ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

PAUL KOOSIS

# Sur la non-totalité de certaines suites d'exponentielles sur des intervalles assez longs

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série*, tome 75, nº 2 (1958), p. 125-152

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1958_3_75_2_125_0>

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1958, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (http://www.elsevier.com/locate/ansens) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme*
*Numérisation de documents anciens mathématiques*
http://www.numdam.org/

# SUR LA NON-TOTALITÉ
## DE
# CERTAINES SUITES D'EXPONENTIELLES
## SUR DES INTERVALLES ASSEZ LONGS

PAR M. PAUL KOOSIS [1].

INTRODUCTION. — Considérons une suite croissante de nombres $\lambda_n > 0$; on suppose que cette suite a une densité finie, c'est-à-dire, $\frac{n}{\lambda_n}$ tend vers une limite $D < \infty$ quand $n \to \infty$. On sait depuis longtemps ([1], p. 235), que l'ensemble des exponentielles $\exp(\pm i\lambda_n x)$ est total sur chaque intervalle de longueur $< 2\pi D$, et L. Schwartz ([2], p. 130) a énoncé une hypothèse affirmant que cet ensemble n'est total sur aucun intervalle de longueur $> 2\pi D$. Cependant, cette hypothèse, si belle qu'elle soit, est inexacte; en effet, on doit à J.-P. Kahane [3] un exemple d'une suite $\{\lambda_n\}$ de densité *zéro* pour laquelle l'ensemble des exponentielles $\exp(\pm i\lambda_n x)$ est total sur *chaque* intervalle fini.

Ce résultat intéressant suggère le problème suivant :

Quelles sont les conditions (outre celle d'avoir une densité exacte D) qu'il faut imposer sur la suite $\{\lambda_n\}$ pour que $\{\exp(\pm i\lambda_n x)\}$ ne soit total sur aucun intervalle de longueur $> 2\pi D$?

Ce problème nous semble assez difficile, et nous sommes loin de l'avoir résolu. Ce que nous voulons exposer ici, c'est une méthode générale et simple pour traiter certaines questions liées au problème. Elle ne semble pas assez puissante pour donner une solution complète; en fait, nous ne croyons pas qu'on pourrait la pousser beaucoup plus loin que nous l'avons fait. Mais il nous semble quand même utile de la présenter, d'autant plus qu'elle met dans le

[1] Fellow of the National Science Foundation.

même cadre tous les résultats isolés connus jusqu'ici à cet égard, aussi bien que d'autres, positifs et négatifs.

Je veux exprimer ma vive reconnaissance à M. Kahane, avec qui j'ai souvent discuté ce problème, et qui m'a donné quelques idées importantes. Je dois aussi reconnaître des suggestions de M. C. Hertz.

1. Sur un théorème de Paley-Wiener. — A chaque suite croissante de nombres positifs $\lambda_n$, on associe sa *fonction caractéristique* $n(t)$ définie par

$$n(t) = \sup\{n \mid \lambda_n \leq t\}.$$

La fonction $n(t)$ est non décroissante et constante entre les points $\lambda_n$, en chacun desquels sa valeur saute d'une unité. Il est évident que, inversement, chaque fonction ayant ces propriétés correspond à une suite croissante $\{\lambda_n\}$ et une seule; pour définir une suite particulière $\{\lambda_n\}$ il suffira de définir la fonction $n(t)$ et nous parlerons souvent de « la suite $n(t)$ » au lieu de dire « la suite ayant $n(t)$ comme fonction caractéristique ».

Dire qu'une suite $n(t)$ est de densité D, c'est dire que $\frac{n(t)}{t} \to \mathrm{D}$, $t \to \infty$. Nous nous occuperons, la plupart du temps (mais pas toujours) de suites de densité $\mathrm{D} > 0$, et écrirons $n(t) - \mathrm{D}t = \psi(t)$; la fonction $\psi(t)$ mesure dans un certain sens l'écart de la suite donnée d'une progression arithmétique exacte. On aura toujours $\frac{\psi(t)}{t} \to 0$, $t \to \infty$.

