfrak{N}(\mathcal{E})],$$

formule où $\text{Adj}(m)$ désigne, au premier membre, les transformations de $\mathfrak{N}(\mathcal{E})$ sur son algèbre de Lie et, au second, l'opération de $\mathfrak{N}(\mathcal{E})$ sur $\mathcal{E}^0(\mathcal{E})$ résultant du modelage.

Par ailleurs, puisque \mathbf{G} est simplement transitif sur \mathcal{E}_x , il existe une forme β , définie en tout point $y \in \mathcal{E}[p(y) = x]$ sur l'espace vectoriel V_y des vecteurs tangents à \mathcal{E}_x au point y , et identifiant V_y et $\underline{\mathbf{G}}$:

$$\beta_y : V_y \rightarrow \underline{\mathbf{G}}.$$

De même, tout élément $X \in \underline{\mathfrak{N}}_x(\mathcal{E})$ détermine un champ de vecteurs verticaux tangents à \mathcal{E}_x : soit X_y ce champ de vecteurs.

PROPOSITION II.4.2. — *On a*

$$\beta(X_y) = j_{\mathcal{E}^0}(y)(k^{-1}(X)).$$

Cette proposition résulte immédiatement de la formule

$$m \cdot y = y \cdot j_{\mathfrak{M}}(y)m \quad [m \in \mathfrak{M}(\mathcal{E})]$$

qui entraîne l'identité de $j_{\mathfrak{M}}(y)X$ et de $\beta(X_y)$. Or, par définition de k , on a

$$j_{\mathcal{E}^0}(y)(k^{-1}(X)) = j_{\mathfrak{M}}(y)X,$$

d'où la formule indiquée.

Cette formule entraîne $\beta(X_{y \cdot s}) = \text{Adj}(s^{-1})\beta(X_y)$ et, par suite :

PROPOSITION II.4.3. — *Le champ X_y est invariant par les translations à droite de G sur \mathcal{E} .*

5. HOMOMORPHISMES. — Soient $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ et $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, G')$ deux espaces fibrés principaux différentiables de base commune \mathcal{X} et de groupes G et G' respectivement. Nous supposons qu'il existe un couple d'homomorphismes compatibles

$$\begin{aligned} \varphi : G &\rightarrow G' \\ h : \mathcal{E} &\rightarrow \mathcal{E}' \end{aligned} \quad [h(y \cdot s) = h(y) \cdot \varphi(s), s \in G, y \in \mathcal{E}].$$

Il s'agit, dans ce paragraphe, d'examiner de quelle façon se traduit l'existence d'un tel couple sur les espaces structuraux gauches et sur les espaces de Lie de $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ et $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, G')$.

A φ est associé l'homomorphisme $\underline{\varphi} : \underline{G} \rightarrow \underline{G}'$ de l'algèbre de Lie de G dans l'algèbre de Lie de G' ⁽⁶⁾. A son tour, $\underline{\varphi}$ détermine un homomorphisme

$$\varphi_{\mathcal{L}} : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}'$$

de l'espace des formes différentielles sur \mathcal{X} à valeurs dans \underline{G} dans l'espace des formes différentielles à valeurs dans \underline{G}' . $\varphi_{\mathcal{L}}$ est compatible avec φ , en ce sens qu'on a (voir § I.4) :

$$\varphi_{\mathcal{L}}(\text{Adj}(s)X) = \text{Adj}(\varphi(s))\varphi_{\mathcal{L}}(X) \quad (s \in G \text{ et } X \in \mathcal{L}).$$

De même, $\varphi_{\mathfrak{M}}$ déduit de φ est compatible avec φ lorsque G opère sur \mathfrak{M} par l'intermédiaire des automorphismes intérieurs. Il en résulte (prop. I.5.2) qu'il existe deux homomorphismes

$$\varphi_{\mathfrak{M}(\mathcal{E})}^h : \mathfrak{M}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathfrak{M}'(\mathcal{E}') \quad \text{et} \quad \varphi_{\mathcal{L}(\mathcal{E})}^h : \mathcal{L}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{L}'(\mathcal{E}')$$

de l'espace structural gauche de $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ dans celui de $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, G')$, d'une part, de l'espace de Lie de \mathcal{E} dans l'espace de Lie de \mathcal{E}' , d'autre part. On dira que ces homomorphismes sont associés au couple (φ, h) . Ils peuvent être définis par les relations

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathfrak{M}(\mathcal{E})}^h(i_{\mathfrak{M}}(y)s) &= i_{\mathfrak{M}'}(h(y))\varphi(s) & (s \in G \text{ et } y \in \mathcal{E}) \\ \varphi_{\mathcal{L}(\mathcal{E})}^h(i_{\mathcal{E}^0}(y)X) &= i_{\mathcal{E}'^0}(h(y))\underline{\varphi}(X) & (X \in G). \end{aligned}$$

⁽⁶⁾ Nous conservons la notation $d\varphi$ pour la différentielle de φ qui interviendra de façon distincte de $\underline{\varphi}$ à l'occasion de la définition des connexions.

Cette dernière égalité montre que, en conservant les notations θ et θ' pour représenter les formes différentielles sur \mathcal{E} et \mathcal{E}' correspondant à deux sections θ et θ' de $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ et $\mathcal{L}'(\mathcal{E}')$ respectivement, telles que $\theta' = \varphi_{\mathcal{L}'(\mathcal{E}')}^h \circ \theta$, on a

$$\theta'_{h(y)} \circ (dh)_y = (\varphi) \circ \theta_y \quad (y \in \mathcal{E}),$$

où $\theta'_{h(y)}$ et θ_y sont des formes linéaires sur des puissances extérieures des espaces vectoriels tangents à \mathcal{E}' et à \mathcal{E} aux points $h(y)$ et y , à valeurs dans \underline{G}' et \underline{G} , et où $(dh)_y$, différentielle de h , applique les vecteurs tangents à \mathcal{E} au point y dans les vecteurs tangents à \mathcal{E}' au point $h(y)$. Enfin, $\varphi_{\mathcal{N}(\mathcal{E})}^h$ et $\varphi_{\mathcal{L}(\mathcal{E})}^h$ sont également associés entre eux, en ce sens que, au-dessus de tout point x de \mathcal{X} , on a

$$\varphi_{\mathcal{N}(\mathcal{E})}^h \circ k = k \circ \varphi_{\mathcal{L}(\mathcal{E})}^h.$$

Application. — En revenant au paragraphe II.3, on voit qu'au couple (R^f, ψ^f) , sont associés deux homomorphismes

$$R_{\mathcal{N}(\mathcal{E})} : \mathcal{N}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{N}_m(\mathcal{R}) = \mathcal{M}_{\mathcal{R}\varphi}(\mathcal{E}) \quad \text{et} \quad R_{\mathcal{L}(\mathcal{E})} : \mathcal{L}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{L}_m(\mathcal{R}) = \mathcal{R}\varphi(\mathcal{E})$$

qui sont indépendants du choix de f car, une fois qu'on a identifié $\mathcal{N}_m(\mathcal{R})$ et $\mathcal{M}_{\mathcal{R}\varphi}(\mathcal{E})$, d'une part, $\mathcal{L}_m(\mathcal{R})$ et $\mathcal{R}\varphi(\mathcal{E})$, d'autre part, ils résultent simplement des homomorphismes $R : G \rightarrow \Gamma(\mathcal{R}\varphi_0)$ et $\underline{R} : \underline{G} \rightarrow \Gamma(\underline{\mathcal{R}\varphi}_0)$ par modelage sur $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ (l'existence de $R_{\mathcal{N}(\mathcal{E})}$ a déjà été signalée au paragraphe II.4).

Dans le cas où $\mathcal{R}\varphi_0 = \underline{G}$ et où R est la représentation adjointe, l'homomorphisme ψ^f sera noté $a_{\mathcal{E}}^f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{R}(\mathcal{L}^0(\mathcal{E}))$ et l'on dira que c'est l'*homomorphisme adjoint de $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ associé à f* . Il est compatible avec l'homomorphisme adjoint $a^f : G \rightarrow \text{Gl}(n, \mathbb{R})$ exprimé par rapport à la base f de \underline{G} . Les homomorphismes $R_{\mathcal{N}(\mathcal{E})}$ et $R_{\mathcal{L}(\mathcal{E})}$, indépendants de f mais associés à $(a^f, a_{\mathcal{E}}^f)$ comme nous venons de le voir, seront alors notés :

$$a_{\mathcal{N}(\mathcal{E})} : \mathcal{N}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{N}(\mathcal{E}) \quad \text{et} \quad a_{\mathcal{L}(\mathcal{E})} : \mathcal{L}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{E})$$

et ils s'appelleront les $\mathcal{N}(\mathcal{E})$ - et $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ -homomorphismes adjoints. Bien entendu, $k \circ a_{\mathcal{N}(\mathcal{E})}(m) \circ k^{-1}$ n'est autre que $\text{Adj}(m)[m \in \mathcal{N}(\mathcal{E})]$.

Un autre exemple d'homomorphismes, d'ailleurs lié au précédent, est constitué par le couple d'homomorphismes canoniques

$$\gamma_{\mathcal{E}} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}_{\gamma} = \mathcal{E}/\underline{H} \quad \text{et} \quad \gamma : G \rightarrow G_{\gamma} = G/\underline{H},$$

où \underline{H} est le centre de G . Si nous supposons le groupe G connexe, l'algèbre de Lie \underline{H} de \underline{H} est le centre de \underline{G} et les espaces obtenus en modelant $\mathcal{X} \times \underline{H}$ et $\mathcal{X} \times \underline{H}$ sur $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ lorsque G opère sur \underline{H} et \underline{H} par l'intermédiaire des automorphismes intérieurs et de la représentation adjointe (et, par suite, trivialement dans les deux cas), sont les centres $\mathcal{N}(\mathcal{E})$ et $\mathcal{K}(\mathcal{E})$ de $\mathcal{N}(\mathcal{E})$ et $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ respectivement. Au couple $(\gamma, \gamma_{\mathcal{E}})$ sont associés, conformément à ce qui pré-

cède, deux homomorphismes

$$\gamma_{\mathcal{N}(\mathcal{E})} : \mathcal{N}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{N}_\gamma(\mathcal{E}_\gamma) \quad \text{et} \quad \gamma_{\mathcal{L}(\mathcal{E})} : \mathcal{L}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{L}_\gamma(\mathcal{E}_\gamma),$$

où $\mathcal{N}_\gamma(\mathcal{E}_\gamma)$ et $\mathcal{L}_\gamma(\mathcal{E}_\gamma)$ désignent respectivement l'espace structural gauche et l'espace de Lie de $\mathcal{E}_\gamma(\mathcal{X}, \underline{G}_\gamma)$. Comme les noyaux de $\gamma_{\mathcal{N}(\mathcal{E})}$ et $\gamma_{\mathcal{L}(\mathcal{E})}$ sont, de toute évidence, $\mathcal{N}(\mathcal{E})$ et $\mathcal{K}(\mathcal{E})$, on peut identifier $\mathcal{N}_\gamma(\mathcal{E}_\gamma)$ [resp. $\mathcal{L}_\gamma(\mathcal{E}_\gamma)$] à $\mathcal{N}(\mathcal{E})/\mathcal{N}(\mathcal{E})$ [resp. $\mathcal{L}(\mathcal{E})/\mathcal{K}(\mathcal{E})$]. Mais le noyau de la représentation adjointe de \underline{G} est \underline{H} , il en résulte que toute base f de \underline{G} détermine un *isomorphisme*

$$a'_{\mathcal{E}_\gamma} : \mathcal{E}_\gamma \rightarrow \mathcal{R}(\mathcal{L}^0(\mathcal{E}))$$

de $\mathcal{E}/\underline{H}$ dans l'espace des repères de $\mathcal{L}^0(\mathcal{E})$. D'autre part, les noyaux de $a_{\mathcal{N}(\mathcal{E})}$ et $a_{\mathcal{L}(\mathcal{E})}$ sont respectivement $\mathcal{N}(\mathcal{E})$ et $\mathcal{K}(\mathcal{E})$. Il en résulte que $a_{\mathcal{N}(\mathcal{E})}$ et $a_{\mathcal{L}(\mathcal{E})}$ aussi, passent au quotient et déterminent des *isomorphismes dans*

$$a''_{\mathcal{N}(\mathcal{E})} : \mathcal{N}_\gamma(\mathcal{E}_\gamma) = \mathcal{N}(\mathcal{E})/\mathcal{N}(\mathcal{E}) \rightarrow \underline{\mathcal{N}}(\mathcal{E}) \quad \text{et} \quad a''_{\mathcal{L}(\mathcal{E})} : \mathcal{L}_\gamma(\mathcal{E}_\gamma) = \mathcal{L}(\mathcal{E})/\mathcal{K}(\mathcal{E}) \rightarrow \underline{\mathcal{L}}(\mathcal{E}).$$

Les notations précédentes, éventuellement agrémentées d'indices, seront conservées par la suite. D'une façon générale, la lettre γ sera toujours associée à des quotients d'espaces fibrés par le centre du groupe structural.

CHAPITRE III.

CONNEXIONS. DIFFÉRENTIATIONS COVARIANTES.

INTRODUCTION. — On peut construire le faisceau des connexions d'un espace fibré principal différentiable à groupe structural $\mathcal{E}(\mathcal{X}, \underline{G})$ en définissant d'abord la notion de connexion et en formant ensuite un préfaisceau de connexions locales. Ce n'est pas ce procédé que nous utilisons et la définition que nous donnons ici s'inscrit dans le cadre général du « modelage ». On définit un faisceau \mathcal{C} de base \mathcal{X} , dit des préconnexions de type \underline{G} , et des opérations de \underline{M} (faisceau des sections différentiables de $\mathcal{N} = \underline{G} \times \mathcal{X}$) sur \mathcal{C} . Le faisceau $\mathcal{C}(\underline{E})$ des connexions de $\mathcal{E}(\mathcal{X}, \underline{G})$ s'obtient alors en modelant \mathcal{C} sur \underline{E} (sections différentiables de \mathcal{E}). Il en résulte immédiatement que $\underline{M}(\underline{E})$ opère sur $\mathcal{C}(\underline{E})$. En outre, il existe un homomorphisme de faisceaux

$$\Omega : \mathcal{C} \rightarrow \underline{L}^2$$

(où \underline{L}^2 désigne comme au chapitre précédent le faisceau des 2-formes différentielles sur \mathcal{X} à valeurs dans \underline{G}) qui, vérifiant les conditions de compatibilité de la proposition I.5.2, donne naissance à l'homomorphisme

$$\Omega_{\underline{E}} : \mathcal{C}(\underline{E}) \rightarrow \underline{L}^2(\underline{E}).$$

C'est cet homomorphisme Ω_E qui définit la *courbure* d'une connexion.

La notion de faisceau $D_W(E)$ des $W(E)$ -différentiations covariantes est directement rattachée au faisceau $C_W(E)$ des connexions linéaires sur l'espace fibré $\mathcal{R}(\mathfrak{V}^0(\mathcal{E}))$ des repères de $\mathfrak{V}^0(\mathcal{E})$. $D_W(E)$ et $C_W(E)$ sont isomorphes et on les construit par modelage, soit sur le faisceau des sections différentiables de $\mathcal{R}(\mathfrak{V}^0(\mathcal{E}))$. Ce sont des relations de compatibilité du type de celles des propositions I.5 qui montrent que $D_W(E)$ opère sur $W(E)$, de même que D_W opère sur W . Il s'agit ensuite de montrer qu'il existe une $W(E)$ -différentiation covariante associée à toute connexion de $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$. Cela résulte du fait que, de même qu'il existait des homomorphismes $R_{\mathcal{N}(\mathcal{E})}$, $R_{\mathcal{E}(\mathcal{E})}$ (voir chapitre précédent), de même, il existe un homomorphisme

$$R_{C(E)} : C(E) \rightarrow C_W(E)$$

qui, à toute connexion sur \mathcal{E} associe une connexion sur $\mathcal{R}(\mathfrak{V}^0(\mathcal{E}))$ et, par suite, une $W(E)$ -différentiation covariante. L'existence d'un homomorphisme adjoint $a_{C(E)} : C(E) \rightarrow \underline{C}(E)$ est une application immédiate de ce résultat. C'est au paragraphe 3 que ces homomorphismes sont introduits. On les présente comme des cas particuliers de la proposition générale qui montre qu'à tout couple d'homomorphismes compatibles (φ, h) liant deux espaces fibrés principaux $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ et $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, G')$, est associé un homomorphisme $\varphi_{C(E)}^h$ des faisceaux de connexions correspondants.

La fin du chapitre est consacrée à l'induction, par une application différentiable, des différents espaces et faisceaux associés à un espace fibré principal différentiable.

Indiquons pour terminer, que les formules classiques de Géométrie différentielle locale ne sont pas démontrées, elles sont simplement transcrites dans le langage utilisé ici. Pour leur démonstration, nous renvoyons par exemple à Lichnerowicz [1].

1. L'APPLICATION X ET LES OPÉRATIONS DE M SUR C . — Nous noterons δ la forme fondamentale invariante à gauche sur G , c'est-à-dire la forme différentielle linéaire sur G , à valeurs dans l'algèbre de Lie \underline{G} de G , qui, à tout vecteur v tangent à G en l'un de ses points, fait correspondre le champ invariant à gauche auquel il appartient. La projection naturelle $\mathcal{N} = G \times \mathcal{X} \rightarrow G$ induit, à partir de δ , une forme différentielle linéaire X^0 , à valeurs dans \underline{G} , sur \mathcal{N} .

Soit \underline{m} une section locale du faisceau M sur un voisinage ouvert U de $x_0 \in \mathcal{X}$. Conformément à la notation introduite au paragraphe I.10, \bar{m} est une section différentiable de \mathcal{N} , correspondant à \underline{m} . Nous définirons alors $\bar{X}(\underline{m})$ comme la forme différentielle sur U induite à partir de X^0 par l'application $\bar{m} : U \rightarrow \mathcal{N}$ ou, en d'autres termes, comme la restriction de X^0 à \bar{m} . On passe immédiatement de cette définition à celle d'un *homomorphisme de faisceaux*

$$X : M \rightarrow L^1$$

tel que $\underline{X}(m) \doteq X \circ \underline{m}$ soit la section de L^1 (faisceau des 1-formes différentielles sur \mathcal{X} à valeurs dans \underline{G}) correspondant à la forme différentielle $\bar{X}(m)$ ⁽⁷⁾.

On vérifie alors la formule

$$(III.1.1) \quad X(m.m') = X(m') + \text{Adj}(m'^{-1})X(m) \quad (m, m' \in M_x).$$

Remarques. — 1° En considérant \bar{m} comme une application différentiable $\bar{m} : U \rightarrow G$, on définit directement la forme $\bar{X}(m)$ par l'égalité

$$[\bar{X}(m)]_x \delta_{\bar{m}(x)} \circ [d\bar{m}]_x.$$

2° En notant N^0 le faisceau des sections différentiables du produit \mathcal{X}^0 du centre H de la composante connexe G^0 de G , par \mathcal{X} , on voit facilement que X applique N^0 dans le centre K^1 de L^1 . Mais il ne s'agit pas d'un homomorphisme surjectif : en effet, en anticipant sur ce qui suit, on voit [formule (III.2.2)] que si θ est un élément de K^1 tel que $X(m) = \theta$ ($m \in M$), on a $d\theta = 0$ où d désigne la différentielle ordinaire sur K^1 .

DÉFINITION III.1.1. — *On appellera faisceau des préconnexions de type G sur \mathcal{X} , et l'on notera C le faisceau sous-jacent à L^1 (c'est-à-dire L^1 débarrassé de ses structures algébriques) muni :*

- 1° de l'identification naturelle $A : C \rightarrow L^1$;
- 2° des opérations à gauche de M définies par

$$(III.1.2) \quad C(m)\omega = A^{-1}(X(m^{-1}) + \text{Adj}(m)A(\omega)) \quad (m \in M, \omega \in C).$$

Pour que cette définition ait un sens, il faut vérifier que

$$C(mm')\omega = C(m)(C(m')\omega) \quad (m, m' \in M_x \text{ et } \omega \in C_x).$$

Or,

$$\begin{aligned} C(mm')\omega &= A^{-1}(X((mm')^{-1}) + \text{Adj}(mm')A(\omega)) \\ &= A^{-1}(X(m'^{-1}m^{-1}) + \text{Adj}(mm')A(\omega)) \\ &= A^{-1}(X(m^{-1}) + \text{Adj}(m)X(m'^{-1}) + \text{Adj}(m)\text{Adj}(m')A(\omega)) \\ &= C(m)C(m')\omega. \end{aligned}$$

On a alors

PROPOSITION III.1.1. — *L^1 opère sur C de façon simplement transitive par*

$$(\omega, \theta) \rightarrow \omega + \theta = A^{-1}(A(\omega) + \theta) \quad (\omega \in C_x, \theta \in L_x^1)$$

et l'on a

$$C(m)(\omega + \theta) = C(m)\omega + \text{Adj}(m)\theta \quad (m \in M_x).$$

(7) La forme $\bar{X}(m)$ n'est autre que la forme habituellement notée $\bar{m}^{-1}d\bar{m}$ (\bar{m} étant considérée alors comme une fonction différentiable de U dans G).

En effet,

$$\begin{aligned} C(m)(\omega + \theta) &= A^{-1}(X(m^{-1}) + \text{Adj}(m)(A(\omega) + \theta)) \\ &= A^{-1}(A(C(m)\omega) + \text{Adj}(m)\theta) \\ &= C(m)\omega + \text{Adj}(m)\theta. \end{aligned}$$

Nous considérons maintenant un espace fibré principal différentiable $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ de base \mathcal{X} et de groupe structural G .

DÉFINITION III.1.2. — On appellera *faisceau des connexions* de $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$, le *faisceau* $C(E)$ obtenu en modelant sur le *faisceau* E (des sections différentiables de \mathcal{E}), le *faisceau* C des *préconnexions* de type G sur \mathcal{X} , M opérant sur C par $C(m)$.

On a alors les deux propositions suivantes qui découlent des résultats généraux du paragraphe I.5 et de ce qui précède :

PROPOSITION III.1.2. — $M(E)$ opère à gauche sur $C(E)$ (par $m, \omega \rightarrow C(m)\omega$, et l'on a

$$j_C(z)(C(m)\omega) = C(j_M(z)m)(j_C(z)\omega) \quad [\omega \in C(E), m \in M(E), z \in E].$$

PROPOSITION III.1.3. — $L^1(E)$ opère sur $C(E)$ de façon simplement transitive par $(\omega, \theta) \rightarrow \omega + \theta$ [$\omega \in C_x(E)$, $\theta \in L_x^1(E)$], et l'on a

$$j_C(z)(\omega + \theta) = j_C(z)\omega + j_L(z)\theta \quad (z \in E_x).$$

Exemple. — Soit C_m le faisceau des préconnexions de type $Gl(m, R)$ sur \mathcal{X} . On a explicitement pour $\mu = (\mu^i_j)[\mu \in M_m]$:

$$X(\mu) = \left(\sum_{j=1}^m \bar{\mu}^{-1 i_j} d\mu^j_h \right) \quad (i, h = 1, \dots, m)$$

et

$$(III.1.3) \quad A(C(\mu)\omega) = \left(\sum_{h,k=1}^m (\bar{\mu}^{-1 i_h} d\mu^h_j + \bar{\mu}^{-1 i_h} \omega^h_k \mu^k_j) \right) \quad (\omega \in C_m).$$

avec $A(\omega) = (\omega^i_j)$, les ω^i_j étant des germes de formes différentielles linéaires ordinaires sur \mathcal{X} et (ω^i_j) , une matrice carrée ($i, j = 1, \dots, m$). Le *faisceau des connexions linéaires* d'un espace fibré différentiable à fibre vectorielle dont l'espace des repères est \mathcal{R} est le faisceau $C_m(R)$ ($R =$ faisceau des sections différentiables de \mathcal{R}).

DÉFINITION III.1.3. — Une *connexion* sur $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ est une section globale de $C(E)$.

L'existence d'une telle connexion résulte du fait que $L^1(E)$, qui est le faisceau des sections différentiables d'un espace fibré à fibre vectorielle $\mathcal{L}^1(\mathcal{E})$, opère sur $C(E)$ de façon simplement transitive (raisonnement classique).

La notion de connexion telle qu'elle résulte de la définition ci-dessus, se

rattache directement à la notion habituelle de *forme de connexion*. En effet, étant donnée une section $\omega : U \rightarrow C(E)$ du faisceau des connexions de \mathcal{E} , il existe une forme différentielle linéaire $f(\omega)$, prenant ses valeurs dans G , définie sur \mathcal{E}_v et telle que, quelle que soit la section $\bar{y} : U \rightarrow \mathcal{E}_v$ de \mathcal{E}_v , la restriction de $f(\omega)$ à \bar{y} [c'est-à-dire la forme différentielle sur U induite par l'application différentiable \bar{y} à partir de $f(\omega)$], s'identifie à l'image de ω par l'isomorphisme $j_c(\bar{y})$.

Plus précisément, l'isomorphisme A transforme la section $j_c(\underline{y})\omega$ de C [définie en toute rigueur par $[j_c(\underline{y})\omega](x) = j_c(\underline{y}(x))\omega(x)$, $x \in U$] en une section de L^1 qui peut être considérée comme une forme différentielle linéaire $\omega_{\underline{y}}$, sur U , à valeurs dans \underline{G} . C'est à cette forme qu'est égale la restriction à \underline{y} de $f(\omega)$. Encore faut-il montrer l'existence de cette dernière. Il suffit pour cela de noter $\omega_{\underline{y}}^\#$ la forme induite sur $\mathcal{M}_v = U \times G$ par p_{π} , à partir de $\omega_{\underline{y}}$ et $\psi_{\underline{y}} : \mathcal{E}_v \rightarrow U \times G$, l'homéomorphisme défini par l'égalité

$$\psi_{\underline{y}}(\bar{y}(x).s) = (x, s) \quad (x \in U, s \in G).$$

En revenant à la définition de $C(m)$ et en utilisant la proposition III.1.2, on vérifie alors que, si \underline{y} et \underline{y}' désignent deux sections distinctes de \mathcal{E}_v , les formes induites sur \mathcal{E}_v par $\psi_{\underline{y}}$ et $\psi_{\underline{y}'}$, à partir de $X^0 + \omega_{\underline{y}}^\#$ et $X^0 + \omega_{\underline{y}'}^\#$ respectivement, coïncident. On définit donc ainsi, indépendamment de la section \bar{y} choisie, une forme $f(\omega)$ qui possède les propriétés signalées.

Nous ne conserverons pas la notation $f(\omega)$ et ce sera généralement la même lettre qui représentera la forme de connexion et la section de $C(E)$ qu'elle représente. Nous nous contenterons de préciser éventuellement ce que signifie exactement le symbole utilisé. Par contre, le champ invariant par les translations à droite de G sur \mathcal{E} , transversal aux fibres et défini par $\omega = 0$ où ω est une forme de connexion, sera appelé *champ de connexion* et noté $c(\omega)$, tandis qu'on désignera par φ_ω le projecteur $\varphi_\omega = \beta^{-1} \circ \omega$, où β est la forme identifiant les vecteurs verticaux aux éléments de \underline{G} (voir § II.4).

2. DIFFÉRENTIATION. — Le but de ce paragraphe est de donner les formules qui conduisent aux notions de courbure et de différentiation covariante. Le même symbole d notera la différentiation ordinaire dans les faisceaux F (formes ordinaires) L (formes à valeurs dans \underline{G}) et W (formes à valeurs dans un espace vectoriel \mathfrak{R}^n_0 de dimension m). On a alors

$$(III.2.1) \quad \begin{cases} d(\alpha \wedge \theta) = d\alpha \wedge \theta + (-1)^r \alpha \wedge d\theta & (\alpha \in F^r_x, \theta \in W_x \text{ ou } L_x), \\ d[\theta, \theta'] = [d\theta, \theta'] + (-1)^p [\theta, d\theta'] & (\theta \in L^p_x, \theta' \in L^q_x). \end{cases}$$

Par ailleurs, la différentiation est liée à $X(m)$ et $C(m)$ par les formules

$$(III.2.2) \quad dX(m) + \frac{1}{2}[X(m), X(m)] = 0 \quad (m \in M),$$

$$(III.2.3) \quad \text{Adj}(m^{-1})(d(\text{Adj}(m)\theta)) = d\theta + [X(m), \theta] \quad (\theta \in L).$$

D'où l'on déduit

$$(III.2.4) \quad dA(C(m)\omega) + \frac{1}{2}[A(C(m)\omega), A(C(m)\omega)] = \text{Adj}(m)dA(\omega) + \frac{1}{2}[A(\omega), A(\omega)] \quad (\omega \in C),$$

formule qui montre qu'en définissant un homomorphisme de faisceaux

$$\Omega : C \rightarrow L^2$$

par

$$\Omega(\omega) = dA(\omega) + \frac{1}{2}[A(\omega), A(\omega)] \quad (\omega \in C),$$

on a la *relation de compatibilité*

$$\Omega(C(m)\omega) = \text{Adj}(m)\Omega(\omega) \quad (\omega \in C, m \in M).$$

Il en résulte que l'homomorphisme Ω de C dans L^2 détermine par modelage (voir prop. I.5.2) un homomorphisme de faisceaux

$$\Omega_E : C(E) \rightarrow L^2(E).$$

Si $\omega \in C(E)$, $\Omega_E(\omega)$ est la *courbure de ω* . Comme, en général, il n'y a pas de confusion possible, nous supprimerons l'indice E et la courbure d'une connexion (ou d'un germe de connexion) ω sur $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ sera simplement noté $\Omega(\omega)$.

En revenant maintenant aux notations du paragraphe II.4, en notant μ, X et Z, X les transformés de $X \in \mathfrak{V}_0$ par $\mu \in \Gamma(\mathfrak{V}_0)$ et $Z \in \Gamma(\mathfrak{V}_0)$, et en étendant ces notations aux opérations correspondantes de $\mathfrak{M}_{\mathfrak{V}}$ et \mathfrak{V} sur \mathfrak{V} , on a

$$(III.2.5) \quad \bar{\mu}^{-1}(d(\mu\theta)) = d\theta + X(\mu) \cdot \theta \quad (\mu \in M, \theta \in W),$$

formule dont la transcription pour une base $f = (f_i) (i = 1, \dots, m)$ de \mathfrak{V}_0 par rapport à laquelle $\mu = (\mu^i_j)$ et $\theta = \sum_{i=1}^m \theta^i f_i$, est

$$(III.2.6) \quad \sum_{i,j,k=1}^m \bar{\mu}^{-1 i_j} d(\mu^j_k \theta^k) f_i = \sum_{i,j,k=1}^m (d\theta^i + \bar{\mu}^{-1 i_j} d\mu^j_k \wedge \theta^k) f_i.$$

3. DIFFÉRENTIATION COVARIANTE. — Soit C_W le faisceau des préconnexions de type $\Gamma(\mathfrak{V}_0)$ sur \mathcal{X} . A $\bar{\omega} \in C_{W,x}$, on associe l'opérateur $\Delta : W_x \rightarrow W_x$ défini par

$$(III.3.1) \quad \Delta\theta = d\theta + A(\bar{\omega}) \cdot \theta \quad (\theta \in W_x).$$

Si Δ' est associé à $\bar{\omega}' \in C_{W,x}$ et si $\bar{\omega} \neq \bar{\omega}'$, on a manifestement $\Delta \neq \Delta'$. L'ensemble des opérateurs Δ correspondant à tous les éléments de C_W constitue donc un faisceau D_W isomorphe à C_W et appelé faisceau des *W-différentiations covariantes*. On notera $B_W : C_W \rightarrow D_W$ l'isomorphisme canonique résultant de la définition de D_W . Le faisceau M opère sur D_W par des opérations notées $\underline{D}(\mu)$ et définies par

$$(III.3.2) \quad \underline{D}(\mu)\Delta = \mu \circ \Delta \circ \bar{\mu}^{-1} \quad (\mu \in M_W),$$

$\underline{D}(\mu)$ et $C(\mu)$ sont liées par la formule de compatibilité

$$(III.3.3) \quad \underline{D}(\mu)B_W(\bar{\omega}) = B_W(C(\mu)\bar{\omega}) \quad (\bar{\omega} \in C_W)$$

qui résulte de (III.2.5).

Comme on peut faire opérer M sur D_W et C_W grâce à l'homomorphisme $R_M : M \rightarrow M_{\mathcal{R}^0}$, déduit de $R : G \rightarrow \Gamma(\mathcal{R}^0)$, on peut construire par modelage sur E , les faisceaux $D_W(E)$ et $C_W(E)$, isomorphes par

$$B_{W(E)} : C_W(E) \rightarrow D_W(E),$$

comme le montre la formule de compatibilité (III.3.3). $D_W(E)$ est le faisceau des $W(E)$ -différentiations covariantes et nous verrons dans un instant que $C_W(E)$ est isomorphe au faisceau des connexions linéaires de $W(E)$.

D'autre part, la formule (III.3.2) qui s'écrit également

$$(\underline{D}(\mu)\Delta)(\mu\theta) = \mu(\Delta\theta)$$

montre que $\Delta \in D_{W,x}(E)$ opère sur $W_x(E)$, avec la formule habituelle

$$j_W(z)\Delta\theta = (j_{D_W}(z)\Delta)(j_W(z)\theta) \quad [z \in E_x, \Delta \in D_{W,x}(E), \theta \in W_x(E)]$$

et aussi que $M_{\mathcal{R}^0}(E)$ opère sur $D_W(E)$, opération notée $\underline{D}(\mu)$, bien entendu.

Les formules fondamentales suivantes relient la différentiation covariante à la multiplication extérieure par les formes de la base, d'une part, à la courbure, d'autre part

$$(III.3.4) \quad \Delta\alpha \wedge \theta = d\alpha \wedge \theta + (-1)^p \alpha \wedge \Delta\theta \quad [\alpha \in F_x^p, \theta \in W_x(E)],$$

$$(III.3.5) \quad \Delta^2\theta = \Omega(\bar{\omega}) \cdot \theta \quad [\bar{\omega} \in C_W(E) \text{ et } \Delta = B_{W(E)}(\bar{\omega})].$$

Leur vérification est classique. Remarquons qu'en toute rigueur (III.3.5) n'a de sens qu'en fonction de la proposition III.3.4 ci-dessous, puisque nous n'avons défini la courbure que dans le cas d'un germe de connexion et que nous n'avons pas encore montré que $C_W(E)$, dont fait partie $\bar{\omega}$, est le faisceau des connexions de $\mathcal{R}(\mathcal{R}^0(\mathcal{E}))$.

Pour vérifier cela, on définit un isomorphisme

$$j'_{C_W}(\rho) : C_{W,x}(E) \rightarrow C_{m,x}$$

pour tout $\rho \in R$ [faisceau des sections différentiables de $\mathcal{R}(\mathcal{R}^0(\mathcal{E}))$], par

$$\rho = (\rho_i), \quad j'_{C_W}(\rho)\bar{\omega} = (\bar{\omega}^i_j), \quad B_{W(E)}(\bar{\omega}) = \Delta \quad \text{et} \quad \Delta\rho^i = \sum_{j=1}^m \bar{\omega}^i_j \rho_j,$$

Les formules (III.1.3) et (III.3.4) montrent que

$$j'_{C_W}(\rho \cdot \mu) = C(\mu^{-1}) \circ j'_{C_W}(\rho) \quad (\rho \in R, \mu \in M_m),$$

ce qui entraîne la proposition :

PROPOSITION III.3.1. — *L'isomorphisme*

$$h_{C_W} = i_{C_M}(\rho) \circ j'_{C_W}(\rho) \quad (\rho \in R),$$

ne dépendant que de la projection de ρ sur \mathfrak{X} , identifie $C_W(E)$ et $C_M(R)$ qui seront donc appelés l'un et l'autre, faisceau des connexions linéaires de $\mathfrak{X}(\mathfrak{E})$.

4. HOMOMORPHISMES. — Soit $(\varphi : G \rightarrow G', h : \mathfrak{E} \rightarrow \mathfrak{E}')$ un couple d'homomorphismes compatibles. A φ sont associés $\varphi : \underline{G} \rightarrow \underline{G}'$ ainsi que $\varphi_{\mathfrak{M}}, \varphi_M, \varphi_E, \varphi_L$. Nous allons voir qu'on a

$$\varphi_L(X(m)) = X(\varphi_M(m)) \quad (m \in M).$$

En effet, notons $d\varphi$ la différentielle de φ , et soit \underline{m} une section de M sur U . En considérant \bar{m} comme une fonction différentiable de U dans G :

$$[\bar{X}(\underline{m})]_x = \delta_{\bar{m}(x)} \circ [d\bar{m}]_x$$

et

$$\bar{X}(\varphi_M(\underline{m}))_x = \delta_{\varphi(\bar{m}(x))} \circ [d(\varphi \circ \bar{m})]_x = \delta_{\varphi(\bar{m}(x))} \circ [d\varphi]_{\bar{m}(x)} \circ [d\bar{m}]_x.$$

La formule annoncée résulte alors de

$$\varphi \circ \delta_y = \delta_{\varphi(y)} \circ [d\varphi]_y \quad (y \in G)$$

qui sert à définir φ_C .

Il en résulte qu'en notant C (resp. C') le faisceau des préconnexions de type G (resp. G') sur \mathfrak{X} , il existe un homomorphisme

$$\varphi_C : C \rightarrow C'$$

défini par

$$\varphi_C = A^{-1} \circ \varphi_{L'} \circ A$$

pour lequel on a la relation de compatibilité

$$\varphi_C(C(m)\omega) = C(\varphi_M(m))\varphi_C(\omega) \quad (\omega \in C).$$

En vertu des propositions du paragraphe I.5, il existe donc un homomorphisme

$$\varphi_{C(E)}^h : C(E) \rightarrow C'(E')$$

relié à φ_C par la relation habituelle

$$\varphi_C(j_C(z)\omega) = j_{C'}(h(z))\varphi_{C(E)}^h(\omega).$$

On déduit de cette dernière formule, transposée en termes de vecteurs tangents, qu'étant données une connexion ω sur \mathfrak{E} et $\omega' = \varphi_{C(E)}^h(\omega)$ [ou, si l'on préfère, $\omega' = \varphi_{C(E)}^h \circ \omega$], on a, en conservant les notations ω et ω' pour repré-

sender les formes de connexions correspondantes

$$\omega'_{h(y)} \circ (dh)_y = \varphi \circ \omega_y \quad (y \in \mathcal{E}),$$

où $\omega'_{h(y)}$ et ω_y sont des formes linéaires sur les espaces vectoriels tangents à \mathcal{E}' et \mathcal{E} aux points $h(y)$ et y , qui prennent leurs valeurs dans \underline{G}' et \underline{G} , et où $(dh)_y$, différentielle de h au point y , applique les vecteurs tangents à \mathcal{E} au point y dans les vecteurs tangents à \mathcal{E}' au point $h(y)$. Il en résulte également que le champ de connexion $c(\omega)$ est projetable par h et que, sur $h(\mathcal{E}) \subset \mathcal{E}'$, son image $h(c(\omega))$ est $c(\omega')$.

En outre, on vérifie que l'image de la courbure d'une connexion ω par l'homomorphisme $\varphi_{L(E)}^h$ est la courbure de la connexion-image de ω par $\varphi_{C(E)}^h$:

$$(III.4.1) \quad \Omega(\varphi_{C(E)}^h(\omega)) = \varphi_{L(E)}^h(\Omega(\omega)).$$

Application. — En particulier, et d'une façon tout à fait analogue à ce qu'on a vu au paragraphe II.5, il existe un homomorphisme

$$R_{C(E)} : C(E) \rightarrow C_m(R) = C_W(E)$$

associé à (R', ψ') mais indépendant du choix de f puisque, après identification de $C_m(R)$ et $C_W(E)$, $R_{C(E)}$ provient, par modelage, de $R_C : C \rightarrow C_W$.

L'image de $C(E)$ par $R_{C(E)}$ est le *faisceau des connexions linéaires de type R*. L'image du faisceau des connexions de type R par $B_{W(E)}$ est le *faisceau des différentiations covariantes de type R*. Étant donnée une connexion ω sur $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$, $R_{C(E)}(\omega) = \bar{\omega}$ est la *connexion linéaire de type R associée* et l'opérateur $\Delta = B_{W(E)}(\bar{\omega})$ est la *différentiation covariante de type R associée à ω* ou encore, la *W(E)-différentiation covariante associée*.

Les formules (III.3.5) et (III.4.1) montrent qu'en conservant les notations précédentes, on a

$$(III.4.2) \quad \begin{cases} \Omega(\bar{\omega}) = R_{L(E)}(\Omega(\omega)) \\ \Delta^2 \theta = R_{L(E)}(\Omega(\omega)) \cdot \theta \quad \theta \in W(E). \end{cases}$$

Cas particulier. — Soient \mathfrak{V}'_0 et \mathfrak{V}''_0 deux espaces vectoriels sur lesquels G opère par l'intermédiaire de R' et R'' , et $\Lambda(u, v)$ ($u \in \mathfrak{V}'_0, v \in \mathfrak{V}''_0$) une application bilinéaire à valeurs dans \mathfrak{V}''_0 telle que

$$(III.4.3) \quad \Lambda(R(s)u, R'(s)v) = R''(s)\Lambda(u, v) \quad (s \in G).$$

Cette égalité entraîne, pour les représentations \underline{R} , \underline{R}' et \underline{R}'' de l'algèbre de Lie de G ,

$$(III.4.4) \quad \Lambda(\underline{R}(X)u, v) + \Lambda(u, \underline{R}'(X)v) = \underline{R}''(X)\Lambda(u, v) \quad (X \in G).$$

De (III.4.3), on déduit l'existence d'une forme bilinéaire (antisymétrisée)

$$\Lambda(\theta, \theta'), \quad \theta \in \mathfrak{V}(\mathcal{E}), \quad \theta' \in \mathfrak{V}'(\mathcal{E}) \quad \text{et} \quad \Lambda(\theta, \theta') \in \mathfrak{V}''(\mathcal{E}).$$

Si Δ , Δ' , Δ'' sont respectivement les $W(E)$ -, $W'(E)$ - et $W''(E)$ -différentiations

covariantes associées à une *même connexion* ω de $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$, la formule (III.4.4) montre qu'on a

$$(III.4.5) \quad \Delta^p \Lambda(\theta, \theta') = \Lambda(\Delta\theta, \theta') + (-1)^p \Lambda(\theta, \Delta'\theta') \quad [\theta \in W^p(E) \text{ et } \theta' \in W'(E)].$$

Exemple :

$$d\langle \theta, \theta' \rangle = \langle \Delta\theta, \theta' \rangle + (-1)^p \langle \theta, \Delta'\theta' \rangle \quad [\theta \in W^p(E), \theta' \in W'(E)].$$

Remarquons enfin que la formule (III.3.4) est un cas particulier de (III.4.6).

5. L'HOMOMORPHISME ADJOINT $C(E) \rightarrow \underline{C}(E)$. — Dans le cas où $\mathfrak{R}\mathfrak{V}_0 = \underline{G}$, le faisceau C_W sera noté \underline{C} et l'homomorphisme $R_{C(E)}$ devient un homomorphisme

$$a_{C(E)} : C(E) \rightarrow \underline{C}(E) = C_n(R)$$

appelé $C(E)$ -homomorphisme adjoint [dans $C_n(R)$, R désigne naturellement le faisceau des sections différentiables de $\mathcal{R}(\mathcal{L}^0(\mathcal{E}))$].

Quant au faisceau $D_W(E)$, il sera purement et simplement noté $D(E)$ lorsque $\mathfrak{R}\mathfrak{V}_0 = \underline{G}$. L'isomorphisme B correspondant

$$B_{L(E)} : \underline{C}(E) \rightarrow D(E)$$

joint à $a_{C(E)}$, associe une $L(E)$ -différentiation covariante à toute connexion sur $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$. En effet, $a_{C(E)}$ transforme d'abord $\omega \in C(E)$ en $\underline{\omega} = a_{C(E)}(\omega) \in \underline{C}(E)$ et $B_{L(E)}$ associe à $\underline{\omega}$ un élément de $D(E)$. On notera $\nabla(E)$ le faisceau-image de $C(E)$ par ces deux homomorphismes

$$\nabla(E) = B_{L(E)}(a_{C(E)}(C(E))) \subset D(E)$$

et on l'appellera *faisceau des différentiations covariantes de type adjoint*. L'image par $B_{L(E)} \circ a_{C(E)}$ d'une connexion ω sur $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ sera appelée la $L(E)$ -différentiation covariante associée à ω (ou différentielle covariante de type adjoint associée).

Comme $\underline{M}(E)$ opère sur $D(E)$ par $\underline{D}(\mu)$, $M(E)$ opère sur $\nabla(E)$ par

$$\nabla(m) = \underline{D}(a_{M(E)}(m)) \quad [m \in M(E)]$$

et la formule (III.3.2) s'écrit

$$\nabla(m)\Delta = \text{Adj}(m) \circ \Delta \circ \text{Adj}(m^{-1}) \quad [\Delta \in \nabla(E) \text{ et } m \in M(E)].$$

Formules fondamentales. — La formule (III.4.6) montre qu'on a, pour $\nabla \in \Delta(E)$:

$$(III.5.1) \quad \Delta[\theta, \theta'] = [\Delta\theta, \theta'] + (-1)^p [\theta, \Delta'\theta'] \quad [\theta \in L^p(E), \theta' \in L(E)]$$

et, si Δ est la $L(E)$ -différentiation covariante associée à ω , l'égalité (III.4.2) donne

$$(III.5.2) \quad \Delta^2\theta = [\Omega(\omega), \theta].$$

En outre, dans ce cas-là :

$$(III.5.3) \quad \Delta(\Omega(\omega)) = 0 \quad (\text{identité de Bianchi}).$$

D'autre part, on a les relations suivantes où ω et θ sont les formes différentielles sur \mathcal{E} à valeurs dans \underline{G} respectivement attachées à une connexion et à une forme tensorielle

$$(III.5.4) \quad \Omega(\omega) = d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega] \quad \text{et} \quad \Delta\theta = d\theta + [\omega, \theta].$$

Enfin, signalons qu'en recommençant les opérations précédentes avec l'espace fibré principal $\mathcal{R}(\mathcal{L}^0(\mathcal{E}))$, on peut définir un homomorphisme adjoint $a_{\mathcal{D}(E)}$.

Diagrammes. — Tout ce que nous venons de dire au sujet des homomorphismes adjoints peut être résumé par les diagrammes suivants où, ainsi que

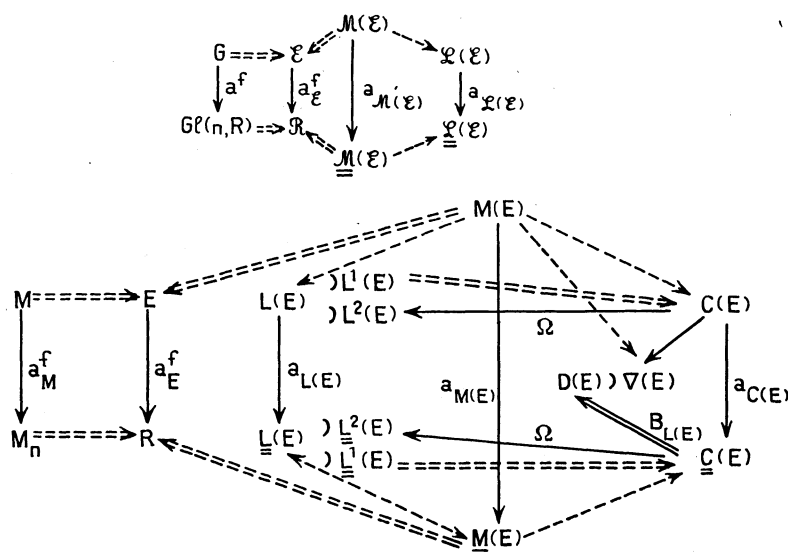


Fig. 4.

nous l'avons déjà indiqué, les traits pleins figurent des homomorphismes lorsqu'ils sont simples, des isomorphismes lorsqu'ils sont doubles et où les pointillés indiquent qu'un espace opère sur un autre, de façon simplement transitive si le trait est double. Nous donnons d'abord le diagramme relatif aux espaces fibrés, puis celui relatif aux faisceaux. Ces diagrammes sont compatibles en ce sens que toutes les égalités du type de celles données aux paragraphes I.4 et I.5 sont vérifiées.

Application. — On a vu que, en supposant G connexe, $a_{\mathcal{M}(\mathcal{E})}$ et $a_{\mathcal{L}(\mathcal{E})}$ permettent de déterminer des *isomorphismes dans*

$$a_{\mathcal{M}(\mathcal{E})}^{\gamma} : \mathcal{M}(\mathcal{E})/\mathcal{R}(\mathcal{E}) \rightarrow \underline{M}(\mathcal{E}) \quad \text{et} \quad a_{\mathcal{L}(\mathcal{E})}^{\gamma} : \mathcal{L}(\mathcal{E})/\mathcal{R}(\mathcal{E}) \rightarrow \underline{L}(\mathcal{E}).$$

De même, $C(E)/K^1(E)$ est le faisceau des connexions de $\mathcal{E}_\gamma = \mathcal{E}/H$ [il suffit pour le voir de remonter à la définition et de tenir compte de la deuxième remarque du paragraphe III.1, grâce à laquelle on peut faire opérer $M(E)/N(E)$ sur $C(E)/K^1(E)$, en faisant passer $C(m)$ au quotient] et l'on a un homomorphisme canonique

$$\gamma_{C(E)} : C(E) \rightarrow C_\gamma(E_\gamma) = C(E)/K^1(E)$$

et un isomorphisme dans

$$a_{C(E)}^\gamma : C_\gamma(E_\gamma) = C(E)/K^1(E) \rightarrow \underline{C}(E).$$

On peut remarquer que, de même que $G_\gamma = G/H$ opère sur G par l'intermédiaire des automorphismes intérieurs, on peut faire opérer G_γ sur \underline{G} par l'intermédiaire des automorphismes adjoints, puisque le noyau de la représentation adjointe est le centre H de G . Par modelage, on obtient les espaces $\mathcal{N}(\mathcal{E}_\gamma)$ et $\mathcal{L}(\mathcal{E}_\gamma)$ qui sont manifestement isomorphes à $\mathcal{N}(\mathcal{E})$ et $\mathcal{L}(\mathcal{E})$. On ne peut pas procéder de la même façon pour C . Cependant, toute connexion ω' sur $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ détermine — conformément à la théorie générale des $W(E)$ -différentiations covariantes — une $L(E_\gamma)$ -différentiation covariante qui n'est autre que celle correspondant à la connexion linéaire $a_{C(E)}(\omega')$. De sorte que, s'il existe une connexion ω sur \mathcal{E} telle que $\omega' = \gamma_{C(E)}(\omega)$, les $L(E)$ - et $L(E_\gamma)$ -opérateurs de différentiations covariantes associés respectivement à ω et ω' , coïncident. Or :

PROPOSITION III.5.1. — *Étant donnée une connexion ω' sur \mathcal{E}_γ , il existe toujours une connexion ω sur $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ telle que $\omega' = \gamma_{C(E)}(\omega)$.*

En effet, $K^1(E)$ opère de façon simplement transitive sur $\gamma_{C(E)}^{-1}(\omega')$, et $K^1(E)$ est le faisceau des sections différentiables d'un espace fibré à fibre vectorielle : on retombe sur un raisonnement du même type que celui démontrant l'existence d'une connexion globale sur tout espace fibré principal différentiable à groupe structural ⁽⁸⁾.

6. HOMOMORPHISMES (*suite et fin*). — Il s'agit, dans ce paragraphe, d'examiner d'abord comment se comporte le faisceau des $L(E)$ -différentiations covariantes adjointes par rapport aux homomorphismes associés à un couple d'homomorphismes compatibles (φ, h) , puis de résumer par un diagramme l'effet d'un tel couple sur les espaces associés aux espaces fibrés principaux considérés.

Nous nous donnons donc comme d'habitude, deux espaces fibrés $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ et $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, G')$ liés par (φ, h) . Soit Δ le germe de $L(E)$ -différentiation covariante associée à $\omega \in C(E)$ et soit Δ' le germe de $L'(E')$ — différentiation covariante associée à $\varphi_{C(E)}^h(\omega)$ ⁽⁹⁾.

⁽⁸⁾ On a un résultat identique en substituant à $(\gamma, \gamma_\mathcal{E})$ un couple (φ, h) quelconque.

⁽⁹⁾ On peut vérifier qu'en posant $\Delta' = \varphi_{\nabla(E)}^h(\Delta)$, on définit un homomorphisme.

PROPOSITION III.6.1. — Dans les conditions ci-dessus, on a

$$\Delta' \circ \varphi_{L(E)}^h = \varphi_{L(E)}^h \circ \Delta.$$

Cette égalité résulte de la même relation, vérifiée pour les faisceaux C, ∇ et L . Or, si Δ et Δ' sont associés respectivement à ω et $\varphi_C(\omega)$, [$\omega \in C$], on a, par définition

$$\Delta\theta = d\theta + [A(\omega), \theta] \quad (\theta \in L)$$

et

$$\Delta'\varphi_L(\theta) = d\varphi_L(\theta) + [A(\varphi_C(\omega)), \varphi_L(\theta)].$$

Or, $\varphi_C(\omega) = A^{-1}(\varphi_L(A(\omega)))$ et $d \circ \varphi_L = \varphi_L \circ d$, ainsi qu'on le vérifie immédiatement en choisissant une base de \underline{G} , une base de \underline{G}' et en exprimant φ_L par une matrice à coefficients constants. Les trois dernières formules démontrent la proposition. Cette démonstration ne diffère pas essentiellement de celle qui permet de vérifier la formule (III.4.1).

Diagrammes. — En résumé, l'effet d'un couple d'homomorphismes compatibles (φ, h) peut être représenté par les diagrammes compatibles suivants :

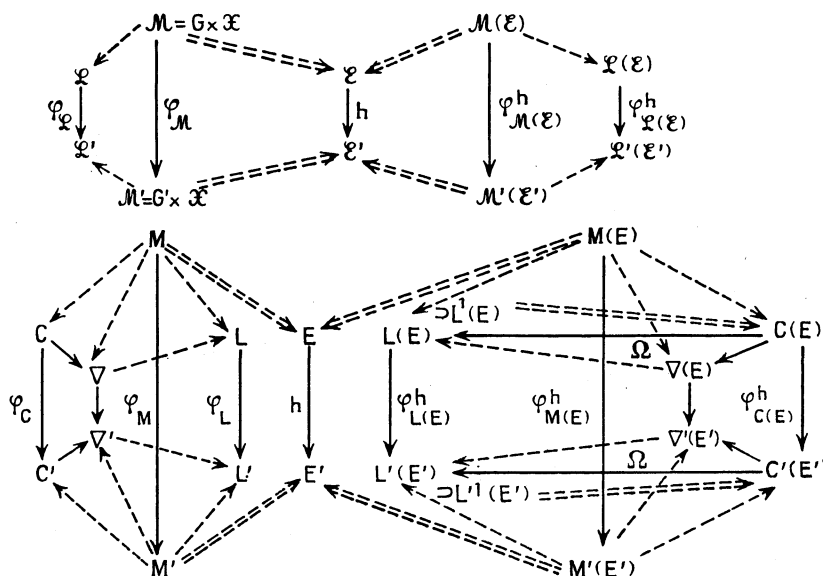


Fig. 5.