La non-totalité des exponentielles $\exp(\pm i\lambda_n x)$ est étroitement liée aux propriétés du produit canonique

$$\mathrm{C}(z) = \prod_n \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2}\right).$$

On sait que si la suite $\lambda_n$ est de densité D, $\mathrm{C}(z)$ est une fonction entière de type exponentiel D. De plus, si $|\mathrm{C}(z)|$ est bornée par une puissance de $z$ sur l'axe réel, soit la $m^{\text{ième}}$, la fonction

$$f(z) = \left(\frac{1}{z} \sin \frac{\varepsilon z}{m+2}\right)^{m+2} \mathrm{C}(z)$$

sera de type exponentiel $\mathrm{D} + \varepsilon$ et intégrable sur l'axe réel, donc (théorème de Paley-Wiener, *voir* [1], p. 107) la transformée de Fourier d'une fonction continue $\varphi(t)$ s'annulant pour $|t| > \pi(\mathrm{D} + \varepsilon)$, et l'on aura

$$\int e^{\pm i\lambda_n t} \varphi(t)\, dt = 0$$

pour tous $n$, d'où l'on constate que les $e^{\pm i\lambda_n t}$ ne sont pas totales sur l'intervalle

$(-\pi(D+\varepsilon),\ \pi(D+\varepsilon))$. En prenant $\varepsilon > 0$ arbitraire, on voit bien que les exponentielles $e^{\pm i\lambda_n x}$ ne sont totales sur aucun intervalle de longueur $> 2\pi D$.

Il est aussi important pour d'autres applications d'avoir un critère pour la majorisation de la fonction $|C(z)|$ par un polynome sur l'axe réel, et nous commençons par l'étude de cette question. La lettre $x$ désignera toujours une variable réelle; rappelons aussi que tous les $\lambda_n$ sont supposés *positifs*, c'est-à-dire $n(t) = 0$ pour $t$ assez près à zéro.

LEMME 1. — *Si $x$ n'est pas un zéro de* $C(z)$,

$$\log|C(x)| = 2\int_0^1 \frac{\dfrac{\psi(x\tau)}{\tau} - \tau\psi\left(\dfrac{x}{\tau}\right)}{1-\tau^2}\,d\tau.$$

*Démonstration.* — Prenons un $\lambda < 1$. On a, après une intégration par parties,

$$\int_0^{\lambda x} \log\left(\frac{x^2}{t^2} - 1\right) dn(t) = n(\lambda x)\log\frac{1-\lambda^2}{\lambda^2} + \int_0^{\lambda x} \frac{2x^2}{x^2-t^2}\,\frac{n(t)}{t}\,dt$$
$$= n(\lambda x)\log\frac{1-\lambda^2}{\lambda^2} + 2\int_0^{\lambda} \frac{\dfrac{n(x\tau)}{\tau}}{1-\tau^2}\,d\tau,$$

en posant $\dfrac{t}{x} = \tau$.

De la même façon,

$$\int_{\frac{x}{\lambda}}^{\infty} \log\left(1 - \frac{x^2}{t^2}\right) dn(t) = -n\left(\frac{x}{\lambda}\right)\log(1-\lambda^2) - 2\int_0^{\lambda} \frac{\tau n\left(\dfrac{x}{\tau}\right)}{1-\tau^2}\,d\tau,$$

après avoir, d'abord, intégré par parties et, ensuite, posé $\dfrac{x}{t} = \tau$. [On utilise le fait que

$$n(t)\log\left(1 - \frac{x^2}{t^2}\right) \sim \frac{x^2 n(t)}{t^2} \to 0 \qquad \text{pour} \quad t \to \infty,$$

conséquence de ce que la suite $n(t)$ a une densité finie.]