La compatibilité de la partie gauche de ce diagramme entraîne évidemment la compatibilité de la partie droite et les deux côtés sont reliés par des formules du type de celles de la proposition I.5.2 :

$$(III.6.1) \quad \begin{cases} j_Z \circ (h(y)) \circ \varphi_{Z(\varepsilon)} = \varphi_Z \circ j_Z(y) & (y \in \varepsilon) \\ (\varepsilon = \mathcal{E} \text{ et } Z = \mathcal{N}, \mathcal{L} [\text{resp. } \varepsilon = E \text{ et } Z = L, M, C, \nabla]). \end{cases}$$

7. ESPACES FIBRÉS ET FAISCEAUX INDUITS. — Soit $f : \mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{X}$, une application

différentiable d'une variété différentiable \mathcal{X}' dans \mathcal{X} . Conformément à ce qui a été dit au paragraphe I.40, il existe dans (ou entre) les espaces fibrés et les faisceaux induits :

$$f^{-1}(\mathcal{E}), f^{-1}(\mathcal{N}(\mathcal{E})), f^{-1}(\mathcal{L}(\mathcal{E})), f^{-1}(\mathbf{E}), \\ f^{-1}(\mathbf{M}(\mathbf{E})), f^{-1}(\mathbf{L}(\mathbf{E})), f^{-1}(\mathbf{C}(\mathbf{E})), f^{-1}(\mathbf{V}(\mathbf{E})),$$

les mêmes structures algébriques que celles existant dans (ou entre) les espaces et faisceaux \mathcal{E} , $\mathcal{N}(\mathcal{E})$, $\mathcal{L}(\mathcal{E})$, \mathbf{E} , $\mathbf{M}(\mathbf{E})$, $\mathbf{L}(\mathbf{E})$, $\mathbf{C}(\mathbf{E})$ et $\mathbf{V}(\mathbf{E})$, y compris les applications « point ». Ces structures sont liées les unes aux autres par les homomorphismes induits $f^\#$. Mais, si $f^{-1}(\mathcal{N}(\mathcal{E}))$ est l'espace structural gauche de $f^{-1}(\mathcal{E})$, si $f^{-1}(\mathcal{L}^0(\mathcal{E}))$ est l'espace de Lie de degré 0 de $f^{-1}(\mathcal{E})$, par contre, $f^{-1}(\mathcal{L}(\mathcal{E}))$ n'est pas, en général, l'espace de Lie de $f^{-1}(\mathcal{E})$, pas plus que $f^{-1}(\mathbf{E})$ n'est le faisceau des sections différentiables de $f^{-1}(\mathcal{E})$. Cependant, de même qu'il existe un homomorphisme de $f^{-1}(\mathbf{E})$ sur le faisceau \mathbf{E}' des sections différentiables de $\mathcal{E}' = f^{-1}(\mathcal{E})$, de même, il existe des homomorphismes, notés \hat{f} , de $f^{-1}(\mathcal{N}(\mathcal{E}))$, $f^{-1}(\mathcal{L}(\mathcal{E}))$, $f^{-1}(\mathbf{M}(\mathbf{E}))$, etc. sur les espaces ou faisceaux correspondants intrinsèquement associés à $\mathcal{E}'(\mathcal{X}', \mathbf{G})$, c'est-à-dire $\mathcal{N}'(\mathcal{E}')$, $\mathcal{L}'(\mathcal{E}')$, $\mathbf{M}'(\mathbf{E}')$, etc. Ces homomorphismes sont des homomorphismes de toutes les structures algébriques existant sur ces espaces, y compris les applications « point ». Explicitons cela pour $\mathbf{L}(\mathbf{E})$ et $\mathbf{C}(\mathbf{E})$. Compte tenu de la proposition I.5.1, il suffira d'établir l'existence de ces homomorphismes pour \mathbf{L} et \mathbf{C} .

Remarquons tout d'abord que la différentielle $(df)_x : \mathfrak{T}'_0 \rightarrow \mathfrak{T}^0_{f(x)}$ ⁽¹⁰⁾ se traduit par un homomorphisme

$$(df)^\# : \mathfrak{T}'_0 \rightarrow f^{-1}(\mathfrak{T}^0)$$

défini par l'égalité

$$(III.7.1) \quad (f^\#_{\mathfrak{T}'_0} \circ (df)^\#)_x = (df)_x,$$

où $f^\#_{\mathfrak{T}'_0}$ est, conformément à nos notations, l'homomorphisme induit

$$f^\#_{\mathfrak{T}'_0} : f^{-1}(\mathfrak{T}^0) \rightarrow \mathfrak{T}^0.$$

Nous poserons alors

$$(III.7.2) \quad \hat{f}_{\mathcal{L}}(\theta) = \theta \circ (df)^\# \quad (\theta \in \mathcal{L}).$$

En passant aux faisceaux, l'égalité

$$\widehat{\hat{f}_{\mathbf{L}}}(\theta) = \hat{f}_{\mathcal{L}}(\hat{\theta}) \quad [\theta \in f^{-1}(\mathbf{L})],$$

permet de définir l'homomorphisme

$$\hat{f}_{\mathbf{L}} : f^{-1}(\mathbf{L}) \rightarrow \mathbf{L}'.$$

⁽¹⁰⁾ \mathfrak{T}'_0 désigne l'espace des vecteurs tangents à \mathcal{X}' , de même \mathcal{L}' est l'espace des formes différentiables sur \mathcal{X}' à valeurs dans $\underline{\mathbf{G}}$, $\mathcal{N}' = \mathbf{G} \times \mathcal{X}'$, etc.

De même, en posant $\hat{f}_{\mathcal{N}} = \text{identité}$, on définit $\hat{f}_M : f^{-1}(M) \rightarrow M'$ par l'égalité

$$\widehat{f}_M(m) = \hat{f}_{\mathcal{N}}(\dot{m}) \quad [m \in f^{-1}(M)],$$

et l'on a les relations de compatibilité

$$\begin{aligned} \hat{f}_E \circ \text{Adj}(m) &= \text{Adj}(\hat{f}_{\mathcal{N}}(m)) \circ \hat{f}_E & [m \in f^{-1}(\mathcal{N}) = \mathcal{N}'] \\ \hat{f}_L \circ \text{Adj}(m) &= \text{Adj}(\hat{f}_M(m)) \circ \hat{f}_L & [m \in f^{-1}(M)]. \end{aligned}$$

Ces dernières relations montrent que la proposition I.5.4 est applicable et qu'il existe, par suite, un homomorphisme

$$\hat{f}_{L(E)} : f^{-1}(L(E)) \rightarrow L'(E')$$

lié à \hat{f}_L par les relations habituelles.

Montrons maintenant qu'on a

$$(III.7.3) \quad X \circ \hat{f}_M = \hat{f}_L \circ X.$$

En effet, soit $m \in f^{-1}(M)$ [avec $p(m) = x$ et $f(x) = y$]. A partir de $X : M \rightarrow L^1$ est induite une application $X : f^{-1}(M) \rightarrow f^{-1}(L^1)$ et, pour définir $X(m)$, nous choisirons une section locale \underline{m} de M passant par $f_M^\#(m)$. On a alors

$$f_L^\#(X(m)) = X(f_M^\#(m)) = X(\underline{m}(y)),$$

tandis que $\hat{f}_M(m) = \underline{m}'(x)$ avec $\bar{m}' = \bar{m} \circ f$. Comme $f_L^\#(X(m)) = X(m) \circ (df)^\#$, il s'agit en définitive, de vérifier

$$(X(\underline{m}) \circ df)_x = (X(\underline{m}'))_x,$$

soit

$$(\partial \circ d\bar{m} \circ df)_x = (\partial \circ (d(\bar{m} \circ f)))_x,$$

ce qui est évident.

En revenant à la définition de $C(m)$, la formule (III.7.3) montre alors qu'en définissant

$$\hat{f}_C : f^{-1}(C) \rightarrow C'$$

par

$$A \circ \hat{f}_C = \hat{f}_L \circ A,$$

\hat{f}_C est compatible avec \hat{f}_M lorsque $f^{-1}(M)$ opère sur $f^{-1}(C)$ par $C(m)$ et que M' opère sur C' par $C(m)$ également. On en déduit l'existence de $\hat{f}_{C(x)}$, lié à \hat{f}_C par les relations habituelles.

Diagrammes. — En procédant ainsi pour tous les espaces envisagés, on

vérifie qu'on a les diagrammes compatibles suivants où la compatibilité de la partie gauche entraîne celle de la partie droite :

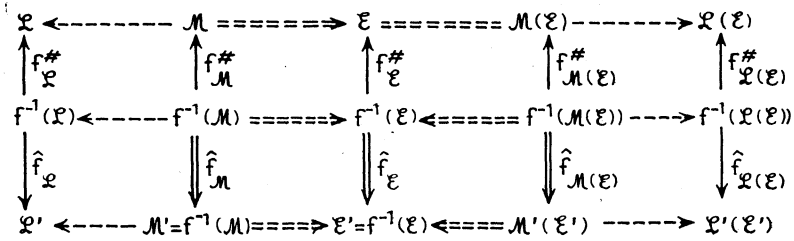


Fig. 6.

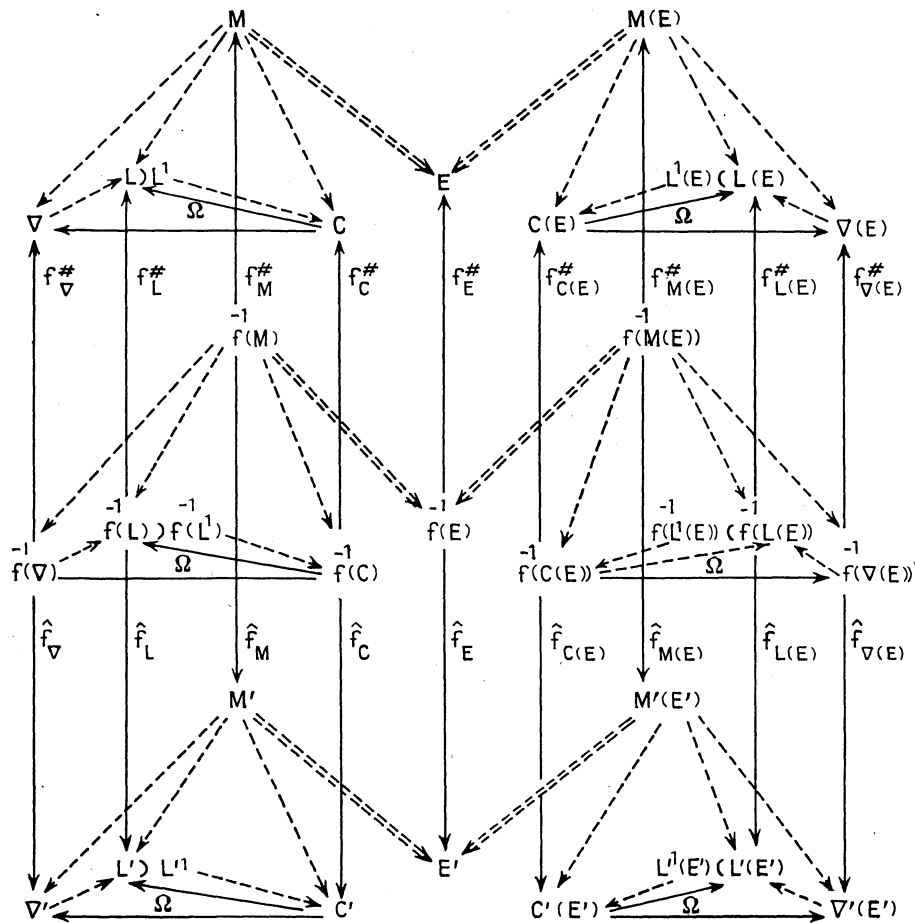


Fig. 7.

Soit alors V un ouvert de \mathcal{X}' tel que $f(V) \subset U$ (ouvert dans \mathcal{X}) et soit $\sigma: U \rightarrow Z$ une section locale différentiable (resp. continue) de Z ($Z = \mathcal{E}, \mathcal{M}, \mathcal{L}, \mathcal{M}(\mathcal{E}), \mathcal{L}(\mathcal{E})$ [resp. $Z = E, L, M, C, V, L(E), M(E), C(E), V(E)$]). A partir de σ ,

f induit d'abord sur V une section locale $\sigma^\#$ complètement définie par l'égalité ⁽¹¹⁾

$$f_z^\#(\sigma^\#(x)) = \sigma(f(x)) \quad (x \in \mathcal{X}').$$

On obtient ensuite une section σ' de Z' en posant

$$\sigma' = f_z \circ \sigma^\#.$$

De sorte qu'en définitive, cette dernière section est complètement déterminée par l'égalité

$$\sigma'(x) = \hat{f}_z^{-1}(f_z^\#(\sigma(f(x)))) \quad (x \in \mathcal{X}').$$

En appliquant cette construction au cas $U = \mathcal{X}$, on voit que toute forme de Lie sur $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ induit une forme de Lie sur $f^{-1}(\mathcal{E}(\mathcal{X}, G))$, que toute connexion sur $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ induit une connexion sur $f^{-1}(\mathcal{E}(\mathcal{X}, G))$, que toute différentiation covariante induit une différentiation covariante, etc.

8. APPLICATION. — Ce paragraphe est consacré, en vue d'applications au chapitre VI, à un cas où induction et homomorphisme se combinent. Considérons deux espaces fibrés principaux différentiables $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ et $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, G')$ de même base et supposons qu'il existe un homomorphisme d'espaces fibrés différentiables à fibres-groupes de Lie :

$$\varphi_{\mathcal{N}(\mathcal{E})} : \mathcal{N}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{N}'(\mathcal{E}')$$

des espaces structuraux gauches de $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ et $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, G')$ auquel est associé l'homomorphisme

$$\varphi_{\mathcal{L}(\mathcal{E})} : \mathcal{L}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{L}'(\mathcal{E}')$$

de leurs espaces de Lie, puisque $\mathcal{L}_x^0(\mathcal{E})$ et $\mathcal{L}_x^0(\mathcal{E}')$ s'identifient aux algèbres de Lie de $\mathcal{N}_x(\mathcal{E})$ et $\mathcal{N}_x'(\mathcal{E}')$. Nous ne supposons pas que ces homomorphismes proviennent d'un couple (φ, h) , mais nous nous donnons deux connexions ω et ω' sur \mathcal{E} et \mathcal{E}' respectivement, liées à $\varphi_{\mathcal{L}(\mathcal{E})}$ par les relations suivantes où Δ est la $L(E)$ -différentiation covariante associée à ω et où Δ' est la $L'(E')$ -différentiation covariante associée à ω' :

$$(III.8.1) \quad \begin{cases} \Delta' \circ \varphi_{L(E)} = \varphi_{L(E)} \circ \Delta, \\ \Omega(\omega') = \varphi_{L(E)}(\Omega(\omega)). \end{cases}$$

Nous considérons alors une application différentiable

$$f : \bar{\mathcal{X}} \rightarrow \mathcal{X}$$

d'une variété différentiable $\bar{\mathcal{X}}$ dans \mathcal{X} . Il s'agit de montrer qu'on se trouve,

⁽¹¹⁾ Voir la fin du paragraphe I.7.

sur $\bar{\mathcal{X}}$, dans la même situation que celle qui existe sur \mathcal{X} . Notons $\bar{\omega}$ la connexion induite sur $f^{-1}(\mathcal{E})$ à partir de ω , $\bar{\omega}'$ la connexion induite sur $f^{-1}(\mathcal{E}')$ à partir de ω' . L'espace de Lie (resp. structural gauche) de $\bar{\mathcal{E}} = f^{-1}(\mathcal{E})$ étant noté $\bar{\mathcal{L}}(\bar{\mathcal{E}})$ [resp. $\bar{\mathcal{M}}(\bar{\mathcal{E}})$], celui de $\bar{\mathcal{E}}' = f^{-1}(\mathcal{E}')$ sera désigné par $\bar{\mathcal{L}}'(\bar{\mathcal{E}}')$ [resp. $\bar{\mathcal{M}}'(\bar{\mathcal{E}}')$]. Enfin, $\bar{\Delta}$ et $\bar{\Delta}'$ sont les $\bar{\mathcal{L}}(\bar{\mathcal{E}})$ - et $\bar{\mathcal{L}}'(\bar{\mathcal{E}}')$ -différentiations covariantes associées à $\bar{\omega}$ et $\bar{\omega}'$ (c'est-à-dire induite à partir de Δ et de Δ').

L'induction transforme les homomorphismes $\varphi_{\mathcal{M}(\mathcal{E})}$ et $\varphi_{\mathcal{L}(\mathcal{E})}$ en homomorphismes $\varphi_{\bar{\mathcal{M}}(\bar{\mathcal{E}})}$ et $\varphi_{\bar{\mathcal{L}}(\bar{\mathcal{E}})}$ définis par les diagrammes commutatifs suivants :

$$\begin{array}{ccc}
 & x = f(x') & (x' \in \bar{\mathcal{X}}) \\
 \begin{array}{ccc}
 \mathcal{M}_x(\mathcal{E}) & \xrightarrow{\varphi_{\mathcal{M}(\mathcal{E})}} & \mathcal{M}'_{x'}(\mathcal{E}') \\
 \downarrow \hat{f}_{\mathcal{M}(\mathcal{E})}^{-1} & & \downarrow \hat{f}_{\mathcal{M}'(\mathcal{E}')}^{-1} \\
 [\hat{f}^{-1}(\mathcal{M}(\mathcal{E}))]_{x'} & & [\hat{f}^{-1}(\mathcal{M}'(\mathcal{E}'))]_{x'} \\
 \downarrow \hat{f}_{\mathcal{M}(\mathcal{E})} & & \downarrow \hat{f}_{\mathcal{M}'(\mathcal{E}')} \\
 \bar{\mathcal{M}}_{x'}(\bar{\mathcal{E}}) & \xrightarrow{\varphi_{\bar{\mathcal{M}}(\bar{\mathcal{E}})}} & \bar{\mathcal{M}}'_{x'}(\bar{\mathcal{E}}')
 \end{array} & &
 \begin{array}{ccc}
 \mathcal{L}_x(\mathcal{E}) & \xrightarrow{\varphi_{\mathcal{L}(\mathcal{E})}} & \mathcal{L}'_{x'}(\mathcal{E}') \\
 \downarrow \hat{f}_{\mathcal{L}(\mathcal{E})}^{-1} & & \downarrow \hat{f}_{\mathcal{L}'(\mathcal{E}')}^{-1} \\
 [\hat{f}^{-1}(\mathcal{L}(\mathcal{E}))]_{x'} & & [\hat{f}^{-1}(\mathcal{L}'(\mathcal{E}'))]_{x'} \\
 \downarrow \hat{f}_{\mathcal{L}(\mathcal{E})} & & \downarrow \hat{f}_{\mathcal{L}'(\mathcal{E}')} \\
 \bar{\mathcal{L}}_{x'}(\bar{\mathcal{E}}) & \xrightarrow{\varphi_{\bar{\mathcal{L}}(\bar{\mathcal{E}})}} & \bar{\mathcal{L}}'_{x'}(\bar{\mathcal{E}}')
 \end{array}
 \end{array}$$

Fig. 8.

De la comparaison de ces deux diagrammes, on déduit immédiatement que $\varphi_{\bar{\mathcal{M}}(\bar{\mathcal{E}})}$ et $\varphi_{\bar{\mathcal{L}}(\bar{\mathcal{E}})}$ sont associés. De plus, il est facile de voir qu'on a

$$\text{(III.8.2)} \quad \begin{cases} \bar{\Delta}' \circ \varphi_{\mathcal{L}(\bar{\mathcal{E}})} = \varphi_{\mathcal{L}(\bar{\mathcal{E}})} \circ \bar{\Delta}, \\ \Omega(\bar{\omega}') = \varphi_{\mathcal{L}(\bar{\mathcal{E}})}(\Omega(\bar{\omega})). \end{cases}$$

Il suffit pour cela de se reporter aux diagrammes du type de ceux du paragraphe précédent relatifs à \mathcal{E} , f , $\bar{\mathcal{E}}$ et à \mathcal{E}' , f , $\bar{\mathcal{E}}'$. Les parties de ces diagrammes faisant intervenir les faisceaux des connexions, les faisceaux de Lie, l'application « courbure » et les faisceaux des différentielles covariantes, permettent de vérifier la formule (III.8.2).

9. SOUS-ESPACES FIBRÉS PRINCIPAUX DIFFÉRENTIABLES. — Soit $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, G')$ une sous-espaces fibré principal différentiable à groupe structural de $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$. En d'autres termes, $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, G')$ est un espace fibré principal différentiable dont l'espace \mathcal{E}' proprement dit est une sous-variété de \mathcal{E} et dont le groupe structural G' est un sous-groupe de G muni de la topologie-réunion de la topologie induite et de la topologie dont les seuls ouverts sont les composantes connexes par arcs de G' dans G . Si l'on désigne par $I_{\mathcal{E}'}$ et $I_{G'}$, les inclusions

$$I_{\mathcal{E}'} : \mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{E} \quad \text{et} \quad I_{G'} : G' \rightarrow G,$$

le couple $(I_{\mathcal{E}}, I_C)$ est un couple d'homomorphismes compatibles. Ce sont même des *isomorphismes dans*. Les homomorphismes associés

$$\begin{aligned} I_{\mathfrak{N}'(\mathcal{E}')} &: \mathfrak{N}'(\mathcal{E}') \rightarrow \mathfrak{N}(\mathcal{E}), \\ I_{\mathcal{L}'(\mathcal{E}')} &: \mathcal{L}'(\mathcal{E}') \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{E}), \\ I_{C'(E')} &: C'(E') \rightarrow C(E) \end{aligned}$$

sont aussi des *isomorphismes dans*. Cela permet d'identifier :

- $I_{\mathcal{L}'(\mathcal{E}')}(\mathcal{L}'(\mathcal{E}'))$ à l'espace de Lie de $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, G')$;
- $I_{\mathfrak{N}'(\mathcal{E}')}(\mathfrak{N}'(\mathcal{E}'))$ à l'espace structural gauche de $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, G')$;
- $I_{C'(E')} (C'(E'))$ au faisceau des connexions de $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, G')$.

Dans la suite, nous ferons toujours complètement ces identifications. Une connexion sur \mathcal{E}' , considérée comme une section de $C(E)$, sera dite « étendue » à $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$. Le même terme sera également utilisé pour les sections de l'espace de Lie ou de l'espace structural gauche de $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, G')$.

CHAPITRE IV.

HOLONOMIE. FAISCEAU D'INVARIANCE D'UNE CONNEXION. TRANSPORT PARALLÈLE.

INTRODUCTION. — Dans la définition que nous donnons ci-dessous, le groupe d'holonomie d'un espace fibré principal muni d'une connexion ω n'est pas exactement le groupe habituellement désigné sous ce nom. Au lieu d'être un sous-groupe de G dépendant d'un point y de \mathcal{E} , c'est, en un point x de la base, un sous-groupe $\mathfrak{X}_x(\omega)$ de $\mathfrak{N}_x(\mathcal{E})$ qui n'est fonction que de x . Le groupe d'holonomie habituel en $y \in \mathcal{E}_x$ est alors $j_{\mathfrak{N}}(y)\mathfrak{X}_x(\omega)$. A un lacet L_x de la base est donc associé un élément unique de $\mathfrak{X}_x(\omega)$.

On passe ensuite à l'étude des propriétés des opérations $C(m)$ de $M(E)$ sur $C(E)$. Le résultat essentiel, et d'ailleurs immédiat, est le suivant : étant donnée une connexion ω sur $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ et une section globale de $\mathfrak{N}(\mathcal{E})$ [à laquelle correspond évidemment une section de $M(E)$], cette dernière, opérant par $C(m)$, transforme ω en une connexion ω' tandis que, en opérant à gauche sur \mathcal{E} , elle transforme tout chemin ω -horizontal en un chemin ω' -horizontal. A partir de là, on peut relier les propriétés du *faisceau d'invariance* d'une connexion ω [c'est-à-dire du sous-faisceau de $M(E)$ laissant ω invariante par $C(m)$], aux groupes d'*holonomie locale* de ω : la fibre en $x \in \mathcal{X}$ du faisceau d'invariance de ω est algébriquement isomorphe au centralisateur ⁽¹²⁾ du groupe d'holonomie locale en x .

(12) Ou commutant dans $\mathfrak{N}_x(\mathcal{E})$.

La proposition la plus importante démontrée au paragraphe 5 concerne le passage, lorsque G est connexe, d'une connexion ω à une connexion $\omega + \theta$, où θ est une section globale du *centre de* $L^1(E)$. En gros, θ détermine alors une connexion sur le centre $\mathcal{X}(\mathcal{E})$ de $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ [$\mathcal{X}(\mathcal{E})$ étant trivial, on peut le considérer comme un espace fibré principal dont le groupe structural est le centre de G] et, en notant $\tau_\theta^0(l_x)$ l'élément de $\mathcal{X}(\mathcal{E})$ associé dans ces conditions à tout lacet l_x , on a

$$\tau_{\omega+\theta}(l_x) = \tau_\theta^0(l_x)\tau_\omega(l_x),$$

égalité où $\tau_\omega(l_x)$ représente l'élément de l'espace structural gauche associé à l_x et à ω .

Enfin, le dernier paragraphe est consacré à des rappels sur la notion de transport parallèle [dans $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ et $\mathcal{L}^0(\mathcal{E})$ par exemple]. On se borne, en général, à fixer des notations et à énoncer les résultats qui seront utiles par la suite.

1. CHEMINS HORIZONTAUX. — Soit I l'intervalle fermé $[0, 1]$. Une application

$$l: I \rightarrow \mathcal{X}$$

définit un *chemin différentiable* de la variété différentiable \mathcal{X} si la fonction l est elle-même différentiable ⁽¹⁴⁾, c'est-à-dire s'il existe un intervalle ouvert I' contenant I et une application différentiable $l': I' \rightarrow \mathcal{X}$ dont la restriction à I est l .

Étant donné un tel chemin différentiable l et un espace fibré principal différentiable $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ muni d'une connexion ω , considérons l'espace fibré $l'^{-1}(\mathcal{E})$, de base I' , induit par l' , et soit $\omega^\#$ la connexion induite. Choisissons un point $y \in \mathcal{E}_{l(0)}$ et soit z l'unique point de la fibre de $l'^{-1}(\mathcal{E})$ de projection 0 , tel que $l_\#^\#(z) = y$ ($l_\#^\# =$ homomorphisme induit). Le champ $c(\omega^\#)$, invariant par G , est intégrable puisque c'est un champ régulier de vecteurs. Soit $\bar{s}: I' \rightarrow l'^{-1}(\mathcal{E})$ l'unique variété intégrale passant par z . On appellera chemin ω -horizontal de projection l et d'origine y , le chemin

$$\lambda_y: I \rightarrow \mathcal{E}$$

défini par

$$\lambda_y = l_\#^\# \circ \bar{s}.$$

Il est clair que ce chemin ne dépend pas de l'extension l' de l et qu'on a $\lambda_{y,s} = D_s \circ \lambda_y$ ($s \in G$). En revenant à la définition du champ de connexion (voir § III.1) et de la forme de connexion, on voit que \bar{s} peut être défini par l'équation

$$(IV.1.1) \quad A[l_{c^\#(s)}^{\omega^\#}] = 0.$$

⁽¹⁴⁾ Rappelons que « différentiable » signifie de « classe C^∞ ».

Soit maintenant $\mu: I \rightarrow I$ un homéomorphisme différentiable de I et $l_1 = l \circ \mu$. Comme l'homomorphisme induit

$$\mu_{l^{-1}(\mathcal{E})}^\# : \mu^{-1}(l^{-1}(\mathcal{E})) \rightarrow l^{-1}(\mathcal{E})$$

est un isomorphisme de $l^{-1}(\mathcal{E}) = \mu^{-1}(l^{-1}(\mathcal{E}))$ sur $l^{-1}(\mathcal{E})$ et que la connexion induite par l_1 à partir de ω coïncide avec la connexion induite par μ à partir de $\omega^\#$, il est clair que le chemin ω -horizontal de projection l_1 est

$$\lambda_1 = \lambda_y \circ \mu.$$

En choisissant un homéomorphisme μ dont toutes les dérivées s'annulent pour 0 et 1, on peut donc toujours se ramener au cas où toutes les dérivées de $l: I \rightarrow \mathcal{X}$ s'annulent au points 0 et 1. Cette remarque permet d'éviter de parler de chemins différentiables par morceaux puisque, si toutes les dérivées de l et l' s'annulent pour 0 et 1, le produit $l.l_0$, défini par

$$\left. \begin{aligned} (l.l_0)(t) &= l_0(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ (l.l_0)(t) &= l(2t-1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{aligned} \right\} [l_0(1) = l(0)]$$

est différentiable, et que ses dérivées s'annulent pour 0 et 1. Par la suite, nous considérerons, en général, des chemins de ce type et nous dirons qu'ils sont définis par une *représentation amortie*.

En particulier, on appellera *lacet différentiable en $x \in \mathcal{X}$* , tout chemin différentiable $l_x: I \rightarrow \mathcal{X}$ tel que $l_x(0) = l_x(1) = x$, et *lacet amorti en x* , tout lacet différentiable en x dont toutes les dérivées partielles s'annulent pour 0 et 1. Il en résulte qu'un lacet amorti l_x peut être défini par une application différentiable

$$\bar{l}_x: S^1 \rightarrow \mathcal{X}$$

du cercle S^1 orienté, muni d'une origine et paramétré par une application différentiable régulière $\alpha: I \rightarrow S^1$ [$\alpha(0) = \alpha(1) =: 0$]. On peut en effet poser

$$\bar{l}_x(\alpha(t)) = l_x(t) \quad (t \in I).$$

Par ailleurs, à tout lacet l_x (amorti ou non) est associé un élément $\tau_\omega(l_x) \in \mathcal{N}(\mathcal{E})$ défini par les égalités suivantes :

$$\tau_\omega(l_x) = i_{\mathcal{N}}(y) s_y \quad \text{et} \quad \lambda_y(1) = \lambda_y(0) \cdot s_y = y \cdot s_y,$$

où $\lambda_y: I \rightarrow \mathcal{E}$ est le chemin ω -horizontal d'origine $y \in \mathcal{E}_x$ se projetant sur l_x . On vérifie que $s_{y \cdot \sigma} = \sigma^{-1} s_y \sigma$, ce qui justifie cette définition qui pourrait aussi bien être donnée sous la forme

$$\tau_\omega(l_x) = m \quad \text{avec} \quad \lambda_y(1) = m \cdot y \quad [m \in \mathcal{N}_x(\mathcal{E})].$$

On vérifie immédiatement que, si l_x et l_x^0 sont deux lacets amortis en x et si $l_x \cdot l_x^0$ désigne leur produit (au sens défini ci-dessus), on a

$$\tau_\omega(l_x)\tau_\omega(l_x^0) = \tau_\omega(l_x \cdot l_x^0).$$

Comme, de plus, si l_x^{-1} désigne le lacet défini à partir de l_x par

$$l_x^{-1}(t) = l_x(1-t).$$

on a

$$\tau_\omega(l_x^{-1}) = (\tau_\omega(l_x))^{-1},$$

on voit que l'ensemble des $\tau_\omega(l_x)$ pour tous les lacets assortis en x (et, par suite, pour tous les lacets sans exception) est un sous-groupe de $\mathcal{N}_x(\mathcal{E})$. C'est le *groupe d'holonomie en x* que nous noterons $\mathcal{F}_x(\omega)$. Rappelons que c' est un groupe de Lie, du moins lorsqu'on le munit de la topologie-réunion de la topologie induite et de celle dont les seuls ouverts sont les composantes connexes par arcs de $\mathcal{F}_x(\omega)$ dans $\mathcal{N}_x(\mathcal{E})$. L'ensemble de $\mathcal{F}_x(\omega)$ ($x \in \mathcal{X}$) est un sous-espace fibré différentiable à fibre-groupe de Lie de $\mathcal{N}(\mathcal{E})$, noté $\mathcal{F}(\omega)$ et appelé *espace d'holonomie de ω* .

Nous appellerons *nappe d'holonomie* passant par $y \in \mathcal{E}$ l'ensemble des points de \mathcal{E} atteints par des chemins ω -horizontaux d'origine y . On sait que c'est une sous-variété différentiable de \mathcal{E} . Compte tenu de l'invariance de l'ensemble des chemins ω -horizontaux par les translations à droite de G , il est clair que la nappe d'holonomie passant par y est un sous-espace fibré principal de $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ de groupe structural $j_{\mathcal{N}}(y)\mathcal{F}_x(\omega)$ [$x = p(y)$]. L'espace d'holonomie $\mathcal{F}(\omega)$ est alors l'espace structural gauche de cette nappe d'holonomie et, par suite, de toutes les nappes d'holonomie.

Revenons aux notations du début de ce paragraphe. Dire que \bar{s} est une variété intégrale de $c(\omega^\#)$ est équivalent à dire que $\lambda_y = l_s^\# \circ \bar{s}$ est tangent au champ de connexion $c(\omega)$, c'est-à-dire qu'on a

$$(IV.1.2) \quad (\omega)_{\lambda_y(t)} \circ (d\lambda_y)_t = 0 \quad (t \in I).$$

Réciproquement, si un chemin de \mathcal{E} satisfait à cette égalité, il est horizontal. Considérons maintenant un couple d'homomorphismes compatibles

$$\varphi : G \rightarrow G' \quad \text{et} \quad h : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$$

liant deux espaces fibrés principaux $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ et $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, G')$. Soit ω une connexion sur $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$. Nous avons remarqué au paragraphe III.4, que $c(\omega)$ était projectable par h et que son image était le champ $c(\varphi_{c(\mathcal{E})}^h(\omega))$, associé à la connexion-image $\varphi_{c(\mathcal{E})}^h(\omega)$. L'image par h d'un chemin tangent à $c(\omega)$ est donc un chemin tangent à $c(\varphi_{c(\mathcal{E})}^h(\omega))$. On a donc la proposition suivante qu'on peut également vérifier à l'aide de diagrammes du type de ceux du paragraphe III.7.

PROPOSITION IV.1.1. — *Étant donné un couple d'homomorphismes compatibles (φ, h) , l'image par h d'un chemin ω -horizontal est un chemin $\varphi_{c(\mathcal{E})}^h(\omega)$ -horizontal.*

COROLLAIRE. — *L'image par h d'une nappe d'holonomie est une nappe d'holonomie et l'on a*

$$\varphi_{\mathcal{H}(\mathcal{E})}^h(\mathcal{X}(\omega)) = \mathcal{X}(\varphi_{\mathcal{C}(\mathbb{E})}^h(\omega)).$$

Cette dernière égalité résulte de la relation plus générale

$$(IV.1.3) \quad \varphi_{\mathcal{H}(\mathcal{E})}^h(\tau_\omega(l_x)) = \tau_{\omega'}(l_x) \quad [\omega' = \varphi_{\mathcal{C}(\mathbb{E})}^h(\omega)]$$

qui est une conséquence immédiate de la proposition précédente et de la définition de $\tau_\omega(l_x)$.

2. OPÉRATIONS DE $M(\mathbb{E})$:

PROPOSITION IV.2.1. — *Étant donnés $\omega \in C_x(\mathbb{E})$ et $m \in M_x(\mathbb{E})$, si l'on a*

$$A(j_c(y)\omega) = 0 \quad (y \in \mathbb{E}),$$

on a également

$$A(j_c(m.y)C(m)\omega) = 0.$$

Cette proposition résulte immédiatement des formules (I.3.1).

Soit maintenant $\bar{m}: U \rightarrow E_U$ une section locale de \mathbb{E} sur un ouvert U de \mathcal{X} . Étant donné un chemin différentiable $\lambda: I \rightarrow \mathcal{E}_U$, nous désignerons par $\lambda' = \bar{m}.\lambda$, le chemin différentiable défini par

$$\lambda'(t) = \bar{m}(p(\lambda(t))).\lambda(t) \quad (t \in I).$$

En se plaçant maintenant sur l'espace induit par $l = p_\mathcal{E} \circ \lambda$ à partir de \mathcal{E} , et en utilisant la condition (IV.1.1) et la proposition précédente, on démontre :

PROPOSITION IV.2.2. — *Si λ est un chemin ω -horizontal, $\bar{m}.\lambda$ est un chemin $C(\bar{m})(\omega)$ -horizontal.*

On remarquera que ce résultat peut également être considéré comme un cas particulier de la proposition IV.1.4 car la translation à gauche $G_{\bar{m}}$ est un G -isomorphisme de \mathcal{E}_U .

Donnons-nous maintenant un lacet en x :

$$l_x: I \rightarrow U.$$

Par une vérification directe ou comme application de la formule (IV.1.3), on peut énoncer :

PROPOSITION IV.2.3. — *Avec les notations précédentes, on a*

$$\tau_{C(\bar{m})\omega}(l_x) = \text{Int}(\bar{m}(x))\tau_\omega(l_x).$$

Et, comme conséquence immédiate :

COROLLAIRE. — *$\text{Int}(\bar{m})$ détermine un isomorphisme de l'espace d'holonomie $\mathcal{X}(\omega_U)$ de la restriction ω_U de ω à \mathcal{E}_U , sur l'espace d'holonomie $\mathcal{X}(C(\bar{m})\omega_U)$.*

3. FAISCEAU D'INVARIANCE ET GROUPE D'INVARIANCE D'UNE CONNEXION ;

DÉFINITION IV.3.1. — On appelle faisceau d'invariance $Q(\omega)$ d'une connexion ω , le sous-faisceau de $M(E)$ constitué par les éléments $m \in M(E)$ tels que

$$C(m)\omega(x) = \omega(x) \quad [x \in \mathcal{X} \text{ et } p(m) = x].$$

Remarquons que $Q(\omega)$ est bien un faisceau. En effet, soit \underline{m} une section de $M(E)$ sur un voisinage ouvert U de x , telle que

$$C(\underline{m}(x))\omega(x) = \omega(x).$$

Cette égalité signifie que la section de $C(E)$ définie sur U par $C(\underline{m})\omega$ passe par $\omega(x)$ et coïncide donc avec ω sur un voisinage ouvert V de x . Par suite, sur V , on a $C(\underline{m})\omega = \omega$ et \underline{m} est un homéomorphisme local de $Q(\omega)$ sur V .

DÉFINITION IV.3.2. — On appelle groupe d'invariance $I(\omega)$ d'une connexion ω , le groupe des sections globales de $Q(\omega)$.

PROPOSITION IV.3.1. — Si q est une section globale de $Q(\omega)$, l'automorphisme intérieur $\text{Int}(\bar{q}(x))$ laisse invariant le groupe d'holonomie en x .

C'est là une conséquence immédiate de la proposition IV.2.3.

COROLLAIRE. — Le groupe d'invariance $I(\omega)$ de la connexion ω est nécessairement constitué de sections globales de l'espace fibré de groupes $\mathcal{S}(\omega)$ dont les fibres $\mathcal{S}_x(\omega)$ sont les centralisateurs dans les fibres $\mathcal{N}_x(\mathcal{E})$ de $\mathcal{N}(\mathcal{E})$, des fibres de l'espace d'holonomie $\mathcal{X}(\omega)$.

Bien entendu, cela ne signifie pas que toute section globale de $\mathcal{S}(\omega)$ fournit un élément de $I(\omega)$, mais simplement, que les éléments de $I(\omega)$ se recrutent parmi les sections de $\mathcal{S}(\omega)$.

PROPOSITION IV.3.2. — L'espace fibré $\mathcal{S}(\omega)$ est trivial.

En effet, soit V une nappe d'holonomie quelconque. On détermine un isomorphisme de $\mathcal{S}_x(\omega)$ sur un sous-groupe déterminé de G de la façon suivante. Soit P_V le groupe structural de V , c'est-à-dire, pour $y \in V$, le sous-groupe

$$P_V = j_{\mathcal{N}}(y)\mathcal{X}_x(\omega) \quad [x = p(y)].$$

Comme

$$j_{\mathcal{N}}(y \cdot g)s = g(j_{\mathcal{N}}(y)s)g^{-1} \quad [s \in \mathcal{S}_x(\omega) \text{ et } g \in G],$$

on voit que, pour $g \in P_V$, on a

$$j_{\mathcal{N}}(y \cdot g)s = j_{\mathcal{N}}(y)s.$$

Autrement dit, $j_{\mathcal{N}}(y)s$ est indépendant du choix de y dans V_x , pour $s \in \mathcal{S}_x(\omega)$. Par suite, $j_{\mathcal{N}}(y)$ détermine un isomorphisme de $\mathcal{S}_x(\omega)$ sur le centralisateur S_x .

de P_V dans G , ne dépendant que de x . Soit $j_x^V : \mathcal{S}_x(\omega) \rightarrow S_V$ cet isomorphisme. L'application

$$j_V : \mathcal{S}(\omega) \rightarrow S_V \times \mathcal{X},$$

définie par

$$j_V(s) = (j_s^V(s), x) \quad [s \in \mathcal{S}(\omega) \text{ et } x = p(s)],$$

est un isomorphisme de $\mathcal{S}(\omega)$ sur le produit $S_V \times \mathcal{X}$.

Remarquons que l'isomorphisme j_V n'est pas canonique : il dépend du choix de la nappe d'holonomie V . Cependant, les *sections constantes* de $\mathcal{S}(\omega)$, c'est-à-dire les sections $\bar{q} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{S}(\omega)$ telles que $j_x^V(\bar{q}(x))$ ne dépende pas de $x \in \mathcal{X}$, peuvent être définies indépendamment de V . On le vérifie immédiatement en choisissant deux variétés distinctes V et V' et en utilisant le fait que V' se déduit de V par une translation à droite σ . Il suffit alors de définir $j_x^V, j_{x'}^V$, (resp. $j_x^{V'}, j_{x'}^{V'}$) à l'aide de points $y \in V_x, y' \in V_{x'}$ (resp. $y \cdot \sigma$ et $y' \cdot \sigma$) reliés par un chemin ω -horizontal.

PROPOSITION IV.3.3. — *Si q est une section globale de $Q(\omega)$, \bar{q} est une section constante de $\mathcal{S}(\omega)$. Réciproquement, si \bar{q} est une section constante de $\mathcal{S}(\omega)$, q est une section globale de $Q(\omega)$, c'est-à-dire un élément du groupe d'invariance $I(\omega)$.*

En effet, les sections de $\mathcal{S}(\omega)$ qui fournissent des sections de $Q(\omega)$ satisfont à l'équation

$$(IV.3.1) \quad C(q)\omega = \omega,$$

et réciproquement. Soit alors U un voisinage ouvert de $x \in \mathcal{X}$, différentiablement homéomorphe à \mathbb{R}^d et soit $\bar{y} : U \rightarrow V$ une section locale sur U de la nappe d'holonomie V . Posons $\omega_U = j_c(\bar{y})\omega$. Comme le projecteur φ_ω associé à ω conserve l'espace des vecteurs tangents à V par définition même d'une nappe d'holonomie, $A(\omega_U)$ est une forme différentielle sur U à valeurs dans l'algèbre de Lie de P_V . Or, les solutions de (IV.3.1), transformées par $j_{\pi}(\bar{y})$ deviennent des solutions de

$$(IV.3.2) \quad C(\bar{s})\omega_U = \omega_U,$$

où \bar{s} est une section de $S_V \times U$, et réciproquement. On est donc amené à résoudre (IV.3.2) qui s'écrit

$$(IV.3.3) \quad X(\bar{s}^{-1}) + \text{Adj}(\bar{s})A(\omega_U) = A(\omega_U).$$

Mais $A(\omega_U)$ est une forme différentielle invariante par $\text{Adj}(\bar{s})$ puisque les éléments de S_V commutent avec tous les éléments de P_V . L'équation (IV.3.2) se réduit donc à $X(\bar{s}^{-1}) = 0$, ce qui entraîne $\bar{s} = \text{Cte}$.

COROLLAIRE. — *Le groupe d'invariance $I(\omega)$ est isomorphe (algébriquement) à $\mathcal{S}_x(\omega)$ et à S_V .*

PROPOSITION IV.3.4. — *Quel que soit $x \in X$, il existe un voisinage U de x tel que toute section du faisceau d'invariance $Q(\omega)$ sur un voisinage quelconque $U \subset U$ de x , soit la restriction d'une section locale de $Q(\omega)$ sur U et d'une seule.*

En effet, on sait que tout point x possède un voisinage U tel que, si $U' \subset U$, le groupe d'holonomie de la restriction de ω à $\mathcal{E}_{U'}$ soit le même que le groupe d'holonomie de la restriction de ω à \mathcal{E}_U [et isomorphe, par définition, au groupe d'holonomie locale en x ⁽¹⁵⁾]. La proposition précédente résulte alors de la proposition (IV.3.3) appliquée à \mathcal{E}_U et à $\mathcal{E}_{U'}$.

COROLLAIRE. — *La fibre en x du faisceau d'invariance $Q(\omega)$ est isomorphe (algébriquement) au centralisateur du groupe d'holonomie locale en x , centralisateur dans $\mathcal{N}_x(\mathcal{E})$, bien entendu.*

PROPOSITION IV.3.5. — *Le faisceau d'invariance d'une connexion est localement simple, sauf sur un sous-ensemble de \mathcal{X} sans point intérieur.*

En effet, si x est un point régulier pour la connexion ⁽¹⁵⁾, il existe un voisinage U de x tel que si $x' \in U$, le groupe d'holonomie locale en x' est isomorphe au groupe d'holonomie locale en x . Il en résulte que $Q(\omega_U)$ est simple, ω_U désignant ici la restriction de ω à \mathcal{E}_U . D'où la proposition précédente qui tient compte, en outre, d'une propriété classique des points réguliers d'une connexion.

4. DÉFINITIONS :

DÉFINITION IV.4.1. — *On dira qu'une connexion est régulière lorsque son faisceau d'invariance est simple.*

DÉFINITION IV.4.2. — *On appellera faisceau des connexions réduites de type G , sur \mathcal{X} , le quotient $C(E)/M(E)$ du faisceau des connexions d'un espace fibré principal différentiable quelconque de base \mathcal{X} et de groupe G , par le faisceau des sections différentiables de son espace structural gauche.*

Comme $C(E)$ est défini par modelage sur E du faisceau C des préconnexions de type G , il est clair que la définition du faisceau des connexions réduites de type G ne dépend pas du choix de l'espace fibré principal : $C(E)/M(E)$ est isomorphe à C/M .

On notera Π_E l'application canonique

$$\Pi_E : C(E) \rightarrow C(E)/M(E).$$

DÉFINITION IV.4.3. — *On appellera faisceau des courbures réduites de type G*

⁽¹⁵⁾ Voir Lichnerowicz, [1] p. 113 et 141, et aussi Nuijenhuis [4].

sur \mathcal{X} le quotient $\Omega(C(E))/M(E)$ de l'image de $C(E)$ dans $L^2(E)$ par l'homomorphisme (de faisceaux) courbure, par $M(E)$.

Il est clair également que cette définition ne dépend pas de l'espace fibré choisi. De plus, l'homomorphisme-courbure

$$\Omega : C(E) \rightarrow L^2(E)$$

passé au quotient sous la notation

$$\bar{\Omega} : C(E)/M(E) \rightarrow L^2(E)/M(E)$$

et l'on dira que $\bar{\Omega}(\omega)$ est la courbure du germe de connexion réduite $\omega \in C(E)/M(E)$.

Ces notions seront étudiées dans un autre travail. Elles conduisent à des théorèmes d'unicité : isomorphisme de deux espaces fibrés principaux de même base simplement connexe admettant des connexions régulières dont les images par Π_E coïncident; à des théorèmes d'existence : existence (sous des conditions analogues à celles qui interviennent au chapitre VIII de cette thèse) d'un espace fibré principal admettant une connexion réduite régulière (en un sens assez évident) donnée sur une base simplement connexe; enfin, en qualifiant d'homotopes deux connexions réduites (régulières ou non) qui sont les restrictions à $(\mathcal{X}, 0)$ et $(\mathcal{X}, 1)$ d'une même connexion réduite sur $\mathcal{X} \times I$, on montre que toute connexion réduite détermine un homomorphisme de Weil et que deux connexions réduites homotopes déterminent le même homomorphisme de Weil.

5. CAS PARTICULIERS. — Nous supposons dans ce paragraphe que G est connexe. Il en résulte que $\mathcal{K}^0(\mathcal{E})$, centre de $\mathcal{L}^0(\mathcal{E})$ obtenu en modelant $\mathcal{K}^0 = \mathcal{X} \times \underline{H}$ ($H =$ centre de G) est trivial car G laisse invariant les éléments de \underline{H} lorsqu'il opère sur \underline{G} par la représentation adjointe. Pour la même raison, mais sans que l'hypothèse de connexité soit nécessaire, le centre $\mathcal{N}(\mathcal{E})$ de $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ est également trivial. De plus, sur $K(E)$, toute différentielle covariante de type adjoint [c'est-à-dire associée à une connexion sur $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$] se réduit à la différentielle ordinaire d . Signalons enfin la formule

$$(IV.5.1) \quad \Omega(\omega + \theta) = \Omega(\omega) + \Delta\theta + \frac{1}{2}[\theta, \theta],$$

où Δ est la $L(E)$ -différentiation covariante associée à une connexion ω et où θ est une section quelconque de $L^1(E)$.

PROPOSITION IV.5.4. — Si θ est une section du centre $K^1(E)$ de $L^1(E)$ et si $d\theta = 0$ (ou si $\Delta = 0$ d'après ce qui précède), on a

$$\Omega(\omega + \theta) = \Omega(\omega).$$

En effet, la formule (IV.5.1) s'écrit alors

$$\Omega(\omega + \theta) = \Omega(\omega) + d\theta = \Omega(\omega).$$

PROPOSITION IV.5.2. — Si θ est une section du centre $K^1(E)$ de $L^1(E)$, si $d\theta = 0$ et si \mathcal{X} est simplement connexe, il existe une section \underline{s} du centre $N(E)$ de $M(E)$ telle que

$$\omega + \theta = C(\underline{s}) \omega.$$

et réciproquement.

Choisissons une section locale z de \mathcal{E} sur un ouvert U différenciablement homéomorphe à \mathbb{R}^d et posons $\omega_U = j_c(z)\omega$. Soit \underline{s} une section de $N(E) = N$. On a

$$j_c(z) C(\underline{s}) \omega = C(\underline{s}) \omega_U = X(\underline{s}) + \omega_U,$$

la dernière partie de cette égalité résultant du fait que \underline{s} est une section de $N(E)$, identifié à N . On est donc amené à résoudre l'équation

$$X(\underline{s}) = \theta.$$

Or, en interprétant cette égalité en termes de formes différentielles, on voit qu'elle est équivalente à

$$X^0 = \theta.$$

où X^0 et θ sont des formes différentielles sur le produit $U \times H$. La première est la forme de connexion triviale (dont les variétés intégrales sont les sections constantes de $U \times H$) qui sert à définir $X(\underline{s})$ (voir § III.4). La deuxième est la forme θ qui peut être considérée comme une forme sur $U \times H$. L'une et l'autre sont à valeurs dans H et l'égalité $X^0 = \theta$ définit un système de Pfaff complètement intégrable car $dX^0 = d\theta = 0$. Comme \mathcal{X} est simplement connexe par hypothèse, il existe bien une variété intégrale de ce système de Pfaff (définie à une translation près) à laquelle correspond une section \underline{s} de $N(E)$ telle que $\omega + \theta = C(\underline{s})\omega$. La réciproque est évidente.

PROPOSITION IV.5.3. — Si θ est une section de $K^1(E)$, si $d\theta = 0$ (ou, ce qui est équivalent, si $\Delta\theta = 0$) et si \mathcal{X} est simplement connexe, on a, quel que soit le lacet l_x de \mathcal{X} :

$$\tau_{\omega+\theta}(l_x) = \tau_{\omega}(l_x).$$

En effet, étant donnée une des sections \underline{s} définies par la proposition précédente, on passe de $\tau_{\omega}(l_x)$ à $\tau_{\omega+\theta}(l_x)$ par l'automorphisme intérieur $\text{Int}(\bar{s}(x))$ ce qui entraîne l'égalité annoncée.

COROLLAIRE. — Si λ_y et λ'_y sont deux chemins différentiables de \mathcal{E} , de même origine y , se projetant sur le même lacet l_x , et respectivement ω - et $(\omega + \theta)$ -horizontaux (θ satisfaisant aux conditions de la proposition précédente), alors, ils ont également même extrémité.

On peut généraliser la proposition IV.5.3 de la façon suivante. Étant donnée une forme différentielle linéaire θ à valeurs dans \mathbb{H} , c'est-à-dire une section de $K^1(\mathbb{E}) = K^1$, considérons la connexion définie dans $\mathbb{H} \times \mathcal{X}$ par la forme de connexion $X^0 - \theta$, où X^0 est, comme ci-dessus, la forme de connexion triviale dans $\mathbb{H} \times \mathcal{X}$. On notera $\tau_\theta^0(l_x)$ la transformation de $\mathcal{N}(\mathcal{E})$ (transformation qu'on peut également considérer comme un élément de \mathbb{H}) associée à tout lacet l_x de \mathcal{X} dans la connexion $X^0 - \theta = 0$. On a alors :

PROPOSITION IV.5.4. — Si θ est une forme différentielle quelconque à valeurs dans \mathbb{H} , on a

$$\tau_{\omega+\theta}(l_x) = \tau_\omega(l_x) \tau_\theta^0(l_x),$$

où l_x est un lacet différentiable quelconque de \mathcal{X} et où $\tau_\theta^0(l_x)$ est l'élément du centre $\mathcal{N}_x(\mathcal{E})$ de $\mathcal{N}_x(\mathcal{E})$ défini dans les lignes précédentes.

Considérons en effet, un lacet $l_x : S^1 \rightarrow \mathcal{X}$ défini par une application différentiable du cercle S^1 paramétré par une application différentiable régulière $\alpha : I \rightarrow S^1$, dans \mathcal{X} . Nous nous trouvons, sur l'espace fibré principal induit $l_x^{-1}(\mathcal{E})$ muni de la connexion induite $\omega^\#$ et de $\omega^\# + \theta^\#$, où $\theta^\#$ est la forme différentielle induite par l_x à partir de θ , dans la situation de la proposition IV.5.2, à cela près que la base S^1 n'est pas simplement connexe. En d'autres termes, l'équation

$$(IV.5.2) \quad C(\mathcal{E}) \omega^\# = \omega^\# + \theta^\#$$

est localement équivalente au système de Pfaff,

$$(IV.5.3) \quad (X^0 - \theta)^\# = 0$$

induit à partir de $X^0 - \theta = 0$. On le vérifie immédiatement en utilisant des sections locales et en reprenant le raisonnement de la proposition IV.5.2. Le système (IV.5.3) qui définit un champ de vecteurs régulier est localement intégrable. Il existe donc une solution et une seule de (IV.5.2) définie dans $\mathbb{H} \times S^1$ au voisinage du point (e, O) et passant par ce point [$e =$ élément neutre de \mathbb{H} et $O = \alpha(o) =$ origine de S^1]. Notons

$$\bar{\sigma} : I \rightarrow \mathbb{H} \times S^1 \quad [p(\bar{\sigma}(t)) = \alpha(t)]$$

cette solution prolongée jusqu'à rejoindre la fibre de projection O . Soit alors y un point arbitraire de cette fibre. Considérons le chemin $\omega^\#$ -horizontal λ d'origine y et le chemin $(\omega + \theta)^\#$ -horizontal λ' d'origine y également, paramétrés l'un et l'autre de telle sorte qu'on ait

$$p(\lambda(t)) = p(\lambda'(t)) = \alpha(t) \quad (t \in I).$$

Puisque $\lambda(o) = \lambda'(o) = y$ et que $\bar{\sigma}(o) = (e, O)$ la proposition IV.2.2 montre

qu'on a quel que soit t :

$$\lambda'(t) = \bar{\sigma}(t) \cdot \lambda(t).$$

En particulier, pour $t = 1$, on a

$$\lambda'(1) = \bar{\sigma}(1) \cdot \lambda(1).$$

Mais, comme (IV.5.3) et (IV.5.2) sont équivalentes, cette égalité s'écrit, en revenant à l'espace fibré initial $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$:

$$\tau_{\omega+\theta}(l_x) = \tau_{\omega}(l_x) \tau_{\theta}^{\sharp}(l_x).$$

Revenons maintenant aux notations utilisées à la fin du paragraphe II.5 : soit ω' une connexion dans $\mathcal{E}_{\gamma} = \mathcal{E}/H$ et ω une connexion dans $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ telle que $\gamma_{L(E)}(\omega) = \omega'$. Étant donnée, dans ces conditions, une section de $L^2(E) = L^2(E_{\gamma})$ notée $\tilde{\Omega}$ et telle que $\Delta\tilde{\Omega} = 0$, existe-il une connexion $\tilde{\omega}$ sur $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ admettant $\tilde{\Omega}$ pour courbure? Dans un cas au moins, la réponse est immédiate (¹⁶).

PROPOSITION IV.5.5. — *Étant donnée une section $(\tilde{\Omega})$ de $L^2(E)$ et une connexion ω sur $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ à laquelle est associée la $L(E)$ -différentiation covariante Δ , si $\Delta\tilde{\Omega} = 0$, si $\gamma_{L(E)}(\tilde{\Omega}) = \gamma_{L(E)}(\Omega(\omega))$ et si le deuxième groupe d'homologie de \mathcal{X} à coefficients dans \underline{H} est nul, il existe une connexion $\tilde{\omega}$ sur $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ telle que $\Omega(\tilde{\omega}) = \tilde{\Omega}$.*

Posons en effet $\Pi = \Omega(\omega) - \tilde{\Omega}$. Comme $\gamma_{L(E)}(\tilde{\Omega}) = \gamma_{L(E)}(\Omega(\omega))$, on a $\gamma_{L(E)}(\Pi) = 0$. On peut donc identifier Π à une forme différentielle sur \mathcal{X} à coefficients dans \underline{H} . L'égalité $\Delta\Pi = 0$ se traduit alors par $d\Pi = 0$. Puisque, par hypothèse, le deuxième groupe d'homologie de \mathcal{X} à coefficients dans \underline{H} est nul, il existe une forme différentielle θ , de degré 1 à coefficients dans \underline{H} telle que $d\theta = \Pi$. En posant $\tilde{\omega} = \omega + \theta$, la formule (IV.5.1) montre qu'on a $\Omega(\tilde{\omega}) = \tilde{\Omega}$. Ce qui achève la démonstration.

Remarque. — Lorsque \mathcal{X} est homéomorphe à \mathbb{R}^d , les conditions d'application de la proposition précédente sont remplies. C'est surtout dans ce cas qu'elle nous servira dans la suite.

Application. — Si G est abélien, si \mathcal{X} est simplement connexe et si son deuxième groupe d'homologie est nul, tout espace fibré principal différentiable de groupe structural G et de base \mathcal{X} est trivial.

En effet, d'après la proposition précédente, il existe toujours une connexion de courbure nulle. Le champ de connexion correspondant est donc intégrable et, comme \mathcal{X} est simplement connexe, l'espace fibré principal considéré possède une section globale : il est trivial.

(¹) Si θ est quelconque, la réponse est évidemment négative, en général.

6. TRANSPORT PARALLÈLE. — Le but de ce paragraphe est d'abord de montrer comment la notion de transport parallèle se rattache au cadre général que nous avons choisi, mais surtout, de rappeler quelques résultats qui nous seront utiles par la suite.

Soit Z un espace tel que $G, \underline{G}, \mathfrak{W}_0$, etc., sur lequel le groupe structural G de $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ opère comme groupe d'automorphismes. Nous posons $\mathfrak{Z} = Z \times \mathcal{X}$ et nous construisons $\mathfrak{Z}(\mathcal{E})$. Nous considérerons les applications différentiables suivantes :

$$(1^\circ) \quad g_z: \mathcal{E} \boxtimes \mathfrak{Z}(\mathcal{E}) \rightarrow Z$$

définie par l'égalité

$$g_z(y, z) = j_{\mathfrak{Z}}(y) z \quad [y \in \mathcal{E}_x, z \in \mathfrak{Z}_x(\mathcal{E}), x \in \mathcal{X}]$$

où l'on considère $j_{\mathfrak{Z}}(y) z$ comme un élément de Z .

$$(2^\circ) \quad f_z: \mathcal{E} \boxtimes \mathfrak{Z}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{E}$$

définie par l'égalité

$$f_z(y, z) = y \quad [y \in \mathcal{E}_x, z \in \mathfrak{Z}_x(\mathcal{E}), x \in \mathcal{X}].$$

$$(3^\circ) \quad h_z: \mathcal{E} \boxtimes \mathfrak{Z}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathfrak{Z}(\mathcal{E})$$

définie par l'égalité

$$h_z(y, z) = z \quad [y \in \mathcal{E}_x, z \in \mathfrak{Z}_x(\mathcal{E}), x \in \mathcal{X}].$$

Nous désignerons maintenant par $T_{y,z}$ l'espace vectoriel tangent à $\mathcal{E} \boxtimes \mathfrak{Z}(\mathcal{E})$ au point (y, z) [$y \in \mathcal{E}_x$ et $z \in \mathfrak{Z}_x(\mathcal{E})$]. Les applications df_z et dh_z permettent de décomposer $T_{y,z}$ en deux espaces vectoriels supplémentaires dont l'un, T_y^1 , est l'espace tangent à \mathcal{E}_x au point y et dont l'autre, T_z^2 , est tangent à $\mathfrak{Z}_x(\mathcal{E})$ au point z . Soit, d'autre part, ω , une forme de connexion sur $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$. Nous noterons $\omega^{\mathfrak{Z}}$ la forme différentielle sur $\mathcal{E} \boxtimes \mathfrak{Z}(\mathcal{E})$ à valeurs dans \underline{G} induite par f_z à partir de ω . Le système

$$(IV.6.1) \quad dg_z = 0, \quad \omega^{\mathfrak{Z}} = 0,$$

détermine alors, en tout point (y, z) , un sous-espace vectoriel de $T_{y,z}$ dont la projection sur T^2 sera notée $c_{y,z}^{\mathfrak{Z}(\mathcal{E})}(\omega)$. Soit $X \in T_{y,z}$, un vecteur qui se décompose suivant T_y^1 et T_z^2 en X^1 et X^2 :

$$X = X^1 + X^2.$$

Si $(dg_z)_{y,z} X = 0$, les formules (I.3.1) montrent qu'on a aussi

$$(dg)_{y,s,z}(X^1 \cdot s + X^2) = 0 \quad (s \in G).$$

Mais $c(\omega)$ est également invariant par les translations à droite, de sorte que si $(\omega^{\mathfrak{Z}})_{y,z} X = 0$, on a

$$(\omega^{\mathfrak{Z}})_{y,s,z}(X^1 \cdot s + X^2) = 0.$$

Il en résulte que

$$c_{y,s,z}^{\mathfrak{Z}(\mathcal{E})}(\omega) = c_{y,z}^{\mathfrak{Z}(\mathcal{E})}(\omega).$$

Autrement dit, on a défini un champ transversal aux fibres de $\mathfrak{Z}(\mathcal{E})$ que nous noterons évidemment $c^{\mathfrak{Z}(\mathcal{E})}(\omega)$. C'est ce champ qui définit le transport parallèle dans $\mathfrak{Z}(\mathcal{E})$ associé à la connexion ω . Plus précisément, $z_t \in \mathfrak{Z}(\mathcal{E})$ se déplace parallèlement à lui-même dans $\mathfrak{Z}(\mathcal{E})$ le long du chemin $l: I \rightarrow \mathfrak{X}$, si $p(z_t) = l(t)$ et si le chemin décrit par z_t lorsque t varie de 0 à 1, est un chemin différentiable tangent à $c^{\mathfrak{Z}(\mathcal{E})}(\omega)$ en chacun de ses points. Il en résulte immédiatement que si $\lambda: I \rightarrow \mathcal{E}$ est le chemin ω -horizontal de projection l , l'élément $j_{\mathfrak{Z}}(\lambda(t))z_t$ de Z reste invariant lorsque z_t se déplace par parallélisme le long de l . Inversement, cette propriété permet de définir le transport parallèle dans $\mathfrak{Z}(\mathcal{E})$.

Remarque. — Si \mathfrak{Z} n'est pas trivial mais s'il existe un champ transversal aux fibres de \mathfrak{Z} définissant un transport parallèle, il est possible de lui associer un transport parallèle dans $\mathfrak{Z}(\mathcal{E})$ dépendant également de ω . Avec les notations précédentes, z_t se déplacera par parallélisme si $j_{\mathfrak{Z}}(\lambda(t))z_t$ se déplace également par parallélisme.

Rappelons d'autre part que, dans le cas de $\mathcal{L}^0(\mathcal{E})$, ou plus généralement, dans le cas d'un espace fibré différentiable $\mathfrak{R}^0(\mathcal{E})$ à fibre vectorielle, le transport parallèle associé à une connexion ω peut être défini par $\Delta X = 0$ [$X \in \mathfrak{R}^0(\mathcal{E})$ et $\Delta =$ différentiation covariante associée à ω], en ce sens que, si ν' est une variété intégrale du champ ($c^{\mathfrak{R}^0(\mathcal{E})}(\omega')$) [induit dans l'espace $l^{-1}(\mathfrak{R}^0(\mathcal{E}))$ à partir de $c^{\mathfrak{R}^0(\mathcal{E})}(\omega)$], c'est-à-dire si $l_{\mathfrak{R}^0(\mathcal{E})}^{\#}(\nu'(t))$ se déplace parallèlement à lui-même dans $\mathfrak{R}^0(\mathcal{E})$ et si Δ' est la différentielle covariante induite par l à partir de Δ , on a $\Delta' \nu' = 0$.

Il en résulte que, lorsqu'on connaît une section $(\rho_i) (i=1, \dots, m)$ de l'espace des repères de $\mathfrak{R}^0(\mathcal{E})$ sur un ouvert U homéomorphe à \mathbb{R}^d , on peut définir localement $c^{\mathfrak{R}^0(\mathcal{E})}(\omega)$ par le système de Pfaff suivant. Représentons $\mathfrak{R}_U^0(\mathcal{E})$ par les coordonnées constituées par un système de coordonnées dans U d'une part, et par les composantes X^i de $X \in \mathfrak{R}_U^0(\mathcal{E})$ par rapport à (ρ_i) , d'autre part. On a alors

$$\Delta X = \Delta \sum_{i=1}^m X^i \rho_i = \sum_{i=1}^m (dX^i \rho_i + X^i \Delta \rho_i).$$

En posant

$$\Delta \rho_i = \sum_{j=1}^m \omega^j{}_i \rho_j,$$

il vient

$$\Delta X = \sum_{j=1}^m \left(dX^j + \sum_{i=1}^m \omega^j{}_i X^i \right) \rho_j.$$

Compte tenu de ce qui précède, il est alors clair que les égalités

$$(IV.6.1) \quad dX^i + \sum_{j=1}^m \omega^j{}_i X^j = 0 \quad (i=1, \dots, m)$$

qui constituent un système de Pfaff déterminent le champ $c^{\omega^0(\mathcal{E})}(\omega)$ sur $\mathfrak{X}_V^0(\mathcal{E})$.

Enfin, d'une façon générale, le transport parallèle le long d'un chemin l de \mathcal{X} détermine un isomorphisme

$$\mu_{\mathfrak{X}}^{l,\omega}: \mathfrak{X}_{x_0}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathfrak{X}_{x_1}(\mathcal{E}) \quad [x_0 = l(0), x_1 = l(1)].$$

Considérons en particulier, le cas où Z est successivement un groupe de Lie Γ sur lequel G opère comme groupe d'automorphismes et l'algèbre de Lie $\underline{\Gamma}$ de Γ sur laquelle G opère par les automorphismes associés. Posons $\mathfrak{X} = \Gamma \times \mathcal{X}$ et $\mathfrak{Z}^0 = \Gamma \times \mathcal{X}$, puis, construisons $\mathfrak{X}(\mathcal{E})$ et $\mathfrak{Z}^0(\mathcal{E})$ (cf. la proposition II.4.1 et la remarque qui suit). On constate alors immédiatement que $\mu_{\mathfrak{X}(\mathcal{E})}^{l,\omega}$ et $\mu_{\mathfrak{Z}^0(\mathcal{E})}^{l,\omega}$ sont associées, c'est-à-dire qu'on a, en reprenant les notations de II.4.1 ;

$$\mu_{\mathfrak{X}(\mathcal{E})}^{l,\omega} = k^{-1} \circ \mu_{\mathfrak{Z}^0(\mathcal{E})}^{l,\omega} \circ k.$$

Application. — Soit $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, G')$ un deuxième espace fibré principal différentiable et soit Γ' un groupe de Lie sur lequel G' opère comme groupe d'automorphismes. Comme ci-dessus, on forme $\mathfrak{X}'(\mathcal{E}')$ et $\mathfrak{Z}'^0(\mathcal{E}')$. Supposons qu'il existe un homomorphisme

$$\varphi_{\mathfrak{X}(\mathcal{E})}: \mathfrak{X}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathfrak{X}'(\mathcal{E}'),$$

auquel est associé

$$\varphi_{\mathfrak{Z}^0(\mathcal{E})}: \mathfrak{Z}^0(\mathcal{E}) \rightarrow \mathfrak{Z}'^0(\mathcal{E}'),$$

tel que l'image par $\varphi_{\mathfrak{Z}^0(\mathcal{E})}$ de tout élément plan $c_{\gamma'}^{\mathfrak{Z}^0(\mathcal{E})}(\omega)$ soit l'élément $c_{\gamma'}^{\mathfrak{Z}'^0(\mathcal{E}')}(\omega')$ [$\gamma \in \mathfrak{Z}^0(\mathcal{E})$, $\gamma' = \varphi_{\mathfrak{Z}^0(\mathcal{E})}(\gamma)$, ω et $\omega' =$ deux connexions sur $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ et $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, G')$ resp.]. En d'autres termes, $c^{\mathfrak{Z}^0(\mathcal{E})}(\omega)$ est projetable par $\varphi_{\mathfrak{Z}^0(\mathcal{E})}$ et son image est $c^{\mathfrak{Z}'^0(\mathcal{E}')}(\omega')$. Dans ces conditions, $c^{\mathfrak{X}(\mathcal{E})}(\omega)$ est également projetable par $\varphi_{\mathfrak{X}(\mathcal{E})}$ et son image est $c^{\mathfrak{X}'(\mathcal{E}')}(\omega')$. En effet, quel que soit le chemin l de \mathcal{X} , à l'homomorphisme

$$\mu_{\mathfrak{X}'(\mathcal{E}')}^{l,\omega'} \circ \varphi_{\mathfrak{X}(\mathcal{E})}: \mathfrak{X}_{x_0}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathfrak{X}'_{x_1}(\mathcal{E}')$$

est manifestement associé

$$\mu_{\mathfrak{Z}'^0(\mathcal{E}')}^{l,\omega'} \circ \varphi_{\mathfrak{Z}^0(\mathcal{E})}: \mathfrak{Z}_{x_0}^0(\mathcal{E}) \rightarrow \mathfrak{Z}'_{x_1}{}^0(\mathcal{E}').$$

Par hypothèse, ce dernier homomorphisme coïncide avec $\varphi_{\mathfrak{Z}^0(\mathcal{E})} \circ \mu_{\mathfrak{Z}^0(\mathcal{E})}^{l,\omega}$ qui est associé à $\varphi_{\mathfrak{X}(\mathcal{E})} \circ \mu_{\mathfrak{X}(\mathcal{E})}^{l,\omega}$. On a donc

$$\mu_{\mathfrak{X}'(\mathcal{E}')}^{l,\omega'} \circ \varphi_{\mathfrak{X}(\mathcal{E})} = \varphi_{\mathfrak{X}(\mathcal{E})} \circ \mu_{\mathfrak{X}(\mathcal{E})}^{l,\omega}.$$

En faisant varier x_1 , on voit que si γ_t se déplace parallèlement à lui-même dans $\mathfrak{X}(\mathcal{E})$ relativement à ω , $\varphi_{\mathfrak{X}(\mathcal{E})}(\gamma_t)$ se déplace parallèlement à lui-même relativement à ω' , résultat équivalent à celui que nous avons annoncé.

Pour terminer, on vérifie sans difficulté que, pour un lacet l_x , et dans le cas

de l'espace structural gauche et de l'espace de Lie de degré 0 de $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$, on a

$$\mu_{\mathfrak{K}(\mathcal{E})}^{L_x, \omega} = \text{Int}(\tau_\omega(L_x)) \quad \text{et} \quad \mu_{\mathfrak{L}^0(\mathcal{E})}^{L_x, \omega} = \text{Adj}(\tau_\omega(L_x)).$$

CHAPITRE V.

CHAMPS NORMAUX. CHAMPS NORMAUX INTÉGRABLES.

INTRODUCTION. — On considère, dans ce chapitre, un espace fibré principal différentiable $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ de base \mathcal{X} (de dimension d) et de groupe structural G (de dimension n), et l'on étudie les sous-espaces fibrés principaux de $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$, en liaison avec les sous-espaces de l'espace de Lie $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ de $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$.

Un sous-espace \mathcal{L}'^0 de $\mathcal{L}^0(\mathcal{E})$ déterminant un champ d'éléments tangents aux fibres de \mathcal{E} , tandis qu'une connexion ω détermine un champ transversal à ces mêmes fibres, la réunion des deux engendre ce que nous appelons un *champ normal*. On étudie les conditions d'intégrabilité d'un tel champ et l'on trouve (§ 4) qu'il faut et il suffit que le sous-faisceau L' de $L(E)$ engendré par \mathcal{L}'^0 soit stable pour la différentiation covariante Δ associée à ω et que L'^2 contienne la courbure $\Omega(\omega)$, pour que le champ normal correspondant soit intégrable. La démonstration de ce théorème se fait en définissant localement \mathcal{L}'^0 par des sections indépendantes du sous-espace de $\mathcal{L}^0(\mathcal{E})$ orthogonal à \mathcal{L}'^0 . La condition d'intégrabilité de Frobenius conduit à une égalité dont les différents termes se séparent aisément en fonction de leurs degrés par rapport aux différentielles des coordonnées de la fibre et de la base : les uns conduisent à la condition de stabilité, les autres, à la condition portant sur la courbure.

On vérifie ensuite que toute variété intégrale d'un champ normal intégrable est un sous-espace fibré principal à groupe structural de $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$. Cela établit la correspondance entre sous-espaces de $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ et sous-espaces fibrés principaux de $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$.

Une autre application (§ 5) de la condition d'intégrabilité conduit au théorème d'Ambrose : on obtient le plus petit sous-espace de $\mathcal{L}^0(\mathcal{E})$ invariant par transport parallèle et contenant $\Omega(\omega)$ en transportant de toutes les façons possibles les éléments de courbure, c'est-à-dire les valeurs que prend $\Omega(\omega)$ pour les 2-vecteurs tangents à \mathcal{X} . A ce plus petit sous-espace correspondent évidemment les nappes d'holonomie.

1. CHAMP NORMAL. — Soit \mathcal{L}'^0 un sous-espace de $\mathcal{L}^0(\mathcal{E})$ (sous-espace au sens « sous-espace d'un espace fibré différentiable à fibre-algèbre de Lie », bien entendu). On associe à \mathcal{L}'^0 le champ Λ de p -éléments plans tangents aux fibres de \mathcal{E} et définis au point $y \in \mathcal{E}_x$ par

$$(V.1.1) \quad \Lambda_y = \beta^{-1}(j_{\mathcal{E}}(y) \mathcal{L}'^0).$$

Rappelons que cette expression, conformément aux notations du paragraphe II.4 peut être donnée sous la forme

$$(V.1.2) \quad \Lambda_y = (k(\mathcal{L}'_x))_y.$$

Il résulte de la proposition II.4.3 que Λ est invariant par les translations à droite de G sur \mathcal{E} . Donnons-nous d'autre part une connexion ω , sur $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$, dont nous noterons le champ de connexion $c(\omega)$, comme d'habitude.

DÉFINITION V.1.1 — *On appelle champ normal $\Gamma(\mathcal{L}'^0, \omega)$ associé à un sous-espace \mathcal{L}'^0 de $\mathcal{L}^0(\mathcal{E})$ et à une connexion ω , le champ de $(p+d)$ -éléments plans tangents à \mathcal{E} engendré par le champ Λ défini ci-dessus et par $c(\omega)$.*

Puisque Λ_y et $c_y(\omega)$ n'ont en commun que le vecteur nul et qu'ils sont eux-mêmes réguliers, il est clair que $\Gamma(\mathcal{L}'^0, \omega)$ est régulier. Il est non moins évident que c'est un champ globalement invariant par les translations à droite de G sur \mathcal{E} .

Exemple. — Soit $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, G')$ un sous-espace fibré principal à groupe structural de $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G')$ dont l'espace structural gauche $\mathcal{N}'(\mathcal{E}')$ est considéré comme un sous-espace de $\mathcal{N}(\mathcal{E})$ (voir § III.9) et dont l'espace de Lie $\mathcal{L}'(\mathcal{E}')$ est également un sous-espace de $\mathcal{L}(\mathcal{E})$. Soit ω' une connexion de $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ dont l'extension à $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ est notée ω . Comme $\mathcal{E}'_x = \mathcal{N}'_x(\mathcal{E}'_x) \cdot y$ pour tout point $y \in \mathcal{E}'_x (x \in \mathcal{X})$, on voit que l'élément plan

$$\beta^{-1}(j_{\mathcal{E}^0}(y) \mathcal{L}'_x(\mathcal{E}')) = (\mathcal{N}'_x(\mathcal{E}'))_y$$

n'est autre que l'espace des vecteurs verticaux (c'est-à-dire tangents aux fibres) tangents à \mathcal{E}' au point y . Comme, d'autre part, $c_y(\omega)$ et $c_y(\omega')$ coïncident sur \mathcal{E}' et que $c_y(\omega)$ et $(\mathcal{N}'_x(\omega'))_y$ engendrent l'espace vectoriel tangent à \mathcal{E}' au point y , on peut énoncer :

PROPOSITION V.1.1 — *Tout sous-espace fibré principal différentiable à groupe structural $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, G')$ de $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ est une variété intégrale du champ normal associé à l'espace de Lie de $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, G')$ d'une part et à l'extension d'une connexion quelconque de $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, G')$, d'autre part.*

2. STABILITÉ POUR LA DIFFÉRENTIATION COVARIANTE. — A \mathcal{L}'^0 est associé un espace fibré \mathcal{L}' engendré à partir de \mathcal{L}'^0 par multiplication extérieure par les formes différentielles ordinaires de la base et identifiable à l'espace fibré des formes différentielles sur \mathcal{X} à valeurs dans \mathcal{L}'^0 . C'est un sous-espace de $\mathcal{L}(\mathcal{E})$. Nous noterons L' le faisceau des sections différentielles de \mathcal{L}' .

PROPOSITION V.2.1 — *Pour que L' soit stable pour la $L(E)$ -différentiation covariante Δ associée à une connexion ω de $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ il faut et il suffit que*

$$\Delta L^0 \subset L^1.$$

Cette proposition est une conséquence immédiate de la formule de différentiation covariante du produit extérieur d'une forme différentielle tensorielle par une forme différentielle ordinaire. Elle est d'ailleurs valable pour tout sous-faisceau L' de $L(E)$ engendré à partir d'un sous-faisceau L'^0 de $L^0(E)$ par multiplication extérieure par les formes de la base.

PROPOSITION V.2.2 — *Pour que le faisceau L' soit stable pour la $L(E)$ -différentiation covariante Δ associée à une connexion ω , il faut et il suffit que L'^0 soit invariant par le transport parallèle également associé à ω .*

En effet, soit (ρ_i) ($i = 1, \dots, n$) une section locale différentiable de l'espace des repères de $\mathcal{L}^0(\mathcal{E})$ sur un ouvert U différenciablement homéomorphe à \mathbb{R}^d , telle que l'ensemble des p premiers vecteurs (ρ_α) ($\alpha = 1, \dots, p$) constitue une base de \mathcal{L}'^0 en tout point de U . Soient

$$\Delta\rho_i = \sum_{j=1}^n \omega^j_i \rho_j,$$

les formules expriment les différentielles covariantes des vecteurs constituant (ρ_i) en fonction des repères (ρ_i) . Puisque, par hypothèse, L' est stable, on a

$$(V.2.1) \quad \omega^a_\alpha = 0 \quad (\alpha = 1, \dots, p \text{ et } a = p+1, \dots, n).$$

Choisissons alors comme système de coordonnées locales de $\mathcal{L}^0(\mathcal{E})$: sur la base \mathcal{X} , un système de coordonnées quelconque de U , sur les fibres, les composantes X^i des vecteurs $X \in \mathcal{L}^0(\mathcal{E})$ par rapport aux repères (ρ_i) . Nous avons vu au paragraphe IV.6 que le transport parallèle associé à ω , ou plutôt le champ définissant ce dernier, était défini dans ces conditions par le système de Pfaff :

$$(V.2.2) \quad dX^i + \sum_{j=1}^n \omega^i_j X^j = 0 \quad (i = 1, \dots, n),$$

qui traduit l'équation $\Delta X = 0$. D'autre part, dans le système de coordonnées locales précédent, la sous-variété \mathcal{L}'^0 de $\mathcal{L}^0(\mathcal{E})$ est définie par les équations

$$X^a = 0 \quad (a = p+1, \dots, n),$$

et ses vecteurs tangents, par

$$X^a = 0 \quad \text{et} \quad dX^a = 0 \quad (a = p+1, \dots, n).$$

Or, si $X^a = 0$, le système (V.2.2) devient

$$dX^\beta + \sum_{\alpha=1}^p \omega^\beta_\alpha X^\alpha = 0 \quad (\beta = 1, \dots, p),$$

$$dX^\alpha + \sum_{\alpha=1}^p \omega^\alpha_\alpha X^\alpha = 0 \quad (\alpha = p+1, \dots, n).$$

Si l'on tient compte maintenant de l'égalité (V.2.1), les formules du deuxième type deviennent

$$dX^a = 0 \quad (a = p + 1, \dots, n),$$

ce qui montre bien que l'élément plan définissant le transport parallèle en un point \mathcal{L}'^0 est tangent en \mathcal{L}^0 .

Réciproquement, la conservation de \mathcal{L}'^0 par transport parallèle entraîne $\omega_x^a = 0$ et, par suite, $\Delta L'^0 \subset L'$.

Nous considérerons maintenant le sous-espace \mathcal{L}''^0 de $\check{\mathcal{L}}^0(\mathcal{E})$ orthogonal à \mathcal{L}'^0 , c'est-à-dire le sous-espace de $\check{\mathcal{L}}^0(\mathcal{E})$ constitué par les tenseurs X appartenant à $\check{\mathcal{L}}^0(\mathcal{E})$ tels que le produit scalaire $\langle X, Y \rangle$ soit nul, quel que soit le tenseur Y appartenant à la fibre de \mathcal{L}'^0 de projection $p(X)$.

PROPOSITION V.2.3 — *Si le faisceau L' est stable pour la $L(E)$ -différentiation covariante associée à ω , le faisceau L'' déduit de \mathcal{L}''^0 , est également stable pour la $\check{L}(E)$ -différentiation covariante $\check{\Delta}$ associée à ω , et réciproquement.*

En effet, on a

$$d\langle X, Y \rangle = \langle \Delta X, Y \rangle + \langle X, \check{\Delta} Y \rangle \quad [X \in L^0(E) \text{ et } Y \in \check{L}^0(E)].$$

Or, si $X \in L'^0$ et $Y \in L''^0$, on a $\langle X, Y \rangle = 0$ et si $\Delta X \in L'$, on a $\langle \Delta X, Y \rangle = 0$, d'où $\langle X, \check{\Delta} Y \rangle = 0$ quel que soit $X \in L'$, égalité qui, à son tour, implique $\check{\Delta} Y \in L''$, comme on le voit facilement.

3. L'OPÉRATEUR D. — Étant donné un espace vectoriel \mathfrak{V}_0 sur lequel G opère par l'intermédiaire d'une représentation $R : G \rightarrow \Gamma(\mathfrak{V}_0)$ (notations du paragraphe II.4), il est commode, pour la suite, de définir un opérateur D associé à ω par l'égalité

$$D\theta = d\theta + \underline{R}(\omega)\theta,$$

où θ est une forme différentielle sur \mathcal{E} , à valeurs dans \mathfrak{V}_0 et où ω est, naturellement, la forme de connexion représentant la connexion donnée. Bien entendu, si θ représente une forme différentielle tensorielle de type R [section de $\mathfrak{V}(\mathcal{E})$], l'opérateur D coïncide avec la $W(E)$ -différentiation covariante associée à ω . En outre, en reprenant les notations du paragraphe II.4, on vérifie qu'on a la formule suivante, analogue à la formule (III.4.6) :

$$(V.3.1) \quad D^q \Lambda(\theta, \theta') = \Lambda(D\theta, \theta') + (-1)^p \Lambda(\theta, D'\theta'),$$

où $\theta, \theta', \Lambda(\theta, \theta')$ sont des formes différentielles sur \mathcal{E} à valeurs dans $\mathfrak{V}_0, \mathfrak{V}'_0$ et \mathfrak{V}''_0 respectivement et de degrés $p, q, p+q$, tandis que D, D' et D'' sont attachés à une même connexion ω de $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$.

4. INTÉGRABILITÉ DES CHAMPS NORMAUX :

THÉORÈME V.4.1. — *Pour que le champ normal $\Gamma(\mathcal{L}'^0, \omega)$ soit intégrable, il faut et il suffit que le faisceau L' , défini par \mathcal{L}'^0 , soit stable pour la $L(E)$ -différentiation covariante associée à ω et que la courbure $\Omega(\omega)$ soit une section de L'^2 .*

DÉMONSTRATION. — Définissons \mathcal{L}'^0 sur un ouvert U homéomorphe à \mathbb{R}^d , en choisissant une section $(\rho^i) (i=1, \dots, n)$ de l'espace des repères de $\mathcal{L}'^0(\mathcal{E})$, dual de $\mathcal{L}^0(\mathcal{E})$, telle que, en tout point $x \in U$, les $n-p$ derniers vecteurs ρ^a ($a=p+1, \dots, n$) du repère (ρ^i) de projection x , soient orthogonaux à $\mathcal{L}'_x{}^0$. Les vecteurs appartenant à $\mathcal{L}'_U{}^0$ peuvent alors être caractérisés par les $n-p$ relations suivantes :

$$\langle X, \rho^a \rangle = 0 \quad [X \in \mathcal{L}'^0(\mathcal{E}) \text{ et } a=p+1, \dots, n].$$

Le champ normal $\Gamma(\mathcal{L}'^0, \omega)$ est donc défini par les égalités suivantes où φ_ω désigne le projecteur associé à la connexion ω et β , la forme définie au paragraphe II.4 :

$$\langle \beta \circ \varphi_\omega, \rho^a \rangle = 0 \quad (a=p+1, \dots, n).$$

Puisque, par définition, $\varphi_\omega = \beta^{-1} \circ \omega$, ce champ normal est simplement défini par le système de Pfaff :

$$(V.4.1) \quad \langle \omega, \rho^a \rangle = 0 \quad (a=p+1, \dots, n),$$

où ω et ρ^a désignent les formes et fonctions sur \mathcal{E}_U , à valeurs dans $\underline{\mathbb{G}}$, et dans $\underline{\mathbb{G}}$ qui représentent la connexion ω et les tenseurs ρ^a .

Posons

$$\Pi = \langle \omega, \rho^{p+1} \rangle \wedge \dots \wedge \langle \omega, \rho^n \rangle.$$

D'après le théorème de Frobenius, pour que le système de Pfaff (V.4.1) soit complètement intégrable, il faut et il suffit qu'on ait

$$(V.4.2) \quad d\langle \omega, \rho^a \rangle \wedge \Pi = 0 \quad (a=p+1, \dots, n).$$

La formule (V.3.1) permet de calculer le premier facteur de chacun de ces $n-p$ produits extérieurs :

$$d\langle \omega, \rho^a \rangle = \langle D\omega, \rho^a \rangle - \langle \omega, \dot{D}\rho^a \rangle.$$

Mais, puisque ρ^a représente un tenseur, l'opérateur \dot{D} coïncide avec la $L(E)$ -différentiation covariante $\dot{\Delta}$ associée à ω , pour laquelle on a

$$(V.4.3) \quad \dot{\Delta}\rho^a = \sum_{i=1}^n \theta^a_i \rho^i \quad (a=p+1, \dots, n)$$

où les θ^a_i sont des formes différentielles ordinaires sur U . D'autre part, la pre-

mière des formules (III. 5.4), dérivée de la formule définissant la courbure au paragraphe III. 2, montre qu'on peut écrire

$$D\omega = d\omega + [\omega, \omega] = \Omega(\omega) + \frac{1}{2}[\omega, \omega].$$

Au total, on a donc

$$d\langle \omega, \rho^a \rangle = \langle \Omega(\omega), \rho^a \rangle + \frac{1}{2}\langle [\omega, \omega], \rho^a \rangle + \sum_{i=1}^n \theta^a_i \langle \omega, \rho^i \rangle,$$

Il reste à exprimer que \mathcal{L}'^0 est une sous-algèbre de $\mathcal{L}^0(\mathcal{E})$. C'est sur le deuxième terme du second membre de la dernière égalité que cette hypothèse va se traduire. En effet, si θ_1 et θ_2 sont deux formes différentielles sur \mathcal{E}_0 , à valeurs dans \underline{G} et de degrés p et q respectivement, on a l'égalité

$$(V.4.4) \quad \langle [\theta_1, \theta_2], \rho^a \rangle = \sum_{b=p+1, i=1}^n \mu^{abi} (\langle \theta_1, \rho^b \rangle \wedge \langle \theta_2, \rho^i \rangle - (-1)^{pq} \langle \theta_2, \rho^b \rangle \wedge \langle \theta_1, \rho^i \rangle),$$

pour chaque valeur de $a = p + 1, \dots, n$ ⁽¹⁷⁾,

Appliquons (V. 4. 4) à $\langle [\omega, \omega], \rho^a \rangle$. On obtient

$$\frac{1}{2}\langle [\omega, \omega], \rho^a \rangle = \sum_{b=p+1, i=1}^n \mu^{abi} \langle \omega, \rho^b \rangle \wedge \langle \omega, \rho^i \rangle.$$

De telle sorte qu'en définitive, l'égalité (V. 4. 2) se réduit à

$$(V.4.5) \quad \langle \Omega(\omega), \rho^a \rangle \wedge \Pi + \sum_{\alpha=1}^p \theta^a_\alpha \wedge \langle \omega, \rho^\alpha \rangle \wedge \Pi = 0.$$

pour $a = p + 1, \dots, n$,

(17) Cette formule dérive d'une formule classique que nous rappelons rapidement. Soit \underline{G}' une sous-algèbre de \underline{G} de dimension p et $G'' \subset \underline{G}^*$, le sous-espace orthogonal à \underline{G}' dans le dual \underline{G}^* de \underline{G} . Soit (Z^i) une base de \underline{G}^* dont les $n - p$ derniers vecteurs Z^α forment une base de G'' .

Les formes ε^a , définies par $\varepsilon^a(X, Y) = \langle [X, Y], Z^a \rangle$ sont bilinéaires et antisymétriques en $X, Y \in \underline{G}$. On a donc

$$\varepsilon^a = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, j, i} \mu^{a_{ij}} Z^i \wedge Z^j,$$

a variant de $p + 1$ à n , i et j , de 1 à n .

Mais ε^a s'annule sur $\underline{G}' \wedge \underline{G}'$ puisque $X \in \underline{G}'$ et $Y \in \underline{G}'$ entraînent $[X, Y] \in \underline{G}'$. On a donc $\mu^a_{\alpha\beta} = 0$ pour $a = p + 1, \dots, n$ et $\alpha, \beta = 1, \dots, p$. Par suite

$$\varepsilon^a = \sum_{b=p+1, i=1}^n \mu^{abi} Z^b \wedge Z^i \quad (a = p + 1, \dots, n).$$

C'est cette formule qui, antisymétrisée, transposée sur \mathcal{E} , et tout, et tout, donne la formule (V. 4. 4).

Plaçons-nous maintenant en un point $y \in \mathcal{E}_x$ et soit (β^r) ($r = 1, \dots, d$) un corepère de \mathcal{X} au point x . L'ensemble des formes β^r (ou, en toute rigueur, l'ensemble des formes induites par $p_{\mathcal{E}}$ à partir des formes β^r) et des formes $\eta^i = \langle \omega, \rho^i \rangle$ ($i = 1, \dots, n$) constitue un corepère de \mathcal{E} au point y puisque les unes s'annulent pour les vecteurs verticaux, les autres pour les vecteurs situés dans l'élément $c_y(\omega)$ du champ de connexion et que, dans chaque paquet, on a, par hypothèse, affaire à des formes linéairement indépendantes. On utilisera maintenant l'expression classique « formes de type (p, q) » étant entendu que les formes β^r sont de type $(1, 0)$. Dans ces conditions, (V.4.5) ne contient pas de termes de type $(0, n - p + 2)$, et les seuls termes de type $(1, n - p + 1)$ qui y figurent sont

$$\theta_x^a \wedge \langle \omega, \rho^a \rangle \wedge \Pi.$$

On a donc nécessairement $\theta_x^a = 0$ quels que soient $a = p + 1, \dots, n$ et $\alpha = 1, \dots, p$. Cette condition entraîne la stabilité de L'' pour $\dot{\Delta}$ et, par suite, la stabilité de L' pour Δ .

Il ne reste plus qu'à exprimer que

$$\langle \Omega(\omega), \rho^a \rangle \wedge \Pi = 0 \quad (a = p + 1, \dots, n).$$

Mais $\Omega(\omega)$ s'exprime en fonction des β^r exclusivement tandis que Π ne dépend que des η^i . L'égalité précédente implique donc

$$\langle \Omega(\omega), \rho^a \rangle = 0,$$

condition qui exprime que $\Omega(\omega)$ est une section de L'^2 . Comme il est bien clair, d'autre part, que ces deux conditions sont suffisantes, le théorème annoncé est complètement démontré.

5, HOLONOMIE. — Il est clair que l'intersection de deux sous-espaces fibrés de $\mathcal{L}^0(\mathcal{E})$ invariants par transport parallèle est un sous-espace fibré invariant par transport parallèle. Il est non moins clair que si deux sous-faisceaux de $L(\mathcal{E})$ contiennent l'un et l'autre $\Omega(\omega)$, leur intersection contient également cette courbure. Comme le transport parallèle nous permet de toujours nous ramener à une fibre unique de $\mathcal{L}^0(\mathcal{E})$, c'est-à-dire à l'intersection de sous-espaces vectoriels de dimension finie, on peut considérer l'intersection de tous les sous-espaces $\mathcal{L}'^0 \subset \mathcal{L}^0(\mathcal{E})$ invariants par transport parallèle relativement à une même connexion et contenant la courbure de cette connexion. On obtient alors le résultat suivant :

PROPOSITION V.5.1. — *L'intersection de tous les champs normaux intégrables relativement à une même connexion est un champ normal intégrable appelé champ d'holonomie de la connexion considérée.*

Par ailleurs, nous avons déjà remarqué que $\mathcal{X}(\omega)$ était l'espace structural

gauche ⁽¹⁸⁾ de toute nappe d'holonomie V de ω . Posons $\mathcal{L}^0(\omega) = k^{-1}(\underline{\mathcal{X}}(\omega))$ où $\underline{\mathcal{X}}(\omega)$ désigne, conformément à une notation habituelle, l'espace fibré des algèbres de Lie des fibres de $\mathcal{X}(\omega)$. L'espace $\mathcal{L}(\omega)$ engendré par $\mathcal{L}^0(\omega)$ est l'espace de Lie de V . La proposition V.4.1 montre alors que toute nappe d'holonomie — définie comme lieu des points atteints par les chemins ω -horizontaux d'origine $y \in \mathcal{E}$ — est une variété intégrale du champ normal $\Gamma(\mathcal{L}^0(\omega), \omega)$ associé à $\mathcal{L}^0(\omega)$ et à ω .

Il est, d'autre part, bien évident que, par construction, une nappe d'holonomie est la plus petite variété possible à laquelle soit associé un champ normal intégrable. $\Gamma(\mathcal{L}^0(\omega), \omega)$ est donc le plus petit champ normal relatif à la connexion ω qu'il soit possible d'envisager, c'est-à-dire l'intersection de tous les champs normaux intégrables associés à ω . D'où :

PROPOSITION V.5.3. — *Le champ d'holonomie, défini comme l'intersection de tous les champs normaux intégrables associés à une même connexion ω coïncide avec $\Gamma(\mathcal{L}^0(\omega), \omega)$.*

Enfin, d'après le théorème V.4.1, le plus petit champ normal intégrable possible correspond au plus petit sous-espace \mathcal{L}'^0 invariant par transport parallèle associé à ω et contenant la courbure $\Omega(\omega)$. Or, le plus petit sous-espace \mathcal{L}'^0 engendré par transport parallèle et contenant $\Omega(\omega)$ contient nécessairement les vecteurs de $\mathcal{L}^0(\mathcal{E})$ obtenus en transportant par parallélisme les éléments de courbure, c'est-à-dire les valeurs que prend la forme différentielle $\Omega(\omega)$ [de degré 2 sur \mathcal{X} , à valeurs dans $\mathcal{L}^0(\mathcal{E})$] pour $u \in \mathfrak{T}^2$. Mais le sous-espace d'espace fibré différentiable à fibre-algèbre de Lie engendré dans $\mathcal{L}^0(\mathcal{E})$ à partir des vecteurs obtenus de cette façon est lui-même invariant par transport parallèle car, si X_i et Y_i se déplacent parallèlement à eux-mêmes, $[X_i, Y_i]$ se déplace aussi par parallélisme. Comme ce sous-espace contient évidemment la courbure, on peut énoncer :

PROPOSITION V.5.4. — *Le champ d'holonomie correspond, pour une connexion donnée, au sous-espace d'algèbres de Lie de $\mathcal{L}^0(\mathcal{E})$ engendré par les éléments de courbure transportés par parallélisme de toutes les façons possibles en tous les points de \mathcal{X} ⁽¹⁹⁾.*

6. VARIÉTÉS INTÉGRALES D'UN CHAMP NORMAL INTÉGRABLE. — De l'invariance d'un champ normal $\Gamma(\mathcal{L}'^0, \omega)$ par les translations à droite de G sur \mathcal{E} , on déduit immédiatement :

PROPOSITION V.6.1. — *Étant donnée une variété intégrale V d'un champ*

⁽¹⁸⁾ Rappelons que $\mathcal{X}(\omega)$ est l'espace d'holonomie (voir § IV.1).

⁽¹⁹⁾ Voir Ambrose et Singer [1] ou Lichnerowicz [1], p. 122-131.

normal intégrable $\Gamma(\mathcal{L}'^0, \omega)$, la variété V_s obtenue en transformant V par la translation à droite $s \in G$ est encore une variété intégrale. Réciproquement on obtient de cette façon toutes les variétés intégrales de $\Gamma(\mathcal{L}'^0, \omega)$ à partir de l'une d'entre elles.

On a également :

PROPOSITION V.6.2. — *Toute variété intégrale V d'un champ normal intégrable est engendrée par les chemins horizontaux issus des points de l'une quelconque de ses fibres $V_x (x \in \mathcal{X})$.*

Il est en effet évident que, au-dessus d'un chemin différentiable joignant x à x' , les chemins horizontaux rencontrant V_x rencontrent $V_{x'}$, et réciproquement.

Remarquons, d'autre part, qu'en général, si $\Gamma(\mathcal{L}'^0, \omega)$ n'est pas intégrable ou, plus précisément, si \mathcal{L}'^0 n'est pas invariant par transport parallèle, il n'existe pas de sous-espace fibré γ à fibre-groupe de Lie de $\mathcal{L}^0(\mathcal{E})$ tel que $k(\mathcal{L}'^0_x) = \underline{\gamma}_x$ en tout point x de \mathcal{X} . En effet, s'il existe bien un sous-groupe connexe de chaque fibre $\mathfrak{N}_x(\mathcal{E})$ dont l'algèbre de Lie s'identifie à la sous-algèbre \mathcal{L}'^0_x correspondante, il n'en résulte pas pour autant que les sous-groupes correspondant à deux fibres distinctes soient isomorphes. Par contre, si $\Gamma(\mathcal{L}'^0, \omega)$ est intégrable, \mathcal{L}'^0 est invariant par transport parallèle, et, dans ces conditions, étant donné un chemin différentiable l de \mathcal{X} , les isomorphismes

$$\mu_{\mathfrak{N}(\mathcal{E})}^{l, \omega} : \mathfrak{N}_x(\mathcal{E}) \rightarrow \mathfrak{N}_{x'}(\mathcal{E})$$

et

$$\mu_{\mathcal{L}^0(\mathcal{E})}^{l, \omega} : \mathcal{L}^0_x(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{L}^0_{x'}(\mathcal{E})$$

sont associés (voir § IV.6). Comme, par hypothèse, on a $\mu_{\mathcal{L}^0(\mathcal{E})}^{l, \omega}(\mathcal{L}'^0_x) = \mathcal{L}'^0_{x'}$ on a aussi, en notant γ_x et $\gamma_{x'}$ les sous-groupes connexes de $\mathfrak{N}_x(\mathcal{E})$ et de $\mathfrak{N}_{x'}(\mathcal{E})$ dont les algèbres de Lie s'identifient à \mathcal{L}'^0_x et à $\mathcal{L}'^0_{x'}$:

$$\mu_{\mathfrak{N}(\mathcal{E})}^{l, \omega}(\gamma_x) = \gamma_{x'}.$$

Il en résulte évidemment que la réunion des $\gamma_x (x \in \mathcal{X})$ est un sous-espace fibré différentiable à fibre-groupe de $\mathfrak{N}(\mathcal{E})$. On note bien entendu γ ce sous-espace.

PROPOSITION V.6.3. — *Si le champ normal $\Gamma(\mathcal{L}'^0, \omega)$ est intégrable, il existe un sous-espace de groupes γ de $\mathfrak{N}(\mathcal{E})$ dont la fibre $\gamma_x (x \in \mathcal{X})$ est le sous-groupe connexe de $\mathfrak{N}_x(\mathcal{E})$ admettant $k(\mathcal{L}'^0_x)$ pour algèbre de Lie et tel que toute variété intégrale de $\Gamma(\mathcal{L}'^0, \omega)$ s'obtienne en appliquant à une nappe d'holonomie toutes les transformations de γ [opérant à gauche sur \mathcal{E} comme sous-groupe de $\mathfrak{N}(\mathcal{E})$].*

Pour démontrer ce résultat, nous remarquerons tout d'abord que, puisque la composante verticale de $\Gamma_y(\mathcal{L}'^0, \omega) (y \in \mathcal{E}_x)$ est $[\underline{\gamma}_x]_y$, la composante connexe

de la variété intégrale V passant par γ est $\gamma_x \cdot \gamma$. D'autre part, comme l'algèbre de Lie du groupe d'holonomie en x est nécessairement incluse dans l'algèbre de Lie de γ_x puisque le champ d'holonomie est le plus petit champ intégrable et qu'en outre, la nappe d'holonomie V' passant par γ fait évidemment partie de V , $\gamma \cdot V'$ est localement une variété intégrale de $\Gamma(\mathcal{L}'^0, \omega)$. Comme γ et V' sont connexes, $\gamma \cdot V'$ est bien une variété intégrale de notre champ normal. Enfin, comme toutes les variétés intégrales de $\Gamma(\mathcal{L}'^0, \omega)$ se déduisent de l'une d'elles par translation à droite et que les opérations de G et $\mathcal{N}(\mathcal{E})$ commutent, toute variété intégrale peut être construite à partir d'une nappe d'holonomie par les opérations précédentes. Le théorème est donc démontré.

Il en résulte :

PROPOSITION V.6.4. — *Toute variété intégrale V de $\Gamma(\mathcal{L}'^0, \omega)$ est engendrée par les chemins ω -horizontaux qui rencontrent une composante connexe de $V_x (x \in \mathcal{X})$.*

Et, puisque \mathcal{E} est une variété différentiable, donc connexe :

COROLLAIRE. — *L'espace fibré \mathcal{E} est engendré par les chemins ω -horizontaux qui rencontrent une composante connexe de $\mathcal{E}_x (x \in \mathcal{X})$.*

On peut alors démontrer :

PROPOSITION V.6.5. — *Toute variété intégrale V d'un champ normal intégrable est un sous-espace fibré principal différentiable à groupe structural de $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$.*

En effet, soit γ' l'espace fibré de groupes engendré par γ et $\mathcal{X}(\omega)$. Comme γ_x contient la composante connexe du groupe d'holonomie en x , il est clair que γ'_x est simplement transitif sur V_x . Il en résulte que $G'_x = j_{\gamma x}(\gamma) \gamma'_x$ est un sous-groupe de G indépendant de $\gamma \in V_x$ et que G'_x est simplement transitif sur V_x . Soit alors $x' \in \mathcal{X}$ un point relié à x par un chemin différentiable l . Le parallélisme le long de l détermine un isomorphisme appliquant G'_x sur $G'_{x'}$. Comme cet isomorphisme n'est autre que l'identité dans G , cela achève la démonstration.

En rapprochant ce dernier résultat de la proposition V.4.4. et du théorème V.4.1, on obtient :

THÉORÈME V.6.4. — *Pour qu'il existe un sous-espace fibré principal à groupe structural $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, G')$ de $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ admettant $\mathcal{L}'^0 \subset \mathcal{L}^0(\mathcal{E})$ pour espace de Lie de degré \circ , il faut et il suffit qu'il existe une connexion ω sur $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ dont la courbure $\Omega(\omega)$ soit une section de L'^2 et telle que $\Delta L' \subset L'$, Δ étant la $L(E)$ -différentiation covariante associée à ω et L' le sous-faisceau de $L(E)$ engendré par \mathcal{L}'^0 .*

7, SOUS-ESPACES STABLES POUR LA DIFFÉRENTIATION COVARIANTE :

PROPOSITION V.7.1. — *Si \mathcal{L}'^0 est un sous-espace d'algèbres de Lie de $\mathcal{L}^0(\mathcal{E})$*

engendrant un faisceau L' stable pour la $L(E)$ -différentiation covariante associée à une connexion ω de $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$, on a

$$[\mathcal{L}'^0, \mathcal{L}^0(\omega)] \subset \mathcal{L}'^0.$$

En effet, un tel sous-espace est invariant par transport parallèle et, si X est un de ses éléments, la formule (III.5.2) montre que $[X, \Omega(\omega)]$ en fait également partie. La proposition résulte donc du théorème d'Ambrose (V.5.4).

Inversement, si $G' \subset G$ est le groupe structural d'une nappe d'holonomie de ω et si $\underline{G}'' \subset \underline{G}$ est une sous-algèbre de Lie telle que $[\underline{G}'', \underline{G}'] \subset \underline{G}''$, les automorphismes intérieurs de G' transforment G'' en lui-même et les automorphismes adjoints transforment \underline{G}'' en elle-même. On peut donc modeler $\underline{G}'' \times \mathcal{X}$ sur la nappe d'holonomie et construire ainsi un sous-espace \mathcal{L}'^0 de $\mathcal{L}^0(\mathcal{E})$ engendrant un sous-faisceau L' manifestement stable pour la différentiation covariante associée à ω . Comme, en général, on peut choisir \underline{G}'' de telle sorte que \underline{G}' n'y soit pas incluse, on voit qu'il existe des sous-espaces de $\mathcal{L}^0(\mathcal{E})$ invariants par transport parallèle et ne contenant pas la courbure.

CHAPITRE VI.

HOMOMORPHISMES.

INTRODUCTION. — Soient $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ et $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, G')$ deux espaces fibrés principaux différentiables de base commune \mathcal{X} et de groupes structuraux G et G' respectivement. Nous avons vu qu'à tout couple d'homomorphismes $(\psi : G \rightarrow G', g : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}')$ étaient associés des homomorphismes

$$\begin{aligned} \psi_{\mathcal{N}(\mathcal{E})}^{\mathcal{E}} &: \mathcal{N}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{N}'(\mathcal{E}'), \\ \psi_{\mathcal{L}(\mathcal{E})}^{\mathcal{E}} &: \mathcal{L}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{L}'(\mathcal{E}'), \\ \psi_{\mathcal{C}(\mathcal{E})}^{\mathcal{E}} &: \mathcal{C}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{C}'(\mathcal{E}'). \end{aligned}$$

Le but de ce chapitre est de chercher à construire, à partir d'homomorphismes $\varphi_{\mathcal{N}(\mathcal{E})}, \varphi_{\mathcal{L}(\mathcal{E})}, \varphi_{\mathcal{C}(\mathcal{E})}$, donnés à l'avance, appliquant les espaces associés à \mathcal{E} dans les espaces associés à \mathcal{E}' et liés par certaines relations, un couple (ψ, g) pour lequel

$$\psi_{\mathcal{N}(\mathcal{E})}^{\mathcal{E}} = \varphi_{\mathcal{N}(\mathcal{E})}, \quad \psi_{\mathcal{L}(\mathcal{E})}^{\mathcal{E}} = \varphi_{\mathcal{L}(\mathcal{E})} \quad \text{et} \quad \psi_{\mathcal{C}(\mathcal{E})}^{\mathcal{E}} = \varphi_{\mathcal{C}(\mathcal{E})}.$$

Mais auparavant, et c'est l'objet du premier paragraphe, il convient de chercher si un tel couple est unique, et, s'il ne l'est pas (ce qui est évidemment le cas ainsi que le montre l'exemple des homomorphismes adjoints), de déterminer toutes les solutions à partir de l'une d'elles. On est donc amené à comparer deux couples (ψ, g) et (φ, h) pour lesquels

$$\varphi_{\mathcal{N}(\mathcal{E})}^h = \psi_{\mathcal{N}(\mathcal{E})}^{\mathcal{E}}, \quad \varphi_{\mathcal{L}(\mathcal{E})}^h = \psi_{\mathcal{L}(\mathcal{E})}^{\mathcal{E}} \quad \text{et} \quad \varphi_{\mathcal{C}(\mathcal{E})}^h = \psi_{\mathcal{C}(\mathcal{E})}^{\mathcal{E}}.$$

On utilise pour cela la notion de champ normal : dans les conditions indiquées, les images $h(\mathcal{E})$ et $g(\mathcal{E})$ de \mathcal{E} sont les variétés intégrales d'un même champ normal. A partir de là, on montre que l'élément $s \in G'$ défini par $g(y) = h(y).s$ est indépendant du choix de y dans \mathcal{E} , de sorte que, en définitive, on a

$$\psi = \text{Int}(s^{-1}) \circ \varphi \quad \text{et} \quad g = D_s \circ h.$$

Revenons au problème qui fait l'objet du reste du chapitre. Il s'agit, avons-nous dit, de construire un couple d'homomorphismes compatibles (ψ, g) liant $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ à $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, G')$, de telle sorte que les homomorphismes $\psi_{\mathcal{N}(\mathcal{E})}^{\mathcal{E}}$, $\psi_{\mathcal{E}(\mathcal{E})}^{\mathcal{E}}$, $\psi_{\mathcal{C}(\mathcal{E})}^{\mathcal{E}}$ coïncident avec des homomorphismes donnés *a priori*, mais satisfaisant à certaines conditions. Quelles conditions ? Il est d'abord évident que $\varphi_{\mathcal{N}(\mathcal{E})}$ et $\varphi_{\mathcal{E}(\mathcal{E})}$ doivent être associés, de sorte que $\varphi_{\mathcal{E}(\mathcal{E})}$ sera entièrement déterminé par $\varphi_{\mathcal{N}(\mathcal{E})}$. Il convient de remarquer ensuite que, à cause des opérations de $L^1(E')$ sur $C'(E')$, l'homomorphisme $\varphi_{\mathcal{C}(\mathcal{E})}$ est complètement défini par la donnée d'une connexion ω sur $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ et de la connexion-image $\varphi_{\mathcal{C}(\mathcal{E})}(\omega) = \omega'$. Sous cette forme, la formule (III.4.1) et la proposition III.6.1 montrent que, si le couple (ψ, g) existe, les différentielles covariantes Δ, Δ' associées à ω, ω' et les courbures $\Omega(\omega), \Omega(\omega')$, se correspondent par $\varphi_{\mathcal{L}(\mathcal{E})}$: c'est cette propriété que nous supposons réalisée.

En résumé, le problème se présente de la façon suivante : étant donnés deux homomorphismes associés $\varphi_{\mathcal{N}(\mathcal{E})}$ et $\varphi_{\mathcal{E}(\mathcal{E})}$, et deux connexions ω et ω' sur $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ et $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, G')$ respectivement, telles que

$$\Delta' \circ \varphi_{\mathcal{L}(\mathcal{E})} = \varphi_{\mathcal{L}(\mathcal{E})} \circ \Delta \quad \text{et} \quad \Omega(\omega') = \varphi_{\mathcal{L}(\mathcal{E})}(\Omega(\omega)),$$

existe-t-il un couple d'homomorphismes compatibles (ψ, g) tels que

$$\psi_{\mathcal{N}(\mathcal{E})}^{\mathcal{E}} = \varphi_{\mathcal{N}(\mathcal{E})}, \quad \psi_{\mathcal{E}(\mathcal{E})}^{\mathcal{E}} = \varphi_{\mathcal{E}(\mathcal{E})} \quad \text{et} \quad \psi_{\mathcal{C}(\mathcal{E})}^{\mathcal{E}}(\omega) = \omega', \quad ?$$

Ce problème est complètement résolu, par l'affirmative, dans le cas où G et G' sont connexes, et \mathcal{X} simplement connexe. L'homomorphisme ψ est construit en choisissant $x_0 \in \mathcal{X}$ puis $y_0 \in \mathcal{E}_{x_0}$ et $y'_0 \in \mathcal{E}'_{x_0}$ et en posant

$$\psi = j_{\mathcal{N}'(\mathcal{Y}'_0)} \circ \varphi_{\mathcal{N}(\mathcal{E})} \circ i_{\mathcal{N}(\mathcal{Y}_0)},$$

ce qui est bien un homomorphisme de G dans G' . L'homomorphisme g , d'autre part, est d'abord défini au-dessus du point x_0 choisi par l'égalité

$$g(y_0.s) = y'_0.\psi(s) \quad (s \in G)$$

ou, ce qui revient au même :

$$g(m.y_0) = \varphi_{\mathcal{N}(\mathcal{E})}(m).y'_0 \quad [m \in \mathcal{N}_{x_0}(\mathcal{E})].$$

On étend ensuite la définition de g à l'espace \mathcal{E} tout entier en faisant correspondre à l'extrémité de tout chemin ω -horizontal d'origine $y = y_0.s$, l'extrémité du chemin ω' -horizontal d'origine $y' = y'_0.\psi(s)$ et de même projection.

L'essentiel de la démonstration consiste à vérifier que c'est bien un homomorphisme $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$ qu'on définit ainsi et que cet homomorphisme est compatible avec ψ . Le fait que \mathcal{X} soit simplement connexe joue un rôle essentiel dans la démonstration que nous donnons ici. Nous verrons, dans le chapitre suivant, dans quelle mesure il est possible de se débarrasser de cette hypothèse.

1. COUPLES (φ, h) DÉFINISSANT LES MÊMES HOMOMORPHISMES. — Nous ne faisons, dans ce paragraphe, aucune hypothèse sur \mathcal{X} .