Ainsi

$$\left\{\int_0^{\lambda x} + \int_{\frac{\lambda}{x}}^{\infty}\right\} \log\left|1 - \frac{x^2}{t^2}\right| dn(t)$$
$$= \left(n(\lambda x) - n\left(\frac{x}{\lambda}\right)\right)\log(1-\lambda^2) + n(\lambda x)\log\frac{1}{\lambda^2} + 2\int_0^{\lambda} \frac{\dfrac{n(x\tau)}{\tau} - \tau n\left(\dfrac{x}{\tau}\right)}{1-\tau^2}\,d\tau.$$

Si $x$ n'est pas un zéro de $C(z)$, $n(x\lambda) - n\left(\dfrac{x}{\lambda}\right) = 0$ pour $\lambda$ assez près à 1, donc, en faisant tendre $\lambda$ vers 1, $\log\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \to 0$, et la dernière expression devient

$$\log|C(x)| = 2\int_0^1 \frac{\frac{n(x\tau)}{\tau} - \tau n\left(\frac{x}{\tau}\right)}{1-\tau^2}\,d\tau. \tag{1}$$

Or, $n(t) = Dt + \psi(t)$, ce qui, après substitution dans (1), donne le lemme.

Complément du lemme 1. — *Pour n'importe quel* $\lambda < 1$,

$$\log|C(x)| \leqq n(x)\log\frac{1}{\lambda^2} + 2\int_0^\lambda \frac{\frac{\psi(x\tau)}{\tau} - \tau\psi\frac{(x)}{\tau}}{1-\tau^2}\,d\tau,$$

*l'égalité ayant lieu si et seulement si* $n(x\lambda) = n\left(\frac{x}{\lambda}\right)$.

*Démonstration.* — C'est évident si $C(x) = 0$, car alors $\log|C(x)| = -\infty$. Supposons donc que $x$ n'est pas un zéro de $C(z)$, et utilisons la formule (1). Pour $\tau \leqq 1$,

$$n(\tau x) \leqq n(x), \qquad n\left(\frac{x}{\tau}\right) \geqq n(x),$$

d'où

$$\int_\lambda^1 \left(\frac{n(x\tau)}{\tau} - \tau n\left(\frac{x}{\tau}\right)\right)\frac{d\tau}{1-\tau^2} \leqq n(x)\int_\lambda^1 \tau^{-1}\,d\tau = n(x)\log\frac{1}{\lambda},$$

et l'on aura l'égalité si et seulement si

$$n(x\tau) = n(x) = n\left(\frac{x}{\tau}\right), \qquad \lambda \leqq \tau \leqq 1.$$

De l'intégrale de droite dans (1) il reste une partie prise entre les limites 0 et $\lambda$, et la démonstration s'achève comme celle du lemme.

D'habitude on se servira du complément avec $\lambda$ pris comme fonction de $x$ convenable.

Théorème 1 (de Paley-Wiener). — *Si* $|\psi(t)| <$ Cte, $|C(x)|$ *est bornée par une puissance de* $x$ *pour* $x$ *assez grand.*

*Remarque.* — Ce résultat, jusqu'alors le seul connu de son genre, a été obtenu par Paley et Wiener ([4], p. 92) en faisant une comparaison entre $C(x)$ et $\dfrac{\sin\frac{\pi x}{D}}{\frac{\pi x}{D}}$. Paley et Wiener ont écrit l'hypothèse dans une forme un peu différente, à savoir, $|D\lambda_n - n| <$ Cte; il est cependant aisé de voir que cette formulation équivaut à la nôtre.

*Démonstration du théorème.* — Utilisons le complément du lemme 1 avec $1-\lambda^2=\frac{1}{x}$.

Supposons que $|\psi(t)|<\mathrm{K}$. Par la définition même de $\psi(t)$, il est clair que

$$|\psi(t)|=\mathrm{O}(t), \qquad 0\leqq t\leqq 1,$$

d'où

$$2\int_0^{\frac{1}{x}}\frac{|\psi(x\tau)|}{\tau(1-\tau^2)}\,d\tau=\mathrm{O}\left(x\log\frac{x+1}{x-1}\right)=\mathrm{O}(1) \qquad (x\to\infty).$$

Ensuite,

$$2\int_{\frac{1}{x}}^{\lambda}\frac{|\psi(x\tau)|\,d\tau}{(1-\tau^2)\tau}\leqq 2\mathrm{K}\int_{\frac{1}{x}}^{\lambda}\frac{d\tau}{\tau(1-\tau^2)}=\mathrm{K}\log\frac{\lambda^2(x^2-1)}{1-\lambda^2}\leqq 3\,\mathrm{K}\log x$$

et

$$2\int_0^{\lambda}\frac{\tau\left|\psi\left(\frac{x}{\tau}\right)\right|}{1-\tau^2}\,d\tau\leqq 2\mathrm{K}\int_0^{\lambda}\frac{\tau\,d\tau}{1-\tau^2}=\mathrm{K}\log\frac{1}{1-\lambda^2}=\mathrm{K}\log x.$$