PROPOSITION VI.1.1. — Soit (φ, h) un couple d'homomorphismes compatibles liant $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ et $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, G')$. La translation à droite sur \mathcal{E}' définie par $s \in G'$ étant notée D_s , on pose

$$\psi = \text{Int}(s^{-1}) \circ \varphi \quad \text{et} \quad g = D_s \circ h.$$

Le couple (ψ, g) est alors compatible, et en notant $\psi_{\mathcal{N}(\mathcal{E})}^g, \psi_{\mathcal{E}(\mathcal{E})}^g, \psi_{\mathcal{C}(\mathcal{E})}^g$ [resp. $\varphi_{\mathcal{N}(\mathcal{E})}^h, \varphi_{\mathcal{E}(\mathcal{E})}^h, \varphi_{\mathcal{C}(\mathcal{E})}^h$] les homomorphismes associés au couple (ψ, g) [resp. (φ, h)], on a

$$\psi_{\mathcal{N}(\mathcal{E})}^g = \varphi_{\mathcal{N}(\mathcal{E})}^h, \quad \psi_{\mathcal{E}(\mathcal{E})}^g = \varphi_{\mathcal{E}(\mathcal{E})}^h \quad \text{et} \quad \psi_{\mathcal{C}(\mathcal{E})}^g = \varphi_{\mathcal{C}(\mathcal{E})}^h.$$

Démontrons cette proposition pour $\mathcal{L}(\mathcal{E})$, par exemple. On a, par définition

$$\begin{aligned} \psi_{\mathcal{E}(\mathcal{E})}^g &= i_{\mathcal{E}'(\mathcal{E})} \circ \psi \circ j_{\mathcal{E}(\mathcal{E})} & (y \in \mathcal{E}) \\ &= i_{\mathcal{E}'(\mathcal{E})}(h(y) \cdot s) \circ \psi \circ j_{\mathcal{E}(\mathcal{E})}(y) \\ &= i_{\mathcal{E}'(\mathcal{E})}(h(y)) \circ \text{Adj}(s) \circ \text{Adj}(s^{-1}) \circ \varphi \circ j_{\mathcal{E}(\mathcal{E})}(y) \\ &= \varphi_{\mathcal{E}(\mathcal{E})}^h. \end{aligned}$$

PROPOSITION VI.1.2. — Le champ normal $\Gamma(\varphi_{\mathcal{E}(\mathcal{E})}^h(\mathcal{L}^0(\mathcal{E})), \varphi_{\mathcal{C}(\mathcal{E})}^h(\omega))$ est intégrable, quelle que soit la connexion ω choisie sur $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$.

Ce résultat est une conséquence de la formule

$$\Delta' \circ \varphi_{\mathcal{L}(\mathcal{E})}^h = \varphi_{\mathcal{L}(\mathcal{E})}^h \circ \Delta$$

qui entraîne la stabilité du faisceau-image $\varphi_{\mathcal{L}(\mathcal{E})}^h(\mathcal{L}(\mathcal{E}))$ pour la différentiation covariante Δ' associée à $\varphi_{\mathcal{C}(\mathcal{E})}^h(\omega)$, et de

$$\Omega(\varphi_{\mathcal{C}(\mathcal{E})}^h(\omega)) = \varphi_{\mathcal{L}(\mathcal{E})}^h(\Omega(\omega)),$$

qui nous place définitivement dans les conditions d'application du théorème V.4.1.

Avant d'aborder la réciproque de la proposition VI.1.1, nous démontrerons :

PROPOSITION VI.1.3. — L'image de l'espace \mathcal{E} par l'homomorphisme h est une variété intégrale du champ normal

$$\Gamma = \Gamma(\varphi_{\mathcal{E}(\mathcal{E})}^h(\mathcal{L}^0(\mathcal{E})), \varphi_{\mathcal{C}(\mathcal{E})}^h(\omega)).$$

Plaçons-nous en effet, tout d'abord, en un point $x \in \mathcal{X}$. La compatibilité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \longleftarrow & \mathcal{M}(\mathcal{E}) \\ h \downarrow & & \downarrow \varphi_{\mathcal{M}(\mathcal{E})}^h \\ \mathcal{E}' & \longleftarrow & \mathcal{M}'(\mathcal{E}') \end{array}$$

Fig. 9.

entraîne, en notant $\mathcal{E}_{x,0}$ une composante connexe de la fibre \mathcal{E}_x et $\mathcal{N}_{x,0}(\mathcal{E})$ la composante connexe de l'identité dans $\mathcal{N}_x(\mathcal{E})$:

$$h(\mathcal{E}_{x,0}) = \varphi_{\mathcal{N}(\mathcal{E})}^h(\mathcal{N}_{x,0}(\mathcal{E})) \cdot h(y),$$

où y est un point de $\mathcal{E}_{x,0}$ choisi une fois pour toutes.

Soit, d'autre part, V la variété intégrale de Γ passant par $h(y)$. La composante connexe de $h(y)$ dans V_x est, d'après la proposition V.6.3 :

$$V_{x,0} = \varphi_{\mathcal{N}(\mathcal{E})}^h(\mathcal{N}_{x,0}(\mathcal{E})) \cdot h(y)$$

car $\varphi_{\mathcal{N}(\mathcal{E})}^h(\mathcal{N}_{x,0}(\mathcal{E}))$ est le sous-groupe connexe de $\mathcal{N}'_x(\mathcal{E}')$ admettant $k(\varphi_{\mathcal{E}(\mathcal{E})}^h(\mathcal{L}'_0(\mathcal{E})))$ pour algèbre de Lie puisque les homomorphismes $\varphi_{\mathcal{N}(\mathcal{E})}^h$ et $\varphi_{\mathcal{E}(\mathcal{E})}^h$ sont associés. On en déduit

$$V_{x,0} = h(\mathcal{E}_{x,0}).$$

La démonstration s'achève alors en rappelant que V et \mathcal{E} sont engendrés par les chemins respectivement ω - et $\varphi_{\mathcal{C}(\mathcal{E})}^h(\omega)$ -horizontaux issus des points de $V_{x,0}$ et $\mathcal{E}_{x,0}$ (voir prop. V.6.4), et que les images par h des chemins ω -horizontaux sont des chemins $\varphi_{\mathcal{C}(\mathcal{E})}^h(\omega)$ -horizontaux (prop. VI.4.4).

Abordons maintenant la réciproque de la proposition VI.4.4.

PROPOSITION VI.4.4. — Si deux couples d'homomorphismes compatibles liant $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ et $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, G')$ et notés (φ, h) et (ψ, g) , sont tels que

$$\varphi_{\mathcal{N}(\mathcal{E})}^h = \psi_{\mathcal{N}(\mathcal{E}')}^g, \quad \varphi_{\mathcal{E}(\mathcal{E})}^h = \psi_{\mathcal{E}(\mathcal{E}')}^g \quad \text{et} \quad \varphi_{\mathcal{C}(\mathcal{E})}^h = \psi_{\mathcal{C}(\mathcal{E}')}^g,$$

le couple (ψ, g) est du type défini par la proposition VI.4.1, c'est-à-dire qu'il existe $s \in G'$ tel que

$$\psi = \text{Int}(s^{-1}) \circ \varphi \quad \text{et} \quad g = D_s \circ h.$$

Donnons-nous, en effet, une connexion ω sur $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ et posons

$$\omega' = \varphi_{\mathcal{C}(\mathcal{E})}^h(\omega) = \psi_{\mathcal{C}(\mathcal{E}')}^g(\omega).$$

Les images de \mathcal{E} par h et g sont, d'après la proposition précédente, deux variétés intégrales du champ normal $\Gamma(\mathcal{L}'_0, \omega')$ où l'on a posé

$$\mathcal{L}'_0 = \varphi_{\mathcal{E}(\mathcal{E})}^h(\mathcal{L}'_0(\mathcal{E})) = \psi_{\mathcal{E}(\mathcal{E}')}^g(\mathcal{L}'_0(\mathcal{E})).$$

Choisissons d'abord un point y de la fibre \mathcal{E}_x et définissons $s \in G'$ par la relation

$$g(y) = h(y) \cdot s.$$

Étant donné maintenant un point y' variable de \mathcal{E}_x il existe $\sigma \in G$ tel que $y' = y \cdot \sigma$ et réciproquement. Or, par définition, $\varphi_{\mathfrak{M}(s)}^h$ et $\psi_{\mathfrak{M}(s)}^g$ vérifient les deux relations suivantes :

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathfrak{M}(s)}^h(j_{\mathfrak{M}}(y)\sigma) &= i_{\mathfrak{M}'}(h(y))\varphi(\sigma), \\ \psi_{\mathfrak{M}(s)}^g(j_{\mathfrak{M}}(y')\sigma) &= i_{\mathfrak{M}'}(g(y))\psi(\sigma). \end{aligned}$$

Comme, par hypothèse, $\varphi_{\mathfrak{M}(s)}^h$ et $\psi_{\mathfrak{M}(s)}^g$ coïncident, on a successivement

$$\begin{aligned} i_{\mathfrak{M}'}(h(y))\varphi(\sigma) &= i_{\mathfrak{M}'}(g(y))\psi(\sigma) \\ &= i_{\mathfrak{M}'}(h(y) \cdot s)\psi(\sigma) \\ &= i_{\mathfrak{M}'}(h(y))\text{Int}(s)\psi(\sigma). \end{aligned}$$

D'où

$$\psi(\sigma) = \text{Int}(s^{-1})\varphi(\sigma)$$

et, sur \mathcal{E}_x :

$$\begin{aligned} g(y') &= g(y \cdot \sigma) \\ &= g(y) \cdot \psi(\sigma) \\ &= g(y) \cdot (s^{-1}\varphi(\sigma)s) \\ &= h(y) \cdot \varphi(\sigma)s \\ &= h(y') \cdot s. \end{aligned}$$

Ce qui montre que s ne dépend pas du choix de y dans la fibre de \mathcal{E} de projection x et que, au-dessus de ce même point x , on a bien $g = D_s \circ h$.

Il ne reste plus qu'à montrer que cette dernière relation s'étend à l'espace \mathcal{E} tout entier. Considérons donc un point y_1 n'appartenant pas à la fibre \mathcal{E}_x mais à \mathcal{E}_{x_1} et relierons x_1 à x par un chemin différentiable l . Soient

$$\mu: \mathcal{E}_x \rightarrow \mathcal{E}_{x_1} \quad \text{et} \quad \mu': \mathcal{E}'_x \rightarrow \mathcal{E}'_{x_1}$$

les homéomorphismes définis par les transports parallèles relatifs aux connexions ω et ω' . L'invariance de l'ensemble des chemins ω' -horizontaux par les translations à droite montre que

$$D_s \circ \mu' = \mu' \circ D_s,$$

tandis que la conservation des chemins horizontaux par h et g permet d'écrire

$$\mu' \circ h = h \circ \mu \quad \text{et} \quad \mu' \circ g = g \circ \mu,$$

de sorte que si

$$g(\mu^{-1}(y_1)) = h(\mu^{-1}(y_1)) \cdot s,$$

on a d'abord

$$\mu'(g(\mu^{-1}(y_1))) = \mu'(h(\mu^{-1}(y_1))) \cdot s$$

puis

$$g(y_1) = h(y_1) \cdot s,$$

ce qui achève la démonstration.

Remarque. — La proposition II.3.1 montre que, par changement de base dans \mathfrak{R}_0 , on obtient tous les homomorphismes $[G \rightarrow \text{Gl}(m, \mathbb{R}), \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{R}]$ auxquels sont associés les homomorphismes $\mathbb{R}_{\mathfrak{N}(\mathcal{E})}$, $\mathbb{R}_{\mathcal{L}(\mathcal{E})}$ et $\mathbb{R}_{\mathbb{C}(\mathcal{E})}$. C'est en particulier le cas pour les homomorphismes adjoints.

2. DÉTERMINATION DE (ψ, g) . — Nous reprenons maintenant le problème exposé dans l'introduction. Nous supposons que \mathcal{X} est de dimension d , comme d'habitude, et que G et G' sont respectivement de dimensions n et n' . Le théorème que nous nous proposons de démontrer est le suivant :

THÉORÈME VI.2.1. — *Étant donné un homomorphisme*

$$\varphi_{\mathfrak{N}(\mathcal{E})} : \mathfrak{N}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathfrak{N}'(\mathcal{E}')$$

auquel est associé

$$\varphi_{\mathcal{L}(\mathcal{E})} : \mathcal{L}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{L}'(\mathcal{E}'),$$

si il existe d'autre part deux connexions ω et ω' , sur $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ et $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, G')$ respectivement auxquelles correspondent les $L(E)$ - et $L'(E')$ -différentiations covariantes Δ et Δ' , si l'on a, de plus

$$\Delta' \circ \varphi_{L(E)} = \varphi_{L(E)} \circ \Delta \quad \text{et} \quad \Omega(\omega') = \varphi_{L(E)}(\Omega(\omega)),$$

enfin si G et G' sont connexes et si \mathcal{X} est simplement connexe, il existe un couple d'homomorphismes compatibles

$$g : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}' \quad \text{et} \quad \psi : G \rightarrow G',$$

pour lesquels on a

$$\psi_{\mathfrak{N}(\mathcal{E})}^g = \varphi_{\mathfrak{N}(\mathcal{E})} \quad \text{et} \quad \psi_{\mathcal{L}(\mathcal{E})}^g = \varphi_{\mathcal{L}(\mathcal{E})},$$

tandis que

$$\psi_{\mathbb{C}(E)}^g(\omega) = \omega'.$$

Nous démontrerons tout d'abord un résultat relatif au cas où la base de $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ et $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, G')$ est homéomorphe à \mathbb{R}^d . Supposons donc, provisoirement, que $\mathcal{X} = \mathbb{R}^d$ et désignons par O l'origine de \mathbb{R}^d .

LEMME. — $\tau_\omega(l_0)$ et $\tau_{\omega'}(l_0)$ notant comme d'habitude les transformations [éléments de $\mathfrak{N}_0(\mathcal{E})$ et de $\mathfrak{N}'_0(\mathcal{E}')$ respectivement] associées à un lacet l_0 en O , on a, dans les conditions du théorème énoncé :

$$\tau_{\omega'}(l_0) = \varphi_{\mathfrak{N}(\mathcal{E})}(\tau_\omega(l_0)).$$

En effet, choisissons tout d'abord deux points $y_0 \in \mathcal{E}_0$ et $y'_0 \in \mathcal{E}'_0$. Soient $\rho(x)$

et $\rho'(x)$ les extrémités des chemins ω -horizontaux et ω' -horizontaux d'origine y_0 et y'_0 respectivement et se projetant l'un et l'autre sur le rayon vecteur Ox ($x \in \mathbb{R}^d$). Soit alors

$$h : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$$

l'application définie par les deux égalités

$$h \circ \rho = \rho' \quad \text{et} \quad h(m \cdot \rho(x)) = \varphi_{\mathcal{N}(\mathcal{E})}(m) \cdot h(\rho(x)).$$

Posons également

$$\psi = j_{\mathcal{N}'(\mathcal{E}')} \circ \varphi_{\mathcal{N}(\mathcal{E})} \circ i_{\mathcal{N}}(y_0).$$

On définit ainsi un homomorphisme de G dans G' et l'on va voir que ψ et h sont compatibles. En effet, l'égalité

$$\Delta' \circ \varphi_{L(\mathcal{E})} = \varphi_{L(\mathcal{E}')} \circ \Delta$$

montre que $\varphi_{\mathcal{E}(\mathcal{E})}$ applique tout d -élément du champ $c_{\mathcal{E}^0(\mathcal{E})}(\omega)$ qui définit le transport parallèle dans $\mathcal{E}^0(\mathcal{E})$ sur un d -élément du champ $c_{\mathcal{E}'^0(\mathcal{E}')}(\omega')$ (²⁰). Il en est donc de même pour $\mathcal{N}(\mathcal{E})$ et $\mathcal{N}'(\mathcal{E}')$ et, si $m \in \mathcal{N}(\mathcal{E})$ se déplace par parallélisme, $\varphi_{\mathcal{N}(\mathcal{E})}(m)$ se déplace également par parallélisme (²¹). Or, si x décrit un rayon vecteur à partir de O et si m_x se déplace parallèlement à lui-même [$p(m_x) = x$], on sait que $s = j_{\mathcal{N}}(\varphi(x))m_x$ est indépendant de x . Il en est de même de $s' = j_{\mathcal{N}'}(\rho'(x))m'_x$ lorsque $m'_x \in \mathcal{N}'_x(\mathcal{E}')$ se déplace parallèlement à lui-même et lorsque x décrit le même vecteur. Si de plus, on a, à l'origine :

$$m'_0 = \varphi_{\mathcal{N}(\mathcal{E})}(m_0),$$

on a aussi, d'après ce qui précède, $m'_x = \varphi_{\mathcal{N}(\mathcal{E})}(m_x)$ et, comme $m'_0 = \varphi_{\mathcal{N}(\mathcal{E})}(m_0)$ équivaut, d'après la définition de ψ à $s' = \psi(s)$, on peut écrire

$$j_{\mathcal{N}'}(\rho'(x))(\varphi_{\mathcal{N}(\mathcal{E})}(m_x)) = \psi(s).$$

D'autre part,

$$m_x \cdot \rho(x) = \rho(x) \cdot j_{\mathcal{N}}(\rho(x))m_x = \rho(x) \cdot s$$

et

$$\varphi_{\mathcal{N}(\mathcal{E})}(m_x) \cdot \rho'(x) = \rho'(x) \cdot j_{\mathcal{N}'}(\rho'(x))(\varphi_{\mathcal{N}(\mathcal{E})}(m_x)) = \rho'(x) \cdot \psi(s).$$

De sorte qu'en tenant compte, en outre, de l'égalité

$$h(m \cdot \rho(x)) = \varphi_{\mathcal{N}(\mathcal{E})}(m) \cdot \rho'(x),$$

(²⁰) Pour s'en assurer, on peut, par exemple, utiliser des sections locales de l'espace des repères de $\mathcal{E}^0(\mathcal{E})$ ou encore, en tenant compte du paragraphe III.8, on peut examiner ce qui se passe sur les espaces induits par une application différentiable $l : I \rightarrow \mathcal{X}$. Dans le premier cas, on se reportera au paragraphe IV.6.

(²¹) Se reporter à la fin du paragraphe IV.6.

qui sert à définir h , on a la relation

$$h(\rho(x).s) = h(\rho(x)).\psi(s) \quad (s \in G).$$

La compatibilité de (ψ, h) sera démontrée lorsque nous aurons vérifié qu'on a une relation de même type lorsqu'on remplace $\rho(x)$ par un point quelconque de \mathcal{E} . Soit $y = \mu.\rho(x)$ un tel point [$\mu \in \mathcal{N}(\mathcal{E})$]. On a successivement

$$\begin{aligned} h(y.s) &= h((\mu.\rho(x)).s) = h(\mu.(\rho(x).s)) \\ &= \varphi_{\mathcal{N}(\mathcal{E})}(\mu).(h(\rho(x).s)) \\ &= \varphi_{\mathcal{N}(\mathcal{E})}(\mu).(h(\rho(x)).\psi(s)) \\ &= (\varphi_{\mathcal{N}(\mathcal{E})}(\mu).h(\rho(x))).\psi(s) \\ &= h(y).\psi(s). \end{aligned}$$

h est donc bien un ψ -homomorphisme. De plus, par définition même de h et de ψ , l'homomorphisme $\psi_{\mathcal{N}(\mathcal{E})}^h$ associé au couple (ψ, h) est $\varphi_{\mathcal{N}(\mathcal{E})}$. Soit alors $\underline{\omega}'$ la connexion-image de ω par le couple (ψ, h) ou, plus précisément, par $\psi_{\mathcal{L}(\mathcal{E})}^h$:

$$\underline{\omega}' = \psi_{\mathcal{L}(\mathcal{E})}^h(\omega).$$

Il n'est pas évident, *a priori*, que la connexion ainsi obtenue coïncide avec ω' . Cependant, puisque $\psi_{\mathcal{N}(\mathcal{E})}^h = \varphi_{\mathcal{N}(\mathcal{E})}$, on a également $\psi_{\mathcal{E}(\mathcal{E})}^h = \varphi_{\mathcal{E}(\mathcal{E})}$ et, en notant $\underline{\Delta}'$ la $L'(E')$ -différentiation covariante associée à $\underline{\omega}'$, on sait qu'on a les égalités suivantes :

$$\psi_{\mathcal{L}(\mathcal{E})}^h \circ \Delta = \underline{\Delta}' \circ \psi_{\mathcal{L}(\mathcal{E})}^h \quad \text{et} \quad \psi_{\mathcal{L}(\mathcal{E})}^h(\Omega(\omega)) = \Omega(\underline{\omega}').$$

En comparant ces égalités à celles qui sont vérifiées par hypothèse par Δ et Δ' , il vient

$$\underline{\Delta}' = \Delta \quad \text{et} \quad \Omega(\underline{\omega}') = \Omega(\omega').$$

Il en résulte que $\underline{\omega}' = \omega' + \theta$ où θ est une action du centre $K^1(E')$ de $L^1(E')$ et que $\Delta'\theta = 0$ [conséquence immédiate de la formule (IV.5.1)]. La proposition IV.5.3 montre alors que

$$\tau_{\omega'}(l_0) = \tau_{\underline{\omega}'}(l_0).$$

Or, la définition de $\underline{\omega}'$ montre que

$$\tau_{\underline{\omega}'}(l_0) = \varphi_{\mathcal{N}(\mathcal{E})}(\tau_{\omega}(l_0)).$$

Par suite

$$\tau_{\omega'}(l_0) = \varphi_{\mathcal{N}(\mathcal{E})}(\tau_{\omega}(l_0)),$$

ce qui achève la démonstration du lemme. A partir de là, il serait facile de vérifier que $\omega' = \underline{\omega}'$, mais la méthode utilisée ne serait qu'un cas particulier de celle qui va nous servir à établir le théorème VI.2.1 dans le cas général et nous ne ferons pas cette vérification.

Nous revenons donc maintenant au cas général, en nous contentant de supposer, bien entendu, que \mathcal{X} est simplement connexe. Choisissons arbitrai-

remont un point $x_0 \in \mathcal{X}$, puis deux points $y_0 \in \mathcal{E}_{x_0}$ et $y'_0 \in \mathcal{E}'_{x_0}$. Définissons comme ci-dessus un homomorphisme $\psi : G \rightarrow G'$ par

$$\psi = j_{\mathcal{N}'}(y'_0) \circ \varphi_{\mathcal{N}(s)} \circ i_{\mathcal{N}}(y_0)$$

et $g : \mathcal{E}_{x_0} \rightarrow \mathcal{E}'_{x_0}$, par

$$g(y_0 \cdot s) = y'_0 \cdot \psi(s) \quad (s \in G),$$

ce qui équivaut à poser

$$g(m \cdot y_0) = \varphi_{\mathcal{N}(s)}(m) \cdot y'_0 \quad [m \in \mathcal{N}(s)].$$

Nous déterminerons ensuite $g(y)$ pour un point y quelconque de l'espace \mathcal{E} en joignant $x = p(y)$ à x_0 par un chemin différentiable $l_1 : I \rightarrow \mathcal{X}$ défini par

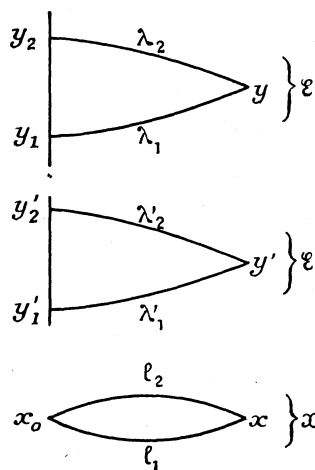


Fig. 10.

une représentation amortie (c'est-à-dire dont toutes les dérivées s'annulent pour 0 et 1), en reliant y à un point y_1 de \mathcal{E}_{x_0} par le chemin ω -horizontal λ_1 de projection l_1 , en posant $y'_1 = g(y_1)$ (ce qui a un sens puisque g est déjà défini sur \mathcal{E}_{x_0}), en définissant $g(y)$ comme l'extrémité du chemin ω' -horizontal λ'_1 d'origine y'_1 et de projection l_1 , en vérifiant, enfin, que $g(y)$ ne dépend pas du choix du chemin l_1 . Nous utiliserons pour cela le lemme précédent et le fait que \mathcal{X} est simplement connexe.

Soit $l_2 : I \rightarrow \mathcal{X}$ un deuxième chemin différentiable joignant x à x_0 et défini également par une représentation amortie. Re commençons, avec l_2 , les opérations effectuées avec l_1 , les notations se déduisant des précédentes par substitution de l'indice 2 à l'indice 1. Soit S^1 le cercle orienté, muni d'une origine O et paramétré par une application différentiable régulière

$$\alpha : I \rightarrow S^1 \quad [\alpha(0) = O, \alpha(1) = O].$$

On déduit de l_1 et l_2 une application différentiable

$$\mu : S^1 \rightarrow \mathcal{X}.$$

en posant

$$\begin{aligned}\mu(\alpha(t)) &= l_1(1-2t) & \left(0 \leq t \leq \frac{1}{2}\right), \\ \mu(\alpha(t)) &= l_2(2t-1) & \left(\frac{1}{2} \leq t \leq 1\right).\end{aligned}$$

Puisque \mathcal{X} est simplement connexe, il est possible d'étendre μ en une application différentiable $\bar{\mu}$ de \mathbb{R}^2 dans \mathcal{X} dont la restriction à S^1 , plongé dans \mathbb{R}^2 , est μ .

Il résulte maintenant du paragraphe III.8 que les hypothèses faites au sujet de $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ et $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, G')$ se retrouvent dans les espaces induits par $\bar{\mu}$. Plus précisément, si $\mathcal{E}_{\bar{\mu}} = \bar{\mu}^{-1}(\mathcal{E})$ et $\mathcal{E}'_{\bar{\mu}} = \bar{\mu}^{-1}(\mathcal{E}')$ sont munis des connexions $\omega_{\bar{\mu}}$, $\omega'_{\bar{\mu}}$ induites par $\bar{\mu}$ à partir de ω , ω' et si l'on note $\varphi_{\mathcal{N}_{\bar{\mu}}(\mathcal{E}_{\bar{\mu}})}$ l'homomorphisme de l'espace structural gauche $\mathcal{N}_{\bar{\mu}}(\mathcal{E}_{\bar{\mu}})$ de $\mathcal{E}_{\bar{\mu}}$ dans l'espace structural gauche $\mathcal{N}'_{\bar{\mu}}(\mathcal{E}'_{\bar{\mu}})$ induit à partir de $\varphi_{\mathcal{N}(\mathcal{E})}$, l'homomorphisme $\varphi_{L_{\bar{\mu}}(\mathcal{E}_{\bar{\mu}})}$ des espaces de Lie de $\mathcal{E}_{\bar{\mu}}(\mathbb{R}^2, G)$ et $\mathcal{E}'_{\bar{\mu}}(\mathbb{R}^2, G')$, associé à $\varphi_{\mathcal{N}_{\bar{\mu}}(\mathcal{E}_{\bar{\mu}})}$, vérifie les relations

$$\Delta'_{\bar{\mu}} \circ \varphi_{L_{\bar{\mu}}(\mathcal{E}_{\bar{\mu}})} = \varphi_{L_{\bar{\mu}}(\mathcal{E}_{\bar{\mu}})} \circ \Delta_{\bar{\mu}}$$

et

$$\Omega(\omega'_{\bar{\mu}}) = \varphi_{L_{\bar{\mu}}(\mathcal{E}_{\bar{\mu}})}(\Omega(\omega_{\bar{\mu}})),$$

où $\Delta_{\bar{\mu}}$ désigne la $L_{\bar{\mu}}(\mathcal{E}_{\bar{\mu}})$ -différentiation covariante associée à $\omega_{\bar{\mu}}$ et $\Delta'_{\bar{\mu}}$, la $L'_{\bar{\mu}}(\mathcal{E}'_{\bar{\mu}})$ -différentiation covariante associée à $\omega'_{\bar{\mu}}$. Nous sommes donc exactement dans les conditions d'application du lemme précédent. En considérant S^1 comme un lacet en 0 dans \mathbb{R}^2 , on a donc

$$\tau_{\omega'_{\bar{\mu}}}(S^1) = \varphi_{\mathcal{N}_{\bar{\mu}}(\mathcal{E}_{\bar{\mu}})}(\tau_{\omega_{\bar{\mu}}}(S^1)).$$

En revenant à \mathcal{X} à l'aide des homomorphismes induits, et en considérant maintenant $\mu : S^1 \rightarrow \mathcal{X}$ comme un lacet en x_0 , on a

$$(VI.2.1) \quad \tau_{\omega'}(\mu) = \varphi_{\mathcal{N}(\mathcal{E})}(\tau_{\omega}(\mu)).$$

Or, comme μ se compose de l_1 et de l_2 , on a

$$y_2 = \tau_{\omega}(\mu) \cdot y_1$$

et y'_2 , défini par $y'_2 = g(y_2)$, est donc, par définition de g sur la fibre \mathcal{E}_{x_0} , le point

$$y'_2 = \varphi_{\mathcal{N}(\mathcal{E})}(\tau_{\omega}(\mu)) \cdot y_1.$$

Il résulte alors de l'égalité (VI.2.1) que l'extrémité du chemin horizontal d'origine y'_2 et de projection l_2 coïncide avec l'extrémité du chemin horizontal d'origine y'_1 et de projection l_1 . En d'autres termes, la définition de $g(y)$ est bien indépendante du chemin choisi pour relier x à x_0 .

Il reste maintenant à montrer, d'une part, que les homomorphismes ψ et g que nous venons de construire sont compatibles, d'autre part, que le couple (ψ, g) constitue une solution du problème.

La compatibilité de ψ et g résulte immédiatement du procédé de construction de ces homomorphismes : en reprenant les notations précédentes, si $z = \gamma \cdot s$ est un point de \mathcal{E}_x , le chemin horizontal d'origine z et de projection l_1 se déduit de λ_1 par la translation à droite s . Son extrémité z_1 de projection x_0 se déduit donc de γ_1 par la même translation à droite : $z_1 = \gamma_1 \cdot s$. Or, sur \mathcal{E}_x , on a

$$g(z_1) = g(\gamma_1) \cdot \psi(s)$$

comme le montre la définition de g et un calcul effectué au cours du lemme précédent. En procédant de façon semblable sur $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, G')$, on aboutit à

$$g(z) = g(\gamma \cdot s) = g(\gamma) \cdot \psi(s) \quad (y \in \mathcal{E}, s \in G).$$

Par construction également, on a

$$\psi_{\mathcal{E}(E)}^g(\omega) = \omega'$$

puisque l'image par g d'un chemin ω -horizontal est un chemin ω' -horizontal et que, par suite, le champ de connexion $c(\omega)$ est projetable par g et son image, $c(\omega')$.

Quant à l'égalité $\psi_{\mathcal{M}(E)}^g = \varphi_{\mathcal{M}(E)}$ qui entraîne $\psi_{\mathcal{E}(E)}^g = \varphi_{\mathcal{E}(E)}$, elle résulte simplement du fait qu'elle est vérifiée pour les fibres de projection x_0 . En effet, comme l'image de $c^{\mathcal{M}(E)}(\omega)$ est $c^{\mathcal{M}'(E')}(\omega')$, et cela, par l'un ou l'autre des homomorphismes $\psi_{\mathcal{M}(E)}^g$ ou $\varphi_{\mathcal{M}(E)}$, on peut la transporter par parallélisme en tout point de \mathcal{X} .

Le théorème est donc démontré.

Remarque. — Dans le cas où G est simplement connexe, l'existence de $\varphi_{\mathcal{E}(E)}$ entraîne celle de $\varphi_{\mathcal{M}(E)}$. On peut donc énoncer un théorème où les espaces de Lie interviennent seuls.

CHAPITRE VII.

HOMOMORPHISMES. CONDITION D'EXISTENCE LORSQUE LA BASE N'EST PAS SIMPLEMENT CONNEXE.

INTRODUCTION. — Nous ne supposons plus, dans ce chapitre, que la base des deux espaces fibrés principaux $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ et $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, G')$ est simplement connexe. Dans ces conditions, il n'est pas possible, en général, de trouver un couple d'homomorphismes compatibles (ψ, h) tels que

$$\psi_{\mathcal{M}(E)}^h = \varphi_{\mathcal{M}(E)}, \quad \psi_{\mathcal{E}(E)}^h = \varphi_{\mathcal{E}(E)} \quad \text{et} \quad \psi_{\mathcal{E}(E)}^h(\omega) = \omega',$$

où $\varphi_{\mathcal{M}(\mathcal{E})}$ et $\varphi_{\mathcal{L}(\mathcal{E})}$ sont deux homomorphismes associés, liés aux connexions ω et ω' par les deux relations habituelles

$$\Delta' \circ \varphi_{L(\mathcal{E})} = \varphi_{L(\mathcal{E})} \circ \Delta \quad \text{et} \quad \Omega(\omega') = \varphi_{L(\mathcal{E})}(\Omega(\omega)).$$

On s'en convaincra facilement en considérant le cas d'un cylindre de révolution (espace fibré principal de base S^1 et de groupe, le groupe additif \mathbb{R}) muni successivement de deux connexions intégrables dont l'une admet pour variétés intégrales les parallèles du cylindre, tandis que les variétés intégrales de l'autre sont des hélices.

Cependant, à condition de supposer que $\varphi_{\mathcal{M}(\mathcal{E})}$ est un *homomorphisme sur*, on peut construire un couple d'homomorphismes compatibles

$$\psi_{\gamma} : G \rightarrow G' = G/H', \quad h_{\gamma} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}' = \mathcal{E}'/H'$$

(H' étant le centre de G'), ainsi qu'un homomorphisme $\psi : G \rightarrow G'$, induisant ψ_{γ} par passage au quotient et déterminant $\varphi_{\mathcal{M}(\mathcal{E})}$ par modelage sur \mathcal{E} et \mathcal{E}' . C'est là l'objet du paragraphe 4.

Après l'examen du cas particulier où le centre de G' se réduit à l'identité (§ 2), on montre, au troisième paragraphe, comment, moyennant une hypothèse assez large concernant l'holonomie de ω' , on peut se ramener du cas où $\varphi_{\mathcal{M}(\mathcal{E})}$ est un *homomorphisme dans*, au cas où c'est un *homomorphisme sur*. Le paragraphe suivant est consacré à la recherche des conditions d'existence de h . Grâce aux résultats du 1^o, on peut supposer, sans perte de généralité, que les deux espaces \mathcal{E} et \mathcal{E}' ont même groupe structural et l'on peut même se permettre d'identifier $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ et $\mathcal{M}'(\mathcal{E}')$. On simplifie ainsi les notations et il devient possible de comparer, pour un même lacet l_x , les éléments $\tau_{\omega}(l_x)$ et $\tau_{\omega'}(l_x)$. Plus précisément, on forme

$$\tau_{\omega'}(l_x) (\tau_{\omega}(l_x))^{-1}$$

qui, faisant partie du centre de la fibre de $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ de projection x , peut être considéré comme appartenant au centre H de G . On vérifie alors que cet élément ne dépend que de la classe d'homotopie de l_x et qu'on définit ainsi un homomorphisme

$$\chi_x : \Pi_x^1(\mathcal{X}) \rightarrow H$$

du premier groupe d'homotopie de \mathcal{X} en x , dans H . Le résultat essentiel de ce chapitre est que la trivialité de cet homomorphisme est une condition nécessaire et suffisante d'existence de l'homomorphisme h cherché.

Si l'image χ de $\Pi_x^1(\mathcal{X})$ par l'homomorphisme χ_x est fermée dans G , on peut substituer à \mathcal{E}' son quotient par χ ; le problème est alors résoluble. Dans d'autres cas, on peut agir sur ω' . En particulier, si χ est un sous-groupe de la composante connexe de l'identité dans H , le problème peut être résolu en substituant à ω' une connexion $\omega' + \theta$ où θ est une forme différentielle sur \mathcal{X} , fermée, à valeurs dans \underline{H} et admettant sur des cycles donnés des périodes dépendant

de χ . Lorsque \mathcal{X} est compacte, on peut combiner les deux procédés, le premier servant à éliminer la partie de χ provenant de la torsion du premier groupe d'homologie de \mathcal{X} à coefficients entiers, le second, à réduire ce qui reste.

Enfin, dans un dernier paragraphe, on cherche à élargir les hypothèses et l'on donne quelques résultats valables lorsque l'égalité portant sur les courbures n'est plus nécessairement réalisée.

1. CAS DES HOMOMORPHISMES SUR. RÉSULTAT INTERMÉDIAIRE. — Nous considérons donc, dans ce paragraphe, deux espaces fibrés principaux différentiables $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ et $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, G')$ de groupes connexes G et G' et de même base \mathcal{X} . Nous nous servirons des notations utilisées au paragraphe II.5, c'est-à-dire que nous noterons :

$$\begin{aligned} \gamma : G &\rightarrow G_\gamma = G/H, & \gamma' : G' &\rightarrow G'_\gamma = G'/H', \\ \gamma_{\mathcal{E}} : \mathcal{E} &\rightarrow \mathcal{E}_\gamma = \mathcal{E}/H, & \gamma_{\mathcal{E}'} : \mathcal{E}' &\rightarrow \mathcal{E}'_\gamma = \mathcal{E}'/H', \end{aligned}$$

les homomorphismes canoniques appliquant \mathcal{E} et \mathcal{E}' d'une part, G et G' d'autre part, sur leurs quotients respectifs par les centres H et H' de G et de G' . De plus, les espaces de Lie [resp. espaces structuraux gauches, faisceaux des connexions de $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ et $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, G')$] seront notés $\mathcal{L}_\gamma(\mathcal{E}_\gamma)$ et $\mathcal{L}'_\gamma(\mathcal{E}'_\gamma)$ [resp. $\mathfrak{N}_\gamma(\mathcal{E}_\gamma)$ et $\mathfrak{N}'_\gamma(\mathcal{E}'_\gamma)$, $C_\gamma(E_\gamma)$ et $C'_\gamma(E'_\gamma)$]. Enfin les homomorphismes canoniques correspondant à ces différents espaces et faisceaux, seront :

$$\begin{aligned} \gamma_{\mathcal{L}(\mathcal{E})} : \mathcal{L}(\mathcal{E}) &\rightarrow \mathcal{L}_\gamma(\mathcal{E}_\gamma), & \gamma_{\mathcal{L}'(\mathcal{E}')} : \mathcal{L}'(\mathcal{E}') &\rightarrow \mathcal{L}'_\gamma(\mathcal{E}'_\gamma), \\ \gamma_{\mathfrak{N}(\mathcal{E})} : \mathfrak{N}(\mathcal{E}) &\rightarrow \mathfrak{N}_\gamma(\mathcal{E}_\gamma), & \gamma_{\mathfrak{N}'(\mathcal{E}')} : \mathfrak{N}'(\mathcal{E}') &\rightarrow \mathfrak{N}'_\gamma(\mathcal{E}'_\gamma), \\ \gamma_{C(E)} : C(E) &\rightarrow C_\gamma(E_\gamma), & \gamma_{C'(E')} : C'(E') &\rightarrow C'_\gamma(E'_\gamma). \end{aligned}$$

On a alors le théorème suivant qui constitue le premier pas dans la résolution du problème qui nous occupe :

THÉORÈME VII.1.1. — *Étant donnés deux espaces fibrés principaux différentiables $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ et $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, G')$ de même base \mathcal{X} et de groupes structuraux G et G' connexes, s'il existe un homomorphisme*

$$\varphi_{\mathfrak{N}(\mathcal{E})} : \mathfrak{N}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathfrak{N}'(\mathcal{E}')$$

de l'espace structural gauche du premier sur l'espace structural gauche du second, et si l'homomorphisme

$$\varphi_{\mathcal{L}(\mathcal{E})} : \mathcal{L}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{L}'(\mathcal{E}')$$

de l'espace de Lie de $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ sur l'espace de Lie de $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, G')$, associé à $\varphi_{\mathfrak{N}(\mathcal{E})}$, est lié à deux connexions ω et ω' sur $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ et $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, G')$ respectivement dont les $L(E)$ - et $L'(E')$ -différentiations covariantes sont notées Δ et Δ' , par la relation

$$(VII.1.1) \quad \Delta' \circ \varphi_{L(E)} = \varphi_{L'(E')} \circ \Delta,$$

alors, il existe un couple d'homomorphismes compatibles sur

$$h_\gamma : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'_\gamma \quad \text{et} \quad \psi_\gamma : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G}'_\gamma,$$

déterminant, par modelage sur $\mathcal{E}(\mathcal{X}, \mathbf{G})$ et $\mathcal{E}'_\gamma(\mathcal{X}, \mathbf{G}'_\gamma)$, les homomorphismes

$$\gamma_{\mathcal{M}'(\mathcal{E}')} \circ \varphi_{\mathcal{M}(\mathcal{E})}, \quad \gamma_{\mathcal{E}'(\mathcal{E}')} \circ \varphi_{\mathcal{E}(\mathcal{E})} \quad \text{et} \quad \gamma_{\mathbf{C}'(\mathbf{E}')} \circ \varphi_{\mathbf{C}(\mathbf{E})}$$

($\varphi_{\mathbf{C}(\mathbf{E})}$ étant naturellement défini par $\varphi_{\mathbf{C}(\mathbf{E})}(\omega) = \omega'$ et par les opérations de $\mathbf{L}^1(\mathbf{E})$ [resp. $\mathbf{L}^1(\mathbf{E}')$] sur $\mathbf{C}(\mathbf{E})$ [resp. $\mathbf{C}'(\mathbf{E}')$]).

Remarque. — Avant de commencer la démonstration de ce théorème, remarquons que, dans les hypothèses, il ne figure aucune condition portant sur les courbures. Cependant, si l'égalité (VII.4.1) n'entraîne évidemment pas $\Omega(\omega') = \varphi_{\mathbf{L}(\mathbf{E})}(\Omega(\omega))$, elle implique néanmoins une égalité de ce type lorsqu'on remplace $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, \mathbf{G}')$ par $\mathcal{E}'_\gamma(\mathcal{X}, \mathbf{G}'_\gamma)$. Plus précisément, si l'on pose

$$\omega'_\gamma = \gamma_{\mathbf{C}'(\mathbf{E}')}(\omega'),$$

on a

$$\Omega(\omega'_\gamma) = \gamma_{\mathbf{L}'(\mathbf{E}')}(\varphi_{\mathbf{L}(\mathbf{E})}(\Omega(\omega))).$$

En effet, en appliquant deux fois de suite l'égalité (VII.4.1), on a, quel que soit $\theta \in \mathbf{L}(\mathbf{E})$:

$$\Delta^{/2}(\varphi_{\mathbf{L}(\mathbf{E})}(\theta)) = \varphi_{\mathbf{L}(\mathbf{E})}(\Delta^2 \theta).$$

Mais,

$$\Delta^2 \theta = [\Omega(\omega), \theta],$$

et par suite,

$$\Delta^{/2}(\varphi_{\mathbf{L}(\mathbf{E})}(\theta)) = \varphi_{\mathbf{L}(\mathbf{E})}([\Omega(\omega), \theta]) = [\varphi_{\mathbf{L}(\mathbf{E})}(\Omega(\omega)), \varphi_{\mathbf{L}(\mathbf{E})}(\theta)].$$

Puis en passant de $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, \mathbf{G}')$ à $\mathcal{E}'_\gamma(\mathcal{X}, \mathbf{G}'_\gamma)$ et en continuant à noter par le crochet les opérations de $\mathcal{L}'_\gamma(\mathcal{E}'_\gamma)$ sur $\mathcal{L}'(\mathcal{E}') = \mathcal{L}'(\mathcal{E}')$ on a

$$\Delta^{/2}(\varphi_{\mathbf{L}(\mathbf{E})}(\theta)) = [\gamma_{\mathbf{L}'(\mathbf{E}')}(\varphi_{\mathbf{L}(\mathbf{E})}(\Omega(\omega))), \varphi_{\mathbf{L}(\mathbf{E})}(\theta)].$$

Or,

$$\Delta^{/2}(\varphi_{\mathbf{L}(\mathbf{E})}(\theta)) = [\Omega(\omega'_\gamma), \varphi_{\mathbf{L}(\mathbf{E})}(\theta)]$$

comme ces égalités sont vérifiées quel que soit $\theta \in \mathbf{L}(\mathbf{E})$ et que les homomorphismes $\varphi_{\mathcal{E}(\mathcal{E})}$ et $\gamma_{\mathcal{E}'(\mathcal{E}')}$ sont des homomorphismes *sur*, on en déduit

$$\Omega(\omega'_\gamma) = \gamma_{\mathbf{L}'(\mathbf{E}')}(\varphi_{\mathbf{L}(\mathbf{E})}(\Omega(\omega))).$$

Venons-en maintenant à la démonstration de notre théorème. Elle repose essentiellement sur le lemme suivant où $\tau_\omega(l_x)$ désigne, rappelons-le, l'élément de l'espace structural gauche associé à la connexion ω et au lacet l_x de \mathcal{X} .

LEMME. — *Quel que soit le lacet l_x de \mathcal{X} , on a*

$$\tau_{\omega'_\gamma}(l_x) = \gamma_{\mathcal{M}'(\mathcal{E}')}(\varphi_{\mathcal{M}(\mathcal{E})}(\tau_\omega(l_x))).$$

Nous considérons donc un lacet en x , $l_x: I \rightarrow \mathcal{X} [l_x(0) = l_x(1) = x]$. L'égalité (VII.1.1) montre alors que le champ $c^{\mathcal{E}^0(\mathcal{E})}(\omega)$ qui définit le transport parallèle dans $\mathcal{E}^0(\mathcal{E})$, relativement à ω , est projetable par $\varphi_{\mathcal{E}(\mathcal{E})}$ et que son image n'est autre que le champ $c^{\mathcal{E}'^0(\mathcal{E}')}(\omega')$ qui définit le transport parallèle dans $\mathcal{E}'^0(\mathcal{E}')$, relativement à ω' . Nous avons vu qu'il en était alors de même de $c^{\mathcal{N}(\mathcal{E})}(\omega)$ et de $c^{\mathcal{N}'(\mathcal{E}')}(\omega')$ et que, en notant comme d'habitude,

$$\mu_{\mathcal{N}(\mathcal{E})}^{l_x, \omega}: \mathcal{N}_x(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{N}_x(\mathcal{E}), \quad \mu_{\mathcal{N}'(\mathcal{E}')}^{l_x, \omega'}: \mathcal{N}'_x(\mathcal{E}') \rightarrow \mathcal{N}'_x(\mathcal{E}')$$

les isomorphismes des fibres de $\mathcal{N}(\mathcal{E})$ et de $\mathcal{N}'(\mathcal{E}')$ de projection $l_x(0)$ sur les fibres de projection $l_x(1)$ de ces mêmes espaces, on avait le diagramme compatible (c'est-à-dire commutatif) suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{N}_x(\mathcal{E}) & \xrightarrow[\mu_{\mathcal{N}(\mathcal{E})}^{l_x, \omega}]{} & \mathcal{N}_x(\mathcal{E}) \\ \varphi_{\mathcal{N}(\mathcal{E})} \downarrow & & \downarrow \varphi_{\mathcal{N}(\mathcal{E})} \\ \mathcal{N}'_x(\mathcal{E}') & \xrightarrow[\mu_{\mathcal{N}'(\mathcal{E}')}^{l_x, \omega'}]{} & \mathcal{N}'_x(\mathcal{E}') \end{array}$$

Fig. 11.

Mais, comme l_x est un lacet en x , on a

$$\mu_{\mathcal{N}(\mathcal{E})}^{l_x, \omega} = \text{Int}(\tau_\omega(l_x)) \quad \text{et} \quad \mu_{\mathcal{N}'(\mathcal{E}')}^{l_x, \omega'} = \text{Int}(\tau_{\omega'}(l_x)).$$

Le diagramme précédent se traduit alors par l'égalité ci-dessous, valable quel que soit le point x de \mathcal{X} , et où m est un élément quelconque de la fibre de $\mathcal{N}(\mathcal{E})$ de projection x :

$$\varphi_{\mathcal{N}(\mathcal{E})}(\text{Int}(\tau_\omega(l_x))m) = \text{Int}(\tau_{\omega'}(l_x))\varphi_{\mathcal{N}(\mathcal{E})}(m).$$

Comme, par hypothèse, $\varphi_{\mathcal{N}(\mathcal{E})}$ applique $\mathcal{N}_x(\mathcal{E})$ sur $\mathcal{N}'_x(\mathcal{E}')$, cette dernière relation est équivalente à

$$\gamma_{\mathcal{N}'(\mathcal{E}')}(\varphi_{\mathcal{N}(\mathcal{E})}(\tau_\omega(l_x))) = \gamma_{\mathcal{N}'(\mathcal{E}')}(\tau_{\omega'}(l_x)).$$

Mais on a aussi

$$\gamma_{\mathcal{N}'(\mathcal{E}')}(\tau_{\omega'}(l_x)) = \tau_{\omega'}(l_x),$$

et par suite

$$\tau_{\omega'}(l_x) = \gamma_{\mathcal{N}'(\mathcal{E}')}(\varphi_{\mathcal{N}(\mathcal{E})}(\tau_\omega(l_x))),$$

ce qui est bien la formule annoncée.

On définit alors ψ_γ et h_γ en utilisant le procédé qui nous a servi dans le cas simplement connexe et que nous rappelons rapidement :

1° On choisit un point $x_0 \in \mathcal{X}$ et, dans les fibres de \mathcal{E} et \mathcal{E}'_γ de projection x_0 ,

deux points $y_0 \in \mathcal{E}_{x_0}$, $y'_0 \in \mathcal{E}'_{y,x_0}$. Cela, de façon absolument arbitraire. On pose ensuite

$$\psi_\gamma = j_{\mathcal{N}'_\gamma}(y'_0) \circ \gamma_{\mathcal{N}'(\mathcal{E}')} \circ \varphi_{\mathcal{N}(\mathcal{E})} \circ i_{\mathcal{N}}(y_0),$$

et l'on définit la restriction de h_γ à \mathcal{E}_{x_0} par l'égalité

$$h_\gamma(y_0 \cdot s) = y'_0 \cdot \psi_\gamma(s) \quad (s \in \mathbb{G}),$$

ce qui revient à poser

$$h_\gamma(m \cdot y_0) = \gamma_{\mathcal{N}'(\mathcal{E}')}(\varphi_{\mathcal{N}(\mathcal{E})}(m)) \cdot y'_0 \quad [m \in \mathcal{N}_{x_0}(\mathcal{E})].$$

2° On étend la définition de h_γ à l'espace \mathcal{E} tout entier, en faisant correspondre à tout chemin ω -horizontal λ d'origine $y \in \mathcal{E}_{x_0}$ et de projection $l: I \rightarrow \mathcal{X}[l(0) = x_0]$, le chemin ω'_γ -horizontal d'origine $h_\gamma(y)$ et de projection l' . Plus précisément, on pose, en notant ce dernier chemin λ_γ :

$$h_\gamma(\lambda(t)) = \lambda_\gamma(t).$$

Il résulte immédiatement du lemme ci-dessus que, si l et l' sont deux chemins d'origine x_0 et d'extrémité commune x_1 , et si les chemins ω -horizontaux λ et λ' de projections l et l' et d'origines y , $y' \in \mathcal{E}_{x_0}$ ont également même extrémité, alors, les chemins ω'_γ -horizontaux λ_γ et λ'_γ d'origines $h_\gamma(y)$ et $h_\gamma(y')$ et de projections l et l' respectivement, aboutissent au même point de \mathcal{E}'_1 . On a donc défini ainsi un homomorphisme h_γ d'espaces fibrés différentiables. Il est facile de vérifier ensuite que ψ_γ et h_γ sont compatibles et que, par modelage sur \mathcal{E} et \mathcal{E}'_γ , ils déterminent les homomorphismes annoncés. Explicitement, si l'on ne recule pas devant les notations, on a

$$\psi_{\gamma, \mathcal{N}(\mathcal{E})}^{\mathcal{E}'_\gamma} = \gamma_{\mathcal{N}'(\mathcal{E}')} \circ \varphi_{\mathcal{N}(\mathcal{E})}, \quad \psi_{\gamma, \mathcal{E}(\mathcal{E})}^{\mathcal{E}'_\gamma} = \gamma_{\mathcal{E}'(\mathcal{E}')} \circ \varphi_{\mathcal{E}(\mathcal{E})}$$

et

$$\psi_{\gamma, \mathcal{C}(\mathcal{E})}^{\mathcal{E}'_\gamma}(\omega) = \omega'_\gamma.$$

Le théorème VII.1.1 est donc démontré, mais on peut aller plus loin : de l'existence de l'homomorphisme $\varphi_{\mathcal{N}(\mathcal{E})}: \mathcal{N}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{N}'(\mathcal{E}')$ (existence que nous n'avons pas complètement utilisée puisque seul l'homomorphisme $\gamma_{\mathcal{N}'(\mathcal{E}')} \circ \varphi_{\mathcal{N}(\mathcal{E})}$ nous a servi) et de celle du couple compatible (ψ_γ, h_γ) que nous venons de déterminer, on peut déduire un homomorphisme $\psi: \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{G}'$ déterminant $\varphi_{\mathcal{N}(\mathcal{E})}$ par modelage et ψ_γ , par passage au quotient. Comme le fait que $\mathcal{N}(\mathcal{E})$ et $\mathcal{N}'(\mathcal{E}')$ sont les espaces structuraux gauches de $\mathcal{E}(\mathcal{X}, \mathbb{G})$ et $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, \mathbb{G}')$ n'intervient pas dans ce résultat, nous élargirons le problème en le posant de la façon suivante ⁽²²⁾.

Soient $\mathcal{E}_\gamma(\mathcal{X}, \mathbb{G}_\gamma)$ et $\mathcal{E}'_\gamma(\mathcal{X}, \mathbb{G}'_\gamma)$ deux espaces fibrés principaux différentiables de même base \mathcal{X} et dont les groupes structuraux \mathbb{G}_γ et \mathbb{G}'_γ sont les quotients de

(22) Il ne s'agit pas d'une généralisation gratuite. Le problème se posera plus loin sous cette forme.

deux groupes de Lie connexes G et G' par leurs centres respectifs H et H' . Par modelage de $\mathfrak{N} = G \times \mathfrak{X}$ et $\mathfrak{N}' = G' \times \mathfrak{X}$ sur \mathcal{E}_γ et \mathcal{E}'_γ (G_γ et G'_γ opérant sur G et G' par l'intermédiaire des automorphismes intérieurs), on construit $\mathfrak{N}(\mathcal{E}_\gamma)$ et $\mathfrak{N}'(\mathcal{E}'_\gamma)$. De même, $\mathcal{L}(\mathcal{E}_\gamma)$ et $\mathcal{L}'(\mathcal{E}'_\gamma)$ s'obtiennent par modelage des espaces \mathcal{L} , \mathcal{L}' des formes différentielles sur \mathfrak{X} à valeurs dans \underline{G} et \underline{G}' . Soient alors ω_γ et ω'_γ deux connexions sur \mathcal{E}_γ et \mathcal{E}'_γ . Nous noterons Δ et Δ' les $L(E_\gamma)$ - et $L'(E'_\gamma)$ -différentiations covariantes qui leurs sont associées et Δ_γ , Δ'_γ les $L_\gamma(E_\gamma)$ - et $L'_\gamma(E'_\gamma)$ -différentiations covariantes également associées à ω_γ et ω'_γ .

Nous supposons d'abord qu'il existe un homomorphisme

$$\varphi_{\mathfrak{N}(\mathcal{E}_\gamma)} : \mathfrak{N}(\mathcal{E}_\gamma) \rightarrow \mathfrak{N}'(\mathcal{E}'_\gamma)$$

auquel est associé

$$\varphi_{\mathcal{L}(\mathcal{E}_\gamma)} : \mathcal{L}(\mathcal{E}_\gamma) \rightarrow \mathcal{L}'(\mathcal{E}'_\gamma).$$

De plus, soit

$$\Phi : G_\gamma \rightarrow G'_\gamma \quad \text{et} \quad h : \mathcal{E}_\gamma \rightarrow \mathcal{E}'_\gamma$$

un couple d'homomorphismes compatibles tels que :

1° L'homomorphisme $\varphi_{\mathfrak{N}_\gamma(\mathcal{E}_\gamma)}$, déduit de $\varphi_{\mathfrak{N}(\mathcal{E}_\gamma)}$ par passage au quotient coïncide avec $\Phi_{\mathfrak{N}_\gamma(\mathcal{E}_\gamma)}^h$:

$$\varphi_{\mathfrak{N}_\gamma(\mathcal{E}_\gamma)} = \Phi_{\mathfrak{N}_\gamma(\mathcal{E}_\gamma)}^h,$$

ce qui entraîne

$$\varphi_{\mathcal{L}_\gamma(\mathcal{E}_\gamma)} = \Phi_{\mathcal{L}_\gamma(\mathcal{E}_\gamma)}^h;$$

2° On ait l'égalité

$$\Phi_{L_\gamma(E_\gamma)}^h(\omega_\gamma) = \omega'_\gamma$$

qui entraîne

$$\Delta'_\gamma \circ \varphi_{L_\gamma(E_\gamma)} = \varphi_{L_\gamma(E_\gamma)} \circ \Delta_\gamma.$$

3° La relation suivante, qui est compatible avec le 2°, mais ne s'en déduit pas, soit vérifiée :

$$\Delta' \circ \varphi_{L(E_\gamma)} = \varphi_{L(E_\gamma)} \circ \Delta.$$

Ce dernier point étant équivalent au fait que le champ $c^{\omega_\gamma}(\omega_\gamma)$ est projectable par $\varphi_{\mathcal{L}(\mathcal{E}_\gamma)}$ et que son image est $c^{\omega'_\gamma}(\omega'_\gamma)$, il en résulte que le champ $c^{\mathfrak{N}(\mathcal{E}_\gamma)}(\omega_\gamma)$ est lui-même projectable par $\varphi_{\mathfrak{N}(\mathcal{E}_\gamma)}$ et que son image est $c^{\mathfrak{N}'(\mathcal{E}'_\gamma)}(\omega'_\gamma)$.

Nous sommes maintenant en mesure de montrer que $\varphi_{\mathfrak{N}(\mathcal{E}_\gamma)}$ résulte, par modelage, d'un homomorphisme

$$\psi : G \rightarrow G'.$$

En effet, il est clair, tout d'abord, que l'homomorphisme $\varphi_{\mathfrak{N}(\mathcal{E}_\gamma)}$ et h sont compatibles, par hypothèse, avec $\varphi_{\mathfrak{N}_\gamma(\mathcal{E}_\gamma)}$. Autrement dit, les relations du type (I.4.1) et (I.4.2) sont vérifiées :

$$\begin{aligned} h(m \cdot \gamma) &= \varphi_{\mathfrak{N}_\gamma(\mathcal{E}_\gamma)}(m) \cdot h(\gamma) & [m \in \mathfrak{N}_\gamma(\mathcal{E}_\gamma), \gamma \in \mathcal{E}_\gamma], \\ \varphi_{\mathfrak{N}(\mathcal{E}_\gamma)}(\text{Int}(m)\mu) &= \text{Int}(\varphi_{\mathfrak{N}_\gamma(\mathcal{E}_\gamma)}(m))\varphi_{\mathfrak{N}(\mathcal{E}_\gamma)}(\mu) & [\mu \in \mathfrak{N}(\mathcal{E}_\gamma)]. \end{aligned}$$

En revenant à \mathcal{N} , on voit donc que $\varphi_{\mathcal{N}(\mathcal{E}_\gamma)}$ résulte, par modelage, d'un homomorphisme

$$\psi_{\mathcal{N}} : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}',$$

c'est-à-dire que l'homomorphisme $j_{\mathcal{N}'}(h(y)) \circ \varphi_{\mathcal{N}(\mathcal{E}_\gamma)} \circ i_{\mathcal{N}}(y)$ [qui définit $\psi_{\mathcal{N}}$ sur la fibre de $\mathcal{N}(\mathcal{E}_\gamma)$ de projection $p(y)$ ($y \in \mathcal{E}_\gamma$)] ne dépend que de la projection de y sur \mathcal{X} . Il reste à montrer que, étant donné $s \in G$ considéré comme un élément de \mathcal{N} , l'élément $j_{\mathcal{N}'}(h(y))[\varphi_{\mathcal{N}(\mathcal{E}_\gamma)}(i_{\mathcal{N}}(y)s)]$ de $\mathcal{N}'(\mathcal{E}'_\gamma)$, considéré comme appartenant à G' , ne dépend pas de $x = p(y)$. Pour cela, il suffira de choisir $x' \in \mathcal{X}$ et distinct de x , puis de joindre x à x' par un chemin différentiable $l[l(0) = x, l(1) = x']$. Si $s \in G$ reste invariant lorsque y_t se déplace sur un chemin ω_γ -horizontal de projection l , l'élément $m_t = i_{\mathcal{N}}(y_t)s$ se déplace parallèlement à lui-même. D'après ce qui précède, il en est alors de même de $m'_t = \varphi_{\mathcal{N}(\mathcal{E}_\gamma)}(m_t)$. Il en résulte que $j_{\mathcal{N}'}(h(y_t))m'_t$, considéré comme un élément de G' , reste invariant, puisque $h(y_t)$ reste également sur un chemin ω'_γ -horizontal. $\psi_{\mathcal{N}}$ résulte donc bien d'un homomorphisme

$$\psi : G \rightarrow G'.$$

D'autre part, de l'hypothèse que $\varphi_{\mathcal{N}(\mathcal{E}_\gamma)}$ induit $\Phi_{\mathcal{N}(\mathcal{E}_\gamma)}^h$ par passage au quotient, on déduit que ψ induit $\Phi : G \rightarrow G'$. Nous pouvons donc énoncer :

PROPOSITION VII.1.1. — *Dans les conditions énoncées ci-dessus, il existe un homomorphisme tel que le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} \Psi : G & \longrightarrow & G' \\ \gamma \downarrow & \Psi \longrightarrow & \downarrow \gamma' \\ G/H = G\gamma & \xrightarrow{\Phi} & G'\gamma' = G'/H' \end{array}$$

Fig. 12.

soit commutatif et que, par modelage, ψ détermine $\varphi_{\mathcal{N}(\mathcal{E}_\gamma)}$:

$$i_{\mathcal{N}'}(h(y)) \circ \psi = \varphi_{\mathcal{N}(\mathcal{E}_\gamma)} \circ i_{\mathcal{N}}(y).$$

Remarque. — La proposition précédente s'étend sans difficulté au cas où G_γ et G'_γ opèrent sur deux groupes de Lie quelconques G et G' et où ces opérations sont des automorphismes de G et de G' .

En nous replaçant dans le contexte du théorème VII.1.1, nous voyons immédiatement qu'on a :

COMPLÉMENT AU THÉORÈME VII.1.1. — *En plus du couple d'homomorphismes*

compatibles (ψ_γ, h_γ) , il existe un homomorphisme

$$\psi : G \rightarrow G'$$

tel que

$$\gamma' \circ \psi = \psi_\gamma$$

et que, par modelage sur $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ et sur $\mathcal{E}'_\gamma(\mathcal{X}, G'_\gamma)$, ψ détermine $\varphi_{\mathcal{N}(\mathcal{E})}$. Il en résulte que l'homomorphisme associé $\underline{\psi} : \underline{G} \rightarrow \underline{G}'$ détermine $\varphi_{\mathcal{E}(\mathcal{E})}$.

Le problème qui se pose donc maintenant est celui de la détermination, dans le cas où \mathcal{X} n'est pas simplement connexe, d'un homomorphisme

$$h : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$$

compatible avec ψ et répondant aux conditions du problème. Nous aborderons cette question après l'examen, au paragraphe suivant, d'une application directe de ce qui précède.

2. CAS PARTICULIER. — Si, tout en conservant les hypothèses du théorème VII.1.1, nous supposons de plus que le centre de G' se réduit à l'identité (c'est-à-dire que $G'_\gamma = G'$), il est inutile de supposer que l'homomorphisme $\varphi_{\mathcal{N}(\mathcal{E})}$ existe car il résulte de l'existence de $\varphi_{\mathcal{E}(\mathcal{E})}$. On transpose en effet sans difficulté au cas des espaces fibrés à fibre-groupe de Lie la démonstration du résultat correspondant, dans le cas d'un simple groupe de Lie. Considérons un revêtement simplement connexe $[\mathbb{R}(G), \rho : \mathbb{R}(G) \rightarrow G]$ de G et construisons $\mathcal{N}_R(\mathcal{E})$ par modelage de $\mathcal{N}_R = \mathbb{R}(G) \times \mathcal{X}$ sur $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$, G opérant sur $\mathbb{R}(G)$ par l'intermédiaire des automorphismes intérieurs. On note

$$\rho_{\mathcal{N}(\mathcal{E})} : \mathcal{N}_R(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{N}(\mathcal{E})$$

l'homomorphisme déduit de ρ . Comme les algèbres de Lie des fibres de $\mathcal{N}_R(\mathcal{E})$ s'identifient (grâce à $\rho_{\mathcal{N}(\mathcal{E})}$) à celles des fibres de $\mathcal{N}(\mathcal{E})$ et, par suite, aux fibres de $\mathcal{L}^0(\mathcal{E})$, il existe, au-dessus de tout point $x \in \mathcal{X}$, un homomorphisme

$$\varphi_{\mathcal{N}_R(\mathcal{E})} : \mathcal{N}_{R,x}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{N}'_x(\mathcal{E}')$$

auquel $\varphi_{\mathcal{E}(\mathcal{E})}$ est associé. Il faut alors vérifier que c'est bien un homomorphisme d'espaces fibrés qu'on a ainsi défini, c'est-à-dire qu'il est localement trivial. Cela se fait facilement, soit en utilisant des sections locales de \mathcal{E} et \mathcal{E}' , soit en se servant de la formule (VII.1.1) et du transport parallèle.

Dans ces conditions, comme le noyau de $\varphi_{\mathcal{N}_R(\mathcal{E})}$ contient nécessairement le centre de $\mathcal{N}_R(\mathcal{E})$, et, par suite, le noyau de $\rho_{\mathcal{N}(\mathcal{E})}$, on déduit évidemment de $\varphi_{\mathcal{N}_R(\mathcal{E})}$ un homomorphisme

$$\varphi_{\mathcal{N}(\mathcal{E})} : \mathcal{N}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{N}'(\mathcal{E}').$$

Nous pouvons donc énoncer :

PROPOSITION VII.2.1. — *Étant donnés deux espaces fibrés principaux différentiables $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ et $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, G')$ de groupes G et G' connexes, si le centre de G se réduit à l'élément neutre et s'il existe un homomorphisme sur*

$$\varphi_{\mathcal{L}(\mathcal{E})} : \mathcal{L}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{L}'(\mathcal{E}')$$

de leurs espaces de Lie, ainsi que deux connexions ω et ω' liées à $\varphi_{\mathcal{L}(\mathcal{E})}$ par la relation

$$\Delta' \circ \varphi_{L(E)} = \varphi_{L(E')} \circ \Delta,$$

il existe alors un couple d'homomorphismes compatibles

$$\psi : G \rightarrow G' \quad \text{et} \quad h : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$$

tels que

$$\psi_{\mathcal{L}(\mathcal{E})}^h = \varphi_{\mathcal{L}(\mathcal{E})} \quad \text{et} \quad \psi_{L(E)}^h(\omega) = \omega'.$$

3. CAS GÉNÉRAL. — Nous commençons maintenant l'examen du problème sous sa forme la plus générale, c'est-à-dire que, en admettant simplement que G et G' sont connexes, nous supposons qu'il existe un homomorphisme

$$\varphi_{\mathcal{N}(\mathcal{E})} : \mathcal{N}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{N}'(\mathcal{E}')$$

de l'espace structural gauche de $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ dans l'espace structural gauche de $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, G')$, auquel est associé l'homomorphisme

$$\varphi_{\mathcal{L}(\mathcal{E})} : \mathcal{L}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{L}'(\mathcal{E}')$$

de leurs espaces de Lie.

Nous supposons, bien entendu, qu'il existe en outre deux connexions ω et ω' de $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ et $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, G')$ dont les $L(E)$ - et $L(E')$ - différentiations covariantes sont Δ et Δ' , et qu'on a

$$(VII.3.1) \quad \Delta' \circ \varphi_{L(E)} = \varphi_{L(E')} \circ \Delta,$$

ainsi que

$$(VII.3.2) \quad \Omega(\omega') = \varphi_{L(E)}(\Omega(\omega)).$$

Nous proposons de donner d'abord une condition nécessaire d'existence d'un couple d'homomorphismes compatibles (ψ, h) déterminant $\varphi_{\mathcal{N}(\mathcal{E})}$ et tels que $\psi_{L(E)}^h(\omega) = \omega'$.

PROPOSITION VII.3.1. — *Dans les conditions ci-dessus, pour qu'il existe un couple d'homomorphismes (ψ, h) tels que $\psi_{\mathcal{N}(\mathcal{E})}^h = \varphi_{\mathcal{N}(\mathcal{E})}$ et $\psi_{L(E)}^h(\omega) = \omega'$, il est nécessaire qu'on ait l'inclusion*

$$\mathcal{X}(\omega') \subset \varphi_{\mathcal{N}(\mathcal{E})}(\mathcal{N}(\mathcal{E})),$$

où $\mathcal{X}(\omega')$ désigne, rappelons-le, l'espace d'holonomie de ω' .

En effet, si un tel couple existe, il est clair que $h(\mathcal{E})$ est une variété intégrale du champ normal $\Gamma(\varphi_{\mathcal{L}(\mathcal{E})}(\mathcal{L}^0(\mathcal{E})), \omega')$ et que son espace structural gauche est $\varphi_{\mathcal{M}(\mathcal{E})}(\mathcal{M}(\mathcal{E}))$. Or, dans les hypothèses faites, ce champ normal est effectivement intégrable. En effet, la stabilité du faisceau $\varphi_{L(E)}(L(E))$ pour la différentiation covariante Δ' associée à ω' résulte de (VII.3.1), tandis que (VII.3.2) montre que la condition portant sur la courbure est vérifiée. Une condition nécessaire d'existence de (ψ, h) est donc que les variétés intégrales de ce champ soient à fibres connexes, puisque G est connexe. Or, l'espace structural gauche d'une telle variété s'obtient, d'après la proposition V.6.3, à partir de $\mathcal{X}(\omega')$ et du sous-espace de $\mathcal{M}'(\mathcal{E}')$ à fibres connexes, admettant $\varphi_{\mathcal{L}(\mathcal{E})}(\mathcal{L}^0(\mathcal{E}))$ pour espace d'algèbres de Lie. Autrement dit, cet espace structural gauche est engendré par $\mathcal{X}(\omega')$ et $\varphi_{\mathcal{M}(\mathcal{E})}(\mathcal{M}(\mathcal{E}))$. Il est donc bien nécessaire que $\mathcal{X}(\omega') \subset \varphi_{\mathcal{M}(\mathcal{E})}(\mathcal{M}(\mathcal{E}))$.

On a alors :

PROPOSITION VII.3.2. — *Dans les conditions exposées au début de ce paragraphe, si, en outre, l'inclusion de la proposition précédente est vérifiée :*

$$\mathcal{X}(\omega') \subset \varphi_{\mathcal{M}(\mathcal{E})}(\mathcal{M}(\mathcal{E})),$$

on peut ramener la recherche du couple (ψ, h) à celle d'un couple (ψ', h') d'homomorphismes sur, en remplaçant $\mathcal{M}'(\mathcal{E}')$ par l'image $\varphi_{\mathcal{M}(\mathcal{E})}(\mathcal{M}(\mathcal{E}))$ de $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ par $\varphi_{\mathcal{M}(\mathcal{E})}$, $\mathcal{L}'(\mathcal{E}')$ par l'image de $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ par $\varphi_{\mathcal{L}(\mathcal{E})}$, $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, G')$ par une variété intégrale quelconque du champ normal $\Gamma(\varphi_{\mathcal{L}(\mathcal{E})}(\mathcal{L}^0(\mathcal{E})), \omega')$ et ω' , par sa restriction à V .

Cette proposition est une conséquence immédiate des résultats du paragraphe VI.1 et de la proposition VII.3.1.

Nous nous proposons maintenant de montrer qu'après nous être ramené au cas où $\varphi_{\mathcal{M}(\mathcal{E})}$ est un *homomorphisme sur*, nous pouvons nous ramener à celui où $\varphi_{\mathcal{M}(\mathcal{E})}$ est un *isomorphisme sur*.

PROPOSITION VII.3.3. — *Le noyau \mathcal{J} de $\varphi_{\mathcal{M}(\mathcal{E})}$ est un espace fibré de sous-groupes distingués de $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ qui s'obtient en modelant sur $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ le produit $\mathcal{M}_{\mathcal{E}} = \mathcal{G} \times \mathcal{X}$ d'un sous-groupe distingué \mathcal{G} de G par \mathcal{X} , G opérant sur \mathcal{G} par l'intermédiaire des automorphismes intérieurs.*

Il est évident, tout d'abord, que le noyau \mathcal{J} de $\varphi_{\mathcal{M}(\mathcal{E})}$ est constitué de sous-groupes distingués des fibres de $\mathcal{M}(\mathcal{E})$. De plus, la relation (VII.3.1) montre, comme d'habitude, que le champ définissant le transport parallèle dans $\mathcal{L}^0(\mathcal{E})$ relativement à ω est projetable par $\varphi_{\mathcal{L}(\mathcal{E})}$ et que son image est le champ définissant le transport parallèle dans $\mathcal{L}'^0(\mathcal{E}')$, relativement à ω' . Il en résulte qu'il en est de même de $c^{\mathcal{M}(\mathcal{E})}(\omega)$ et de $c^{\mathcal{M}'(\mathcal{E}')}(\omega')$. Par suite, le noyau de $\varphi_{\mathcal{M}(\mathcal{E})}$ est

invariant par parallélisme. Cela signifie que, si les deux points y et y' de \mathcal{E} sont reliés par un chemin différentiable ω -horizontal, on a l'égalité

$$j_{\mathcal{M}}(y)\mathcal{J}_x = j_{\mathcal{M}}(y')\mathcal{J}_{x'} \quad [p(y) = x, p'(y') = x']$$

valable dans G , et non dans \mathcal{M} , bien entendu.

Si, au contraire, y et y' appartiennent à la même fibre \mathcal{E}_x de \mathcal{E} , sans être nécessairement reliés par un chemin ω -horizontal, il existe $s \in G$ tel que $y' = y \cdot s$ et l'égalité (I.3.1) s'écrit

$$j_{\mathcal{M}}(y \cdot s)\mathcal{J}_x = \text{Int}(s^{-1})(j_{\mathcal{M}}(y)\mathcal{J}_x).$$

Comme \mathcal{J}_x est distingué, on a donc

$$j_{\mathcal{M}}(y \cdot s)\mathcal{J}_x = j_{\mathcal{M}}(y)\mathcal{J}_x.$$

En combinant ces deux résultats, on voit que le sous-groupe $j_{\mathcal{M}}(y)\mathcal{J}_x$ de G est indépendant du choix de y dans \mathcal{E} . Si l'on pose $\mathcal{G} = j_{\mathcal{M}}(y)\mathcal{J}_x$, on a donc bien $\mathcal{J} = \mathcal{M}_{\mathcal{G}}(\mathcal{E})$, avec $\mathcal{M}_{\mathcal{G}} = \mathcal{G} \times \mathcal{X}$.

Cette proposition montre qu'il est possible, en effectuant le quotient de $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ par $\mathcal{J} = \mathcal{M}_{\mathcal{G}}(\mathcal{E})$, de \mathcal{E} par \mathcal{G} [ou, ce qui revient au même, par $\mathcal{J} = \mathcal{M}_{\mathcal{G}}(\mathcal{E})$]; et de G par \mathcal{G} également, de transformer $\varphi_{\mathcal{M}(\mathcal{E})}$ en isomorphisme ⁽²³⁾.

Plus précisément, le cas exposé au début du paragraphe se transforme successivement de la façon suivante :

1° En supposant que la condition nécessaire d'existence des homomorphismes (ψ, h) soit réalisée [c'est-à-dire $\mathcal{X}(\omega') \subset \varphi_{\mathcal{M}(\mathcal{E})}(\mathcal{M}(\mathcal{E}))$], la proposition VII.3.2 montre qu'on peut remplacer $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, G')$ par un de ses sous-espaces fibrés principaux différentiable à groupe structural $\mathcal{E}'_1(\mathcal{X}, G')$ déterminé à une translation à droite près et choisi de telle sorte que $\varphi_{\mathcal{M}(\mathcal{E})}$ devienne un homomorphisme $\varphi_{\mathcal{M}(\mathcal{E})}^1$ de $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ sur l'espace structural gauche $\mathcal{M}'_1(\mathcal{E}'_1)$ de $\mathcal{E}'_1(\mathcal{X}, G')$. Les conditions (VII.3.1) et (VII.3.2) restent évidemment réalisées.

2° On effectue ensuite le quotient de $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ par le noyau de l'homomorphisme $\varphi_{\mathcal{M}(\mathcal{E})}^1$ et l'on transforme ainsi $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ en $\mathcal{E}_1(\mathcal{X}, G_1)$ et $\varphi_{\mathcal{M}(\mathcal{E})}^1$ en un *isomorphisme* de l'espace structural gauche $\mathcal{M}_1(\mathcal{E}_1)$ de $\mathcal{E}_1(\mathcal{X}, G_1)$ sur l'espace structural gauche de $\mathcal{E}'_1(\mathcal{X}, G'_1)$. Pour cet isomorphisme, on a toujours des relations du type (VII.3.1) et (VII.3.2).

Il reste à voir ce qu'on peut obtenir dans ces conditions, du théorème VII.4.4 et de son complément. C'est ce point que nous examinerons au début du paragraphe suivant.

(23) \mathcal{G} est évidemment fermé dans G .

Remarque. — La condition $\mathfrak{X}(\omega') \subset \varphi_{\mathfrak{N}(\mathcal{E})}(\mathfrak{N}(\mathcal{E}))$ est évidemment toujours réalisée lorsque $\varphi_{\mathfrak{N}(\mathcal{E})}$ est, par hypothèse, un homomorphisme sur, ou encore, lorsque \mathfrak{X} est simplement connexe.

4. CONDITION NÉCESSAIRE ET SUFFISANTE D'EXISTENCE DE h . — Nous supposons tout de suite que les opérations décrites au cours du paragraphe précédent ont été effectuées, c'est-à-dire que nous avons affaire à deux espaces fibrés principaux différentiables $\mathcal{E}(\mathfrak{X}, G)$ et $\mathcal{E}'(\mathfrak{X}, G')$ dont les espaces structuraux gauches sont liés par un *isomorphisme sur*

$$\varphi_{\mathfrak{N}(\mathcal{E})} : \mathfrak{N}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathfrak{N}'(\mathcal{E}'),$$

tel que l'isomorphisme $\varphi_{\mathcal{L}(\mathcal{E})}$ associé satisfasse aux conditions (VII.3.1) et (VII.3.2).

Nous savons alors, grâce au théorème VII.1.4, qu'il existe un couple d'isomorphismes compatibles

$$h_{\gamma} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'_{\gamma} \quad \text{et} \quad \psi_{\gamma} : G \rightarrow G'_{\gamma}$$

de $\mathcal{E}(\mathfrak{X}, G)$ sur le quotient \mathcal{E}'_{γ} de \mathcal{E}' par le centre H' de G' et de G sur $G' = G'/H'$.

Enfin, le complément au théorème VII.1.4 montre qu'il existe un isomorphisme $\psi : G \rightarrow G'$ induisant ψ_{γ} par passage au quotient et $\varphi_{\mathfrak{N}(\mathcal{E})}$ par modelage. Nous allons profiter de ces résultats pour modifier les notations et poser le problème sous une forme légèrement différente.

Nous identifierons d'abord G et G' par ψ et G_{γ} , G'_{γ} par passage au quotient. $\mathcal{E}(\mathfrak{X}, G)$ et $\mathcal{E}'(\mathfrak{X}, G')$ deviennent alors deux espaces fibrés principaux différentiables de même base \mathfrak{X} et de même groupe structural G . Nous les noterons donc $\mathcal{E}(\mathfrak{X}, G)$ et $\mathcal{E}'(\mathfrak{X}, G)$. De même, $\mathcal{E}_{\gamma}(\mathfrak{X}, G_{\gamma})$ et $\mathcal{E}'_{\gamma}(\mathfrak{X}, G'_{\gamma})$ deviennent $\mathcal{E}_{\gamma}(\mathfrak{X}, G_{\gamma})$ et $\mathcal{E}'_{\gamma}(\mathfrak{X}, G_{\gamma})$. Mais le G_{γ} -isomorphisme

$$h'_{\gamma} : \mathcal{E}_{\gamma} \rightarrow \mathcal{E}'_{\gamma},$$

déduit de h_{γ} , permet d'identifier à leur tour \mathcal{E}_{γ} et \mathcal{E}'_{γ} . Il n'y a plus lieu alors de distinguer les espaces structuraux gauches (resp. espaces de Lie) de \mathcal{E} et \mathcal{E}' qui, notés évidemment $\mathfrak{N}(\mathcal{E})$ et $\mathfrak{N}(\mathcal{E}')$ [resp. $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ et $\mathcal{L}(\mathcal{E}')$], seront confondus avec $\mathfrak{N}(\mathcal{E}_{\gamma})$ [resp. $\mathcal{L}(\mathcal{E}_{\gamma})$]. Les faisceaux de connexions, $C(\mathcal{E})$ et $C(\mathcal{E}')$, par contre, restent distincts, mais la formule (VII.3.1) et le fait que la sous-algèbre de \underline{G}_{γ} laissant \underline{G} invariant soit nulle, montrent que les images de ω et ω' par les homomorphismes appliquant canoniquement $C(\mathcal{E})$ et $C(\mathcal{E}')$ sur le faisceau des connexions $C_{\gamma}(\mathcal{E}_{\gamma})$ de $\mathcal{E}_{\gamma}(\mathfrak{X}, G_{\gamma})$, coïncident. Nous noterons ω_{γ} cette image commune, de sorte que Δ et Δ' peuvent être considérés comme les $L(\mathcal{E}_{\gamma})$ -différentiations covariantes associées à ω_{γ} . Il reste l'hypothèse (VII.3.2) qui se traduira par une simple égalité entre deux sections $\Omega(\omega)$ et $\Omega(\omega')$ de $L^2(\mathcal{E}_{\gamma})$.

En résumé, le problème se pose désormais de la façon suivante. Nous considérons deux espaces fibrés principaux différentiables $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ et $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, G)$ de même groupe structural connexe G , liés à un troisième espace fibré principal différentiable $\mathcal{E}_\gamma(\mathcal{X}, G_\gamma)$ de groupe structural $G_\gamma = G/H$, par deux homomorphismes.

$$\gamma_{\mathcal{E}} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}_\gamma \quad \text{et} \quad \gamma_{\mathcal{E}'} : \mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{E}_\gamma$$

compatibles l'un et l'autre avec l'homomorphisme canonique $\gamma : G \rightarrow G_\gamma$. Nous supposons de plus qu'il existe sur \mathcal{E} et \mathcal{E}' deux connexions ω et ω' dont les images par les homomorphismes $\gamma_{C(\mathcal{E})}$ et $\gamma_{C(\mathcal{E}'')}$ associés respectivement aux couples $(\gamma, \gamma_{\mathcal{E}})$, $(\gamma, \gamma_{\mathcal{E}'})$, coïncident :

$$(VII.4.1) \quad \gamma_{C(\mathcal{E})}(\omega) = \gamma_{C(\mathcal{E}'')}(\omega') = \omega_\gamma$$

et telles que, en identifiant $\mathcal{L}(\mathcal{E})$, $\mathcal{L}(\mathcal{E}'')$, $\mathcal{L}(\mathcal{E}_\gamma)$ [resp. $\mathfrak{N}(\mathcal{E})$, $\mathfrak{N}(\mathcal{E}'')$, $\mathfrak{N}(\mathcal{E}_\gamma)$], grâce à $\gamma_{\mathcal{E}}$, $\gamma_{\mathcal{E}'}$, on ait.

$$(VII.4.2) \quad \Omega(\omega) = \Omega(\omega').$$

Il s'agit alors de construire un G -isomorphisme (c'est-à-dire un isomorphisme compatible avec l'identité sur G)

$$h : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$$

induisant l'identité sur \mathcal{E}_γ et transformant ω en ω' .

C'est ce problème qui occupe la fin du chapitre. Nous commencerons par établir une condition nécessaire et suffisante d'existence.

Avant toutes choses, rappelons que, lorsque nous considérons le cercle S^1 , nous le supposons orienté, muni d'une origine et paramétré. En toute précision, nous l'identifierons ici au quotient des nombres réels modulo 1 et nous noterons $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ l'application canonique qui résulte de cette opération. L'origine choisie sur S^1 est $O = \alpha(0)$.

Considérons maintenant un lacet en $x_0 \in \mathcal{X}$, défini par une application différentiable

$$l_{x_0} : S^1 \rightarrow \mathcal{X} \quad [l_{x_0}(0) = x_0]$$

et soit

$$\bar{l} : S^1 \times I' \rightarrow \mathcal{X}$$

une homotopie différentiable de l_{x_0} (I' est un intervalle ouvert contenant I).

On pose

$$\bar{l}(x, t) = l_{x_t}(x) \quad (x \in S^1 \text{ et } t \in I')$$

ou, plus simplement

$$\bar{l}(x, t) = l'(x).$$

$l' = l_{x_t}$ est un lacet en $x_t = l(0, t) = l'(0)$, et l'on a par hypothèse, $l^0 = l_{x_0}$.

Nous poserons

$$m_0 = \tau_\omega(l_{x_0}), \quad m'_0 = \tau_{\omega'}(l_{x_0}), \quad m_1 = \tau_\omega(l_{x_1}), \quad m'_1 = \tau_{\omega'}(l_{x_1}).$$

Nous nous proposons de démontrer le

LEMME 1. — *Dans les conditions précédentes, si $m_0 = m'_0$, alors, $m_1 = m'_1$.*

Soient, $\mathcal{E}_\tau = \bar{l}^{-1}(\mathcal{E})$, $\mathcal{E}'_\tau = \bar{l}^{-1}(\mathcal{E}')$, $\mathcal{E}^\gamma_\tau = \bar{l}^{-1}(\mathcal{E}^\gamma)$ les espaces fibrés principaux de base $S^1 \times I$ induits par \bar{l} et ω_τ , ω'_τ , ω^γ_τ les connexions induites par \bar{l} également sur ces différents espaces. Les espaces et connexions induits par l^t [ou, si l'on préfère, les restrictions à (S^1, t) des espaces et connexions induits par \bar{l}] seront notés \mathcal{E}_μ , \mathcal{E}'_μ , \mathcal{E}^γ_μ , ω_μ , ω'_μ , ω^γ_μ . D'autre part, pour simplifier le langage, nous appliquerons à $S^1 \times I$ le vocabulaire des cylindres de révolution : génératrices, parallèles, etc.

A tout point $y \in \mathcal{E}_\tau$ (resp. \mathcal{E}'_τ , \mathcal{E}^γ_τ) de projection (x, t) sur $S^1 \times I$, on fait correspondre le point $\xi(y) \in \mathcal{E}_\rho$ [resp. $\xi'(y) \in \mathcal{E}'_\rho$, $\xi^\gamma(y) \in \mathcal{E}^\gamma_\rho$] défini comme la trace sur \mathcal{E}_ρ (resp. \mathcal{E}'_ρ , \mathcal{E}^γ_ρ) du chemin ω_τ -horizontal (resp. ω'_τ , ω^γ_τ) passant par y et se projetant sur la génératrice (x, I) qui passe par la projection de y . En posant

$$\begin{aligned} \mu(y) &= (\xi(y), t) & [y \in \mathcal{E}_\tau, p(y) = (x, t)] \\ \mu'(y) &= (\xi'(y), t) & [y \in \mathcal{E}'_\tau, p(y) = (x, t)] \\ \mu^\gamma(y) &= (\xi^\gamma(y), t) & [y \in \mathcal{E}^\gamma_\tau, p(y) = (x, t)] \end{aligned}$$

on définit des G-isomorphismes

$$\begin{aligned} \mu &: \mathcal{E}_\tau \rightarrow \mathcal{E}_\rho \times I, \\ \mu' &: \mathcal{E}'_\tau \rightarrow \mathcal{E}'_\rho \times I, \\ \mu^\gamma &: \mathcal{E}^\gamma_\tau \rightarrow \mathcal{E}^\gamma_\rho \times I, \end{aligned}$$

pour lesquels on a les deux relations

$$(VII.4.3) \quad \begin{cases} \gamma_{\mathcal{E}_\rho \times I} \circ \mu = \mu^\gamma \circ \gamma_{\mathcal{E}_\tau} \\ \gamma_{\mathcal{E}'_\rho \times I} \circ \mu' = \mu^\gamma \circ \gamma_{\mathcal{E}'_\tau} \end{cases}$$

où les homomorphismes γ sont, comme d'habitude, les homomorphismes canoniques appliquant les espaces figurant en indices sur leurs quotients par H. Ces égalités résultent du fait que l'image d'un chemin ω -horizontal par un γ -homomorphisme est un chemin $\gamma_{C(E)}(\omega)$ -horizontal. Précisons tout de suite que nous n'avons choisi ces homomorphismes μ que parce qu'ils satisfont naturellement aux relations (VII.4.3) qui seules nous serviront par la suite. On pourrait les remplacer par tout autre trio d'homomorphismes vérifiant (VII.4.3).

Considérons maintenant les deux chemins ω_ρ - et ω'_ρ -horizontaux

$$\lambda_y : I \rightarrow \mathcal{E}_\rho \quad \text{et} \quad \lambda'_{y'} : I \rightarrow \mathcal{E}'_\rho,$$

issus respectivement de deux points y et y' choisis dans les fibres $\mathcal{E}_{\rho,0}$ et $\mathcal{E}'_{\rho,0}$ de telle sorte que $\gamma_{\mathcal{E}_\rho}(y) = \gamma_{\mathcal{E}'_\rho}(y')$, et se projetant sur S_1 , paramétré par $\alpha(t)$ comme il a été dit plus haut [c'est-à-dire qu'on a $p(\lambda_y(t)) = p(\lambda'_{y'}(t)) = \alpha(t)$]. La condition $m_0 = m'_0$ permet de définir un isomorphisme

$$h_\rho : \mathcal{E}_\rho \rightarrow \mathcal{E}'_\rho,$$

en posant

$$h_\rho(m \cdot \lambda_y(t)) = m \cdot \lambda'_{y'}(t) \quad [t \in I, m \in \mathfrak{N}_p(\mathcal{E}_\rho^y)].$$

La condition $m_0 = m'_0$ montre que cette définition est bien cohérente au-dessus de O et le fait que les images de y et y' sur \mathcal{E}_ρ^y coïncident entraîne que les images de $\lambda_y(t)$ et de $\lambda'_{y'}(t)$ coïncident également, et par suite, en utilisant la proposition I.6.2 :

$$h_\rho(z \cdot s) = h_\rho(z) \cdot s \quad (z \in \mathcal{E}_\rho, s \in G),$$

h_ρ est donc un G -isomorphisme.

Grâce à μ et à μ' on étend de façon évidente h_ρ en un isomorphisme

$$h_\tau : \mathcal{E}_\tau \rightarrow \mathcal{E}'_\tau$$

qui est un G -isomorphisme puisque h_ρ, μ, μ' sont compatibles avec l'identité sur G . De plus, h_τ induit l'identité sur \mathcal{E}_τ^y , comme le montrent les égalités (VII.4.3). D'autre part, les espaces structuraux gauches de \mathcal{E}_τ et \mathcal{E}'_τ s'identifient à $\bar{l}^{-1}(\mathfrak{N}(\mathcal{E}^y))$ de la même façon que $\mathfrak{N}(\mathcal{E})$ et $\mathfrak{N}(\mathcal{E}')$ s'identifient à $\mathfrak{N}(\mathcal{E}^y)$. Compte tenu de cette identification, il résulte de ce qui précède que l'isomorphisme de ces espaces structuraux gauches défini par h_τ n'est autre que l'identité. Il en est évidemment de même pour les espaces de Lie.

Les égalités (VII.4.1) et (VII.4.2) montrent alors que si l'on désigne par $\underline{\omega}_\tau$ la connexion-image de ω_τ par h_τ , on a

$$\Omega(\underline{\omega}_\tau) = \Omega(\omega'_\tau)$$

et

$$\underline{\omega}_\tau = \omega'_\tau + \theta,$$

où θ est une forme différentielle à valeurs dans \mathbb{H} . La formule (IV.5.1) montre qu'on a $\Delta\theta = d\theta = 0$. Il en résulte que le champ défini dans $\mathbb{H} \times (S^1 \times I)$ par l'égalité

$$X^0 = \theta,$$

équivalente à

$$C(s)\omega'_\tau = \underline{\omega}_\tau,$$

est complètement intégrable (voir prop. IV.5.2, IV.5.3 et IV.5.4). Toute variété intégrale de ce champ est donc un revêtement de $S^1 \times I'$. Soit $\underline{\sigma}$ une de ces variétés. Comme le premier groupe d'homotopie de $S^1 \times I'$ est engendré par le parallèle $(S^1, 0)$ considéré comme un lacet en $(0, 0)$, le sous-groupe de H engendré par $\tau_0^0(S^1, 0)$ opère de façon simplement transitive sur toute fibre de $\underline{\sigma}$. Or, en tenant compte de la proposition IV.5.4 et de l'hypothèse $m_0 = m'_0$, on voit qu'on a $\tau_0^0(S^1, 0) = \text{élément neutre}$. Autrement dit, $\underline{\sigma}$ se réduit à une section de $S^1 \times I'$. En se plaçant alors sur le parallèle $(S^1, 1)$, on voit qu'on a également $\tau_0^0(S^1, 1) = \text{élément neutre}$. On en déduit immédiatement

$$\tau_{\omega_T}(S^1, 1) = \tau_{\omega'_T}(S^1, 1).$$

Mais on a vu que l'isomorphisme des espaces structuraux gauches défini par h_T était l'identité. On a donc également

$$\tau_{\omega_T}(S^1, 1) = \tau_{\omega'_T}(S^1, 1).$$

En revenant à $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ et $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, G)$, il résulte de la comparaison de ces deux dernières égalités que $m_1 = m'_1$. Le lemme 1 est donc démontré et nous passons au

LEMME 2. — *En reprenant les notations du lemme 1, si $m'_0 m_0^{-1} = s$:*

- 1° *s appartient au centre H de G ;*
- 2° *On a également $m'_1 m_1^{-1} = s$ ⁽²⁴⁾.*

Le 1° est une conséquence immédiate des égalités (VII.4.1) et (VII.4.2). Quant au 2°, il signifie simplement que $(\tau_{\omega'}(L_x))(\tau_{\omega}(L_x))^{-1}$ ne dépend que de la classe d'homotopie du lacet L_x (au sens large : le point marqué pouvant se déplacer). Sa démonstration va consister, en gros, à fendre l'espace \mathcal{E}_T le long d'une génératrice de la base et à recoller la cassure après un décalage correspondant à la translation à droite s : on se ramènera ainsi au cas précédent.

Considérons pour cela un nombre réel ε compris entre 0 et 1 et soit I'' l'inter-

(24) Dans le cas où le sous-groupe $\Pi(s)$ de H engendré par $s = m'_0 m_0^{-1}$ est fermé dans G , on démontre rapidement ce lemme en formant les quotients $\hat{\mathcal{E}}(\mathcal{X}, \hat{G})$ et $\hat{\mathcal{E}}'(\mathcal{X}, \hat{G})$ de $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ et $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, G')$ par $\Pi(s)$. En notant $\hat{m}_0, \hat{m}'_0, \hat{m}_1, \hat{m}'_1$ les éléments obtenus en substituant $\hat{\mathcal{E}}$ et $\hat{\mathcal{E}}'$ à \mathcal{E} et \mathcal{E}' , on a donc

$$\hat{m}_0 = \hat{m}'_0,$$

et par suite, d'après le lemme précédent,

$$\hat{m}_1 = \hat{m}'_1.$$

Cela entraîne en revenant aux espaces initiaux, $m'_1 m_1^{-1} \in \Pi(s)$. Mais il est clair que $m_t = \tau_{\omega}(L_{x,t})$ et $m'_t = \tau_{\omega'}(L_{x,t})$ sont des fonctions différentiables de t . Il en est donc de même de $s_t = m'_t m_t^{-1}$ et, comme $\Pi(s)$ est discret dans G , on a $s_t = \text{Cte}$.

Autrement dit :

$$m'_1 m_1^{-1} = m'_0 m_0^{-1}.$$

valle ouvert] — ε; 1 + ε[. Nous définissons une application différentiable

$$\eta : I'' \times I' \rightarrow S^1 \times I',$$

en posant

$$\eta(t'', t') = (\alpha(t''), t') \quad (t'' \in I'' \text{ et } t' \in I').$$

Considérons l'espace fibré principal $\eta^{-1}(\mathcal{E}_T)$ de base $I'' \times I'$, induit à partir de \mathcal{E}_T par l'application différentiable η , et désignons par $U \subset S^1 \times I'$ l'ouvert compris entre les génératrices $(\alpha(\varepsilon), I')$ $(\alpha(1 - \varepsilon), I')$ et contenant la génératrice $(0, I')$. Enfin, U_0 et U_1 seront les deux composantes connexes de $\eta^{-1}(U)$, la première contenant le point de coordonnées $(0, 0)$, la deuxième contenant le point $(1, 0)$. Choisissons alors un point $y \in \mathcal{E}_T$ de projection $(0, 0)$ et soient

$$\nu_1 : I' \rightarrow \mathcal{E}_T \quad \text{et} \quad \nu_2 : I' \rightarrow \mathcal{E}_T,$$

les chemins ω_T -horizontaux d'origine $\underline{m}_0 \cdot y$ et $\underline{m}'_0 \cdot y$ respectivement, de projection commune $(0, I')$, avec

$$\underline{m}_0 = \tau_{\omega_T}(S^1, 0) \quad \text{et} \quad \underline{m}'_0 = \tau_{\omega'_T}(S^1, 0).$$

Par tout point $\nu_1(t)$ ou $\nu_2(t)$ de projection $(0, t)$, passe un chemin ω_T -horizontal se projetant sur l'arc de parallèle $(\alpha(\varepsilon)(\alpha(1 - \varepsilon), t)$ qui contient $(0, t)$. Ces chemins engendrent manifestement deux sections différentiables de \mathcal{E}_T sur l'ouvert U . Nous noterons

$$\Sigma_1 : U \rightarrow \mathcal{E}_T,$$

celle qui est définie à partir de ν_1 et

$$\Sigma_2 : U \rightarrow \mathcal{E}_T.$$

celle qui est définie à partir de ν_2 . Comme $\underline{m}'_0 \underline{m}_0^{-1} = \underline{m}'_0 \underline{m}_0^{-2} = s$, comme tout point de Σ_1 (resp. Σ_2) est relié horizontalement à l'origine de ν_1 (resp. ν_2) et qu'enfin l'origine de ν_2 se déduit de celle de ν_1 par $\underline{m}'_0 \underline{m}_0^{-1}$, on a

$$\Sigma_2 = \Sigma_1 \cdot s.$$

D'autre part, chacune de ces sections en induit deux sur $\nu^{-1}(\mathcal{E}_T)$: l'une au-dessus de U_0 , l'autre au-dessus de U_1 . Les premières seront notées Σ_1^0 et Σ_2^0 , les deuxièmes Σ_1^1 et Σ_2^1 . Il est clair qu'on obtient \mathcal{E}_T en identifiant Σ_1^0 et Σ_1^1 . Au lieu de procéder ainsi, identifions Σ_1^0 avec $\Sigma_2^1 = \Sigma_1^1 \cdot s$. Plus précisément, tout point $y^0 = \Sigma_1^0(t'', t')[-\varepsilon < t'' < \varepsilon, t' \in I']$ est identifié à $y^1 = \Sigma_2^1(1 + t'', t')$ puis, évidemment, $y^0 \cdot g$ est identifié à $y^1 \cdot g$, quel que soit $g \in G$. On obtient ainsi un espace fibré principal différentiable \mathcal{E}_T^1 de base $S^1 \times I'$ et de groupe G . Du fait que s appartient au centre de G , on déduit :

1° Que le quotient de \mathcal{E}_T^1 par H est \mathcal{E}_T^γ puisqu'en effectuant cette opération sur $\nu^{-1}(\mathcal{E}_T)$, on identifie Σ_1^0 et Σ_2^0 d'une part, Σ_1^1 et Σ_2^1 d'autre part.

2° Que les restrictions de $\omega_{\bar{7}}$ à Σ_1 et Σ_2 sont égales et que, par suite, la connexion $\omega_{\bar{7}}^0$, induite sur $\nu^{-1}(\mathcal{E}_{\bar{7}})$ à partir de $\omega_{\bar{7}}$, est compatible avec l'identification précédente. Il en résulte qu'elle donne naissance à une connexion $\omega_{\bar{7}}^1$ sur $\mathcal{E}_{\bar{7}}^1$.

3° Que, de même, les espaces structuraux gauches de $\mathcal{E}_{\bar{7}}^1$ et $\mathcal{E}_{\bar{7}}$ s'identifient car

$$j_{\mathcal{N}_{\bar{7}}}(\Sigma_1(x))m = j_{\mathcal{N}_{\bar{7}}}(\Sigma_2(x))m \quad [m \in \mathcal{N}_{\bar{7}}(\mathcal{E}_{\bar{7}}), x \in U].$$

Il en est donc de même des espaces de Lie et le 2° montre que les différentiations covariantes associées à $\omega_{\bar{7}}^1$ et à $\omega_{\bar{7}}$ coïncident et qu'on a

$$\Omega(\omega_{\bar{7}}^1) = \Omega(\omega_{\bar{7}}).$$

D'autre part, par construction même de l'espace $\mathcal{E}_{\bar{7}}^1$, il est clair qu'on a l'égalité

$$\underline{m}_l^1 = s \underline{m}_l,$$

où l'on a posé

$$\underline{m}_l^1 = \tau_{\omega_{\bar{7}}^1}(S^1, t) \quad \text{et} \quad \underline{m}_l = \tau_{\omega_{\bar{7}}}(S^1, t),$$

(S^1, t) étant bien entendu considéré comme un lacet en (O, t) . Comme on a, par ailleurs,

$$\underline{m}'_0 = s \underline{m}_0,$$

on en déduit

$$\underline{m}'_0 = \underline{m}'_0.$$

En posant alors $\underline{m}'_1 = \tau_{\omega_{\bar{7}}^1}(S^1, 1)$ et en appliquant le lemme 4 à $\mathcal{E}_{\bar{7}}^1$ et à $\mathcal{E}_{\bar{7}}^1$, il vient

$$\underline{m}'_1 = \underline{m}'_1.$$

Par conséquent,

$$s \underline{m}_1 = \underline{m}'_1,$$

et, en revenant à $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ et à $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, G)$:

$$s m_1 = m'_1.$$

Cela achève la démonstration.

Enfin, si l_x^2 est le produit de l_x^1 et de l_x , et si $m, m', m_1, m'_1, m_2, m'_2$ sont associés à l_x, l_x^1, l_x^2 dans les espaces \mathcal{E} et \mathcal{E}' munis des connexions ω et ω' , on a

$$\begin{aligned} m_2 &= m_1 m, & s &= m' m^{-1}, \\ m'_2 &= m'_1 m', & s_1 &= m'_1 m_1^{-1}; \\ s_2 &= (m'_1 m') (m_1 m)^{-1} \\ &= m'_1 s m_1^{-1} \\ &= s_1 s. \end{aligned}$$

Nous pouvons donc énoncer :

PROPOSITION VII.4.1. — *Étant donnés $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$, $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, G)$, ω , ω' satisfaisant aux conditions exposées ci-dessus, il existe un homomorphisme*

$$\chi_x : \Pi_x^1(\mathcal{X}) \rightarrow H$$

du premier groupe d'homotopie en x de \mathcal{X} dans le centre H de G , défini par

$$\chi_x(\alpha) = \tau_{\omega'}(l_x) \tau_{\omega}^{-1}(l_x),$$

où l_x est un représentant de la classe d'homotopie $\alpha \in \Pi_x^1(\mathcal{X})$. En outre, si l_x et $l_{x'}$ sont deux lacets distincts ($x \neq x'$); homotopes, on a

$$\tau_{\omega'}(l_x) \tau_{\omega}^{-1}(l_x) = \tau_{\omega'}(l_{x'}) \tau_{\omega}^{-1}(l_{x'}).$$

Il en résulte que

$$\chi = \chi_x(\Pi_x^1(\mathcal{X}))$$

est un sous-groupe de H indépendant de $x \in \mathcal{X}$.

Comme le premier groupe d'homotopie de \mathcal{X} rendu abélien est isomorphe au premier groupe d'homologie à coefficients entiers et que H est lui-même abélien, χ_x induit un homomorphisme

$$\mathcal{X}' : H^1(\chi) \rightarrow H$$

du premier groupe d'homologie de \mathcal{X} à coefficients entiers, dans le centre H de G . On a donc le :

COROLLAIRE. — *Il existe un homomorphisme*

$$\chi' : H^1(\mathcal{X}) \rightarrow H,$$

induit par χ_x .

Remarque. — Si l'on remplace ω et ω' par $\omega + \eta$ et $\omega' + \eta$ où η est une section quelconque de $L(E_\gamma)$, on ne modifie pas χ_x . Il suffit, pour s'en rendre compte de procéder de façon parallèle aux lemmes 1 et 2 dont nous reprenons les notations :

1° Si $m_0 = m'_0$ avec ω et ω' , il est clair qu'il en est de même (mais avec des m différents) lorsqu'on leur substitue $\omega + \eta$ et $\omega' + \eta$ car l'isomorphisme h_η applique $(\omega + \eta)_\rho$ sur $(\omega' + \eta)_\rho$ aussi bien que ω_ρ sur ω'_ρ .

2° Si $m_0 \neq m'_0$, on se ramène au cas précédent en utilisant le procédé du lemme 2.

On a alors la proposition suivante qui précise le rôle de χ .

PROPOSITION VII.4.2. — *Étant donnés deux espaces fibrés principaux différentiables $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ et $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, G)$ satisfaisant aux conditions exposées au début de ce*

paragraphe, la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un G -isomorphisme

$$h: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$$

induisant l'identité sur \mathcal{E}_γ et appliquant ω sur ω' , est que le sous-groupe χ de H , défini par la proposition VII.4.1 se réduise à l'identité.

Il est bien clair, en effet, que la condition est nécessaire : si h existe, il applique tout chemin ω -horizontal sur un chemin ω' -horizontal et induit l'identité sur $\mathfrak{N}(\mathcal{E}_\gamma)$ puisqu'il induit l'identité sur \mathcal{E}_γ . On a donc

$$\tau_\omega(l_x) = \tau_{\omega'}(l_x),$$

quel que soit le lacet l_x . En revenant à la définition de χ' il est clair que cet homomorphisme est trivial et que χ se réduit à l'élément neutre.

Réciproquement, on peut construire h comme d'habitude, en choisissant $y_0 \in \mathcal{E}_{x_0}$ et $y'_0 \in \mathcal{E}'_{x_0}$, non pas arbitrairement, mais de telle sorte que

$$\gamma_{\mathcal{E}}(y_0) = \gamma_{\mathcal{E}'}(y'_0).$$

Comme, par hypothèse, χ est trivial, on a

$$\tau_\omega(l_x) = \tau_{\omega'}(l_x).$$

On peut alors définir h sur la fibre \mathcal{E}_{x_0} en posant $h(y_0 \cdot g) = y'_0 \cdot g$ ($g \in G$) et étendre cette définition en joignant tout point $z \in \mathcal{E}$ à un point $z_0 \in \mathcal{E}_{x_0}$ par un chemin ω -horizontal de projection l et en posant $h(z) = z'$ où z' est l'extrémité du chemin ω' -horizontal d'origine $h(z_0)$ et de projection l (décrit à partir de x_0). On vérifie sans difficulté qu'on a ainsi construit un G -isomorphisme satisfaisant aux conditions indiquées.

On a aussi le :

COROLLAIRE. — *Étant donnés deux espaces fibrés principaux différentiables $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ et $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, G)$ satisfaisant aux conditions exposées au début de ce paragraphe, si le sous-groupe χ de H défini par la proposition VII.4.1 est fermé dans G et si $\hat{\mathcal{E}}, \hat{\mathcal{E}}'$ et \hat{G} désignent les quotients de $\mathcal{E}, \mathcal{E}', G$ respectivement, par χ , il existe un \hat{G} -isomorphisme*

$$\hat{h} = \hat{\mathcal{E}} \rightarrow \hat{\mathcal{E}}',$$

de $\hat{\mathcal{E}}$ sur $\hat{\mathcal{E}}'$, induisant l'identité sur \mathcal{E}_γ et appliquant la connexion-quotient $\hat{\omega}$ sur la connexion-quotient $\hat{\omega}'$.

Rapprochons maintenant ces derniers résultats de ceux du paragraphe précédent et considérons deux espaces fibrés principaux différentiables $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ et $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, G')$ possédant les propriétés suivantes :

1° Leurs groupes structuraux G et G' sont connexes.

2° Il existe un homomorphisme

$$\varphi_{\mathfrak{N}(\mathcal{E})} : \mathfrak{N}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathfrak{N}'(\mathcal{E}')$$

de l'espace structural gauche $\mathfrak{N}(\mathcal{E})$ de $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ sur l'espace structural gauche $\mathfrak{N}'(\mathcal{E}')$ de $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, G')$, auquel est associé l'homomorphisme

$$\varphi_{\mathcal{E}(\mathcal{E})} : \mathcal{E}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{E}'(\mathcal{E}')$$

de leurs espaces de Lie.

3° Il existe deux connexions ω et ω' sur $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ et $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, G')$ dont les $L(E)$ - et $L'(E')$ -différentiations covariantes sont notées Δ et Δ' , et qui sont liées à $\varphi_{\mathfrak{N}(\mathcal{E})}$ par les deux relations

$$\begin{aligned} \Delta' \circ \varphi_{L(E)} &= \varphi_{L(E)} \circ \Delta, \\ \Omega(\omega') &= \varphi_{L(E)}(\Omega(\omega)). \end{aligned}$$

On peut alors énoncer :

THÉORÈME VII. 4. 1. — A. *Dans les conditions ci-dessus, il existe un homomorphisme*

$$\chi' : H^1(\mathcal{X}) \rightarrow H^1$$

du premier groupe d'homologie de \mathcal{X} à coefficients entiers, dans le centre H^1 de G' , défini par l'égalité

$$\tau_{\omega'}(l_x) [\varphi_{\mathfrak{N}(\mathcal{E})}(\tau_{\omega}(l_x))]^{-1} = \chi'(\alpha),$$

où l_x est un lacet appartenant à la classe d'homologie α et où le premier membre, appartenant au centre de $\mathfrak{N}'(\mathcal{E}')$ est considéré comme un élément de H^1 .

B. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un couple d'homomorphismes compatibles*

$$\psi : G \rightarrow G' \quad \text{et} \quad h : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}',$$

tels que

$$\psi_{\mathfrak{N}(\mathcal{E})}^h = \varphi_{\mathfrak{N}(\mathcal{E})}, \quad \psi_{\mathcal{E}(\mathcal{E})}^h = \varphi_{\mathcal{E}(\mathcal{E})} \quad \text{et} \quad \psi_{L(E)}^h(\omega) = \omega',$$

est que l'homomorphisme χ' soit trivial.

Remarques. — 1° Si G est simplement connexe, l'existence de $\varphi_{\mathcal{E}(\mathcal{E})}$ entraîne celle de $\varphi_{\mathfrak{N}(\mathcal{E})}$. On peut donc énoncer dans ce cas un théorème où ce dernier homomorphisme ne figure pas.

2° Si $\varphi_{\mathfrak{N}(\mathcal{E})}$ est un homomorphisme *dans*, on peut énoncer un théorème analogue au théorème VII. 4. 1, à condition de faire intervenir la condition portant sur l'espace d'holonomie de $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, G')$ muni de la connexion ω' , à savoir

$$\mathcal{X}(\omega') \subset \varphi_{\mathfrak{N}(\mathcal{E})}(\mathfrak{N}(\mathcal{E})).$$

3° En utilisant les homomorphismes induits, on peut étendre ces résultats au cas où les bases des deux espaces fibrés principaux sont distinctes et où $\varphi_{\mathfrak{N}(\mathcal{E})}$ induit une application différentiable de l'une dans l'autre.

COROLLAIRE. — Si χ' n'est pas trivial mais si le sous-groupe $\chi = \chi'(\mathbf{H}^1(\mathcal{X}))$ est fermé dans G' , on note $\hat{\mathcal{E}}'_1(\mathcal{X}, \hat{G}')$ l'espace fibré principal quotient de $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, G')$ par χ , et il existe un couple d'homomorphismes compatibles

$$\hat{\psi} : G \rightarrow \hat{G}' \quad \text{et} \quad \hat{h} : \mathcal{E} \rightarrow \hat{\mathcal{E}}',$$

tels que

$$\hat{\psi}_{\mathcal{R}(\mathcal{E})}^{\hat{h}} = \hat{\psi}_{\mathcal{R}(\mathcal{E})}, \quad \hat{\psi}_{\mathcal{E}(\mathcal{E})}^{\hat{h}} = \hat{\psi}_{\mathcal{E}(\mathcal{E})} \quad \text{et} \quad \hat{\psi}_{\mathcal{C}(\mathcal{E})}^{\hat{h}}(\omega) = \hat{\omega}',$$

$\hat{\psi}_{\mathcal{R}(\mathcal{E})}$, $\hat{\psi}_{\mathcal{E}(\mathcal{E})}$ et $\hat{\omega}'$ désignant les homomorphismes et la connexion obtenue par passage au quotient.

5. CAS PARTICULIERS. — Reprenons maintenant les notations, hypothèses et identifications de la proposition VII.4.1 pour nous occuper du cas où χ est un sous-groupe de la composante connexe de l'identité de H . Soit H_0 cette composante.

Comme en effectuant les quotients de \mathcal{E} et \mathcal{E}' par H_0 , on élimine χ , il est clair que ces quotients sont G/H_0 -isomorphes. Réciproquement, s'il en est ainsi, χ est un sous-groupe de H_0 . Plus précisément, on peut énoncer :

PROPOSITION VII.5.1. — Pour que χ soit un sous-groupe de H_0 , il faut et il suffit qu'il existe un G/H_0 -isomorphisme appliquant le quotient \mathcal{E}/H_0 sur \mathcal{E}'/H_0 , transformant la connexion déduite de ω en la connexion déduite de ω' et induisant l'identité sur \mathcal{E}_* .