Enfin,

$$n(x)\log\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)\leqq 2\,\mathrm{D}x\log\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-1}=\mathrm{O}(1) \qquad (x\to\infty)$$

et

$$\log|\mathrm{C}(x)|\leqq\mathrm{O}(1)+4\mathrm{K}\log x \qquad (x\to\infty).$$

C. Q. F. D.

Il est naturel d'essayer d'étendre ce théorème, de façon à avoir le même résultat en changeant l'hypothèse en quelque chose comme, par exemple,

$$|\psi(t)|<\mathrm{O}(\log\log t).$$

Or, il est remarquable que le théorème de Paley-Wiener est, dans un certain sens, le meilleur possible de sa forme, comme nous allons voir par un exemple. Le même fait sera la conséquence des résultats généraux que nous établirons plus tard; la valeur de l'exemple que nous donnons maintenant, c'est de montrer qu'on peut même avoir $|\psi(t)|<1$ sur des intervalles assez longs, et pas trop grands ailleurs, sans avoir la conclusion du théorème 1.

*Exemple* 1. — Étant donné une fonction $\omega(t)$ croissant vers l'infini aussi lentement qu'on veut, et telle que

$$\omega(t)=o(t) \qquad (t\to\infty).$$

Il existe une suite $n(t)$ telle que

$$|n(t)-\mathrm{D}t|\leqq\omega(t)+1,$$

mais pour laquelle le produit canonique associé n'est majoré par aucune puissance de $x$ quand $x\to\infty$.

*Preuve.* — Il est commode de poser $D = 1$, ce qui n'équivaut qu'à un changement de variable.

Commençons avec un $x > 100$ pour lequel $\frac{\omega(t)}{t} < \frac{1}{2}$, $t > \sqrt{x}$, et posons

(2) $$n(t) = [t], \qquad 0 \leqq t \leqq 2,$$

(3) $$n(t) = \left[t + \frac{t-2}{\sqrt{x}-2}\,\omega(t)\right], \qquad 2 \leqq t \leqq \sqrt{x},$$

(4) $$n(t) = [t + \omega(\sqrt{x})], \qquad \sqrt{x} \leqq t \leqq \frac{x}{2},$$

(5) $$n(t) = \left[t + 2\omega(\sqrt{x})\left(1 - \frac{t}{x}\right)\right], \qquad \frac{x}{2} \leqq t \leqq x,$$

(6) $$n(t) = [t], \qquad x \leqq t \leqq x^2;$$

comme d'habitude, on a désigné par $[a]$ le plus grand nombre entier $\leqq a$. Pour le moment, $n(t)$ n'est pas précisé pour $t > x^2$; convenons seulement que quand nous l'y définirons tout à l'heure, nous le ferons de façon que $|n(t) - t|$ restera $\leqq \omega(t) + 1$.

La fonction $n(t)$, comme nous venons de la définir, ne décroît pas. C'est évident sauf, peut-être, dans le cas de la formule (5), et on le vérifie là en prenant la dérivée par rapport à $t$ de la quantité entre [ ].

On a toujours

$$[t] \leqq n(t) \leqq t + \omega(t),$$

d'où

$$|n(t) - t| \leqq \omega(t) + 1.$$

L'inégalité $[t] \leqq n(t)$ entraîne

$$\psi(t) = n(t) - t \geqq -1;$$

d'ailleurs

(7) $$|\psi(t)| = |n(t) - t| \leqq t, \qquad 0 \leqq t \leqq 2,$$

(8) $$\psi(t) = [t + \omega(\sqrt{x})] - t \geqq \omega(\sqrt{x}) - 1, \qquad \sqrt{x} \leqq t \leqq \frac{x}{2},$$