Nous allons chercher, dans ce cas-là, s'il existe sur $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ une connexion ω^1 avec laquelle il soit possible de déterminer un G -isomorphisme de \mathcal{E} sur \mathcal{E}' satisfaisant aux conditions habituelles.

Soit donc $\omega^1 = \omega + \theta$ une connexion obtenue en ajoutant à ω une forme différentielle θ sur \mathcal{X} , à valeurs dans \underline{H} et fermée [c'est-à-dire une section du centre de $L^1(\mathcal{E})$ telle que $\Delta\theta = d\theta = 0$]. On a alors

$$\begin{aligned} \gamma_{\mathcal{C}(\mathcal{E})}(\omega^1) &= \gamma_{\mathcal{C}(\mathcal{E})}(\omega) = \gamma_{\mathcal{C}(\mathcal{E})}(\omega'), \\ \Omega(\omega^1) &= \Omega(\omega) = \Omega(\omega'). \end{aligned}$$

Aux connexions ω^1 et ω' correspond donc un groupe χ^1 , de même qu'à ω et ω' correspond χ . Le problème revient donc à trouver une connexion ω^1 telle que χ^1 se réduise à l'identité.

Soit $R(H_0)$ un revêtement simplement connexe de H_0 , muni d'une structure de groupe qu'un isomorphisme

$$\rho : R(H_0) \rightarrow H_0$$

applique sur H_0 . $R(H_0)$ est isomorphe à R^p et un isomorphisme

$$\underline{\rho} : \underline{R(H_0)} \rightarrow \underline{H_0}$$

associé à ρ applique l'algèbre de Lie de $R(H_0)$ sur celle de H_0 .

Donnons-nous maintenant un lacet

$$l_x : S^1 \rightarrow \mathcal{X},$$

auquel correspondent, d'une part

$$s = \tau_{\omega'}(l_x) (\tau_{\omega}(l_x))^{-1}$$

et d'autre part

$$s^1 = \tau_{\omega'}(l_x) (\tau_{\omega'}(l_x))^{-1}.$$

On a donc

$$s^1 = s (\tau_{\theta}^0(l_x))^{-1},$$

où $\tau_{\theta}^0(l_x)$ est associé à l_x dans la connexion (Γ) définie dans $H_0 \times \mathcal{X}$ par l'égalité (voir § IV.5) :

$$(VII.5.1) \quad X^0 = \theta.$$

Mais ρ détermine un ρ -homomorphisme

$$\bar{\rho} : R(H_0) \times \mathcal{X} \rightarrow H_0 \times \mathcal{X}$$

et l'équation (VII.5.1) appliquée à $R(H_0) \times \mathcal{X}$ définit une connexion dont l'image par $\bar{\rho}$ n'est autre que (Γ) . Si $\bar{\tau}_{\theta}^0(l_x)$ est associé au lacet l_x dans $R(H_0) \times \mathcal{X}$, on a donc

$$\rho(\bar{\tau}_{\theta}^0(l_x)) = \tau_{\theta}^0(l_x).$$

Comme, d'autre part, $R(H_0)$ est isomorphe à R^p , on a tout simplement

$$\bar{\tau}_{\theta}^0(l_x) = \int_{l_x} \bar{\rho}^{-1} \theta.$$

On en déduit :

PROPOSITION VII.5.2. — Soit l_x^i un ensemble de lacets engendrant $H^1(\mathcal{X})$ et θ une forme différentielle linéaire fermée sur \mathcal{X} . Le groupe χ^1 associé aux connexions $\omega^1 = \omega + \theta$, ω^1 se réduit à l'identité lorsque les périodes de θ relatives aux cycles l_x^i sont telles que

$$\rho \left(\int_{l_x^i} \bar{\rho}^{-1} \theta \right) = \chi^1(\alpha^i),$$

où α^i désigne la classe d'homologie de l_x^i .

Soit T^1 le sous-groupe de torsion de $H^1(\mathcal{X})$. Si la classe d'homologie de l_x fait partie de T^1 , on a

$$(VII.5.2) \quad \int_{l_x} \bar{\rho}^{-1} \theta = 0.$$

D'où :

PROPOSITION VII.5.3. — Pour qu'il existe une connexion $\omega^1 = \omega + \theta$ (θ fermée à valeurs dans \underline{H}) telle que χ^1 se réduise à l'identité, il est nécessaire que l'image par χ^1 du sous-groupe de torsion de $H^1(\mathcal{X})$ se réduise elle-même à l'identité.

Supposons maintenant que \mathcal{X} soit compacte et posons

$$\chi_{\mathcal{T}} = \chi'(\mathbb{T}^1).$$

$\chi_{\mathcal{T}}$ est fini, donc fermé dans G . D'autre part, il existe une forme différentielle θ , fermée, à valeurs dans \underline{H} qui admet des périodes arbitrairement données sur des cycles l'_x , si ces derniers forment une base de $H^1(\mathcal{X})/\mathbb{T}^1$. En tenant compte de la proposition VII.5.3 et de l'égalité (VII.5.2), on peut alors énoncer :

PROPOSITION VII.5.4. — *Si la variété \mathcal{X} est compacte, $\mathcal{E}/\chi_{\mathcal{T}}$ et $\mathcal{E}'/\chi_{\mathcal{T}}$ sont $G/\chi_{\mathcal{T}}$ -isomorphes. On peut construire un tel isomorphisme à partir d'une connexion $\omega^1 = \omega + \theta$, où θ est une forme différentielle linéaire fermée à valeurs dans \underline{H} , dont les périodes relatives aux cycles l'_x sont des éléments g^x de $R(H_0)$ choisis de telle sorte que*

$$\rho(g^x) = \chi'(\alpha^x) \quad (\alpha^x = \text{classe de } l'_x).$$

Nous laissons au lecteur le soin de transcrire ces divers résultats dans le cas plus général où $\varphi_{\mathcal{N}(\mathcal{E})}$ est un simple homomorphisme sur, et, en tenant compte alors de la condition portant sur l'holonomie, dans le cas où c'est un homomorphisme dans.

6. MODIFICATIONS DES HYPOTHÈSES. — Il s'agit de donner ici quelques sous-produits des théorèmes précédents obtenus en modifiant ou en élargissant les hypothèses faites précédemment. Nous considérons toujours des espaces fibrés principaux différentiables $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ et $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, G')$ munis de connexions ω et ω' dont les $L(E)$ - et $L'(E')$ -différentiations covariantes sont notées Δ et Δ' . Les groupes structuraux de $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ et $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, G')$ sont toujours supposés connexes. On donne d'abord un cas où il est possible de se passer de la condition qui fait intervenir les courbures $\Omega(\omega)$ et $\Omega(\omega')$:

PROPOSITION VII.6.1. — *S'il existe un homomorphisme*

$$\varphi_{\mathcal{N}(\mathcal{E})} : \mathcal{N}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{N}'(\mathcal{E}')$$

de l'espace structural gauche de $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ sur l'espace structural gauche de $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, G')$ auquel est associé l'homomorphisme

$$\varphi_{\mathcal{L}(\mathcal{E})} : \mathcal{L}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{L}'(\mathcal{E}')$$

tel que

(VII.6.1)

$$\Delta' \circ \varphi_{L(E)} = \varphi_{L(E')} \circ \Delta$$

si, de plus, \mathcal{X} est simplement connexe et si son deuxième groupe d'homologie à coefficients dans l'algèbre de Lie \underline{H} de H , est nul, il existe alors un couple d'homomorphismes compatibles :

$$\psi : G \rightarrow G' \quad \text{et} \quad h : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'.$$

liant $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ à $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, G')$, et tels que

$$\psi_{\mathcal{M}(\mathcal{E})}^h = \varphi_{\mathcal{M}(\mathcal{E})}, \quad \psi_{\mathcal{E}(\mathcal{E})}^h = \varphi_{\mathcal{E}(\mathcal{E})} \quad \text{et} \quad \psi_{L(E)}^h(\omega) = \omega' + \theta,$$

où θ est une section du centre $K^1(E')$ de $L^1(E')$ c'est-à-dire une forme différentielle linéaire sur \mathcal{X} , à coefficients dans \underline{H} .

Pour démontrer cette proposition, Il convient d'abord de reprendre partiellement un calcul donné en remarque, à l'occasion du théorème VII.4.4.

La formule

$$\Delta^2 \eta = [\Omega(\omega), \eta] \quad [\eta \in L(E)],$$

transformée par $\varphi_{L(E)}$ en tenant compte de (VII.6.1) et du fait que $\varphi_{L(E)}$ est, par hypothèse, un homomorphisme *sur*, montre qu'on a

$$[\varphi_{L(E)}(\Omega(\omega)), \eta'] = [\Omega(\omega'), \eta'],$$

où η' est un élément quelconque de $L'(E')$. Il en résulte immédiatement que

$$\Theta = \varphi_{L(E)}(\Omega(\omega)) - \Omega(\omega')$$

est une section du centre $K^2(E)$ de $L^2(E)$. On peut donc la considérer comme une forme différentielle sur \mathcal{X} , de degré 2 et à valeurs dans \underline{H} . Mais on a d'une part

$$\Delta' \varphi_{L(E)}(\Omega(\omega)) = \varphi_{L(E)}(\Delta(\Omega(\omega))) = 0,$$

à cause de (VII.6.1), et d'autre part

$$\Delta'(\Omega(\omega')) = 0.$$

Il en résulte qu'on a aussi

$$\Delta' \Theta = 0.$$

Cela montre que Θ , considérée comme une forme différentielle sur \mathcal{X} à valeurs dans \underline{H} , est fermée. D'après nos hypothèses, il existe donc une forme différentielle θ à valeurs dans \underline{H} telle que

$$d\theta = \Theta.$$

En remplaçant ω' par $\omega' + \theta$, la formule (IV.5.1) montre que

$$\Omega(\omega' + \theta) = \Omega(\omega')$$

et, par suite

$$\Omega(\omega' + \theta) = \varphi_{L(E)}(\Omega(\omega)).$$

Comme, par ailleurs, les $L'(E')$ -différentiations covariantes associées à ω' et à $\omega' + \theta$ coïncident, nous pouvons appliquer le théorème VI.2.1. Notre proposition en résulte immédiatement.

Remarque. — Dans le cas où G est abélien, où $\varphi_{\mathcal{M}(\mathcal{E})}$ est un isomorphisme sur, et où l'un des espaces \mathcal{E} ou \mathcal{E}' est trivial, on retrouve un résultat signalé

à propos de la proposition IV.5.5 : tout espace fibré principal de groupe abélien sur une base dont le deuxième groupe d'homologie à coefficients dans \underline{G} est nul, est trivial.

Signalons, dans cet ordre d'idées, la proposition suivante, légèrement plus générale :

PROPOSITION VII.6.2, — Si \mathcal{X} est simplement connexe, G abélien et s'il existe sur l'espace fibré principal différentiable $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ une connexion ω telle que

$$\Omega(\omega) = \Delta\theta,$$

où θ est une forme différentielle tensorielle linéaire de type adjoint, $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ est trivial.

En effet, la formule (IV.5.1) montre que $\Omega(\omega + \theta) = 0$. La connexion $\omega + \theta$ est donc intégrable. La proposition résulte alors du fait que \mathcal{X} est simplement connexe et que, par suite, toute variété intégrale du champ connexe $c(\omega + \theta)$ est une section de $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$. Ce dernier, possédant une section globale est bien trivial.

Abordons enfin le cas plus général suivant :

Nous supposons qu'il existe deux homomorphismes associés $\varphi_{\mathcal{N}(\mathcal{E})}$ et $\varphi_{\mathcal{E}(\mathcal{E})}$ et que $\Delta' \circ \varphi_{\mathcal{L}(\mathcal{E})} = \varphi_{\mathcal{L}(\mathcal{E})} \circ \Delta$, sans faire d'hypothèse supplémentaire. Il n'existe pas alors de couple (ψ, h) satisfaisant aux conditions habituelles, du moins en général. On a cependant les résultats suivants faciles à vérifier :

1° Il existe toujours un homomorphisme d'espaces fibrés différentiables

$$h^0 : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{R}'^{n-p}$$

de $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ dans l'espace fibré \mathcal{R}'^{n-p} des $(n-p)$ -repères de $\mathcal{L}'^0(\mathcal{E}')$, où n est la dimension de G et où p est la dimension des fibres du noyau de $\varphi_{\mathcal{E}^0(\mathcal{E})}$. On construit en effet un tel homomorphisme h^0 en remarquant qu'on peut obtenir le noyau de $\varphi_{\mathcal{E}^0(\mathcal{E})}$ en modelant sur $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ le produit de \mathcal{X} par un idéal $\underline{\mathcal{G}}$ de \underline{G} (voir prop. VII.3.3). On choisit alors un repère $f = (f_i)$ ($i = 1, \dots, n$) de \underline{G} dont les p premiers vecteurs constituent un repère de l'idéal $\underline{\mathcal{G}}$ et l'on considère

$$\rho = (\rho_i) = a_{\mathcal{E}}^f(y) \quad (y \in \mathcal{E}_x).$$

Comme, par définition même de l'homomorphisme adjoint $a_{\mathcal{E}}^f$, on a

$$a_{\mathcal{E}}^f(y) = (i_{\mathcal{E}}(y)f_i) \quad (i = 1, \dots, n),$$

il est clair que, d'une part, l'image de chacun des p premiers vecteurs de $a^f(y)$ par $\varphi_{\mathcal{E}^0(\mathcal{E})}$ est nulle :

$$\varphi_{\mathcal{E}^0(\mathcal{E})}(\rho_\alpha) = 0 \quad (\alpha = 1, \dots, p)$$

et que, d'autre part, l'ensemble des vecteurs $\varphi_{\mathcal{E}(\mathcal{S})}(\rho_a)$ ($a = p, \dots, n$) forme un $(n - p)$ -repère de $\mathcal{L}'^0(\mathcal{S}')$. Nous poserons donc

$$h^0(y) = \varphi_{\mathcal{E}(\mathcal{S})}(\rho_a), \quad \text{avec} \quad (\rho_i) = a_{\mathcal{S}}^f(y).$$

On vérifie alors que, si γ_t décrit un chemin ω -horizontal, $h^0(\gamma_t)$ se déplace par parallélisme relativement à ω' . De plus, on a

$$h^0(m, y) = a_{\mathcal{N}'(\mathcal{S}')}(\varphi_{\mathcal{N}(\mathcal{S})}(m)) \cdot h^0(y) \quad [m \in \mathcal{N}(\mathcal{S}), y \in \mathcal{S}].$$

mais, en général, $a_{\mathcal{N}'(\mathcal{S}')}(\varphi_{\mathcal{N}(\mathcal{S})}(\mathcal{N}(\mathcal{S})))$ n'est pas simplement transitif. Cependant, on peut, à partir de h^0 , obtenir le théorème VII.4.1. Nous renvoyons pour cela à Aragnol [3] et [4] où il convient de supposer que $\varphi_{\mathcal{N}(\mathcal{S})}$ est un homomorphisme sur. Les démonstrations indiquées dans ces Notes sont d'ailleurs des transpositions de celles données au début de ce chapitre, les repères étant interprétés comme des homomorphismes.

2° L'ensemble \mathcal{L}''^0 des centralisateurs des fibres de $\varphi_{\mathcal{E}(\mathcal{S})}(\mathcal{L}^0(\mathcal{S}))$ dans les fibres de $\mathcal{L}'^0(\mathcal{S}')$ est un sous-espace fibré de $\mathcal{L}'^0(\mathcal{S}')$ invariant par transport parallèle relativement à ω' .

3° Si \mathcal{X} est simplement connexe, le groupe structural de \mathcal{S}' peut être réduit à un sous-groupe connexe G'' de G' dont l'algèbre de Lie est isomorphe à la sous-algèbre de $\mathcal{L}'^0(\mathcal{S}')$ engendré par \mathcal{L}''^0 et $\varphi_{\mathcal{E}(\mathcal{S})}(\mathcal{L}^0(\mathcal{S}))$. C'est donc une conséquence du 2° et du fait que le sous-espace de $\mathcal{L}'^0(\mathcal{S}')$ engendré par \mathcal{L}''^0 et $\varphi_{\mathcal{E}(\mathcal{S})}(\mathcal{L}^0(\mathcal{S}))$ contient la courbure de ω' comme on peut le vérifier facilement à l'aide de la formule $\Delta'^2 \theta = [\Omega(\omega'), \theta]$.

4° Si le centre de G est nul et si $\varphi_{\mathcal{N}(\mathcal{S})}$ est un isomorphisme dans, le groupe G'' défini ci-dessus est un produit direct.

CHAPITRE VIII.

THÉORÈMES D'EXISTENCE.

INTRODUCTION. — On considère, dans ce chapitre, un espace fibré $\tilde{\mathcal{L}}$ de base \mathcal{X} possédant les propriétés algébriques d'un espace de Lie, sans être cependant, *a priori*, l'espace de Lie d'un espace fibré principal différentiable à groupe structural. Dans le faisceau $\tilde{\mathcal{L}}$, déduit de $\tilde{\mathcal{L}}$, on se donne en outre un opérateur $\tilde{\Delta}$ et une section $\tilde{\Omega}$ de $\tilde{\mathcal{L}}^2$, liés à $\tilde{\mathcal{L}}$ par les axiomes énoncés au paragraphe 1 et soumis, entre eux, à l'identité de Bianchi :

$$\tilde{\Delta}\tilde{\Omega} = 0.$$

Le problème qui se pose alors est celui de la construction d'un espace fibré

principal différentiable $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ de groupe G (connexe), donné, dont l'espace de Lie $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ soit isomorphe à $\tilde{\mathcal{L}}$:

$$J : \mathcal{L}(\mathcal{E}) \rightarrow \tilde{\mathcal{L}},$$

et qui possède de plus une connexion ω telle que

$$J \circ \Delta = \tilde{\Delta} \circ J \quad \text{et} \quad J(\Omega(\omega)) = \tilde{\Omega},$$

où Δ est, bien entendu, la $L(E)$ -différentiation covariante associée à ω . Si ces conditions sont réalisées, nous dirons, pour simplifier que $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ admet $(\tilde{\mathcal{L}}, \tilde{\Delta}, \tilde{\Omega})$.

Les propriétés de $(\tilde{\mathcal{L}}, \tilde{\Delta}, \tilde{\Omega})$ conduisent d'abord à définir une connexion $\underline{\omega}$ dans l'espace \mathcal{R} des repères de $\tilde{\mathcal{L}}^0$ ainsi qu'un homomorphisme P de $\tilde{\mathcal{L}}$ dans l'espace de Lie de \mathcal{R} (§ 2, 3, 4 et 5). Lorsque le centre de G se réduit à l'élément neutre, on construit immédiatement l'espace cherché comme variété intégrale du champ normal $\Gamma(P(\tilde{\mathcal{L}}^0), \underline{\omega})$ dont l'intégrabilité résulte des hypothèses faites sur $\tilde{\Delta}$ et $\tilde{\Omega}$ (§ 6). Le problème se résout de la même façon pour le quotient de $\tilde{\mathcal{L}}$ par son centre.

Dans le cas général (§ 7), en utilisant le résultat précédent et en supposant \mathcal{X} simplement connexe, on transforme le problème en la recherche d'un espace fibré principal $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ admettant $(\mathcal{L}(\mathcal{E}'), \Delta, \Omega)$, où $\mathcal{L}(\mathcal{E}')$ est obtenu en modelant l'espace fibré des formes différentielles à valeurs dans \underline{G} , sur un espace fibré principal $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, G_\gamma)$ dont le groupe structural est le quotient G_γ de G par son centre H et où Δ est la $L(E')$ -différentiation covariante associée à une connexion ω' de $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, G_\gamma)$. On détermine alors un homomorphisme σ du deuxième groupe d'homologie de \mathcal{X} à coefficients entiers dans H . Pour donner une idée intuitive de cet isomorphisme, disons que, lorsqu'on considère une application différentiable :

$$\psi : S^2 \rightarrow \mathcal{X},$$

on ramène le problème à des espaces fibrés induits dont la base commune est la sphère S^2 . En partageant cette dernière en deux hémisphères, on peut résoudre le problème sur chacun d'eux, mais il est en général impossible de trouver un G -isomorphisme permettant de raccorder les espaces et les connexions ainsi obtenus. Or la recherche d'un tel G -isomorphisme est précisément l'objet du chapitre VII. On peut en utiliser les résultats et déterminer de cette façon un élément du centre de G dont la trivialité est une condition nécessaire et suffisante de raccordement et qui, de plus, ne dépend que de la classe d'homotopie de ψ . On détermine alors σ en considérant toutes les applications ψ possibles et l'on montre que, pour que l'espace $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ existe, il faut et il suffit que σ soit trivial.

Pour terminer, et d'une façon comparable au paragraphe 5 du chapitre VII, on considère le cas où l'image du second groupe d'homologie de \mathcal{X} par σ est un

sous-groupe de la composante connexe de l'identité de H et l'on cherche à modifier Ω pour se ramener à un cas résoluble. Comme au chapitre VII, on est amené à chercher une forme différentielle sur \mathcal{X} à valeurs dans \underline{H} et admettant des périodes données dépendant de σ . Le cas où \mathcal{X} est compact est évidemment le plus important.

Avant de développer ce que nous venons d'exposer, et tout à fait indépendamment, remarquons qu'étant donné un espace fibré principal topologique $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ muni successivement de deux structures d'espace fibré principal différentiable $\mathcal{E}^1(\mathcal{X}, G)$ et $\mathcal{E}^2(\mathcal{X}, G)$, on passe d'une structure à l'autre par une translation à gauche G_m correspondant à une section continue de l'espace structural gauche $\mathcal{N}(\mathcal{E})$ de $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$. En effet, soit \mathcal{A} l'ensemble des isomorphismes différentiables

$$a_x : \mathcal{E}_x^1 \rightarrow \mathcal{E}_x^2 \quad (x \in \mathcal{X}),$$

tels que

$$a_x(y \cdot s) = a_x(y) \cdot s \quad (y \in \mathcal{E}_x^1, s \in G).$$

Comme, localement, on sait reconnaître un G -isomorphisme différentiable $a_v : \mathcal{E}_v^1 \rightarrow \mathcal{E}_v^2$, on peut munir \mathcal{A} d'une structure d'espace fibré différentiable compatible avec sa structure d'espace fibré topologique. Mais \mathcal{A} est topologiquement isomorphe à $\mathcal{N}(\mathcal{E})$ ⁽²⁵⁾. Comme ce dernier possède une section continue (l'identité), il en est de même de \mathcal{A} et, en approchant cette dernière par une section différentiable, on détermine un G -isomorphisme différentiable de \mathcal{E}^1 sur \mathcal{E}^2 qui est bien une translation gauche.

1. DÉFINITION. — Soit $\tilde{\mathcal{L}}^0$ un espace fibré différentiable de base \mathcal{X} à fibre-algèbre de Lie. Nous supposons donc que $\mathcal{L}_x^0 (x \in \mathcal{X})$ est isomorphe à l'algèbre de Lie \tilde{G} d'un groupe de Lie connexe G , de dimension n et de centre H .

L'espace $\tilde{\mathcal{L}}$ des formes différentielles sur \mathcal{X} à valeurs dans $\tilde{\mathcal{L}}^0$ est muni des structures algébriques énumérées au paragraphe II.4. On peut d'ailleurs se ramener formellement aux notations qui y sont utilisées en considérant $\tilde{\mathcal{L}}^0$ comme associé à l'espace fibré principal \mathcal{S} constitué par les isomorphismes

$$\tilde{\mathcal{L}}_x^0 \rightarrow \underline{G} \quad (x \in \mathcal{X}),$$

espace fibré dont le groupe structural est le groupe des automorphismes de \underline{G} .

(25) En effet, si l'on pose

$$a_x(y) = m_x \cdot y \quad (y \in \mathcal{E}_x, a_x \in \mathcal{A} \text{ et } s \in G),$$

on a

$$\begin{aligned} a_x(y \cdot s) &= a_x(y) \cdot s \\ &= m_x \cdot (y \cdot s), \end{aligned}$$

ce qui montre que la correspondance définie par la première égalité ($a_x \rightarrow m_x$) est un isomorphisme d'espaces fibrés topologiques entre \mathcal{A} et $\mathcal{N}(\mathcal{E})$.

En d'autres termes, on peut poser $\tilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L}(\mathcal{S})$, \mathcal{L} étant alors l'espace fibré des formes différentielles sur \mathcal{X} à valeurs dans $\underline{\mathbb{G}}$.

DÉFINITION VIII.1.1. — *Un opérateur de différentiation covariante $\tilde{\Delta}$ sera défini axiomatiquement dans le faisceau $\tilde{\mathbb{L}}$ des sections différentiables de $\tilde{\mathcal{L}}$ par la donnée d'un endomorphisme*

$$\tilde{\Delta} : \tilde{\mathbb{L}} \rightarrow \tilde{\mathbb{L}}$$

du faisceau d'espaces vectoriels sous-jacent à $\tilde{\mathcal{L}}$, et par la donnée d'une section $\tilde{\Omega}$ de $\tilde{\mathbb{L}}^2$, lorsque cet endomorphisme et cette section possèdent les propriétés suivantes :

1. $\tilde{\Delta}\tilde{\mathbb{L}}^q \subset \tilde{\mathbb{L}}^{q+1}$;
2. $\tilde{\Delta}[\theta, \theta'] = [\tilde{\Delta}\theta, \theta'] + (-1)^q [\theta, \tilde{\Delta}\theta'] \quad (\theta \in \tilde{\mathbb{L}}^q \text{ et } \theta' \in \tilde{\mathbb{L}})$;
3. $\tilde{\Delta}\alpha \wedge \theta = d\alpha \wedge \theta + (-1)^r \alpha \wedge \tilde{\Delta}\theta \quad (\alpha \in \mathbb{F}^r) \quad (26)$;
4. $\tilde{\Delta}^2\theta = [\tilde{\Omega}, \theta] \quad \text{et} \quad \tilde{\Delta}\tilde{\Omega} = 0 \quad (\text{identités de Bianchi}).$

2. LA CONNEXION LINÉAIRE ASSOCIÉE A $\tilde{\Delta}$. — Soit \mathcal{R} l'espace des n -repères de $\tilde{\mathcal{L}}^0$. Donnons-nous une section locale différentiable

$$\sigma : U \rightarrow \mathcal{R}$$

de \mathcal{R} sur un ouvert $U \subset \mathcal{X}$ homéomorphe à \mathbb{R}^d , d étant comme d'habitude la dimension de \mathcal{X} . Soit $\sigma(x) = (\rho_i) (i = 1, \dots, n)$ pour $x \in U$. Il résulte de la définition VIII.1.1 qu'on a

$$(VIII.2.1) \quad \tilde{\Delta}\rho_i = \sum_{j=1}^n \bar{\omega}^j_i \rho_j \quad (i = 1, \dots, n),$$

puisque, d'une part, $\tilde{\Delta}\rho_i$ est une section locale de $\tilde{\mathbb{L}}^1$ d'après l'axiome 1 et que, d'autre part, toute section de $\tilde{\mathbb{L}}^1$ peut se mettre sous la forme (VIII.2.1), où les $\bar{\omega}^j_i$ sont des formes différentielles ordinaires de degré 1, sur U (voir § II.1, rappel 2°). Considérons alors la matrice $(\bar{\omega}^j_i)$ comme une forme différentielle linéaire sur U à valeurs dans l'algèbre de Lie $\underline{\text{Gl}}(n, \mathbb{R})$ du groupe linéaire. Nous nous proposons d'exprimer, en fonction de cette matrice, celle qu'on obtient en substituant à σ une section locale

$$\sigma' : U \rightarrow \mathcal{R}$$

telle que

$$\sigma'(x) = \sigma(x) \cdot \mu(x) \quad (x \in U),$$

avec

$$\mu(x) = (\mu^i_j) \in \underline{\text{Gl}}(n, \mathbb{R}).$$

(26) D'après les notations du chapitre II, \mathbb{F}^r est le faisceau des formes différentielles ordinaires sur \mathcal{X} .

Si l'on pose, dans ces conditions, $\sigma'(x) = (\rho'_i) (i = 1, \dots, n)$, on a

$$\rho'_i = \sum_{j=1}^n \mu^j_i \rho_j \quad \text{ou} \quad \rho_i = \sum_{j=1}^n \mu^{-1}_j_i \rho'_j.$$

Nous posons de plus

$$\tilde{\Delta}\rho'_i = \sum_{j=1}^n \bar{\omega}^j_i \rho'_j.$$

En vertu de l'axiome 3 on a alors

$$\tilde{\Delta}\rho'_i = \sum_{j=1}^n (d\mu^j_i \rho_j + \mu^j_i \tilde{\Delta}\rho_j) = \sum_{j,h=1}^n (d\mu^h_i + \mu^j_i \bar{\omega}^h_j) \rho_h = \sum_{i,h,k=1}^n (d\mu^h_i \mu^{-1}_j_h + \mu^h_i \bar{\omega}^k_h \mu^{-1}_j_k) \rho'_j.$$

En comparant ce résultat à l'expression de $\tilde{\Delta}\rho'_i$, il vient

$$\bar{\omega}^j_i = \sum_{h,k=1}^n (d\mu^h_i \mu^{-1}_j_h + \mu^h_i \bar{\omega}^k_h \mu^{-1}_j_k) \quad (i, j = 1, \dots, n).$$

Il suffit alors de se reporter au paragraphe III.4 et plus spécialement à la formule (III.4.3) pour voir que :

1° Il existe sur \mathcal{R} une forme différentielle linéaire à valeurs dans l'algèbre de Lie $\text{Gl}(n, \mathbb{R})$, notée (ω^i_j) , dont la restriction à une section locale quelconque $\sigma = (\rho_i)$ de \mathcal{R} coïncide avec la matrice $(\bar{\omega}^i_j)$ définie par l'égalité (VIII.2.1).

2° Que la matrice $\underline{\omega} = (\omega^i_j)$ définit une connexion linéaire sur \mathcal{R} . Cette connexion $\underline{\omega}$ sera dite associée $\tilde{\Delta}$.

Remarquons que nous n'avons pas, pour l'instant, fait usage des axiomes 2 et 4, et que ce que nous venons de faire n'est pas essentiellement différent des méthodes anciennement utilisées pour définir les connexions linéaires (par exemple E. CARTAN, *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann*). Ce qui précède est donc valable pour un espace fibré différentiable à fibre uniquement vectorielle satisfaisant à 1 et à 3.

On notera $\mathcal{L}_n(\mathcal{R})$ l'espace de Lie de \mathcal{R} et $L_n(\mathbb{R})$ sera le faisceau des sections différentiables de $\mathcal{L}_n(\mathcal{R})$. La $L_n(\mathbb{R})$ -différentiation covariante associée à $\underline{\omega}$ sera notée $\underline{\Delta}$. Quant à la \tilde{L} -différentiation covariante également associée à $\underline{\omega}$, elle coïncide avec $\tilde{\Delta}$ d'après la formule (VIII.2.1), nous n'introduirons donc pas de nouveau symbole pour la désigner.

3. LE TENSEUR FONDAMENTAL. — A tout repère $\rho = (\rho_i) \in \mathcal{R}_x$ correspondent des constantes de structure de la fibre \mathcal{L}_x^0 correspondante. Ces « constantes » sont d'ailleurs des fonctions c^i_{jk} sur \mathcal{R} qui se transforment par un changement de repère comme les composantes d'un tenseur deux fois covariant et une fois

contravariant sur \mathcal{R} . Ce tenseur, noté c , sera appelé le *tenseur fondamental* de $\tilde{\mathcal{L}}$. Ses principales propriétés sont liées à l'axiome 2. En effet, par rapport à une section locale (ρ_i) de \mathcal{R} , on a

$$[\rho_i, \rho_j] = \sum_{k=1}^n c^k_{ij} \rho_k \quad (i, j = 1, \dots, n).$$

L'application de la deuxième règle de différentiation covariante à cette égalité donne, quelles que soient les valeurs des indices i et j ($i, j = 1, \dots, n$) :

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}[\rho_i, \rho_j] &= [\tilde{\Delta}\rho_i, \rho_j] + [\rho_i, \tilde{\Delta}\rho_j] = \sum_{h=1}^n ([\bar{\omega}^h_i \rho_h, \rho_j] + [\rho_i, \bar{\omega}^h_j \rho_h]) \\ &= \sum_{h=1}^n (\bar{\omega}^h_i [\rho_h, \rho_j] + \bar{\omega}^h_j [\rho_i, \rho_h]) = \sum_{h,k=1}^n (c^k_{hj} \bar{\omega}^h_i + c^k_{ih} \bar{\omega}^h_j) \rho_k. \end{aligned}$$

La règle 3 donne, par ailleurs

$$\tilde{\Delta}[\rho_i, \rho_j] = \sum_{h,k=1}^n (dc^k_{ij} + c^h_{ij} \bar{\omega}^k_h) \rho_k.$$

En rapprochant ces deux dernières égalités, il vient

$$(VIII.3.1) \quad dc^k_{ij} + \sum_{h=1}^n c^h_{ij} \bar{\omega}^k_h - \sum_{h=1}^n c^k_{hj} \bar{\omega}^h_i - \sum_{h=1}^n c^k_{ih} \bar{\omega}^h_j = 0,$$

avec $i, j, k = 1, \dots, n$.

Notons alors $\mathcal{L}_{2,1}(\mathcal{R})$ l'espace fibré des formes différentielles tensorielles sur \mathcal{R} une fois covariante et deux fois contravariantes. La formule (VIII.3.1) montre que le tenseur de composantes c^i_{jk} est à différentielle covariante nulle pour la $L_{2,1}(\mathcal{R})$ -différentiation covariante associée à la connexion $\underline{\omega}$.

PROPOSITION VIII.3.1. — *Le tenseur fondamental de $\tilde{\mathcal{L}}$ est à différentielle covariante nulle.*

4. LE CENTRE DE $\tilde{\mathcal{L}}^0$. — Soit $\tilde{\mathcal{K}}^0$ le centre de $\tilde{\mathcal{L}}^0$ et $\tilde{\mathcal{K}}^p$ le sous-espace de \mathcal{L}^p engendré par $\tilde{\mathcal{K}}^0$. Le faisceau des sections différentiables de $\tilde{\mathcal{K}}^p$ étant naturellement noté \tilde{K}^p , le faisceau $\tilde{K} = \bigcup_{p=1, \dots, d} \tilde{K}^p$ est stable pour $\tilde{\Delta}$ car la formule $\tilde{\Delta}[\theta, \theta'] = [\tilde{\Delta}\theta, \theta'] + (-1)^p [\theta, \tilde{\Delta}\theta']$ montre que si $\theta \in \tilde{K}$ (ce qui entraîne $[\theta, \theta'] = [\theta, \tilde{\Delta}\theta'] = 0$), on a également $[\tilde{\Delta}\theta, \theta'] = 0$. Il en résulte que \mathcal{K}^0 est invariant par le transport parallèle associé à $\underline{\omega}$ et que, par suite, le champ définissant le transport parallèle dans $\tilde{\mathcal{L}}_0$ induit, dans $\tilde{\mathcal{K}}^0$, un champ (Γ) transversal aux fibres. Soit (ρ_a) ($a = 1, \dots, p$) une section locale de l'espace des

p -repères de $\tilde{\mathcal{K}}^0$, dont les fibres sont supposées de dimension p . Par rapport à ces repères, tout vecteur γ de $\tilde{\mathcal{K}}^0$ s'écrit

$$\gamma = \sum_{a=1}^p \gamma^a \rho_a.$$

et, en posant

$$\tilde{\Delta} \rho_a = \sum_{b=1}^p \bar{\omega}^b{}_a \rho_b,$$

il vient

$$\tilde{\Delta} \gamma = \sum_{a,b=1}^p (d\gamma^a + \gamma^b \bar{\omega}^a{}_b) \rho_a.$$

Le champ (Γ) est alors défini par le système de Pfaff :

$$\eta^a = d\gamma^a + \sum_{b=1}^p \gamma^b \bar{\omega}^a{}_b = 0 \quad (a = 1, \dots, p).$$

Nous allons voir que ce champ est complètement intégrable. Dans ce but, nous allons calculer la différentielle de η^a :

$$d\eta^a = \sum_{b=1}^p (d\gamma^b \wedge \bar{\omega}^a{}_b + \gamma^b d\bar{\omega}^a{}_b).$$

Mais, comme ρ_a est une section de K^0 , la quatrième condition de la définition VIII.4.1 montre qu'on a

$$\tilde{\Delta}^2 \rho_a = [\tilde{\Omega}, \rho_a] = 0.$$

Un calcul rapide permet alors de transformer cette égalité en

$$d\bar{\omega}^a{}_b - \sum_{c=1}^p \bar{\omega}^c{}_b \wedge \bar{\omega}^a{}_c = 0.$$

En revenant alors à $d\eta^a$, il vient

$$d\eta^a = \sum_{b=1}^p (d\gamma^b \wedge \bar{\omega}^a{}_b + \sum_{c=1}^p \gamma^b \bar{\omega}^c{}_b \wedge \bar{\omega}^a{}_c) = \sum_{b=1}^p (d\gamma^b + \sum_{c=1}^p \gamma^c \bar{\omega}^b{}_c) \wedge \bar{\omega}^a{}_b.$$

Et, en définitive

$$d\eta^a = \sum_{b=1}^p \eta^b \wedge \bar{\omega}^a{}_b,$$

égalité qui montre que la condition d'intégrabilité de Frobenius est vérifiée. Nous pouvons donc énoncer :

PROPOSITION VIII.4.1. — *Le centre $\tilde{\mathcal{K}}^0$ de $\tilde{\mathcal{L}}^0$ est invariant par transport*

parallèle relativement à $\underline{\omega}$. Le champ définissant de transport parallèle dans $\tilde{\mathcal{K}}^0$ est intégrable. Il en résulte que si \mathcal{X} est simplement connexe, $\tilde{\mathcal{K}}^0$ est un espace fibré trivial.

Il résulte en particulier de cette proposition qu'il est possible de faire le quotient de $\tilde{\mathcal{L}}$ par $\tilde{\mathcal{K}}$. Nous poserons $\tilde{\mathcal{L}}' = \tilde{\mathcal{L}}/\tilde{\mathcal{K}}$ et nous noterons

$$\gamma_{\tilde{\mathcal{L}}} : \tilde{\mathcal{L}} \rightarrow \tilde{\mathcal{L}}'.$$

l'homomorphisme canonique qui en résulte. $\tilde{\Delta}$ passe au quotient sous la notation $\tilde{\Delta}'$ et l'on pose $\tilde{\Omega}' = \gamma_{\tilde{\mathcal{L}}}(\tilde{\Omega})$.

5. HOMOMORPHISME ADJOINT. — Soit $\eta \in \tilde{\mathcal{L}}_x$ et $P(\eta)$ l'application linéaire de $\tilde{\mathcal{L}}_x$ dans lui-même qui fait correspondre la forme $[\eta, \theta]$ à tout élément $\theta \in \tilde{\mathcal{L}}_x$. Explicitement, si pour un repère $(\rho_i) \in \mathcal{R}_x$, on a

$$\eta = \sum_{j=1}^n \eta^j \rho_j,$$

on pose

$$P(\eta) = \sum_{i,j,k=1}^n c^{k_{ij}} \eta^i (\rho^j \otimes \rho_k),$$

de sorte que P applique $\tilde{\mathcal{L}}$ dans l'espace de Lie $\mathcal{L}_n(\mathcal{R})$ de \mathcal{R} .

PROPOSITION VIII. 5. 1. — On a les deux égalités

$$P \circ \tilde{\Delta} = \underline{\Delta} \circ P \quad \text{et} \quad \Omega(\underline{\omega}) = P(\tilde{\Omega}).$$

En effet, d'une part

$$\underline{\Delta} P(\eta) = \sum_{j,k=1}^n \left[\sum_{l=1}^n (dc^{k_{ij}} \eta^l + c^{k_{ij}} d\eta^l) + \sum_{i,h=1}^n \bar{\omega}^k c^h_{ij} \eta^i - \sum_{i,h=1}^n \bar{\omega}^h_j c^k_{ih} \eta^i \right] (\rho^j \otimes \rho_k)$$

et, d'autre part

$$P(\tilde{\Delta}\eta) = \sum_{j,k=1}^n \left[\sum_{i=1}^n c^{k_{ij}} d\eta^i + \sum_{i,l=1}^n \bar{\omega}^l_i c^k_{ij} \eta^l \right] (\rho^j \otimes \rho_k).$$

La démonstration de la première formule de la proposition se transforme donc en la vérification de l'égalité suivante :

$$\sum_{i,l=1}^n c^{k_{ij}} d\eta^l + c^{k_{ij}} \bar{\omega}^l_i \wedge \eta^l = \sum_{i,h=1}^n (dc^{k_{ij}} \wedge \eta^i + c^{k_{ij}} d\eta^i + \bar{\omega}^k_h c^h_{ij} \wedge \eta^i - \bar{\omega}^h_i c^k_{jh} \wedge \eta^j),$$

ou encore

$$\sum_{i=1}^n \eta^i \wedge \left(dc^{k_{ij}} + \sum_{h=1}^n \bar{\omega}^k_h c^h_{ij} - \sum_{h=1}^n \bar{\omega}^h_i c^k_{hj} - \sum_{h=1}^n \bar{\omega}^h_j c^k_{ih} \right) = 0.$$

Or, les seconds facteurs de cette égalité sont nuls d'après (VIII.3.1). La première partie de la proposition est donc démontrée. Reste la deuxième formule. Or, en notant comme d'habitude $A.Z$ le transformé de $Z \in \tilde{\mathcal{L}}_x$ par $A \in \mathcal{L}_n(\mathcal{R})$, on a d'une part

$$\tilde{\Delta}^2 X = [\tilde{\Omega}, X] = P(\tilde{\Omega}).X \quad (X \in \tilde{\mathcal{L}}),$$

à cause de la condition 4 à laquelle $\tilde{\Delta}$ et $\tilde{\Omega}$ sont soumis, et d'autre part

$$\tilde{\Delta}^2 X = \Omega(\underline{\omega}).X$$

parce que $\tilde{\Delta}$ est la $\tilde{\mathcal{L}}$ -différentiation covariante associée à la connexion $\underline{\omega}$ comme nous l'avons vu au paragraphe VIII.2. De ces deux égalités, on déduit immédiatement :

$$P(\tilde{\Omega}) = \Omega(\underline{\omega}).$$

On peut alors énoncer :

PROPOSITION VIII.5.1. — *Le champ normal $\Gamma(P(\tilde{\mathcal{L}}^0), \underline{\omega})$ est intégrable.*

En effet, la proposition VIII.5.1 montre que $P(\tilde{\mathcal{L}})$ est stable pour $\underline{\Delta}$ et contient la courbure $\Omega(\underline{\omega})$.

6. EXISTENCE D'UN ESPACE FIBRÉ PRINCIPAL ADMETTANT $(\tilde{\mathcal{L}}', \tilde{\Delta}', \tilde{\Omega}')$. — Rappelons que nous nous sommes donnés un groupe de Lie G dont l'algèbre est isomorphe à la fibre-type de $\tilde{\mathcal{L}}^0$. Lorsque \mathcal{X} est simplement connexe, l'existence d'un espace fibré principal différentiable de groupe structural $G_\gamma = G/H$ ($H =$ centre de G) admettant $(\tilde{\mathcal{L}}', \tilde{\Delta}', \tilde{\Omega}')$ est une conséquence immédiate de la proposition VIII.5.1. Pour obtenir un résultat plus précis, il est cependant nécessaire de fixer quelques notations.

Choisissons un point x de \mathcal{X} et un isomorphisme $j : \tilde{\mathcal{L}}_x^0 \rightarrow \underline{G}$. Soit \mathcal{E}' la variété intégrale de $\Gamma(P(\tilde{\mathcal{L}}^0), \underline{\omega})$ qui passe par un repère ρ appartenant à la fibre \mathcal{R}_x de \mathcal{R} . Nous désignerons par $f = (f_i) (i = 1, \dots, n)$ le repère de \underline{G} , image de ρ par j , c'est-à-dire, si $\rho = (\rho_i) (i = 1, \dots, n)$, le repère constitué par les vecteurs $f_i = j(\rho_i) (i = 1, \dots, n)$.

Nous savons que \mathcal{E}' est un sous-espace fibré différentiable de \mathcal{R} et que son groupe structural G' est un sous-groupe de $Gl(n, \mathbb{R})$ (groupe structural de \mathcal{R}) dont l'algèbre de Lie \underline{G}' est la sous-algèbre $j_{\mathcal{E}'_n}(\rho)P(\tilde{\mathcal{L}}_x^0)$ de $Gl(n, \mathbb{R})$. Or, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathcal{E}}'_x & \xrightarrow{j} & \underline{G} \\ P \downarrow & & \downarrow \underline{a}^f \\ \mathcal{E}'_{nx}(\mathbb{R}) & \xrightarrow{j_{\mathcal{E}'_n}(\rho)} & \underline{Gl}(n, \mathbb{R}) \end{array}$$

Fig. 13.

est commutatif à cause du choix de f , On a donc

$$(VIII.6.1) \quad j_{\mathcal{E}_n}(\rho)P(\tilde{\mathcal{L}}_x^0) = a'(\underline{G}).$$

Soit G'_0 la composante connexe de l'élément neutre de G' . Puisque G est connexe par hypothèse et que $\underline{G}' = j_{\mathcal{E}_n}(\rho)P(\tilde{\mathcal{L}}_x^0)$, l'égalité (VIII.6.1) montre que $G'_0 = a'(G)$. Isomorphe au groupe adjoint, G'_0 opère donc sur \underline{G} comme groupe d'automorphisme. D'autre part, l'espace d'holonomie $\mathfrak{A}(\underline{\omega})$ laisse le tenseur c invariant parce que ce dernier est à dérivée covariante nulle. Il en résulte que le groupe $j_{\mathcal{E}_n}(\rho)\mathfrak{A}_x(\underline{\omega})$ opère sur \underline{G} comme groupe d'automorphismes également. Comme G' est d'après la proposition V.6.3, engendré par G'_0 et par $j_{\mathcal{E}_n}(\rho)\mathfrak{A}_x(\underline{\omega})$, ses opérations sur l'algèbre de Lie \underline{G} sont des automorphismes. En notant \mathcal{L} l'espace fibré des formes différentielles sur \mathcal{X} à valeurs dans \underline{G} , on peut donc former $\mathcal{L}(\mathcal{E}')$ qui est évidemment isomorphe à $\tilde{\mathcal{L}}$ tandis que l'espace de Lie de $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, G')$ est isomorphe au quotient de $\mathcal{L}(\mathcal{E}')$ par son centre, c'est-à-dire à $\tilde{\mathcal{L}}/\tilde{\mathcal{K}}$. D'autre part, on a vu que $\tilde{\Delta}$ et $\tilde{\Delta}'$ étaient associées, l'une et l'autre, à $\underline{\omega}$. Cette dernière induit donc sur $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, G')$ une connexion ω' à laquelle $\tilde{\Delta}$ et $\tilde{\Delta}'$ continuent à être associées. Nous résumerons ce qui précède dans le théorème :

THÉORÈME VIII.6.1. — *Étant donnés $\tilde{\mathcal{L}}$, $\tilde{\Delta}$ et $\tilde{\Omega}$ satisfaisant aux conditions de la définition VIII.1.1, il existe un espace fibré principal différentiable $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, G')$ de groupe structural G' et de base \mathcal{X} , possédant les propriétés suivantes :*

1° G' est un groupe d'automorphismes de \underline{G} dont la composante connexe est isomorphe à G/H ($H =$ centre de G).

2° $\mathcal{L}(\mathcal{E}')$ est isomorphe à $\tilde{\mathcal{L}}$ et l'espace de Lie $\mathcal{L}'(\mathcal{E}')$ de $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, G')$ est isomorphe au quotient de $\tilde{\mathcal{L}}$ par son centre.

3° $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, G')$ admet une connexion ω' telle que les $L(E')$ - et $L'(E')$ -différentiations covariantes associées à ω' s'identifient à $\tilde{\Delta}$ et à $\tilde{\Delta}'$ respectivement, tandis que la courbure $\Omega(\omega')$ s'identifie à $\tilde{\Omega}$.

Remarque. — Si la variété \mathcal{X} est simplement connexe, $\mathfrak{A}(\underline{\omega})$ est à fibres connexes. G' est donc connexe et isomorphe à G/H .

7. CAS GÉNÉRAL. — Nous supposons essentiellement dans ce paragraphe que la variété \mathcal{X} est simplement connexe. En tenant compte à la fois du théorème VIII.6.1 et de la remarque précédente, on peut alors envisager la question de la façon suivante :

Soit $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, G_\gamma)$ un espace fibré principal différentiable de groupe structural $G_\gamma = G/H$, où G est un groupe de Lie connexe de centre H . Nous considérons une connexion ω' sur $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, G_\gamma)$ à laquelle sont associées les $L(E')$ - et $L'(E')$ -

différentiations covariantes Δ et Δ' . Enfin, soit Ω une section de $L^2(E')$ telle qu'on ait

$$(VIII.7.1) \quad \begin{cases} \gamma_{L(E')}(\Omega) = \Omega(\omega'), \\ \Delta\Omega = 0, \end{cases}$$

où $\gamma_{L(E')}$ est l'homomorphisme canonique de $L(E')$ sur $L'(E')$. Existe-t-il, dans ces conditions, un espace fibré principal différentiable de base \mathcal{X} et de groupe G , admettant $(\mathcal{L}(\mathcal{E}'), \Delta, \Omega)$. En d'autres termes, existe-t-il un espace fibré principal différentiable $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$, un homomorphisme

$$\gamma_{\mathcal{E}} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$$

compatible avec l'homomorphisme canonique $\gamma : G \rightarrow G/H = G/H$, et une connexion ω de $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ tels que

$$\gamma_{C(E)}(\omega) = \omega' \quad \text{et} \quad \Omega(\omega) = \Omega,$$

expressions qui ont un sens parce que le couple d'homomorphismes compatibles $(\gamma, \gamma_{\mathcal{E}})$ détermine un homomorphisme $\gamma_{C(E)} : C(E) \rightarrow C'(E')$, tandis que $\gamma_{\mathcal{E}}$ permet d'identifier $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ et $\mathcal{L}(\mathcal{E}')$.

Le cas abélien montre qu'en général, ce problème n'admet pas de solution. En effet, supposons que G soit le groupe abélien simplement connexe de dimension n , c'est-à-dire \mathbb{R}^n . Si \mathcal{E} existe, il est donc trivial et, quelle que soit la connexion choisie sur $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$, sa courbure, considérée comme une forme différentielle sur \mathcal{X} à valeurs dans \underline{G} , est homologue à 0. On le vérifie immédiatement en considérant une section de \mathcal{E} et la restriction à cette section de la forme de connexion et de la forme de courbure (réciproquement, voir prop. VII.6.2). Or, toute 2-forme différentielle fermée à valeurs dans \underline{G} est à différentielle covariante nulle mais n'est pas nécessairement homologue à 0. Même dans le cas abélien, si le deuxième groupe d'homologie de \mathcal{X} n'est pas nul le problème n'admet donc pas de solution en général.

Aussi est-ce une condition d'existence que nous allons chercher à exprimer. Dans ce but, nous nous proposerons tout d'abord d'essayer, à l'aide des données précédentes, d'associer à tout lacet de \mathcal{X} , un élément de $\mathcal{N}(\mathcal{E}')$.

Soit $l_x : S^1 \rightarrow \mathcal{X}$ un lacet en $x \in \mathcal{X}$, c'est-à-dire une application différentiable du cercle S^1 , muni d'une origine $O[l_x(O) = x]$ et paramétré régulièrement par $\alpha : I \rightarrow S^1 [\alpha(0) = \alpha(1) = O]$, dans \mathcal{X} .

Plongeons S^1 dans une variété Q différentiablement homéomorphe à \mathbb{R}^2 , et soit

$$\nu : Q \rightarrow \mathcal{X},$$

une extension différentiable de l_x , extension dont l'existence résulte du fait que \mathcal{X} a été supposée simplement connexe. Dans ces conditions, nous dirons que le lacet l_x est obturé par ν , ou encore, que l'application ν est une obturation de l_x .

Nous définirons alors un élément $m(l_x, \nu) \in \mathcal{M}_x(\mathcal{E}')$ en posant $\mathcal{E}_0 = \mathbb{R}^2 \times G$ et en choisissant :

1° Un γ -homomorphisme

$$\gamma_{\mathcal{E}_0} : \mathcal{E}_0 \rightarrow \mathcal{E}'_\nu = \nu^{-1}(\mathcal{E}'),$$

dont l'existence est assurée puisque \mathcal{E}'_ν , de base Q , est trivial.

2° Une connexion ω_0 de \mathcal{E}_0 telle que

$$(VIII.7.2) \quad \begin{cases} \gamma_{c_0(\mathcal{E}_0)}(\omega_0) = \omega'_\nu, \\ \Omega(\omega_0) = \Omega_\nu, \end{cases}$$

où $\gamma_{c_0(\mathcal{E}_0)}$ est l'homomorphisme associé à $(\gamma, \gamma_{\mathcal{E}_0})$, où ω'_ν est la connexion induite par ν à partir de ω' et où Ω_ν est la section de $\mathcal{L}'_\nu(\mathcal{E}'_\nu)$ induite à partir de $\Omega^{(27)}$. En considérant S^1 comme un lacet en O dans Q , on pose alors

$$m(l_x, \nu) = \nu^{\#}_{\mathcal{M}(\mathcal{E}')}(\tau_{\omega_0}(S^1)).$$

En d'autres termes, $m(l_x, \nu)$ est l'élément de $\mathcal{M}_x(\mathcal{E}')$, image par l'homomorphisme induit $\nu^{\#}_{\mathcal{M}(\mathcal{E}')}$ de la transformation associée au lacet S^1 . Cette dernière est un élément de l'espace structural gauche $\mathcal{M}_0(\mathcal{E}_0)$ de \mathcal{E}_0 , mais le γ -homomorphisme $\gamma_{\mathcal{E}_0}$ permet d'identifier $\mathcal{M}_0(\mathcal{E}_0)$ à l'espace induit $\mathcal{M}_\nu(\mathcal{E}'_\nu) = \nu^{-1}(\mathcal{M}(\mathcal{E}'))$. C'est cette identification qui donne un sens à l'expression de $m(l_x, \nu)$. Remarquons tout de suite que $m(l_x, \nu)$ ne dépend pas de l'extension de ν à l'extérieur du cercle S^1 . De plus, on a le :

LEMME 1. — $m(l_x, \nu)$ ne dépend ni du choix de $\gamma_{\mathcal{E}_0}$, ni de celui de la connexion ω_0 vérifiant les conditions (VIII.7.2).

En effet, soit

$$\bar{\gamma}_{\mathcal{E}_0} : \mathcal{E}_0 \rightarrow \mathcal{E}'_\nu,$$

un autre γ -homomorphisme et soit $\bar{\omega}_0$ une connexion sur \mathcal{E}_0 satisfaisant aux deux égalités

$$(VIII.7.2') \quad \begin{cases} \bar{\gamma}_{c_0(\mathcal{E}_0)}(\bar{\omega}_0) = \omega'_\nu, \\ \Omega(\bar{\omega}_0) = \Omega_\nu. \end{cases}$$

Compte tenu des identifications liées à $\gamma_{\mathcal{E}_0}$ et à $\bar{\gamma}_{\mathcal{E}_0}$, il résulte des identités (VIII.7.2) et (VIII.7.2') que l'identité sur $\mathcal{M}_\nu(\mathcal{E}'_\nu)$, à laquelle est associée l'identité sur $\mathcal{L}'_\nu(\mathcal{E}'_\nu)$, est un automorphisme de l'espace structural gauche de $\mathcal{E}_0(Q, G)$ satisfaisant aux conditions du théorème VI.2.1. Le lemme 1 de ce

(27) $\mathcal{L}'_\nu(\mathcal{E}'_\nu)$ est défini soit comme le modelé sur \mathcal{E}'_ν de l'espace fibré des formes différentielles sur Q à valeurs dans \underline{G} , soit comme l'espace fibré des formes différentielles sur Q à valeurs dans $\mathcal{L}'_\nu(\mathcal{E}'_\nu) = \nu^{-1}(\mathcal{L}^0(\mathcal{E}'))$

théorème, appliqué à ce cas particulier, montre que $\tau_{\omega_0}(S^1)$, identifié à un élément de $\mathcal{N}_\nu(\mathcal{E}')$, grâce à $\gamma_{\mathcal{E}'_0}$, est égal à $\tau_{\omega_0}(S^1)$ identifié à un élément de $\mathcal{N}_\nu(\mathcal{E}')$, grâce à $\gamma_{\mathcal{E}'_0}$. C'est précisément ce qu'il s'agissait de montrer. Nous dirons alors que $m(l_x, \nu)$ est associé au lacet l_x et à son obturation ν .

COROLLAIRE 1 DU LEMME 1. — *S'il existe un espace fibré principal $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ et une connexion ω répondant aux conditions du problème, on a*

$$m(l_x, \nu) = \tau_\omega(l_x).$$

En effet, comme $\nu^{-1}(\mathcal{E})$ s'identifie à $Q \times G$, c'est là une conséquence immédiate de l'unicité de $m(l_x, \nu)$.

COROLLAIRE 2 DU LEMME 1. — *On a l'égalité*

$$\gamma_{\mathcal{N}(\mathcal{E}')} (m(l_x, \nu)) = \tau_{\omega'}(l_x).$$

En effet, il est clair que $\gamma_{\mathcal{N}(\mathcal{E}')} (m(l_x, \nu))$ est l'élément de $\mathcal{N}'_x(\mathcal{E}')$ associé à l_x et à ω lorsque $\mathcal{L}'(\mathcal{E}')$ est muni de la différentiation covariante Δ' associée à ω' et de la courbure $\Omega(\omega')$. D'après le corollaire précédent, cet élément est égal à $\tau_{\omega'}(l_x)$.

Considérons maintenant une application différentiable

$$\psi : S^2 \rightarrow \mathcal{X}$$

de la sphère orientée S^2 dans \mathcal{X} . Soit Γ un grand cercle de S^2 paramétré régulièrement par $\alpha(t)$ à partir d'une origine $O[\alpha(1) = \alpha(0) = o]$. L'orientation de S^2 et l'orientation de Γ résultant du paramétrage permettent de distinguer un hémisphère positif H^+ et un hémisphère négatif H^- . Soient Q^+ et Q^- deux voisinages ouverts de H^+ et de H^- limités par des cercles Σ_1 et Σ_2 . Nous pouvons considérer la restriction ψ_Q de ψ à Q ($Q = Q^+$ ou Q^-) comme une obturation du lacet ψ_Γ constitué lui-même par la restriction de ψ à Γ . Nous poserons

$$m_+ = m(\psi_\Gamma, \psi_{Q^+}), \quad m_- = m(\psi_\Gamma, \psi_{Q^-})$$

et nous dirons que (m_+, m_-) est le couple de transformations associé à l'ensemble (O, Γ, ψ) . Comme $m(l_x, \nu)$ ne dépend pas de l'extension de ν hors du cercle S^1 , il est clair que le couple (m_+, m_-) ne dépend pas du choix des voisinages Q . De plus, en se reportant au corollaire 2 du lemme 1, on voit que $m_+(m_-)^{-1}$ fait partie du centre de $\mathcal{N}(\mathcal{E}')$. Comme ce dernier est trivial et canoniquement isomorphe à $\mathcal{X} \times H$, nous poserons

$$s(O, \Gamma, \psi) = m_+(m_-)^{-1}$$

et nous considérerons $s(O, \Gamma, \psi)$ comme appartenant au centre H de G .

INTERPRÉTATION DE $s(O, \Gamma, \psi)$. — Posons $\mathcal{E}'_y = \psi^{-1}(\mathcal{E}')$; $\mathcal{N}_\psi(\mathcal{E}'_y) = \psi^{-1}(\mathcal{N}(\mathcal{E}'))$,

$\mathcal{M}'_\psi(\mathcal{E}'_\psi) = \psi^{-1}(\mathcal{M}'(\mathcal{E}'))$, $\mathcal{L}'_\psi(\mathcal{E}'_\psi) = \psi^{-1}(\mathcal{L}'^0(\mathcal{E}'))$ et notons $\mathcal{L}'_\psi(\mathcal{E}'_\psi)$ l'espace fibré des formes différentielles sur S^2 à valeurs dans $\mathcal{L}'_\psi(\mathcal{E}'_\psi)$. La connexion induite par ψ à partir de ω' sera désignée par ω'_ψ et la section de $\mathcal{L}'_\psi(\mathcal{E}'_\psi)$ induite à partir de Ω , par Ω_ψ . En revenant à la définition de $m(l_x, \nu)$, on est amené à poser

$$\mathcal{E}_Q = Q \times G, \quad \mathcal{E}'_{\psi_Q} = \mathcal{E}'_\psi|_Q \quad (Q = Q^+ \text{ ou } Q^-)$$

et à désigner par ω'_{ψ_Q} et Ω_{ψ_Q} les restrictions de ω'_ψ et Ω_ψ à Q ($Q = Q^+$ ou Q^-). Toujours d'après cette définition, on choisit deux γ -homomorphismes

$$\gamma_{\mathcal{E}_Q}: \mathcal{E}_Q \rightarrow \mathcal{E}'_{\psi_Q} \quad (Q = Q^+ \text{ ou } Q^-).$$

L'élément m ($m = m_+$ ou m_-) est alors (à un homomorphisme induit près), égal à la transformation associée à Γ (lacet en 0 dans Q) lorsque \mathcal{E}_Q est muni d'une connexion ω_Q telle que

$$\gamma_{c_Q(\Gamma)}(\omega_Q) = \omega'_{\psi_Q} \quad \text{et} \quad \Omega(\omega_Q) = \Omega_{\psi_Q}.$$

On désignera enfin par Z l'intersection $Z = Q^+ \cap Q^-$ et les restrictions à Z des éléments définis sur Q^+ et Q^- seront notés en substituant à Q^+ et Q^- les symboles Z^+ et Z^- :

$$\mathcal{E}_{Z^+} = \mathcal{E}_{Q^+}|_Z, \quad \omega_{Z^+} = \omega_{Q^+}|_Z, \quad \mathcal{E}'_{\psi_Z} = \mathcal{E}'_\psi|_Z, \quad \omega'_{\psi_Z} = \omega'_{\psi}|_Z.$$

En nous reportant au paragraphe VII.4, et en considérant les espaces et connexions \mathcal{E}_{Z^+} , ω_{Z^+} d'une part, \mathcal{E}_{Z^-} , ω_{Z^-} d'autre part, nous voyons que nous sommes exactement dans la situation de la proposition VII.4.1 et qu'en notant α la *classe d'homotopie de Γ dans Z* , on a

$$s(O, \Gamma, \psi) = \chi_0(\alpha).$$

Comme le groupe d'homotopie de Z en dimension 1 est engendré par Γ , la trivialité de $s(O, \Gamma, \psi)$ est une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un G -isomorphisme de \mathcal{E}_{Z^+} sur \mathcal{E}_{Z^-} appliquant ω_{Z^+} sur ω_{Z^-} et induisant l'identité sur \mathcal{E}'_{ψ_Z} . En d'autres termes, c'est une condition nécessaire et suffisante de raccordement de \mathcal{E}_{Q^+} , ω_{Q^+} et \mathcal{E}_{Q^-} , ω_{Q^-} sur Z .

Il résulte de cette interprétation que si Γ' est un cercle homotope à Γ dans Z , on a $s(O, \Gamma', \psi) = s(O, \Gamma, \psi)$. En particulier, $s(O, \Gamma, \psi)$ ne dépend pas du choix de O sur Γ . Nous allons voir maintenant qu'en fait, $s(O, \Gamma, \psi)$ ne dépend ni de O , ni de Γ , mais uniquement de la classe d'homotopie de ψ .

Soit

$$\varphi: S^2 \times I \rightarrow \mathcal{X}$$

une application différentiable telle que $\varphi(x, 0) = \psi(x)$ ($x \in S^2$). Nous posons naturellement

$$\varphi(x, t) = \psi_t(x)$$

et nous nous intéressons plus spécialement à ψ_1 . Il est malheureusement nécessaire de préciser encore quelques notations. On pose $\mathcal{E}'_\varphi = \varphi^{-1}(\mathcal{E}')$ et l'on note \mathcal{E}'_{ψ_t} la restriction de \mathcal{E}'_φ à (S^2, t) (ou, si l'on préfère, l'espace fibré induit par ψ_t). Dans le même esprit, on aura $\mathcal{M}'_\varphi(\mathcal{E}'_\varphi)$, $\mathcal{L}'_\varphi(\mathcal{E}'_\varphi)$, $\mathcal{M}'_{\psi_t}(\mathcal{E}'_{\psi_t})$, $\mathcal{L}'_{\psi_t}(\mathcal{E}'_{\psi_t})$, etc.

Soient Γ et Γ' deux grands cercles de S^2 se coupant en O et orientés. Choisissons deux cercles Σ_1 et Σ_2 , symétriques par rapport au centre de S^2 et situés dans les quadrants négatifs délimités par Γ et Γ' , de telle sorte que, dans la zone Z comprise entre Σ_1 et Σ_2 , les cercles orientés Γ et Γ' soient homotopes. Choisissons alors pour voisinage Q^+ et Q^- communs à Γ et à Γ' , les portions de sphère délimitées respectivement par Σ_1 et Σ_2 , et contenant O (et par suite Γ et Γ'), nous poserons encore

$$Z = Q^+ \cap Q^- \quad \text{et} \quad \bar{Z} = Z \times I'$$

et, avec $Q = Q^+ \cup Q^-$:

$$\bar{Q} = Q \times I', \quad \mathcal{E}_Q = Q \times G, \quad \mathcal{E}_{\bar{Q}} = \bar{Q} \times G, \quad \mathcal{E}'_{\bar{Q}} = \mathcal{E}'_\varphi | \bar{Q}.$$

En outre, on aura

$$\mathcal{E}_{Z^+} = \mathcal{E}_{Q^+} | Z, \quad \mathcal{E}_{Z^-} = \mathcal{E}_{Q^-} | Z, \quad \mathcal{E}'_{Z^-} = \mathcal{E}'_\varphi | \bar{Z},$$

ainsi que les notations déduites de ces dernières par substitution du signe — au signe +.

φ induit à partir de ω' une connexion ω'_φ sur \mathcal{E}'_φ qui induit à son tour ω'_{ψ_t} sur \mathcal{E}'_{ψ_t} , ω'_{φ_0} sur \mathcal{E}'_{φ_0} , ω'_{φ_2} sur \mathcal{E}'_{φ_2} , etc. On a également Ω_φ , Ω_{ψ_t} , Ω_{φ_0} , Ω_{φ_2} , etc.

Il suffit alors de recommencer, mais avec \bar{Q}^+ et \bar{Q}^- , cette fois, les opérations effectués ci-dessus sur Q^+ et Q^- . On se donne

$$\gamma_{\mathcal{E}_{\bar{Q}}} : \mathcal{E}_{\bar{Q}} \rightarrow \mathcal{E}'_{\bar{Q}} \quad (\bar{Q} = \bar{Q}^+ \text{ ou } \bar{Q}^-),$$

puis deux connexions $\omega_{\bar{Q}}$ telles que

$$\begin{aligned} \gamma_{C_{\bar{Q}}(E_{\bar{Q}})}(\omega_{\bar{Q}}) &= \omega'_{\bar{Q}} \\ \Omega(\omega_{\bar{Q}}) &= \Omega_{\bar{Q}} \end{aligned} \quad (\bar{Q} = \bar{Q}^+ \text{ ou } \bar{Q}^-).$$

Tout cela est possible parce que les bases \bar{Q} sont homéomorphes à R^3 . On est alors, sur \bar{Z} , dans la situation du lemme 2 de la proposition VII.4.4 où il suffit de remplacer m'_0 et m_0 d'une part, m'_1 et m_1 , d'autre part, par les couples de transformations associés respectivement à (O, Γ, ψ) et à (O, Γ', ψ_1) . Comme les lacets (O, Γ) et (O, Γ') sont homotopes dans \bar{Z} , on a donc

$$s(O, \Gamma, \psi) = s(O, \Gamma', \psi_1).$$

En faisant $\psi = \psi_1$ dans cette égalité, on voit en particulier que $s(O, \Gamma, \psi)$ ne

dépend pas du choix du grand cercle Γ de S^2 . Plus généralement, on peut énoncer :

LEMME 2⁽²⁸⁾. — L'élément $s(O, \Gamma, \psi)$ défini ci-dessus, ne dépend ni de O , ni de Γ . On le notera donc $s(\psi)$. De plus, si ψ_1 est une application de S^2 dans \mathcal{X} homotope à ψ , on a

$$s(\psi_1) = s(\psi).$$

(28) Dans le cas où le sous-groupe $\Pi(O, \Gamma, \psi)$ de H engendré par $s(O, \Gamma, \psi)$ est fermé dans G , on peut déduire facilement ce lemme du résultat suivant :

S'il existe un espace fibré principal différentiable $\mathcal{E}_\psi(S^2, G)$ lié à \mathcal{E}'_ψ par un γ -homomorphisme

$$\gamma_{\mathcal{E}_\psi} : \mathcal{E}_\psi \rightarrow \mathcal{E}'_\psi$$

et muni d'une connexion ω_ψ telle que

$$\gamma_{C_\psi(E_\psi)}(\omega_\psi) = \omega'_\psi \quad \text{et} \quad \Omega(\omega_\psi) = \Omega_\psi,$$

et si ψ_1 est homotope à ψ , il existe un espace fibré principal différentiable $\mathcal{E}_{\psi_1}(S^2, G)$ lié à \mathcal{E}'_{ψ_1} par les mêmes propriétés.

Posons en effet

$$\mathcal{E}_\varphi = \mathcal{E}_\psi \times I.$$

Comme \mathcal{E}'_ψ est l'espace fibré $\mathcal{E}'_\psi \times I$, et qu'il existe par hypothèse un γ -homomorphisme

$$\gamma_{\mathcal{E}_\psi} : \mathcal{E}_\psi \rightarrow \mathcal{E}'_\psi,$$

on peut trouver d'abord un γ -homomorphisme

$$\gamma_{\mathcal{E}_\varphi} : \mathcal{E}_\varphi \rightarrow \mathcal{E}'_\varphi,$$

identifier ensuite $\mathcal{L}_\varphi(\mathcal{E}_\varphi)$ et $\mathcal{L}_\varphi(\mathcal{E}'_\varphi)$, et choisir enfin une connexion ω_φ sur \mathcal{E}_φ telle que $\gamma_{C_\varphi(E_\varphi)}(\omega_\varphi) = \omega'_\varphi$. En posant alors

$$\theta = \Omega(\omega_\varphi) - \Omega_\varphi,$$

on voit que θ est une section du centre de $L_\varphi(E'_\varphi)$ et que $\Delta\theta = 0$, de sorte que θ peut être considérée comme une forme différentielle fermée à valeurs dans \underline{H} . Mais, sur $\mathcal{E}_{\psi_0} = \mathcal{E}_\psi = \mathcal{E}_\varphi | (S^2, 0)$, on a (avec $\omega_{\psi_0} =$ restriction de ω_φ à \mathcal{E}_{ψ_0}) :

$$\omega_{\psi_0} - \omega_\psi = \theta_0 = \text{forme linéaire à valeurs dans } \underline{H}.$$

Par suite, la restriction de θ à $(S^2, 0)$ est donnée par

$$\theta_0 = \Omega(\omega_{\psi_0}) - \Omega_\psi = d\theta_0$$

puisque $\Omega(\omega_\psi) = \Omega_\psi$. En d'autres termes, θ_0 est homologue à 0. La formule de l'homotopie montre alors que la restriction θ_1 de θ à $(S^2, 1)$ est également homologue à 0 :

$$\theta_1 = \Omega(\omega_{\varphi_1}) - \Omega_{\psi_1} = d\theta_1 \quad (\omega_{\varphi_1} = \omega_\varphi | \mathcal{E}_{\psi_1}, \quad \mathcal{E}_{\psi_1} = \mathcal{E}_\varphi | (S^2, 1)).$$

On obtient donc un espace fibré principal satisfaisant aux conditions de l'énoncé en choisissant pour \mathcal{E}_{ψ_1} , la restriction de \mathcal{E}_φ à $(S^2, 1)$ et, pour connexion

$$\omega_{\psi_1} = \omega_{\varphi_1} - \theta_1.$$

A partir de ce résultat, on vérifie que $s(O, \Gamma, \psi) = s(O, \Gamma_1, \psi_1)$ en formant le quotient de G par $\Pi(O, \Gamma, \psi)$ qu'on a supposé fermé. On est ainsi ramené au cas précédent. Il en résulte que $s(O, \Gamma_1, \psi_1) \in \Pi(O, \Gamma, \psi)$ et, pour des raisons de continuité :

$$s(O, \Gamma, \psi) = s(O, \Gamma_1, \psi_1).$$

On a aussi le

COROLLAIRE DU LEMME 2. — Si ν et ν' sont deux obturations homotopes d'un même lacet l_x , on a

$$m(l_x, \nu) = m(l_x, \nu').$$

Comme la variété Q qui sert à définir les obturations ν et ν' est homéomorphe à R^2 et que S^1 est plongé dans Q , nous parlerons, pour simplifier, du centre de S^1 et des rayons de S^1 . Nous nous ramènerons d'abord au cas où les dérivées de ν et ν' s'annulent toutes sur les rayons de S^1 , aux points d'intersection de ces rayons avec le cercle, en composant ν et ν' avec un homéomorphisme de Q sur lui-même laissant S^1 invariant, homotope à l'identité et dont les dérivées possèdent elles même cette propriété. Soient ν_1 et ν'_1 les obturations ainsi obtenues. Il est clair que

$$m(l_x, \nu) = m(l_x, \nu_1) \quad \text{et} \quad m(l_x, \nu') = m(l_x, \nu'_1).$$

Mais en identifiant le disque limité par S^1 dans Q , à chaque hémisphère de S^2 de façon que le centre de S^1 s'applique sur l'un ou l'autre des pôles (géographiques) de Γ (considéré comme l'équateur) et que les rayons de S^1 s'identifient dans chaque cas aux méridiens (S^1 s'appliquant toujours de la même façon sur Γ), on peut raccorder ν_1 et ν'_1 en une application différentiable de S^2 dans \mathcal{X} , Soit

$$\psi : S^2 \rightarrow \mathcal{X} \quad (\psi|H^+ = \nu_1 \text{ et } \psi|H^- = \nu'_1),$$

cette application. On a évidemment

$$s(\psi) = m(l_x, \nu_1) (m(l_x, \nu'_1))^{-1}$$

Mais, comme ν et ν' , ν et ν_1 , ν et ν'_1 sont homotopes, ν_1 et ν'_1 sont également homotopes. Il en résulte que ψ est homotope à 0 et, comme $s(\psi_0)$ est égal à l'élément neutre de H si $\psi_0(x)$ est indépendant de $x \in S^2$, on a également

$$s(\psi) = \text{élément neutre.}$$

Par suite, $m(l_x, \nu_1) = m(\psi_x, \nu'_1)$, ce qui entraîne $m(l_x, \psi) = m(l_x, \psi')$. Le corollaire est donc démontré.

Du lemme 2, il résulte que, si l'on choisit un point x_0 de \mathcal{X} , l'application s définit une application σ_{x_0} du deuxième groupe d'homotopie en x_0 , noté $\Pi_{x_0}^2(\mathcal{X})$, dans le centre H de G . Nous allons voir maintenant qu'il s'agit d'un homomorphisme. Donnons-nous, dans ce but, deux classes d'homotopie de dimension 2 en x_0 , c et c' , et choisissons, pour les représenter, deux applications

$$\begin{aligned} \psi &: S^2 \rightarrow \mathcal{X} & [\psi \in c, \psi(O) = x_0], \\ \psi' &: S^2 \rightarrow \mathcal{X} & [\psi' \in c', \psi'(O) = x_0] \end{aligned}$$

du type particulier décrit ci-dessous. Soient Σ_1 et Σ_2 deux cercles tracés sur S^2 , symétriques par rapport au plan du grand cercle Γ et parallèle à ce plan. Nous

désignerons naturellement par Q^+ et Q^- les portions de sphère limitées respectivement par Σ_1 et Σ_2 et contenant Γ . Choisissons alors ψ et ψ' tels que

$$\psi(Q^+) = \psi'(Q^+) = x_0.$$

Il est toujours possible de trouver dans chaque classe d'homotopie une application différentiable satisfaisant à cette condition : si ψ et ψ' ne la remplissent pas, il suffit de les composer avec une application différentiable B de S^2 dans elle-même, homotope à l'identité et telle que $B(Q^+) = O$.

Dans ces conditions, (m_+, m_-) désignant le couple de transformations associé à (O, Γ, ψ) et (m'_+, m'_-) , le couple associé à (O, Γ, ψ') , il est clair qu'on a

$$m_+ = m'_+ = \text{élément neutre},$$

puisque $\psi(Q^+) = \psi'(Q^+) = x_0$.

Par contre, s'il est évident que m_- et m'_- appartiennent au centre de $\mathcal{M}(\mathcal{E}')$ et peuvent par suite être considérés comme des éléments de H , ils ne sont pas, en général égaux à l'élément neutre. On a simplement

$$s(\psi) = m_-^{-1} \quad \text{et} \quad s(\psi') = m'_-^{-1}.$$

Il reste à construire, à l'aide de ψ et de ψ' une application différentiable $\psi'' : S^2 \rightarrow \mathcal{X}$ appartenant à la classe d'homotopie $c'' = cc'$. Il suffit pour cela de poser

$$\begin{aligned} \psi''(x) &= \psi(x) & \text{pour } x \in Q^-, \\ \psi''(x) &= \psi'(\mathcal{S}(x)) & \text{pour } x \in Q^+, \end{aligned}$$

où \mathcal{S} représente la symétrie de S^2 par rapport à un axe joignant O au centre de S^2 . Comme $\psi(Q^+ \cap Q^-) = \psi'(Q^+ \cap Q^-) = x_0$, l'application ψ'' ainsi définie est une application différentiable de S^2 dans \mathcal{X} et $\psi''(O) = x_0$. De plus elle appartient à la classe d'homotopie c'' . Enfin, comme \mathcal{S} permute les deux hémisphères et change le sens de Γ , on a, en désignant par (m''_+, m''_-) le couple attaché à (O, Γ, ψ'') :

$$m''_+ = m'_-^{-1} \quad \text{et} \quad m''_- = m_-.$$

Par suite

$$s(\psi'') = m''_+ (m''_-)^{-1} = (m'_-)^{-1} (m_-)^{-1} = (m_-)^{-1} (m'_-)^{-1},$$

d'où

$$s(\psi'') = s(\psi)s(\psi').$$

Il en résulte qu'en définissant $\sigma_{x_0}(c)$ par $\sigma_{x_0}(c) = s(\psi)$ et $\psi \in c$, on a aussi

$$\sigma_{x_0}(cc') = \sigma_{x_0}(c)\sigma_{x_0}(c').$$

De plus, comme $s(\psi) = s(\psi')$ si ψ et ψ' sont homotopes au sens large [$\psi(O) \neq \psi'(O)$], il est clair que l'image du deuxième groupe d'homotopie en x_0 par l'homomorphisme σ_{x_0} , est un sous-groupe de H indépendant du choix

du point x_0 . Nous pouvons donc énoncer :

LEMME 3. — *L'application $\sigma_x : \Pi_x^2(\mathcal{X}) \rightarrow H(x \in \mathcal{X})$ résultant de l'invariance de $s(\psi)$ par homotopie est un homomorphisme de deuxième groupe d'homotopie de \mathcal{X} dans le centre H de G . Le sous-groupe $\Pi^2 = \sigma_x(\Pi_x^2(\mathcal{X}))$ est indépendant du choix de x dans \mathcal{X} .*

Comme nous avons supposé \mathcal{X} simplement connexe, le deuxième groupe d'homotopie de \mathcal{X} s'identifie au deuxième groupe d'homologie à coefficients entiers, de sorte qu'on a :

COROLLAIRE DU LEMME 3. — *On déduit de σ_x un homomorphisme*

$$\sigma : H^2(\mathcal{X}) \rightarrow H$$

du deuxième groupe d'homologie de \mathcal{X} à coefficients entiers dans le centre H de G .

Enfin, on a le

LEMME 4. — *Si l'homomorphisme σ_x est trivial [c'est-à-dire si $\sigma_x(c) = \text{élément neutre}$ quelle que soit la classe d'homotopie c], l'élément $m(l_x, \nu)$ associé à un lacet l_x et à une obturation ν ne dépend pas de l'obturation choisie.*

La démonstration est semblable à celle du corollaire du lemme 2. Si ν et ν' sont deux obturations distinctes de l_x , on peut toujours se ramener à des obturations ν_1 et ν'_1 dont les dérivées s'annulent sur les rayons de S^1 , aux points d'intersection de ces rayons avec le cercle. On peut alors raccorder ν_1 et ν'_1 en une application différentiable de la sphère S^2 dans \mathcal{X} de sorte que $m(l_x, \nu_1)$, $m(l_x, \nu'_1)$ constitue le couple de transformations associé à (O, Γ, ψ) . Puisque $s(\psi)$ est égal à l'élément neutre de H par hypothèse, on a

$$m(l_x, \nu_1) = m(l_x, \nu'_1).$$

Nous résumerons ce qui précède dans la proposition suivante :

PROPOSITION VIII.7.1. — *Étant donnés $\mathcal{S}'(\mathcal{X}, G)$, G , ω' et Ω vérifiant les conditions exposées au début du paragraphe et en supposant, en particulier, que \mathcal{X} est simplement connexe, on définit un homomorphisme*

$$\sigma_x : \Pi_x^2(\mathcal{X}) \rightarrow H$$

du deuxième groupe d'homotopie en x de \mathcal{X} , dans le centre H de G , en posant

$$\sigma_x(c) = m(\psi_\Gamma, \psi_{Q^+}) (m(\psi_\Gamma, \psi_{Q^-}))^{-1},$$

où $\psi : S^2 \rightarrow \mathcal{X}$ est une application différentiable appartenant à la classe d'homotopie c , où ψ_Γ est le lacet constitué par la restriction de ψ à un grand cercle orienté Γ de S^2 passant par $O[\psi(O) = x]$ et où ψ_{Q^+} et ψ_{Q^-} sont les obturations de ψ_Γ formées par les restrictions de ψ à Q^+ et à Q^- .

Le groupe $\Pi^2 = \sigma_x(\Pi_x^2(\mathcal{X}))$ est indépendant de $x \in \mathcal{X}$ et l'on note

$$\sigma : H^2(\mathcal{X}) \rightarrow H$$

l'homomorphisme du second groupe d'homologie à coefficients entiers de \mathcal{X} , dans H , déduit de σ_x .

Dans le cas général, si σ n'est pas trivial, l'élément $m(l_x, \nu)$ associé à un lacet l_x et à une obturation ν de ce lacet ne dépend que de la classe d'homotopie de l'obturation ν . Si σ est trivial, $m(l_x, \nu)$ est indépendant de l'obturation choisie. On le notera alors $m(l_x) \in \mathcal{M}_x(\mathcal{E}')$.

Il est clair que, pour que le problème qui nous occupe admette une solution, il est nécessaire que σ soit trivial. C'est la dernière propriété énoncée par la proposition précédente qui va permettre de montrer que cette condition est également suffisante. Nous allons, pour cela, construire effectivement un espace fibré principal différentiable à l'aide, non pas de sections locales, mais de « chemins horizontaux ». Plus précisément, remarquons que si un tel espace $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ est muni d'une connexion ω satisfaisant à (VIII.7.1), $m(l_x)$ est nécessairement la transformation $\tau_\omega(l_x)$ associée au lacet l_x (corollaire 1 du lemme 1). On peut d'autre part considérer \mathcal{E} comme le quotient de l'ensemble des chemins ω -horizontaux amortis dont l'origine se projette sur un point x_0 fixe, par la relation d'équivalence qui identifie deux tels chemins λ et λ' s'ils ont même extrémité, c'est-à-dire si

$$\lambda'(1) = \tau_\omega(p(\lambda)p(\lambda')) \cdot \lambda(1),$$

relation où $(p(\lambda)p(\lambda'))$ désigne, bien entendu, le lacet en x_0 obtenu en parcourant successivement les projections de λ et de λ' . C'est de cette façon que nous allons reconstruire \mathcal{E} , en remplaçant dans la dernière égalité $\tau_\omega(p(\lambda)p(\lambda'))$ que nous ne connaissons qu'en fonction de \mathcal{E} , par $m(p(\lambda)p(\lambda'))$ dont l'existence résulte de la proposition VIII.7.1.

Nous supposons donc désormais que Π^2 se réduit à l'élément neutre. Soit Λ l'ensemble des chemins différentiables amortis $l: I \rightarrow \mathcal{X}$ d'origine commune $x_0 \in \mathcal{X}$. Λ est naturellement muni d'une projection

$$p_\Lambda : \Lambda \rightarrow \mathcal{X}$$

qui associe à tout chemin différentiable $l \in \Lambda$, son extrémité

$$p_\Lambda(l) = l(1).$$

Étant donnés deux chemins l_1, l_2 , de même projection (c'est-à-dire de même extrémité), nous noterons $l_1 l_2$ le lacet obtenu en parcourant successivement l_1 et l_2 , c'est-à-dire, en toute précision, l'application différentiable de S^1 dans \mathcal{X}

définie par les égalités

$$\begin{aligned} \lambda_1 \lambda_2(\alpha(t)) &= \lambda_1(2t) & \left(0 \leq t \leq \frac{1}{2}\right), \\ \lambda_1 \lambda_2(\alpha(t)) &= \lambda_2(2(1-t)) & \left(\frac{1}{2} \leq t \leq 1\right). \end{aligned}$$

Un élément $m(l_1 l_2) \in \mathfrak{M}_{x_0}(\mathcal{E}')$ parfaitement défini est donc associé à $l_1 l_2$.

Soit \mathcal{E}_{x_0} un espace fibré principal différentiable de groupe structural G , dont la base se réduit au point x_0 de \mathcal{X} . C'est sur \mathcal{E}_{x_0} que la construction de \mathcal{E} va s'articuler. Faisons tout d'abord opérer $\mathfrak{M}_{x_0}(\mathcal{E}')$ sur \mathcal{E}_{x_0} en choisissant un point y_0 de \mathcal{E}_{x_0} et un point y'_0 de \mathcal{E}'_{x_0} , et en définissant

$$\gamma_{\mathcal{E}_{x_0}} : \mathcal{E}_{x_0} \rightarrow \mathcal{E}'_{x_0}$$

par l'égalité

$$\gamma_{\mathcal{E}_{x_0}}(y_0 \cdot s) = y'_0 \cdot \gamma(s) \quad (s \in G).$$

On pose alors

$$m \cdot y = y \cdot j_{\mathfrak{M}}(\gamma_{\mathcal{E}_{x_0}}(y))m \quad [y \in \mathcal{E}_{x_0} \text{ et } m \in \mathfrak{M}_{x_0}(\mathcal{E}')],$$

et l'on vérifie sans difficulté que les opérations de G et de $\mathfrak{M}_{x_0}(\mathcal{E}')$ sur \mathcal{E}_{x_0} , commutent.

Nous définirons maintenant \mathcal{E} comme le quotient du produit $\mathcal{E}_{x_0} \times \Lambda$ par la relation d'équivalence :

$$(y_1, l_1) \equiv (y_2, l_2) \quad \text{si} \quad p_{\Lambda}(l_1) = p_{\Lambda}(l_2) \quad \text{et} \quad y_2 = m(l_1 l_2) \cdot y_1$$

avec, bien entendu, $l_1, l_2 \in \Lambda$ et $y_1, y_2 \in \mathcal{E}_{x_0}$.

Encore faut-il vérifier qu'il s'agit bien d'une relation d'équivalence. La symétrie et la réflexivité sont évidentes : elles résultent de $m(l) = \text{élément neutre}$ et de $m(l_1 l_2) = (m(l_2 l_1))^{-1}$. Quant à la transitivité, c'est une conséquence du lemme suivant :

LEMME 1. — *Étant donnés trois chemins $l_1, l_2, l_3 \in \Lambda$, on a*

$$m(l_1 l_3) = m(l_2 l_3) m(l_1 l_2).$$

Considérons en effet deux cercles de \mathbb{R}^2 : S^1 et $(S^1)'$ se coupant en deux points distincts O et O' , et paramétrés régulièrement par $\alpha(t)$ $[\alpha(0) = O, \alpha(\frac{1}{2}) = O', \alpha(1) = O]$ et par $\alpha'(t)$ $[\alpha'(0) = O, \alpha'(\frac{1}{2}) = O', \alpha'(1) = O]$. On définit une application différentiable Φ' de l'ensemble de ces deux cercles dans \mathcal{X} , en posant

$$\begin{aligned} \Phi'(\alpha(t)) &= l_1(2t) & \left(0 \leq t \leq \frac{1}{2}\right), \\ \Phi'(\alpha(t)) &= l_2(2(1-t)) & \left(\frac{1}{2} \leq t \leq 1\right), \\ \Phi'(\alpha'(t)) &= l_2(2t) & \left(0 \leq t \leq \frac{1}{2}\right), \\ \Phi'(\alpha'(t)) &= l_3(2(1-t)) & \left(\frac{1}{2} \leq t \leq 1\right). \end{aligned}$$

Cette application est différentiable en ce sens que, comme les dérivées de Φ' par rapport à t sont toutes nulles aux points O et O' sur S^1 et $(S^1)'$, on peut la prolonger en une application différentiable d'un voisinage ouvert de $(S^1) \cup (S^1)'$ dans \mathfrak{X} . De plus, puisque \mathfrak{X} est simplement connexe, on peut étendre Φ' en une application différentiable

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathfrak{X},$$

l'extension se faisant successivement dans les quatre régions de \mathbb{R}^2 séparées par les deux cercles. Il ne reste plus qu'à recommencer les opérations habituelles. Posons $\mathcal{E}_0 = \mathbb{R}^2 \times G$, choisissons $\gamma_{\mathcal{E}_0} : \mathcal{E}_0 \rightarrow \Phi^{-1}(\mathcal{E}')$ et une connexion ω_0 sur \mathcal{E}_0 appliquée sur la connexion induite ω'_Φ par le couple $(\gamma, \gamma_{\mathcal{E}_0})$ et admettant pour courbure la forme induite Ω_Φ . Dans ces conditions, $m(l_1 l_2)$ est, à un homomorphisme induit près, la transformation $\tau_{\omega_0}(S^1)$ associée à S^1 (considéré comme lacet en O), $m(l_2 l_3)$ est la transformation $\tau_{\omega_0}((S^1)')$ associée à $(S^1)'$ et $m(l_1 l_3)$ est la transformation associée au lacet λ constitué par la portion de S^1 pour laquelle $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ et par la portion de $(S^1)'$ pour laquelle $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$:

$$m(l_1 l_3) = \tau_{\omega_0}(\lambda).$$

De même, $m(l_2 l_2)$ qui est égal à l'élément neutre, est aussi la transformation associée au lacet λ' formé par les portions de S^1 et de $(S^1)'$ qui ne figurent pas dans λ : $m(l_2 l_2) = \tau_{\omega_0}(\lambda')$. Il en résulte que tout chemin ω_0 -horizontal de projection λ' se referme et que, par suite, si l'on appelle λ'' le lacet en O obtenu en intercalant λ' entre les deux parties de λ , on a

$$\tau_{\omega_0}(\lambda'') = \tau_{\omega_0}(\lambda).$$

Mais λ'' est le lacet obtenu en décrivant successivement S^1 et $(S^1)'$. On a donc

$$\tau_{\omega_0}(\lambda'') = \tau_{\omega_0}((S^1)') \tau_{\omega_0}(S^1) = m(l_2 l_3) m(l_1 l_2),$$

et par suite

$$m(l_1 l_3) = m(l_2 l_3) m(l_1 l_2).$$

La transitivité de notre relation d'équivalence résulte immédiatement de cette égalité. En effet, étant donnés (y_1, l_1) , (y_2, l_2) , $(y_3, l_3) \in \mathcal{E}_{x_0} \times \Lambda$, si $(y_1, l_1) \equiv (y_2, l_2)$ et si $(y_2, l_2) \equiv (y_3, l_3)$, on a, par définition

$$y_2 = m(l_1 l_2) \cdot y_1 \quad \text{et} \quad y_3 = m(l_2 l_3) \cdot y_2.$$

Par suite

$$y_3 = m(l_2 l_3) m(l_1 l_2) \cdot y_1,$$

ce qui entraîne, d'après le lemme 1 :

$$y_3 = m(l_1 l_3) \cdot y_1 \quad \text{et par suite} \quad (y_3, l_3) \equiv (y_1, l_1).$$

L'ensemble \mathcal{E} est donc bien défini et il reste à vérifier maintenant qu'il est

possible de le doter d'une structure d'espace fibré principal différentiable à groupe structural. Nous définirons d'abord la projection $p_{\mathcal{E}}$ en remarquant que $\mathcal{E}_{x_0} \times \Lambda$ est naturellement muni de la projection induite par p_{Λ} , c'est-à-dire de l'application $p_{\mathcal{E}_{x_0} \times \Lambda} : \mathcal{E}_{x_0} \times \Lambda \rightarrow \mathcal{X}$ définie par

$$p_{\mathcal{E}_{x_0} \times \Lambda}(y, l) = p_{\Lambda}(l) \quad [(y, l) \in \mathcal{E}_{x_0} \times \Lambda].$$

Or, cette projection passe au quotient parce que, si $(y_1, l_1) \equiv (y_2, l_2)$, on a $p_{\Lambda}(l_1) = p_{\Lambda}(l_2)$. C'est cette application-quotient qui sera la projection $p_{\mathcal{E}}$ de \mathcal{E} sur sa base \mathcal{X} .

Nous allons préciser maintenant une notion de « chemin horizontal » dans \mathcal{E} . Étant donné un chemin différentiable $l : I \rightarrow \mathcal{X}$ d'origine x_0 , le chemin horizontal $\mu : I \rightarrow \mathcal{E}$ de projection l et d'origine $y \in \mathcal{E}_{x_0}$ est défini par

$$\mu(t) = T(y, l_t),$$

où T est l'application canonique

$$T : \mathcal{E}_{x_0} \times \Lambda \rightarrow \mathcal{E}$$

et où l_t représente le chemin différentiable $l_t : I \rightarrow \mathcal{X}$ défini par

$$l_t(0) = l(t0) \quad (0 \in I),$$

c'est-à-dire, en gros, la partie de l comprise entre 0 et t . Remarquons que, si $z \in \mathcal{E}$ et si $l(1) = p_{\mathcal{E}}(z)$, il existe un point $K_l(z) \in \mathcal{E}_{x_0}$ et un seul tel que $T(K_l(z), l) = z$. En effet, étant donné $(y, l') \in z$, le point $K_l(z) = m(l'l).y$ satisfait bien à cette égalité et son unicité résulte du fait que $(y, l) \equiv (y', l')$ entraîne $y = y'$. Il est alors clair qu'il existe un chemin horizontal $\mu : I \rightarrow \mathcal{E}$ et un seul d'extrémité z [c'est-à-dire tel que $\mu(1) = z$] et de projection l . C'est le chemin défini par

$$\mu(t) = T(K_l(z), l_t) \quad (t \in I).$$

Remarquons également que la fibre de \mathcal{E} de projection x_0 s'identifie à \mathcal{E}_{x_0} puisque, si l est un lacet en x_0 et si $y \in \mathcal{E}_{x_0}$, (y, l) est équivalent à $(m(l_0 l).y, l_0)$ où l_0 est le chemin nul en x_0 . La notation \mathcal{E}_{x_0} se trouve donc justifiée.

Il est maintenant facile de définir sur \mathcal{E} les translations à droite par les éléments de G . Étant donné $z \in \mathcal{E}$ et $l : I \rightarrow \mathcal{X}$ [chemin différentiable joignant x_0 à $x = p_{\mathcal{E}}(z)$], on posera

$$z.s = T(K_l(z).s, l) \quad (s \in G).$$

Il faut évidemment vérifier que cette définition ne dépend pas du choix de l . Compte tenu de la commutativité des opérations de G et de celles de $\mathcal{M}_{x_0}(\mathcal{E})$ sur \mathcal{E}_{x_0} ainsi que de la formule évidente $K_l(z) = m(l'l)K_{l'}(z)$, cela ne présente aucune difficulté. Il est également facile de voir que G est simplement transitif sur \mathcal{E}_x puisqu'il l'est sur \mathcal{E}_{x_0} et que le translaté d'un chemin horizontal est un chemin horizontal.

En résumé, \mathcal{E} est maintenant doté d'une structure d'espace fibré principal s. l. à groupe structural. La prochaine étape est celle de la structure différentiable, structure qui dépend du lemme suivant :

LEMME 2. — Si h_0 et h'_0 sont deux chemins différentiables de \mathcal{X} , d'origine commune x_0 et d'extrémité commune $x(\theta)$ et si h_0 et h'_0 dépendent différentiablement de $\theta \in I$ [ce qui entraîne que $x(\theta)$ est différentiable], alors $m(h'_0 h_0)$ est une application différentiable $I \rightarrow \mathcal{N}_{x_0}(\mathcal{E}')$.

Ce lemme se démontre en plongeant $S^1 \times I$ dans \mathbb{R}^3 , en définissant

$$\Theta' : S^1 \times I \rightarrow \mathcal{X},$$

par :

$$\begin{aligned} \Theta'(\alpha(t), \theta) &= h_0(2t) & \left(0 \leq t \leq \frac{1}{2}\right), \\ \Theta'(\alpha(t), \theta) &= h'_0(2(1-t)) & \left(\frac{1}{2} \leq t \leq 1\right) \end{aligned}$$

et en étendant Θ' en une application différentiable

$$\Theta : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathcal{X}$$

dont l'existence résulte du fait que \mathcal{X} est simplement connexe. On recommence ensuite sur \mathbb{R}^3 les opérations habituelles (construction de $\mathbb{R}^3 \times G$, choix d'un γ -homomorphisme, choix d'une connexion telle que ...) dont le lemme résulte immédiatement.

Il ne reste plus qu'à recouvrir \mathcal{X} par des voisinages de coordonnées U^α , à joindre x_0 au centre x_α de chaque U^α par un chemin différentiable $l^\alpha \in \Lambda$ et à construire, sur chaque U^α , une section locale de la façon suivante. Soit $\nu : I \rightarrow I$ un homéomorphisme différentiable de I sur lui-même dont toutes les dérivées s'annulent pour 0 et 1. Représentons U^α par un système de coordonnées polaires $(\rho, (a_i))$ où ρ est le rayon vecteur variant de 0 à 1 et où les a_i sont des paramètres directeurs. Notons alors $l_x^\alpha[x = (\rho, (a_i)) \in U^\alpha]$ le chemin différentiable défini par

$$\begin{aligned} l_x^\alpha(t) &= l^\alpha(2t) & \left(0 \leq t \leq \frac{1}{2}\right), \\ l_x^\alpha(t) &= (\rho\nu(2t-1), (a_i)) & \left(\frac{1}{2} \leq t \leq 1\right). \end{aligned}$$

En d'autres termes, l_x^α s'obtient en mettant bout à bout l^α et $x_\alpha x$. Désignons maintenant par λ_x^α le chemin horizontal de projection l_x^α dont l'origine est un point y de \mathcal{E}_{x_0} choisi une fois pour toutes, indépendamment de U^α . Nous poserons, dans ces conditions

$$f^\alpha(x) = \lambda_x^\alpha(1).$$

f^α est manifestement une section de \mathcal{E}_{U^α} car $p_{\mathcal{E}} \circ f^\alpha = \text{identité sur } U$. On définit

alors la structure différentiable de \mathcal{E} au moyen des homéomorphismes différentiables

$$\psi^\alpha : \mathcal{E}_{U^\alpha} \rightarrow U^\alpha \times G,$$

déterminés par

$$(f^\alpha(x).s) = (x, s) \quad (x \in U^\alpha, s \in G).$$

Plus précisément, la structure de variété différentiable de \mathcal{E} , si elle existe, est déterminée en supposant que les applications ψ^α sont des homéomorphismes différentiables. Il suffit de vérifier la compatibilité de cette définition sur l'intersection $U^\alpha \cap U^\beta$ de deux voisinages de coordonnées U^α et U^β . Pour un point $x \in U^\alpha \cap U^\beta$, on a

$$f^\alpha(x) = f^\beta(x).g^{\alpha\beta}(x) \quad [g^{\alpha\beta}(x) \in G]$$

et il s'agit de montrer que $g^{\alpha\beta}(x)$ est une fonction différentiable de x . Or, conformément à ce qui précède, $g^{\alpha\beta}(x)$ s'obtient en considérant le chemin horizontal de projection l_x^β et d'extrémité $f^\alpha(x)$. On a

$$K_\beta(f^\alpha(x)) = y.g^{\alpha\beta}(x),$$

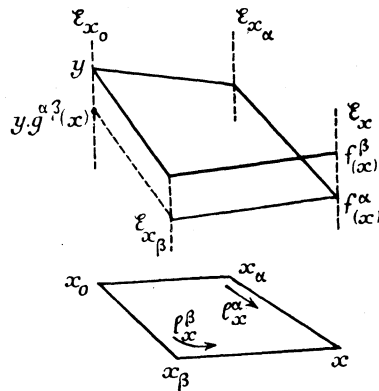


Fig. 14.

puisque le chemin horizontal de projection l_x^α et d'extrémité $f^\alpha(x)$ a pour origine le point y choisi une fois pour toutes dans \mathcal{E}_{x_0} . On a donc également

$$(VIII.7.3) \quad y.g^{\alpha\beta}(x) = m(l_x^\alpha, l_x^\beta).y.$$

Mais, si x dépend différentiablement d'un paramètre θ , les deux chemins $l_{x(\theta)}^\alpha$ et $l_{x(\theta)}^\beta$ dépendent aussi différentiablement de θ . D'après le lemme 2, il en est alors de même de $m(l_{x(\theta)}^\alpha, l_{x(\theta)}^\beta)$. L'égalité (VIII.7.3) montre que $g^{\alpha\beta}(x)$ est également une fonction différentiable de θ et, plus généralement, de x , le lemme 2 se généralisant immédiatement à un nombre quelconque de paramètres. Les applications ψ^α définissent donc bien une structure de variété différentiable dans \mathcal{E} .

Remarquons que cette structure est telle que, au-dessus de tout point x^z , les chemins horizontaux sont tous tangents à un élément plan transversal. Mais, comme il est toujours possible d'entourer un point x quelconque de \mathcal{X} d'un voisinage de coordonnées, le raisonnement de compatibilité précédent montre que tous les chemins horizontaux passant par un point $z \in \mathcal{E}$ arbitraire, sont tangents à un élément plan transversal à la fibre passant par z . Globalement, ces éléments constituent donc un champ qui est invariant par les translations à droite de G sur \mathcal{E} puisque l'ensemble des chemins horizontaux est lui-même invariant par ces translations. C'est donc un champ de connexion $c(\omega)$.

Nous sommes maintenant très près du but. Nous définirons d'abord un γ -homomorphisme

$$\gamma_{\mathcal{E}} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$$

en supposant que $\gamma_{\mathcal{E}}$ coïncide, sur \mathcal{E}_{x_0} , avec l'homomorphisme $\gamma_{\mathcal{E}_{x_0}}$ déjà défini, puis, en le prolongeant à \mathcal{E} en faisant correspondre à tout chemin horizontal d'origine $y \in \mathcal{E}_{x_0}$, le chemin ω' -horizontal d'origine $\gamma_{\mathcal{E}_{x_0}}(y)$ et de même projection. Le procédé a été décrit plusieurs fois déjà. La vérification du fait qu'il s'agit d'un homomorphisme et que cet homomorphisme est compatible avec $\gamma : G \rightarrow G_{\gamma} = G/H$, est immédiate en utilisant le corollaire 2 du lemme 1 de la proposition VIII.7.1 qui montre ici que

$$\gamma_{\pi(\mathcal{E}')} (m(l)) = \varphi_{\omega'}(l).$$

De cette définition même, il résulte que $(\gamma, \gamma_{\mathcal{E}})$ applique ω sur ω' . Il reste à vérifier que $\Omega(\omega) = \Omega$ après avoir identifié $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ à $\mathcal{L}(\mathcal{E}')$ grâce à $\gamma_{\mathcal{E}}$. C'est une conséquence du fait que cette égalité est vérifiée avec les espaces et les formes induits par une application différentiable $\nu : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{X}$ qu'on peut toujours considérer comme une obturation, ce qui permet de se ramener à la définition de $m(l)$.

Le problème est donc complètement résolu et nous pouvons énoncer :

THÉOREME VIII.7.1. — *Étant donné un groupe de Lie connexe G , un espace fibré principal différentiable $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, G_{\gamma})$ de base \mathcal{X} simplement connexe et de groupe structural $G_{\gamma} = G/H$ ($H =$ centre de G), une connexion ω' sur $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, G_{\gamma})$ et une section Ω de $L^2(\mathcal{E}')$ telle que*

$$\Delta\Omega = 0$$

[Δ étant la $L(\mathcal{E}')$ -différentiation covariante associée à ω'], la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un espace fibré principal $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ de base \mathcal{X} et de groupe G , lié à \mathcal{E}' par un γ -homomorphisme

$$\gamma_{\mathcal{E}} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$$

et muni d'une connexion ω telle que

$$\gamma_{c(\mathcal{E})}(\omega) = \omega' \quad \text{et} \quad \Omega(\omega) = \Omega$$

$[\gamma_{c(\mathcal{E})}]$ étant l'homomorphisme des faisceaux des connexions associé au couple $(\gamma, \gamma_{\mathcal{E}})$ est que le sous-groupe Π^2 défini par la proposition VIII.7.1 se réduit à l'élément neutre de H .

En nous reportant maintenant à la proposition VIII.7.1 et à l'interprétation de $s(\psi)$, on voit qu'on a le

COROLLAIRE 1. — Pour que l'espace $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ du théorème précédent existe, il faut et il suffit que, quelle que soit l'application différentiable

$$\psi : S^2 \rightarrow \mathcal{X}$$

il existe un espace fibré principal différentiable $\mathcal{E}_{\psi}(S^2, G)$ lié à \mathcal{E}_{ψ} par un γ -homomorphisme

$$\gamma_{\mathcal{E}_{\psi}} : \mathcal{E}_{\psi} \rightarrow \mathcal{E}'_{\psi}$$

et muni d'une connexion ω_{ψ} telle que

$$\gamma_{c_{\psi}(\mathcal{E}_{\psi})}(\omega_{\psi}) = \omega'_{\psi} \quad \text{et} \quad \Omega(\omega_{\psi}) = \Omega_{\psi}.$$

On a également les conséquences immédiates suivantes :

COROLLAIRE 2. — Si le sous-groupe Π^2 de H n'est pas trivial et s'il est fermé dans G , il existe un espace fibré principal différentiable de groupe structural G/Π^2 satisfaisant aux conditions ci-dessus.

COROLLAIRE 3. — Si le deuxième groupe d'homotopie de \mathcal{X} est nul, il existe toujours un espace fibré principal différentiable $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ satisfaisant aux conditions du théorème précédent.

Nous laissons au lecteur le soin de combiner ces résultats avec le théorème VIII.6.1 et d'énoncer la condition nécessaire et suffisante d'existence d'un espace fibré principal de groupe structural donné, admettant $(\tilde{\mathcal{L}}, \tilde{\Delta}, \tilde{\Omega})$.

8. CAS OÙ Π^2 EST UN SOUS-GROUPE DE LA COMPOSANTE CONNEXE DE L'ÉLÉMENT NEUTRE DANS H .

PROPOSITION VIII.8.1. — Une condition nécessaire et suffisante pour que Π^2 soit un sous-groupe de la composante connexe H^0 de l'élément neutre dans H est qu'il existe un espace fibré principal différentiable $\mathcal{E}^0(\mathcal{X}, G/H^0)$ lié à $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, G)$ par un γ^0 -homomorphisme $(\gamma^0 : G^0_{\gamma} = G/H^0 \rightarrow G_{\gamma} = G/H)$:

$$\gamma_{\mathcal{E}^0} : \mathcal{E}^0 \rightarrow \mathcal{E}'$$

et muni d'une connexion ω^0 appliquée sur ω' par $(\gamma^0, \gamma_{\mathcal{E}^0})$.

Revenons en effet à la définition de $s(\psi)$ et reprenons les notations du

lemme 2 de la proposition VIII.7.1 et de l'interprétation de $s(\psi)$. La proposition VII.5.1 montre que, pour que $s(\psi) \in H^0$, il faut et il suffit qu'il existe un G^0 -isomorphisme de \mathcal{E}_{z^+}/H^0 sur \mathcal{E}_{z^-}/H^0 appliquant les connexions-quotients $\omega_{z^+}^0$ et $\omega_{z^-}^0$ l'une sur l'autre et induisant l'identité sur \mathcal{E}'_z . Or, si $\mathcal{E}^0(\mathcal{X}, G^0)$ existe, il existe aussi, quel que soit ψ , un G^0 -isomorphisme $h_\psi: \mathcal{E}_{z^+}/H^0 \rightarrow \mathcal{E}_{z^-}/H^0$: c'est celui qui permet de construire $\psi^{-1}(\mathcal{E}^0)$. Réciproquement, si, quel que soit ψ , il existe un G^0 -isomorphisme h_ψ , on peut construire $\mathcal{E}^0(\mathcal{X}, G^0)$ et le corollaire 4 du théorème VIII.7.1 montre que l'espace $\mathcal{E}^0(\mathcal{X}, G^0)$ existe.

Nous nous proposons maintenant de chercher à modifier Ω dans le but d'annuler Π^2 , en supposant toujours que $\gamma_{L(E')}(\Omega) = \Omega(\omega')$, bien entendu. C'est-à-dire que nous remplaçons Ω par $\Omega' = \Omega + \Theta$ où Θ est une section du centre $K^2(E')$ de $L^2(E')$. On sait qu'on peut alors considérer Θ comme une 2-forme différentielle à valeurs dans \underline{H} . Remarquons tout de suite que, si $\Theta = d\theta$, on ne modifie pas Π^2 en substituant Ω' à Ω (²⁹). En effet, on peut alors remplacer les connexions ω_Q (notations de la proposition VIII.7.1) par $\omega_Q + \theta_{\psi_Q}$ où θ_{ψ_Q} est la restriction à $Q = Q^+$ ou Q^- de la forme θ_ψ induite par ψ . Mais alors, on modifie m_+ et m_- par le même élément $\tau_\theta^0(\psi_\Gamma) \in H$ (voir prop. IV.5.4) et, par suite, $m_+ m_-^{-1} = s(\psi)$ reste invariant. Cette remarque est valable que Π^2 soit ou ne soit pas un sous-groupe de H^0 . *Supposons désormais que $\Pi^2 \subset H^0$* . Pour que $\Delta\Omega' = 0$, il faut que $d\Theta = 0$ puisque $\Delta\Omega = 0$ et que, sur $K(E')$, Δ et d coïncident. Dans la suite, nous supposons cette condition réalisée.

PROPOSITION VIII.8.2. — *Soit $R(H^0)$ le revêtement universel de H^0 muni d'une structure de groupe de Lie et $\rho: R(H^0) \rightarrow H^0$ l'homomorphisme-projection de $R(H^0)$ sur H^0 . En reprenant les notations de la proposition VIII.7.1 et en désignant par $r(\psi)$ l'élément de H obtenu en substituant $\Omega + \Theta$ à Ω ($\Theta = 2$ -forme différentielle fermée sur \mathcal{X} à valeurs dans H), on a $r(\psi) \in H^0$ et en considérant $\psi: S^2 \rightarrow \mathcal{X}$ comme une 2-chaîne :*

$$r(\psi) = s(\psi) \rho \left(\int_{\psi}^{-1} \Theta \right).$$

En effet, pour former $r(\psi)$, on substitue à ω_Q ($Q = Q^+$ ou Q^-), les connexions $\omega_Q + \theta_Q$ où les θ_Q sont les 1-formes différentielles définies sur Q , à valeurs dans \underline{H} et telles que

$$d\theta_Q = \Theta_{\psi_Q}.$$

Ces formes existent parce que Q est homéomorphe à \mathbb{R}^2 et que $d\Theta = 0$.

(²⁹) Plus généralement, on peut vérifier qu'on ne modifie pas Π^2 en substituant à Ω la forme $\Omega + \Delta\eta + \frac{1}{2}[\eta, \eta]$ et à ω' la connexion $\omega' + \gamma_{L(E')}(\eta)$. Cf. remarque faite à l'occasion de la proposition VII.4.1.

Désignons par (m'_+, m'_-) le nouveau couple de transformations associé à (O, Γ, ψ) . On a alors

$$m'_+ = m_+ u_+ \quad \text{et} \quad m'_- = m_- u_-,$$

avec

$$u_+ = \tau_{\theta_{Q+}}^0(\Gamma) \quad \text{et} \quad u_- = \tau_{\theta_{Q-}}^0(\Gamma),$$

où $\tau_{\theta_Q}^0(\Gamma)$ désigne, rappelons-le, l'élément de H associé au lacet en O, Γ , dans la connexion déterminée dans $H \times Q$ par la forme θ_Q . Il en résulte tout d'abord que $r(\psi)$ et $s(\psi)$ appartiennent à la même composante connexe de H, H^0 en l'occurrence. De plus, comme $R(H^0)$ est isomorphe à R^n , donc à \underline{H} , on a, en identifiant les algèbres de Lie $R(\underline{H}^0)$ et \underline{H}^0 par ρ :

$$u_+ = \rho \left(\int_{\Gamma} \bar{\rho}^{-1} \theta_{Q+} \right) \quad \text{et} \quad u_- = \rho \left(\int_{\Gamma} \bar{\rho}^{-1} \theta_{Q-} \right).$$

Or, en vertu de la formule de Stokes, on a

$$\int_{\Gamma} \bar{\rho}^{-1} \theta_{Q+} = \int_{H^+} \bar{\rho}^{-1} d\theta_{Q+} \quad \text{et} \quad \int_{\Gamma} \bar{\rho}^{-1} \theta_{Q-} = \int_{H^-} \bar{\rho}^{-1} d\theta_{Q-}.$$

Mais, on a également, en formant $r(\psi) = m'_+ m'^{-1}$:

$$r(\psi) = s(\psi) u_+ (u_-)^{-1}.$$

Cela entraîne

$$\begin{aligned} r(\psi) &= s(\psi) \rho \left[\left(\int_{H^+} \bar{\rho}^{-1} \Theta_{\psi_{H^+}} \right) + \left(\int_{H^-} \bar{\rho}^{-1} \Theta_{\psi_{H^-}} \right) \right] \\ &= s(\psi) \rho \left(\int_{S^2} \bar{\rho}^{-1} \Theta_{\psi} \right) \\ &= s(\psi) \rho \left(\int_{\psi} \bar{\rho}^{-1} \Theta \right), \end{aligned}$$

ce qui est bien la formule qu'il s'agissait de démontrer.