(9) $$\psi(t) = [t] - t \leqq 0, \qquad x \leqq t \leqq x^2.$$

Maintenant, il convient de prendre $x$ égal à un nombre de la forme $N + \frac{1}{2}$, $N$ entier; il suit de (5) et (6) que pour $\lambda = 1 - \frac{1}{3x}$, $n(\lambda x) = n\left(\frac{x}{\lambda}\right)$. En se servant du complément du lemme 1, on aura donc

$$\log|C(x)| = 2n(x)\log\frac{1}{\lambda} + 2\int_0^{\lambda} \frac{\frac{\psi(x\tau)}{\tau} - \tau\psi\left(\frac{x}{\tau}\right)}{1-\tau^2}\,d\tau,$$

avec ce $\lambda$, le premier terme de droite étant positif. De (9) on aura

(10) $$-2\int_0^{\lambda} \frac{\tau\psi\left(\frac{x}{\tau}\right)}{1-\tau^2}\,d\tau \geqq 0,$$

de (7),

$$(11) \qquad \left| 2\int_0^{\frac{1}{x}} \frac{\psi(x\tau)}{\tau(1-\tau^2)}\, d\tau \right| \leqq x \log \frac{x+1}{x-1} \leqq 3 \qquad (x > 100)$$

et de (8),

$$(12) \qquad 2\int_{\frac{1}{x}}^{\lambda} \frac{\psi(x\tau)}{\tau(1-\tau^2)}\, d\tau \geqq \left\{ \omega(\sqrt{x}) \int_{\frac{1}{\sqrt{x}}}^{\frac{1}{2}} - \int_{\frac{1}{x}}^{\lambda} \right\} \frac{2\, d\tau}{\tau(1-\tau^2)}$$

$$= \omega(\sqrt{x}) \log \frac{x-1}{3} - \log \frac{(x^2-1)\lambda^2}{1-\lambda^2} \geqq \omega(\sqrt{x}) \log \frac{x}{4} - \log 3x^3.$$

Pour ce qui reste, on a

$$(13) \qquad \left| 2\int_0^{\frac{1}{x}} \frac{\tau\psi\left(\frac{x}{\tau}\right)}{1-\tau^2} d\tau \right| \leqq \frac{2}{3} x \log \frac{x+1}{x-1} \leqq 2,$$

vu que $x > 100$ et $|\psi(t)|$ sera

$$\leqq \omega(t) + 1 < \frac{2}{3} t \qquad \text{pour} \quad t > x^2.$$

Des estimations (10), (11), (12) et (13), il résulte enfin que

$$\log |C(x)| \geqq (\omega(\sqrt{x}) - 3) \log\left(\frac{x}{4}\right) - \log 192 - 5.$$

Le procédé est maintenant à poursuivre en choisissant d'abord un nombre X, moitié d'un entier impair, tel que $\sqrt{X} > x^2$, puis en posant

$$n(t) = \left[ t + \frac{t - x^2}{\sqrt{X} - x^2} \omega(t) \right], \qquad x^2 \leqq t \leqq \sqrt{X},$$
$$n(t) = [t + \omega(\sqrt{X})], \qquad \sqrt{X} \leqq t \leqq \frac{X}{2},$$
$$n(t) = \left[ t + 2\omega(\sqrt{X}) \left( 1 - \frac{t}{X} \right) \right], \qquad \frac{X}{2} \leqq t \leqq X,$$
$$n(t) = [t], \qquad X \leqq t \leqq X^2.$$

On vérifie tout de suite qu'on a toujours

$$|n(t) - t| \leqq \omega(t) + 1 \qquad \text{et} \qquad n(t) - t \geqq -1.$$

En reprenant les mêmes calculs que nous venons de faire, on trouve donc

$$\log |C(X)| \geqq (\omega(\sqrt{X}) - 3) \log\left(\frac{X}{4}\right) - \log 192 - 5.$$

De cette façon, on construit en étapes successives toute la suite $n(t)$, avec

$$|n(t) - t| \leqq \omega(t) + 1,$$

aussi bien qu'une suite de nombres $x_n \to \infty$ ($x_1 = x$, $x_2 = X$, ...) pour lesquels

$$|C(x_n)| \geq \frac{1}{192\, e^5}\left(\frac{x_n}{4}\right)^{(\omega(\sqrt{x_n})-3)}.$$

Puisque $\omega(\sqrt{x_n}) \to \infty$, avec $n$, le produit canonique $C(x)$ associé à la suite $n(t)$ est supérieur à n'importe quelle puissance de $x$ quand $x$ tend vers l'infini en prenant les valeurs $x_n$.

2. Théorèmes de remplacement et de comparaison. — Dans les raisonnements ultérieurs, il sera très commode, au lieu de baser les considérations sur l'étude des fonctions $n(t)$ et $\psi(t)$, de pouvoir se servir d'autres qui jouissent d'un comportement plus régulier. Dans ce numéro, on fera le nécessaire pour assurer qu'un tel remplacement est permis.

Lemme 2. — *Soit $\nu(t)$ une fonction non décroissante.*

*Pour $z = x + iy$ ($y$ réel), on a*

$$\int_0^\infty \log\left|1 - \frac{x^2}{t^2}\right| d\nu(t) \leq \int_0^\infty \log\left|1 - \frac{z^2}{t^2}\right| d\nu(t).$$

*Démonstration.* — Si $t$ est réel,

$$\left|\frac{t \pm x}{t \pm z}\right| \leq 1, \qquad \text{d'où} \qquad \log\left|1 - \frac{x^2}{t^2}\right| \leq \log\left|1 - \frac{z^2}{t^2}\right|.$$

Lemme 3. — *Soit $\nu(t)$ une fonction continue, non décroissante, et dérivable, sauf en des points isolés.*

*Soient $\nu(0) = 0$, $\nu(t) = O(t)$, $t \to \infty$, et $\nu'(t)$ (toutes les fois qu'elle existe) bornée sur chaque intervalle bornée. Alors, l'intégrale*

$$\int_0^\infty \log\left|1 - \frac{z^2}{t^2}\right| d\nu(t) \tag{14}$$

*converge absolument pour $\Im z \geq 0$, et y définit une fonction harmonique* $F(z)$. $F(z)$ *est continue dans le demi-plan fermé $\Im z \geq 0$ et*

$$F(z) \leq O(|z|) \qquad (|z| \to \infty).$$

*Démonstration.* — Supposant d'abord que $z = x$ réel, on a

$$\log\left|1 - \frac{x^2}{t^2}\right| = O(t^{-2}) \qquad \text{pour} \quad t > 2|x|,$$

donc l'intégrale (14) prise entre les limites $2|x|$ et $\infty$ converge absolument, car

$$\int_1^\infty t^{-2}\, d\nu(t) < \infty.$$

D'autre part, si

$$|\nu'(t)| < \mathrm{K}, \qquad 0 < t < 2|x|,$$

l'intégrale (14) prise entre les limites 0 et $2|x|$ est majorée par

$$\mathrm{K}\int_0^{2|x|}\left|\log\left|1-\frac{x^2}{t^2}\right|\right| dt < \infty.$$

Si $z = x + iy$, $y \geqq 0$, on a, comme dans le lemme 2,

$$\log\left|1-\frac{x^2}{t^2}\right| \leqq \log\left|1-\frac{z^2}{t^2}\right| \leqq \log\left|1+\frac{|z|^2}{t^2}\right|$$

et

$$\int_0^\infty \log\left(1+\frac{|z|^2}{t^2}\right) d\nu(t) = \int_0^\infty \frac{|z|^2}{t^2+|z|^2}\,\frac{\nu(t)}{t}\,dt = \mathrm{O}(|z|),$$

en intégrant par parties. Ceci, avec l'estimation faite ci-dessus, montre que l'intégrale (14) converge absolument dans le cas général.

Il est alors évident que l'intégrale (14) est une fonction harmonique de $z$ pour $\mathcal{I}z > 0$, car il en est ainsi de $\log\left|1-\frac{z^2}{t^2}\right|$ pour chaque $t > 0$. Il nous reste à montrer que la fonction $\mathrm{F}(z)$ ainsi définie est continue à la frontière $\mathcal{I}z = 0$. Pour $x$ réel supposons que $z = x + \delta$, $\delta$ étant une quantité complexe qu'on va faire tendre vers zéro. Pour $\varepsilon > 0$ assez petit, on peut écrire