On en déduit immédiatement :

PROPOSITION VIII.8.3. — Si $H^2(\mathcal{X})$ est engendré par les classes d'homologie des applications ψ^i , le groupe Π^2 correspondant à la forme $\Omega' = \Omega + \Theta$ (Θ fermée à valeurs dans \underline{H}) se réduit à l'élément neutre si les périodes de Θ relatives aux cycles ψ^i sont telles que

$$\rho \left(\int_{\psi^i} \bar{\rho}^{-1} \Theta \right) = [\sigma(\alpha(\psi^i))]^{-1},$$

où $\alpha(\psi)$ représente la classe d'homologie à coefficients entiers de ψ .

PROPOSITION VIII.8.4. — Pour qu'il existe une forme $\Omega' = \Omega + \Theta$ (Θ fermée à

valeurs dans $\underline{\mathbb{H}}$) telle que le sous-groupe Π'^2 se réduise à l'identité, il est nécessaire que

$$\Pi_1^2 = \sigma(\mathbb{T}(\mathbb{H}^2(\mathcal{X}))) = \text{élément neutre,}$$

$\mathbb{T}(\mathbb{H}^2(\mathcal{X}))$ représentant le sous-groupe de torsion de $\mathbb{H}^2(\mathcal{X})$.

PROPOSITION VIII.8.5. — Si la variété \mathcal{X} est compacte et simplement connexe, il existe un espace fibré principal différentiable $\mathcal{E}(\mathcal{X}, \mathbb{G}/\Pi_1^2)$ de groupe structural \mathbb{G}/Π_1^2 lié à $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, \mathbb{G}_\gamma)$ par un γ -homomorphisme

$$\gamma: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$$

et muni d'une connexion ω telle que

$$\gamma_{\mathbb{C}(\mathcal{E})}(\omega) = \omega'.$$

Un tel espace peut en effet être construit à partir d'une forme $\Omega + \Theta$ où Θ est fermée et admet, relativement à des cycles ψ^r qui forment une base de $\mathbb{H}^2(\mathcal{X})/\mathbb{T}(\mathbb{H}^2(\mathcal{X}))$, des périodes h^r choisies de telle sorte que

$$\rho(h^r) = [\sigma(\alpha(\psi^r))]^{-1}.$$

Remarque. — Si Π^2 n'est pas un sous-groupe de \mathbb{H}^0 , une méthode analogue peut cependant servir à modifier Π^2 (par exemple pour le rendre fermé dans \mathbb{G}), mais on ne peut pas espérer l'annuler ainsi.

CHAPITRE IX.

APPLICATIONS ET COMPLÉMENTS.

1. ESPACE FIBRÉ PRINCIPAL MAXIMAL. — Nous supposons essentiellement dans ce paragraphe que \mathcal{X} est *simplement connexe*. Soit $\mathcal{E}(\mathcal{X}, \mathbb{G})$ un espace fibré principal différentiable dont le groupe structural \mathbb{G} est supposé *connexe*. Désignons par $\mathbb{R}(\mathbb{G})$ le revêtement universel de \mathbb{G} muni d'une structure de groupe homomorphe à \mathbb{G} par la projection

$$\rho: \mathbb{R}(\mathbb{G}) \rightarrow \mathbb{G}.$$

Le quotient de $\mathbb{R}(\mathbb{G})$ par son centre \mathbb{H}_R s'identifie au quotient $\mathbb{G}_\gamma = \mathbb{G}/\mathbb{H}$ de \mathbb{G} par son centre, et l'on pose $\gamma_R = \gamma \circ \rho$. \mathbb{G}_γ opère donc sur $\mathbb{R}(\mathbb{G})$ par les automorphismes intérieurs et l'on peut modéliser $\mathcal{M}_R = \mathbb{R}(\mathbb{G}) \times \mathcal{X}$ sur $\mathcal{E}(\mathcal{X}, \mathbb{G})$. On obtient ainsi $\mathcal{M}_R(\mathcal{E})$. D'autre part, soit ω une connexion sur $\mathcal{E}(\mathcal{X}, \mathbb{G})$ et Δ la $L(\mathbb{E})$ -différentiation covariante associée à ω . Nous poserons $\omega_\gamma = \gamma_{\mathbb{C}(\mathbb{E})}(\omega)$. On peut alors chercher à construire, comme au chapitre précédent, un espace fibré principal différentiable $\mathcal{E}_R(\mathcal{X}, \mathbb{R}(\mathbb{G}))$ lié à $\mathcal{E}_\gamma = \mathcal{E}/\mathbb{H}$ par un γ_R -homo-

morphisme

$$\gamma_{\mathcal{E}_R} : \mathcal{E}_R \rightarrow \mathcal{E}_\gamma,$$

et muni d'une connexion ω_R appliquée sur ω_γ par le couple $(\gamma_R, \gamma_{\mathcal{E}_R})$ et dont la courbure soit égale à $\Omega(\omega)$ après identification de $\mathcal{N}_R(\mathcal{E}_R)$ et de $\mathcal{N}_R(\mathcal{E}_\gamma)$ [et, par suite, de $\mathcal{L}_R(\mathcal{E}_R)$, $\mathcal{L}_R(\mathcal{E}_\gamma)$, $\mathcal{L}(\mathcal{E})$], à $\Omega(\omega)$. D'après la proposition VIII.7.4, on est amené à considérer un sous-groupe Π^2 du centre H_R de $R(G)$.

DÉFINITION IX.4.4. — *On dira que l'espace fibré principal $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ est maximal si le sous-groupe Π^2 coïncide exactement avec le noyau de ρ ⁽³⁰⁾.*

PROPOSITION IX.4.4. — *Tout espace fibré principal différentiable $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ est le quotient d'un espace fibré principal différentiable maximal $(\mathcal{E}_1(\mathcal{X}, G_1))$ par un sous-groupe discret du centre H_1 de G_1 .*

En effet, en reprenant la construction de $\mathcal{E}_R(\mathcal{X}, R(G))$, on déduit de l'existence même de $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ que Π^2 est un sous-groupe du noyau de ρ . Comme ce dernier est fermé dans $R(G)$, Π^2 est également fermé dans $R(G)$ et, d'après le corollaire 3 du théorème VIII.7.4, il existe un espace fibré principal $\mathcal{E}_1(\mathcal{X}, G_1)$ de base \mathcal{X} et de groupe $G_1 = R(G)/\Pi^2$ tel qu'en notant $\rho_1 : G_1 \rightarrow G$ l'homomorphisme déduit de ρ par passage au quotient et $\gamma_1 : G_1 \rightarrow G$ l'homomorphisme déduit de γ_R , il existe un γ_1 -homomorphisme

$$\gamma_{\mathcal{E}_1} : \mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{E}_\gamma$$

et une connexion ω_1 sur $\mathcal{E}_1(\mathcal{X}, G_1)$ appliquée sur ω_γ par $(\gamma_1, \gamma_{\mathcal{E}_1})$ dont la courbure $\Omega(\omega_1)$ s'identifie à $\Omega(\omega)$. Or, par modelage de ρ_1 , on obtient un homomorphisme

$$\rho_{\mathcal{N}_1(\mathcal{E}_1)} : \mathcal{N}_1(\mathcal{E}_1) = \mathcal{N}_1(\mathcal{E}_\gamma) \rightarrow \mathcal{N}(\mathcal{E}) = \mathcal{N}(\mathcal{E}_\gamma)$$

de l'espace structural gauche de $\mathcal{E}_1(\mathcal{X}, G_1)$ sur celui de $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ auquel est associé l'identité sur l'espace de Lie $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ de $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$, identifié à l'espace de Lie de $\mathcal{E}_1(\mathcal{X}, G_1)$ et à $\mathcal{L}(\mathcal{E}_\gamma)$. Comme \mathcal{X} est simplement connexe, il existe donc un couple d'homomorphismes compatibles $(\varphi : G_1 \rightarrow G, h : \mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{E})$ tels que

$$\varphi_{\mathcal{N}_1(\mathcal{E}_1)}^h = \rho_{\mathcal{N}_1(\mathcal{E}_1)}, \quad \varphi_{\mathcal{L}_1(\mathcal{E}_1)}^h = \text{identité}, \quad \varphi_{\mathcal{C}_1(\mathcal{E}_1)}^h(\omega_1) = \omega.$$

Un tel couple est déterminé par le choix de $y_1 \in \mathcal{E}_{1,x}$ et $y \in \mathcal{E}_x$ et l'on a

$$\varphi = i_{\mathcal{N}}(y) \circ \rho_{\mathcal{N}_1(\mathcal{E}_1)} \circ j_{\mathcal{N}_1}(y_1),$$

de sorte qu'en choisissant y et y_1 tels que $\gamma_{\mathcal{E}_1}(y_1) = \gamma_{\mathcal{E}}(y)$, on a $\varphi = \rho_1$.

⁽³⁰⁾ Cette définition ne dépend pas de ω . Ce caractère intrinsèque résulte d'une note du paragraphe VIII.8. Nous revenons sur ce point quelques lignes plus bas.

L'homomorphisme h correspondant (que nous noterons $\rho_{\mathcal{E}_1} : \mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{E}$) permet d'identifier \mathcal{E} au quotient de \mathcal{E}_1 par le noyau de ρ_1 , ce qui achève la démonstration puisque $\mathcal{E}_1(\mathcal{X}, G_1)$ est maximal par construction.

Remarques. — 1° Le fait que la définition IX.1.1 ne dépende pas du choix de Ω résulte de l'invariance de Π^2 par substitution de $\Omega + \Delta\theta + \frac{1}{2}[\theta, \theta]$ à Ω et de $\omega' + \gamma_{L(\mathcal{E})}(\theta)$ à ω' . C'est aussi une conséquence de la proposition précédente. En effet, si $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ était maximal pour une connexion $\underline{\omega}$ et ne l'était pas pour une connexion $\underline{\omega} + \theta = \omega$, on pourrait construire $\mathcal{E}_1(\mathcal{X}, G_1)$ à partir de cette dernière. Il est immédiat de constater, en considérant la connexion $\omega_1 - \theta$ sur $\mathcal{E}_1(\mathcal{E}, G_1)$ que $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ ne serait pas alors maximal pour ω .

2° Étant donné un chemin $l_t : I \rightarrow \mathcal{E}$, dépendant continûment de $t \in I$, tel que $p(l_t(1)) = p(l_t(0)) = x_0$, $l_t(0) = y_0$ (indépendant de t), si, de plus, le chemin l_0 est le chemin nul en y_0 , on peut, en posant $l_t(1) = m_t \cdot y_0$, relever par continuité le chemin m_t de $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ sur $\mathcal{M}_R(\mathcal{E})$ et associer à m_1 un élément m'_1 de $\mathcal{M}_R(\mathcal{E})$ dépendant évidemment de l'homotopie l_t . C'est là le germe d'une définition de l'espace fibré principal maximal valable pour des espaces fibrés topologiques.

DÉFINITION IX.1.2. — *S'il existe un homomorphisme $\rho_{\mathcal{E}_1} : \mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{E}$ d'un espace fibré principal maximal $\mathcal{E}_1(\mathcal{X}, G_1)$ sur $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ compatible avec un homomorphisme $\rho_1 : G_1 \rightarrow G$ dont le noyau est discret dans G_1 , nous dirons que $\mathcal{E}_1(\mathcal{X}, G_1)$ est un revêtement fibré maximal de $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$.*

PROPOSITION IX.1.2. — *Si $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ est maximal et s'il existe un couple d'isomorphismes compatibles $\varphi : G \rightarrow G'$, $h : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$, alors $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, G')$ est aussi maximal.*

Soient, en effet, $R(G)$ et $R(G')$ les revêtements universels de G et G' munis de structures de groupes homomorphes à G et G' par $\rho : R(G) \rightarrow G$ et $\rho' : R(G') \rightarrow G'$. L'isomorphisme φ détermine alors un isomorphisme φ_R tel que le diagramme suivant soit compatible :

$$(IX.1.1) \quad \begin{array}{ccc} R(G) & \rightarrow & R(G') \\ \rho \downarrow & \varphi_R & \downarrow \rho' \\ G & \xrightarrow{\varphi} & G' \end{array}$$

Il est alors facile de voir que, étant donnée une connexion ω de $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ et $\omega' = \varphi_{C(\mathcal{E})}^h(\omega)$, les sous-groupes Π'^2 et Π^2 des centres H', H des groupes $R(G')$, $R(G)$, obtenus en cherchant à construire des espaces fibrés principaux de groupes $R(G)$ et $R(G')$ à partir de $(\mathcal{E}_\gamma, \omega_\gamma, \Omega(\omega))$ et de $(\mathcal{E}'_\gamma, \omega'_\gamma, \Omega(\omega'))$, se cor-

respondent par φ_R :

$$\Pi'^2 = \varphi_R(\Pi^2).$$

La proposition résulte alors du diagramme (IX.1.1).

On a enfin le théorème suivant :

THÉOREME IX.1.1. — *Si $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ est un espace fibré principal différentiable maximal et s'il existe un homomorphisme*

$$\varphi_{\mathcal{L}(\mathcal{E})} : \mathcal{L}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{L}'(\mathcal{E}')$$

de l'espace de Lie de $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ sur l'espace de Lie d'un autre espace fibré principal différentiable $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, G')$ (maximal ou non) et si l'on a

$$\Delta' \circ \varphi_{L(E)} = \varphi_{L(E')} \circ \Delta \quad \text{et} \quad \Omega(\omega') = \varphi_{L(E)}(\Omega(\omega)),$$

[où ω et ω' sont des connexions sur $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ et $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, G')$ resp. et Δ, Δ' les $L(E)$ - et $L'(E')$ -différentiations covariantes associées] *il existe un couple compatible d'homomorphismes sur*

$$\varphi : G \rightarrow G' \quad \text{et} \quad h : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$$

tels que

$$\varphi_{\mathcal{L}(\mathcal{E})}^h = \varphi_{\mathcal{L}(\mathcal{E}')} \quad \text{et} \quad \varphi_{L(E)}^h(\omega) = \omega'.$$

Soient, en effet, Π^2 et Π'^2 les sous-groupes des centres de $R(G)$ et de $R(G')$ obtenus en cherchant à construire des espaces $\mathcal{E}_R(\mathcal{X}, R(G))$ et $\mathcal{E}'_R(\mathcal{X}, R(G'))$ [où $R(G)$ et $R(G')$ sont toujours les revêtements universels de G et G' munis de structures de groupes homomorphes à G et G' par ρ et ρ' et à G_γ et G'_γ par $\gamma_R = \gamma \circ \rho$, $\gamma'_R = \gamma' \circ \rho'$] liés à \mathcal{E}_γ et \mathcal{E}'_γ par des γ_R - et γ'_R -homomorphismes

$$\gamma_{\mathcal{E}_R} : \mathcal{E}_R \rightarrow \mathcal{E}_\gamma, \quad \varphi_{\mathcal{E}'_R} : \mathcal{E}'_R \rightarrow \mathcal{E}'_\gamma$$

et munis de connexions ω_R et ω'_R telles que :

1° Les homomorphismes $\gamma_{C_R(E_R)}, \gamma_{C'_R(E'_R)}$ associés à $(\gamma_R, \gamma_{\mathcal{E}_R})$ et $(\gamma'_R, \gamma_{\mathcal{E}'_R})$ appliquent ω_R et ω'_R sur $\omega_\gamma = \gamma_{C(E)}(\omega)$ et $\omega'_\gamma = \gamma_{C'(E')}(\omega')$;

2°

$$\Omega(\omega_R) = \Omega(\omega), \quad \Omega(\omega'_R) = \Omega(\omega')$$

lorsqu'on identifie l'espace de Lie éventuel $\mathcal{L}_R(\mathcal{E}_R)$ [resp. $\mathcal{L}'_R(\mathcal{E}'_R)$] à $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ et à $\mathcal{L}(\mathcal{E}_\gamma)$ [resp. à $\mathcal{L}'(\mathcal{E}')$ et à $\mathcal{L}'(\mathcal{E}'_\gamma)$].

Notons d'autre part $\mathcal{N}_R(\mathcal{E}_\gamma)$ et $\mathcal{N}'_R(\mathcal{E}'_\gamma)$ les espaces obtenus en modelant

$$\mathcal{N}_R = R(G) \times \mathcal{X} \quad \text{et} \quad \mathcal{N}'_R = R(G') \times \mathcal{X}$$

sur $\mathcal{E}_\gamma(\mathcal{X}, G_\gamma)$ et $\mathcal{E}'_\gamma(\mathcal{X}, G'_\gamma)$, G_γ et G'_γ opérant naturellement sur $R(G)$ et $R(G')$ par les automorphismes intérieurs. Il est clair que $\mathcal{L}(\mathcal{E}_\gamma)$ et $\mathcal{L}'(\mathcal{E}'_\gamma)$ sont asso-

ciés respectivement à $\mathfrak{N}_R(\mathcal{E}_\gamma)$ et $\mathfrak{N}'_R(\mathcal{E}'_\gamma)$. Comme ces derniers sont à fibres simplement connexes, il existe un homomorphisme

$$\varphi_{\mathfrak{N}_R(\mathcal{E}_\gamma)} : \mathfrak{N}_R(\mathcal{E}_\gamma) \rightarrow \mathfrak{N}'_R(\mathcal{E}'_\gamma),$$

auquel l'homomorphisme $\varphi_{\mathcal{L}(\mathcal{E}_\gamma)}$ [dédit de $\varphi_{\mathcal{L}(\mathcal{E})}$ après identification de $\mathcal{L}(\mathcal{E})$, $\mathcal{L}(\mathcal{E}_\gamma)$, etc.] est associé. Les conditions de la proposition VII.1.1 étant vérifiées, il existe un homomorphisme

$$\varphi_R : R(G) \rightarrow R(G')$$

déterminant $\varphi_{\mathfrak{N}_R(\mathcal{E}_\gamma)}$ par modelage. On vérifie alors sans difficulté que

$$\Pi'^2 = \varphi_R(\Pi^2).$$

Comme Π'^2 est un sous-groupe du noyau de ρ' , on déduit de ρ' , par passage au quotient, un homomorphisme

$$\rho'_1 : R(G')/\Pi'^2 \rightarrow G',$$

puis, à partir de φ_R et de ρ'_1 :

$$\varphi : G = R(G)/\Pi^2 \rightarrow G'.$$

Enfin, par modelage de φ , on détermine

$$\varphi_{\mathfrak{N}(\mathcal{E})} : \mathfrak{N}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathfrak{N}'(\mathcal{E}')$$

auquel $\varphi_{\mathcal{L}(\mathcal{E})}$ est associé, par construction. Nous sommes donc dans les conditions d'application du théorème VI.2.1, dont il suffit de servir pour achever complètement la démonstration.

En rapprochant le théorème IX.1.1 et la proposition IX.1.2, on obtient le

COROLLAIRE 1 DU THÉORÈME IX.1.1. — *Si $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ est un espace fibré principal différentiable maximal et s'il existe un isomorphisme*

$$\varphi_{\mathcal{L}(\mathcal{E})} : \mathcal{L}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{L}'(\mathcal{E}')$$

de l'espace de Lie de $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$, sur l'espace de Lie d'un autre espace fibré principal différentiable $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, G)$ de même base et de même groupe structural, tel que

$$\Delta' \circ \varphi_{L(\mathcal{E})} = \varphi_{L(\mathcal{E}')} \circ \Delta \quad \text{et} \quad \Omega(\omega') = \varphi_{L(\mathcal{E})}(\Omega(\omega))$$

(notations habituelles), alors $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, G)$ est maximal lui-aussi.

COROLLAIRE 2 DU THÉORÈME IX.1.1. — *Si $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ et $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, G')$ sont deux espaces fibrés principaux différentiables maximaux et s'il existe un isomorphisme sur*

$$\varphi_{\mathcal{L}(\mathcal{E})} : \mathcal{L}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{L}'(\mathcal{E}')$$

tel que

$$\Delta' \circ \varphi_{L(\mathcal{E})} = \varphi_{L(\mathcal{E}')} \circ \Delta \quad \text{et} \quad \Omega(\omega') = \varphi_{L(\mathcal{E})}(\Omega(\omega)),$$

alors, il existe un couple d'isomorphismes compatibles

$$\varphi: G \rightarrow G' \quad \text{et} \quad h: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$$

de G sur G' et de \mathcal{E} sur \mathcal{E}' , tels que

$$\varphi_{\mathcal{E}(\mathcal{E})}^h = \varphi_{\mathcal{E}(\mathcal{E})} \quad \text{et} \quad \varphi_{\mathcal{L}(\mathcal{E})}^h(\omega) = \omega'.$$

En effet, puisque $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ est maximal, il existe un couple d'homomorphismes sur (φ, h) satisfaisant à ces conditions. Mais, comme $\varphi_{\mathcal{E}(\mathcal{E})}$ est un isomorphisme et que $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, G')$ est maximal lui aussi par hypothèse, il existe aussi un couple d'homomorphismes compatibles

$$\psi: G' \rightarrow G \quad \text{et} \quad g: \mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{E}.$$

Il en résulte que φ et h sont des isomorphismes sur.

C. Q. F. D.

2. QUESTIONS DIVERSES. — Nous nous proposons d'examiner dans ce paragraphe quelques problèmes auxquels les résultats des chapitres précédents conduisent de façon naturelle.

1° Étant donné un espace fibré principal différentiable $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ de groupe G connexe et de base simplement connexe, classer les opérateurs de différentiation covariante de $L(\mathcal{E})$ susceptibles de conduire éventuellement à des espaces fibrés principaux différentiables non isomorphes à $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$.

Soit ω une connexion sur $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ et $\underline{\omega}$ la connexion adjointe sur $\mathcal{R}(\mathcal{L}^0(\mathcal{E}))$. La $L(\mathcal{E})$ -différentiation covariante associée à ω étant notée Δ , on a vu que tout opérateur de différentiation covariante Δ' de $L(\mathcal{E})$ satisfaisant aux trois premiers axiomes de la définition VIII.1.1 détermine une connexion sur $\mathcal{R}(\mathcal{L}^0(\mathcal{E}))$ et que, réciproquement, toute connexion linéaire sur $\mathcal{R}(\mathcal{L}^0(\mathcal{E}))$ détermine une telle différentiation covariante à condition que $\Delta'c = 0$ (notation du chapitre VIII). On a donc

$$\Delta' = \Delta + \alpha',$$

ou α' est une section de $\underline{L}^1(\mathcal{E})$ telle que $\alpha'c = 0$. De plus, si l'axiome 4 est vérifié, $\Omega(\underline{\omega} + \alpha')$ est une section de $a_{L(\mathcal{E})}(L^2(\mathcal{E}))$. Or,

$$\Omega(\underline{\omega} + \alpha') = \Omega(\underline{\omega}) + \Delta\alpha' + \frac{1}{2}[\alpha', \alpha'].$$

On considérera donc le sous-faisceau Φ de $\underline{L}^1(\mathcal{E})$ tel que $\alpha' \in \Phi$ soit équivalent à $\alpha'c = 0$ et $\Delta\alpha' + \frac{1}{2}[\alpha', \alpha'] =$ section de $a_{L(\mathcal{E})}(L^2(\mathcal{E}))$. Évidemment, en général, du fait que $\Omega(\underline{\omega} + \alpha')$ soit une section de $a_{L(\mathcal{E})}(L^2(\mathcal{E}))$, il ne résulte pas que Δ' satisfasse à 4. Nous reviendrons plus loin sur cette question.

Rappelons d'autre part la formule (III.3.2) :

$$\underline{D}(\mu)\Delta = \mu \circ \Delta \circ \mu^{-1}$$

qui montre, en tenant compte de (III.3.3), et en posant

$$C(\mu) \underline{\omega} = X_{\omega}(\mu) + \underline{\omega}$$

qu'on a l'égalité

$$(IX.2.1) \quad \mu \circ \Delta \circ \mu^{-1} = \Delta + X_{\omega}(\mu)$$

Revenant alors au problème qui nous occupe, nous savons en vertu du théorème VI.2.1 que si Δ' et Δ'' correspondent à deux espaces fibrés principaux $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, G)$ et $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ isomorphes (par un couple φ, h), il existe un automorphisme de $\mathcal{L}(\mathcal{E})$, c'est-à-dire une certaine section μ de $\underline{\mathcal{M}}(\mathcal{E})$, tel que

$$\mu \circ \Delta' \circ \mu^{-1}$$

soit une différentiation covariante associée à une connexion de $\mathcal{E}''(\mathcal{X}, G)$, c'est-à-dire telle qu'il existe une section η de $L^1(E)$ et que

$$\mu \circ \Delta' \circ \mu^{-1} = \Delta'' + a_{\mathcal{E}(\mathcal{E})}(\eta).$$

Comme $\Delta' = \Delta + \alpha'$ et $\Delta'' = \Delta + \alpha''$, on a

$$\Delta + X_{\omega}(\mu) + \text{Adj}(\mu)\alpha' = \Delta + \alpha'' + a_{\mathcal{E}(\mathcal{E})}(\eta).$$

On est donc amené à considérer le quotient U de l'ensemble des sections globales de Φ par la relation d'équivalence $\alpha' \equiv \alpha''$ s'il existe une section μ de $\underline{\mathcal{M}}(\mathcal{E})$ qui soit un automorphisme de $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ et telle que

$$(\text{Adj}(\mu)\alpha' + X_{\omega}(\mu)) - \alpha''$$

soit une section de $a_{L(E)}(L^1(E))$. C'est la classification cherchée.

Remarquons que, dans les conditions précédentes, la translation à gauche μ appliquée à $\mathcal{R}(\mathcal{L}^0(\mathcal{E}))$ fait passer d'une variété intégrale V' du champ normal $\Gamma(a_{\mathcal{E}(\mathcal{E})}(\mathcal{L}^0(\mathcal{E})), \underline{\omega} + \alpha')$ à une variété intégrale V'' de $\Gamma(a_{\mathcal{E}(\mathcal{E})}(\mathcal{L}^0(\mathcal{E})), \underline{\omega} + \alpha'')$.

On retrouve donc l'ensemble des classes précédentes, en formant le quotient U de l'ensemble des sections σ de $\mathcal{R}(\mathcal{L}^0(\mathcal{E}))/a_{\mathcal{M}(\mathcal{E})}(\underline{\mathcal{M}}(\mathcal{E}))$ qui correspondent à des sous-espaces fibrés à groupes structuraux de $\mathcal{R}(\mathcal{L}^0(\mathcal{E}))$, par la relation $\sigma \equiv \sigma'$ s'il existe $s \in \text{Gl}(n, R)$ et une section μ de $\underline{\mathcal{M}}(\mathcal{E})$ qui soit un automorphisme de $\mathcal{L}(\mathcal{E})$, tels que

$$\sigma = (\mu \cdot \sigma') \cdot s.$$

2° On peut se demander si, étant donné un espace fibré différentiable à fibres-algèbres de Lie $\tilde{\mathcal{L}}_0$, il existe toujours dans le faisceau \tilde{L} un opérateur Δ satisfaisant aux trois premiers axiomes de la définition VIII.1.1. Il faut et il suffit pour cela qu'il existe une connexion $\underline{\omega}$ dans $\mathcal{R}(\tilde{\mathcal{L}}^0)$ pour laquelle le tenseur c soit à différentielle covariante nulle. Or, localement, le problème est toujours résoluble. De plus, si $\underline{\omega}$ convient, $\underline{\omega} + \alpha$ convient également, à la seule condition que $\alpha c = 0$. Comme les sections de $\underline{\mathcal{L}}^1$ telles que $\alpha c = 0$ sont

les sections d'un sous-espace fibré vectoriel de $\underline{\mathcal{L}}^1$ [espace de Lie de $\mathcal{R}(\mathcal{L}^0)$] et que $\underline{\mathcal{L}}^1$ opère de façon simplement transitive sur le faisceau des connexions de $\mathcal{R}(\mathcal{L}^0)$, on voit qu'il existe toujours un tel opérateur Δ .

3° Avec les notations de VIII.7, étant donné $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, G_\gamma)$ muni d'une connexion ω' dont la $L(E')$ -différentiation covariante associée est notée Δ , classer les sections Ω de $L^2(E')$ telles que

$$\gamma_{L(E')}(\Omega) = \Omega(\omega') \quad \text{et} \quad \Delta\Omega = 0$$

conduisant éventuellement à des espaces fibrés principaux $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ non isomorphes. On suppose qu'il existe au moins une section Ω^0 possédant les propriétés ci-dessus.

Toute section Ω est de la forme $\Omega^0 + \Theta$ où Θ est une forme différentielle fermée sur \mathcal{X} , de degré 2, à coefficients dans \underline{H} . Si $\Omega - \Omega'$ est homologue à 0, Ω et Ω' conduisent évidemment au même espace fibré principal (s'il existe). On est donc amené à former le quotient Ψ'_1 de l'ensemble Ψ des sections Ω par la relation $\Omega \equiv \Omega'$ si $\Omega - \Omega'$ est homologue à 0. On obtient ainsi un ensemble de classes, qu'on peut mettre en correspondance biunivoque avec le groupe d'homologie de dimension 2 de \mathcal{X} à coefficients dans \underline{H} .

Si μ est un automorphisme de $\mathcal{L}(\mathcal{E}')$ conservant Δ et si $\Omega \equiv \Omega'$, on a

$$\Omega - \Omega' = d\theta = \Delta\theta$$

et aussi

$$\mu\Omega - \mu\Omega' = \mu\Delta\theta = \Delta\mu\theta.$$

Le groupe des automorphismes de $\mathcal{L}(\mathcal{E}')$ conservant Δ opère donc sur Ψ'_1 . Comme les espaces auxquels peuvent conduire Ω et Ω' sont isomorphes (par un couple (φ, h) si Ω et Ω' se correspondent par un tel automorphisme, on est amené à former le quotient Ψ'_2 de Ψ'_1 par le groupe des automorphismes de $\mathcal{L}(\mathcal{E}')$ conservant Δ . Ψ'_2 est l'ensemble des classes cherchées.

Exemple. — Si G est abélien, on est amené à effectuer le quotient du deuxième groupe d'homologie des formes différentielles sur \mathcal{X} à coefficients dans \underline{G} par le groupe des automorphismes linéaires de \underline{G} .

3. CLASSE CARACTÉRISTIQUE. — Étant donnée, avec les notations habituelles, une connexion ω' sur $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, G_\gamma)$, soit Ω une section de $\gamma_{\mathcal{E}'(\mathcal{E})}^{-1}(\Omega(\omega'))$.

PROPOSITION IX.3.1. — *La forme $\Delta\Omega$ est une section de $K^3(E')$. On peut la considérer comme une forme différentielle fermée sur \mathcal{X} à valeurs dans l'algèbre de Lie \underline{H} du centre de G .*

En effet, d'une part

$$\Delta' \circ \gamma_{L(E')} = \gamma_{L(E')} \circ \Delta$$

et d'autre part

$$\Delta'(\Omega(\omega')) = 0,$$

ce qui montre que $\Delta\Omega$ est une section de $K^3(E')$,

Par ailleurs, on a

$$\Delta^2\Omega = \Omega(\omega') \cdot \Omega = [\Omega, \Omega] = 0,$$

ce qui montre que $\Delta\Omega$ considérée comme une forme différentielle sur \mathcal{X} à valeurs dans \underline{H} est fermée

PROPOSITION IX.3.2. — *La classe d'homologie de $\Delta\Omega$ est indépendante du choix de la section Ω telle que $\gamma_{\mathcal{E}(\mathcal{E})}(\Omega) = \Omega(\omega')$.*

En effet, étant donnée une deuxième forme Ω_1 telle que

$$\gamma_{L(E)}(\Omega_1) = \Omega(\omega'),$$

on a

$$\Delta\Omega - \Delta\Omega_1 = \Delta(\Omega - \Omega_1).$$

Mais $\Omega - \Omega_1$ est une section de $K(E')$ et l'on peut écrire

$$\Delta\Omega - \Delta\Omega_1 = d(\Omega - \Omega_1),$$

ce qui démontre la proposition.

PROPOSITION IX.3.3. — *La classe d'homologie de $\Delta\Omega$ est indépendante de la connexion ω' choisie.*

Soit en effet, $\omega' + \theta$ une autre connexion sur $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, G)$. Considérons l'espace fibré principal $\mathcal{E}' \times I'$ où I' est un intervalle ouvert contenant $[0, 1]$. Nous pouvons doter cet espace de la connexion ω^0 dont la restriction à (\mathcal{X}, t) ($t \in I'$) est $\omega' + t\theta$ et dont les chemins horizontaux de projection (x, I') sont les chemins (y, I') ($y \in \mathcal{E}'_x, x \in \mathcal{X}$). La différentiation covariante associée à ω^0 étant notée Δ^0 , on considère une section Θ de $\mathcal{L}(\mathcal{E}') \times I'$ dont l'image, par passage au quotient, soit $\Omega(\omega^0)$. On a évidemment

$$d\Delta^0\Theta = 0.$$

Par suite, les restrictions de $\Delta^0\Theta$ à $(\mathcal{X}, 0)$ et à $(\mathcal{X}, 1)$ sont homologues. Or, ces restrictions, notées $\Delta\Omega$ et $\Delta\Omega_1$ sont telles que

$$\gamma_{L(E')}(\Omega) = \Omega(\omega') \quad \text{et} \quad \gamma_{L(E')}(\Omega_1) = \Omega(\omega' + \theta).$$

La proposition est donc démontrée.

DÉFINITION IX.3.4. — *La classe d'homologie de la forme $\Delta\Omega$ où Ω est une section de $L^2(E')$ telle que*

$$\gamma_{L(E')}(\Omega) = \Omega(\omega')$$

pour une connexion quelconque ω' de $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, \underline{G})$ sera appelée la classe caractéristique de $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, \underline{G}_\gamma)$ relative à \underline{G} . $\Delta\Omega$ est une 3-forme différentielle sur \mathcal{X} à coefficients dans \underline{H} (centre de \underline{G}).

PROPOSITION IX.3.4. — La condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une section de Ω de $\gamma_{\mathcal{E}'(\mathcal{S}')}^{-1}(\Omega(\omega'))$ telle que $\Delta\Omega = 0$ est que la classe caractéristique de $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, \underline{G})$ relative à \underline{G} soit nulle.

NÉCESSITÉ ÉVIDENTE. — Réciproquement, si Ω est une section quelconque de $\gamma_{\mathcal{E}'(\mathcal{S}')}^{-1}(\Omega(\omega'))$ et si

$$\Delta\Omega = d\alpha = \Delta\alpha,$$

on a

$$\Delta(\Omega - \alpha) = 0, \quad \gamma_{\mathcal{E}'(\mathcal{S}')}(\alpha) = 0,$$

ce qui démontre la proposition.

4. AUTRES CLASSES CARACTÉRISTIQUES. — Nous supposons ici que la classe caractéristique de $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, \underline{G}_\gamma)$ relative à \underline{G} est nulle. Il existe alors, quelle que soit la connexion ω' une section Ω de $L^2(E')$ telle que

$$\Delta\Omega = 0.$$

Nous poserons $\mathcal{L}_p^0 = (\otimes_p \underline{G}) \times \mathcal{X}$, nous noterons \mathcal{L}_p^q l'espace fibré des q -formes différentielles sur \mathcal{X} à valeurs dans $\otimes_p \underline{G}$ et

$$\mathcal{L}_p = \bigcup_{q=1, \dots, d} \mathcal{L}_p^q.$$

Considérons $\mathcal{L}_p^q(\mathcal{E}')$ et son faisceau $L_p(E')$ des sections différentiables. Enfin, soit Ω le produit tensoriel antisymétrisé de p facteurs égaux à Ω . Étant donnée une application linéaire

$$\varphi: \otimes_p \underline{G} \rightarrow \mathfrak{A}_0$$

de $\otimes_p \underline{G}$ dans un espace vectoriel \mathfrak{A}_0 , invariante par G_γ , il est clair que

$$\varphi(j_{\mathcal{E}'}(y) \frac{\Omega}{p}) \quad (y \in \mathcal{E}'_x),$$

est indépendante de y , ce qui permet de définir une forme différentielle de degré $2p$ sur \mathcal{X} par

$$[\varphi(\frac{\Omega}{p})]_x = \varphi(j_{\mathcal{E}'}(y) \frac{\Omega}{p}) \quad (y \in \mathcal{E}'_x).$$

PROPOSITION IX.4.1. — La forme $\varphi(\frac{\Omega}{p})$ est fermée et sa classe d'homologie est la même que celle de $\varphi(\frac{\Omega'}{p})$ où Ω' , définie par

$$\Omega' = \Omega + \Delta\theta + \frac{1}{2}[\theta; \theta] \quad [\theta = \text{section de } L^1(E')]$$

est une section de $L^2(E')$ telle que, Δ^1 étant associé à $\omega'^1 = \omega' + \gamma_{L(E')}(\theta)$, on ait

$$\Delta^1 \Omega' = 0 \quad \text{et} \quad \gamma_{L(E')}(\Omega') = \Omega(\omega'^1).$$

En effet, il est évident que

$$d\varphi\left(\frac{\Omega}{\rho}\right) = 0$$

puisque $\Delta\Omega = 0$ [voir formule (III.4.6)]. Soit alors U un ouvert de \mathcal{X} homéomorphe à \mathbb{R}^d , $\mathcal{E}_U(U, G)$ un espace fibré principal de base U et de groupe G et

$$\gamma_{\mathcal{E}_U}: \mathcal{E}_U \rightarrow \mathcal{E}'_U,$$

un γ -homomorphisme. Identifions $\mathcal{L}_U(\mathcal{E}'_U)$ à l'espace de Lie de \mathcal{E}_U . Il existe alors une connexion ω_U sur \mathcal{E}_U admettant Ω_U pour courbure.

Soit ω^0 la connexion de $\mathcal{E}_U \times I'$ dont la restriction à (\mathcal{E}_U, t) ($t \in I'$) est

$$\omega_U + t\theta$$

et qui admet pour chemins horizontaux de projections (x, I') ($x \in \mathcal{X}$), les chemins (y, I') ($y \in \mathcal{E}_x$). Notons Ω_U^0 le produit tensoriel antisymétrisé de p facteurs égaux à $\Omega(\omega_U^0)$. On peut définir $\varphi\left(\frac{\Omega_U^0}{\rho}\right)$ comme $\varphi\left(\frac{\Omega}{\rho}\right)$. $\varphi\left(\frac{\Omega_U^0}{\rho}\right)$ ne dépend pas du choix de $\gamma_{\mathcal{E}_U}$. En effet, un autre γ -homomorphisme nous amènerait à remplacer ω_U par $C(m)\omega_U$ et θ par $\text{Adj}(m)\theta$ [$m =$ section de $\mathcal{N}_U(\mathcal{E}_U)$]; mais en notant m^0 la section de $\mathcal{N}_U(\mathcal{E}_U) \times I'$ déduite de m , la connexion $C(m^0)\omega_U^0$ se réduit à

$$C(m)(\omega_U + t\theta)$$

sur (\mathcal{E}_U, t) et elle admet les chemins (y, I') pour chemins horizontaux. Comme en outre,

$$\Omega(C(m^0)\omega_U^0) = \text{Adj}(m^0)\Omega(\omega_U^0)$$

et de plus φ est invariant par G , on a, avec $\Omega^1_U = \Omega(C(m^0)\omega_U^0)$:

$$\varphi\left(\frac{\Omega^1_U}{\rho}\right) = \varphi\left(\frac{\Omega_U^0}{\rho}\right).$$

On définit donc une forme différentielle Θ sur $\mathcal{X} \times I'$ en posant

$$\Theta_U = \varphi\left(\frac{\Omega_U^0}{\rho}\right),$$

quel que soit U .

Il est clair que $d\Theta = 0$ et que la restriction de Θ à $(\mathcal{X}, 0)$ [resp. $(\mathcal{X}, 1)$] est $\varphi\left(\frac{\Omega}{\rho}\right)$ [resp. $\varphi\left(\frac{\Omega'}{\rho}\right)$]. Il en résulte que $\varphi\left(\frac{\Omega}{\rho}\right)$ et $\varphi\left(\frac{\Omega'}{\rho}\right)$ sont homologues.

Étant donnée une section Ω de $L^2(E')$ telle qu'il existe une connexion ω' pour laquelle $\Delta\Omega = 0$ et $\gamma_{L(E')}(\Omega) = \Omega(\omega')$, on appellera classe caractéristique de Ω relativement à φ , la classe d'homologie de la forme $\varphi\left(\frac{\Omega}{\rho}\right)$. On peut appeler ensemble caractéristique de $L(E')$ relativement à φ l'ensemble des classes des formes $\varphi\left(\frac{\Omega}{\rho}\right)$. D'après la proposition précédente, l'ensemble caractéristique ne dépend pas de la connexion ω' choisie.

Plus précisément, écrivons $\varphi((X + Z) \otimes \dots \otimes (X + Z))$ ($X \in \underline{G}$ et $Z \in \underline{H}$) sous la forme d'un polynôme symétrique en Z , soit $P_{\varphi, X}(Z)$, dont les coefficients sont des polynômes symétriques en X , à valeurs dans \mathfrak{A}_0 , et invariants par G_γ , puisque φ et Z sont l'un et l'autre invariants. Dans ces conditions,

$$P_{\varphi, \Omega}(Z)$$

est un polynôme en Z dont les coefficients sont des formes différentielles fermées à valeurs dans \mathfrak{A}_0 et, si $\Omega' = \Omega + \Theta$ (Θ fermée à valeurs dans \underline{H}), on a

$$\varphi\left(\frac{\Omega'}{\rho}\right) = P_{\varphi, \Omega}(\Theta).$$

Les classes d'homologie des coefficients de $P_{\varphi, \Omega}(Z)$ sont les coefficients d'un polynôme $\bar{P}_{\varphi, \Omega}$ sur le groupe d'homologie $H^2(\mathcal{X}, \underline{H})$ des formes différentielles sur \mathcal{X} à coefficients dans \underline{H} . On dira que $\bar{P}_{\varphi, \Omega}$ est le *polynôme caractéristique de Ω* , relativement à φ . La proposition précédente montre que l'ensemble des polynômes caractéristiques ne dépend pas du choix de ω' . D'une façon plus précise on obtient tous les polynômes à partir de l'un d'entre eux en y remplaçant Z par $Z + \Theta$ ($\Theta = 2$ -classe sur \mathcal{X} à valeurs dans \underline{H}). On a

$$\bar{P}_{\varphi, \Omega + \Theta + \frac{1}{2}[\theta, \theta]} = \bar{P}_{\varphi, \Omega}$$

et

$$\bar{P}_{\varphi, \Omega + \Theta} = \bar{P}_{\varphi, \Omega}(\Theta + Z).$$

Remarque. — Compte tenu de la parité de Ω , on peut évidemment se borner aux formes φ symétriques et considérer, en outre, l'application de l'espace vectoriel des formes φ dans celui des polynômes sur $H^2(\mathcal{X}, \underline{H})$ à coefficients dans \mathfrak{A}_0 , homomorphisme qui associe $\bar{P}_{\varphi, \Omega}$ à φ .

S'il existe un espace fibré principal $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ admettant $(\mathcal{L}(\mathcal{E}_\gamma), \Omega, \Delta)$ et si $\mathfrak{A}_0 = \mathbb{R}$, la considération des classes caractéristiques de $\Omega(\omega)$ où ω est une connexion sur $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ conduit à l'homomorphisme de Weil. On remarquera que, dans ce cas, la démonstration de la proposition IX.1.1 se simplifie : aux espaces \mathcal{E}_0 , on substitue $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$.

5. UNE GÉNÉRALISATION. ESPACES FIBRÉS DIFFÉRENTIABLES PRINCIPAUX A ESPACE STRUCTURAL. — Soient $\mathcal{E}(\mathcal{X}, G)$ et $\mathcal{E}'(\mathcal{X}, G)$ deux espaces fibrés principaux différentiables de même base et de même groupe structural. Modelons \mathcal{E} sur \mathcal{E}' , G opérant à droite sur \mathcal{E} . D'après les résultats du premier chapitre, $\mathcal{N}(\mathcal{E}')$ opère sur $\mathcal{E}(\mathcal{E}')$ à droite, et de façon simplement transitive. Nous pouvons donc modeler sur $\mathcal{E}(\mathcal{E}')$, les espaces fibrés $\mathcal{N}(\mathcal{E}')$ et $\mathcal{L}(\mathcal{E}')$ sur lesquels $\mathcal{N}(\mathcal{E}')$ opère par les automorphismes intérieurs et par les automorphismes adjoints respectivement. On obtient ainsi $\mathcal{N}(\mathcal{E}')[\mathcal{E}(\mathcal{E}')] et $\mathcal{L}(\mathcal{E}')[(\mathcal{E}(\mathcal{E}'))]$.$

De même, on peut former $C(E')[E(E')]$, $M(E')$ opérant sur $C(E')$ par $C(m)$. Enfin, pour les différentiations covariantes, on aura le faisceau $\nabla(E')[E(E')]$.

Désignons par le symbole DIA le diagramme reliant les espaces ou faisceaux \mathcal{E} , \mathcal{N} , \mathcal{E} , M , L , E , C , ∇ , par les homomorphismes « points », courbure, etc. et par les diverses opérations qui interviennent entre eux : D_m , G_m , $\text{Adj}(m)$, $\text{Int}(m)$, $C(m)$, Δ , $\omega + \theta$, etc. Les résultats du premier chapitre nous ont permis de montrer (chap. II et III), que, de la compatibilité du diagramme DIA résultait l'existence et la compatibilité du diagramme DIA(\mathcal{E}) qui relie \mathcal{E} , $\mathcal{N}(\mathcal{E})$, $\mathcal{L}(\mathcal{E})$, M , E , $L(E)$, $M(E)$, $C(E)$, $\nabla(E)$ par les mêmes homomorphismes et opérations qui figurent dans DIA. De même, de la compatibilité de DIA(\mathcal{E}') résultent l'existence et la compatibilité du diagramme DIA(\mathcal{E}')[$\mathcal{E}(\mathcal{E}')$] où l'on retrouve les espaces et faisceaux définis au cours du précédent alinéa. De plus, DIA(\mathcal{E}') et DIA(\mathcal{E}')[$\mathcal{E}(\mathcal{E}')$] sont reliées par les isomorphismes $j(y)$, du type suivant :

$$j_{\mathcal{Z}(\mathcal{E}')(y)} : (\mathcal{Z}(\mathcal{E}')[\varepsilon(\mathcal{E}')])_x \rightarrow (\mathcal{Z}(\mathcal{E}'))_x \quad [y \in \varepsilon(\mathcal{E}')_x]$$

avec

$$\mathcal{Z} = \mathcal{L}, \mathcal{N} \quad \text{et} \quad \varepsilon = \mathcal{E}$$

ou

$$\mathcal{Z} = M, L, C, \nabla \quad \text{et} \quad \varepsilon = E.$$

Plaçons-nous alors sur les espaces ou faisceaux de base I' induits par une application différentiable

$$l : I' \rightarrow \mathcal{X}.$$

Nous affecterons de l'indice l les espaces et faisceaux associés à

$$\mathcal{E}_l = l^{-1}(\mathcal{E}) \quad \text{et} \quad \mathcal{E}'_l = l^{-1}(\mathcal{E}').$$

Soient ω et ω' deux sections globales de $C(E)$ et de $C(E')[E(E')]$ et ω_l , ω'_l les sections de $C_l(E'_l)$ et de $C_l(E'_l)[E_l(E'_l)]$ induites par l .

DÉFINITION IX.5.4. — *Nous dirons que le chemin différentiable $\lambda : I' \rightarrow \mathcal{E}(\mathcal{E}')$ est (ω , ω')-horizontal de projection l si $\lambda = l_{\mathcal{E}(\mathcal{E}')}^{\#} \circ s$ où s est une section de $\mathcal{E}_l(\mathcal{E}'_l)$ telle qu'on ait*

$$j_{C_l(E'_l)}(s)\omega'_l = \omega_l.$$

EXISTENCE DES CHEMINS HORIZONTAUX. — Choisissons une fois pour toutes une section σ de $\mathcal{E}_l(\mathcal{E}'_l)$ et soit m une section variable de $\mathcal{N}_l(\mathcal{E}'_l)$. On est amené à chercher à déterminer une section m telle que

$$j_{C_l(E'_l)}(\sigma \cdot m)\omega'_l = \omega_l,$$

ce qui s'écrit

$$C(m^{-1})j_{C_l(E'_l)}(\sigma)\omega'_l = \omega_l,$$

ou encore

$$j_{C_l(E'_l)}(\sigma)\omega'_l = C(m)\omega_l.$$

D'après la proposition IV.2.2, si m est une solution de cette équation, la translation à gauche $C_m : \mathcal{E}'_l \rightarrow \mathcal{E}'_l$ transforme tout chemin ω_l -horizontal en un chemin $[j_{C_l(\mathcal{E}'_l)}(\sigma)\omega'_l]$ -horizontal. La réciproque est immédiate. On détermine donc toutes les solutions en choisissant un chemin ω -horizontal λ_1 fixe et un chemin $[j_{C_l(\mathcal{E}'_l)}(\sigma)\omega'_l]$ -horizontal variable λ_2 : la section m définie par $\lambda_2 = m.\lambda_1$ est une solution. En revenant à $\mathcal{E}_l(\mathcal{E}'_l)$ puis à $\mathcal{E}(\mathcal{E}')$, on en déduit immédiatement :

1° Par tout point $y \in \mathcal{E}(\mathcal{E}')$, il passe un chemin (ω, ω') -horizontal de projection l et un seul $[p(y) = l(o)]$.

2° Si λ est un chemin (ω, ω') -horizontal, le chemin $\lambda.m$ est également (ω, ω') -horizontal si, et seulement si, m se déplace parallèlement à lui-même par rapport à ω .

Il en résulte qu'à (ω, ω') est associé un champ $c(\omega, \omega')$ transversal aux fibres de $\mathcal{E}(\mathcal{E}')$ et invariant par les vecteurs tangents à $\mathfrak{N}(\mathcal{E}')$ appartenant aux éléments de $c^{\mathfrak{N}(\mathcal{E}')}(\omega)$.

Quant au transport parallèle relativement à (ω, ω') dans $\mathfrak{Z}(\mathcal{E}')[\mathcal{E}(\mathcal{E}')]$ (notation du paragraphe IV.6 : $\mathfrak{Z} = \mathfrak{N}$, \mathcal{L}^0 ou $\mathfrak{Z}\mathcal{W}^0$ par exemple), on peut le définir soit par un champ transversal, soit en décidant que $m_t \in \mathfrak{N}(\mathcal{E}')[\mathcal{E}(\mathcal{E}')]_t$ se déplace parallèlement à lui-même relativement à (ω, ω') si $j_{\mathfrak{Z}(\mathcal{E}')}(\gamma_t)m_t$ se déplace parallèlement à lui-même relativement à ω lorsque γ_t décrit un chemin (ω, ω') -horizontal.

Enfin, à tout lacet l en x est associé un $\mu_{\mathfrak{N}(\mathcal{E}')}^{\omega, \omega'}$ -isomorphisme de $[\mathcal{E}(\mathcal{E}')]_x$ qu'on peut noter $\tau_{\omega, \omega'}(l)$, et qui est aussi un φ -isomorphisme de $[\mathcal{E}(\mathcal{E}')]_x$ où φ est un isomorphisme de $\mathfrak{N}(\mathcal{E}')[\mathcal{E}(\mathcal{E}')]_x$ défini par le transport parallèle relativement à (ω, ω') ,

Remarque. — $\mathfrak{N}(\mathcal{E}')$ et $\mathfrak{N}(\mathcal{E}')[\mathcal{E}(\mathcal{E}')]_x$ jouent ici des rôles complètement symétriques. Il y a même lieu de considérer un espace de Lie à droite, un espace de Lie à gauche, une courbure à droite et une courbure à gauche, etc.

Cas particulier. — Si \mathcal{E}' est trivial et si ω est la connexion triviale également (celle définie par l'égalité $\mathcal{E}' = \mathcal{X} \times G$), on retombe sur le cas habituel. On voit cependant qu'on peut, même dans ce cas, faire de la géométrie différentielle sur un espace fibré à groupe structural à partir d'une connexion sur $\mathcal{X} \times G$ qui ne soit pas la connexion triviale.

Nous nous proposons de montrer maintenant que les espaces figurant dans $\text{DIA}(\mathcal{E}')[\mathcal{E}(\mathcal{E}')]_x$ sont ceux qui figurent dans $\text{DIA}(\mathcal{E})$.

Reprenons pour cela les notations du paragraphe I.2 : $L, M, E(\mathcal{X}, M)$ et $E'(\mathcal{X}, M)$ sont provisoirement des espaces fibrés s. l. et M opère sur L par $R(m)$. Remarquons d'abord que, de toute évidence, $E(E') = E'(E)$ car,

L'un et l'autre sont les quotients de $E \boxtimes E'$ par la relation d'équivalence

$$(y, z) \equiv (y.m, z.m) \quad (y \in E_x, z \in E'_x \text{ et } m \in M_x).$$

On note alors

$$\alpha: E \boxtimes E' \rightarrow E(E')$$

l'application canonique qui résulte de ce passage au quotient.

PROPOSITION IX.5.1. — *L'application*

$$h(y, z) = i_L(y) \circ j_L(z) \circ j_{L(E')}(\alpha(y, z)) \quad (y \in E_x, z \in E'_x)$$

ne dépendant que de x , définit un isomorphisme de $L(E')[E(E')]$ sur $L(E)$.

Il suffit de montrer en effet que

$$h(y.m, z) = h(y, z) = h(y, z.m)$$

quel que soit $m \in M_x$. Or

$$\alpha(y.m, z) = \alpha(y, z.m^{-1})$$

et

$$i_L(y.m) = i_L(y) \circ R(m).$$

tandis que

$$R(m) \circ j_L(z) = j_L(z.m^{-1}),$$

de sorte que $h(y.m, z) = h(y, z)$ est une conséquence de $h(y, z) = h(y, z.m^{-1})$.
On aura donc complètement démontré la proposition si l'on montre que

$$h(y, z) = h(y, z.m)$$

quel que soit $m \in M_x$, c'est-à-dire si l'on vérifie l'égalité

$$j_L(z.m) \circ j_{L(E')}(\alpha(y, z.m)) = j_L(z) \circ j_{L(E')}(\alpha(y, z)).$$

Cette vérification résulte immédiatement du fait que, d'une part, on a

$$\begin{aligned} j_{L(E')}(\alpha(y, z.m)) &= j_{L(E')}(\alpha(y.m^{-1}, z)) \\ &= j_{L(E')}(\alpha(y, z) \cdot i_M(z)m^{-1}) = R(i_M(z)m) \circ j_{L(E')}(\alpha(y, z)), \end{aligned}$$

et, que d'autre part

$$j_L(z.m) = j_L((i_M(z)m).z) = j_L(z) \circ R(i_M(z)m^{-1}).$$

COROLLAIRE. — *Le diagramme $\text{DIA}(\mathcal{E}')[\mathcal{E}(\mathcal{E}')] est isomorphe à $\text{DIA}(\mathcal{E})$.$*

On remarquera, en particulier, que le transport parallèle dans $\mathfrak{F}(\mathcal{E}')[\mathcal{E}(\mathcal{E}')] relativement à (ω, ω') correspond au transport parallèle dans $\mathfrak{F}(\mathcal{E})$ relativement à ω' .$

BIBLIOGRAPHIE.

ARAGNOL :

- [1] *C. R. Acad. Sc.*, 244, 1957, p. 437-440.
- [2] *Ibid.*, 244, 1957, p. 2683-2686.
- [3] *Ibid.*, 244, 1957, p. 3014-3016.
- [4] *Ibid.*, 244, 1957, p. 3124-3126.
- [5] *Ibid.*, 243, 1957, p. 134-136.
- [6] *Ibid.*, 242, 1956, p. 1117-1120.

EHRESMANN :

- [1] *Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable* (Coll. Topologie de Bruxelles, 1950, p. 29-55).

LICHNEROWICZ :

- [1] *Théorie globale des connexions et des groupes d'holonomie.*
- [2] *Groupes d'holonomie* (Conf. du Cong. int. de Math. d'Amsterdam, 1954).

NIJENHUIS :

- [1] *On the holonomy groups of linear connexions* (Proc. Kon. Ned. Akad., I, t. 56, 1953, p. 233-249 et II, t. 57, 1954, p. 17-25).

AMBROSE et SINGER :

- [1] *A theorem on holonomy* (Trans. Amer. Math. Soc., t. 75, 1953, p. 428-443).