$$\begin{aligned}|\mathrm{F}(z)-\mathrm{F}(x)| \leqq \int_{|t^2-x^2|>\varepsilon}\left|\log\left|\frac{t^2-z^2}{t^2-x^2}\right|\right| d\nu(t) + 2\mathrm{K}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}|\log|s||\,ds \\ + \mathrm{K}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}|\log|s^2\operatorname{sgn} s - 2\delta x - \delta^2||\,ds,\end{aligned}$$

où l'on a posé

$$s = \sqrt{|t^2-x^2|}\,\operatorname{sgn}(t^2-x^2),$$

$\mathrm{K} < \infty$ étant une borne pour $\left|\nu'(t)\frac{\sqrt{t^2-x^2}}{t}\right|$ sur l'intervalle $|t^2-x^2| \leqq \varepsilon$. Faisons encore décroître $\varepsilon$ (cependant, K ne croît pas) jusqu'à ce que les deux dernières intégrales soient au-dessous d'une borne choisie à l'avance mais aussi petite qu'on veut, lorsque $\delta <$ un $\delta_0$ fixé. Après avoir fixé un tel $\varepsilon$, on remarque que $\left|\log\left|\frac{t^2-z^2}{t^2-x^2}\right|\right| \to 0$ uniformément pour $|t^2-x^2| > \varepsilon$ quand $\delta \to 0$, en restant toujours bornée par $\frac{\mathrm{Cte}}{t^2}$ pour $t$ grand. Puisque $\int_1^\infty t^{-2}\,d\nu(t) < \infty$, ceci montre que

$$|\mathrm{F}(z)-\mathrm{F}(x)| \to 0, \qquad z \to x.$$

Lemme 4. — *Soient $\nu_1(t)$ et $\nu_2(t)$ deux fonctions non décroissantes, $\mathrm{O}(t)$ pour $t \to \infty$, et ayant des dérivées bornées pour $0 \leqq t \leqq 1$. Supposons que*

$$|\nu_1(t) - \nu_2(t)| < \mathrm{Cte}.$$

*Alors, pour $y > 0$ fixé et $z = x + iy$, les deux intégrales*

$$\int_0^\infty \log\left|1 - \frac{z^2}{t^2}\right| d\nu_k(t) \qquad (k = 1 \text{ et } 2)$$

*convergent absolument, et leur différence est* $O(\log x)$ *pour* $x \to \infty$.

*Démonstration.* — Car $\log\left|1 - \frac{z^2}{t^2}\right|$ est, pour $z$ fixé avec $\mathcal{I} z > 0$, bornée inférieurement comme fonction de $t$, la preuve de la convergence absolue s'achève comme dans la démonstration du lemme 3.

On a

$$\int_0^1 \log\left|\frac{z^2}{t^2} - 1\right| d\nu_k(t) \leq \text{Cte} \int_0^1 \log\left|\frac{z^2}{t^2} - 1\right| dt = O(\log x)$$

pour $x \to \infty$, $k = 1$ et $2$. Considérons alors l'expression

$$\int_1^\infty \log\left|1 - \frac{z^2}{t^2}\right| (d\nu_1(t) - d\nu_2(t)). \tag{15}$$

Moyennant un simple croquis, il est aisé de voir que $\log\left|1 - \frac{z^2}{t^2}\right|$ décroît de $\log|z^2 - 1|$ jusqu'à $-\log\left(\frac{|z|^2}{\mathcal{I} z^2}\right)$ quand $t$ augmente de $1$ à $\frac{|z|^2}{\sqrt{\mathcal{R} z^2}}$, et puis tend en croissant vers zéro quand $t$ continue à augmenter vers l'infini. En se servant de ce fait et de ce que $|\nu_1(t) - \nu_2(t)| \leq K$, une intégration par parties montre que l'intégrale (15) est égale à une expression de la forme

$$A \log \frac{|z|^2}{\mathcal{I} z^2} + B \log \frac{|z^2 - 1| . |z|^2}{\mathcal{I} z^2} + C \log \frac{|z|^2}{\mathcal{I} z^2}, \tag{16}$$

où A, B et C sont des quantités dépendantes de $z$, mais toujours inférieures à $2K$ en valeur absolue. Et pour $z = x + iy$ avec $y > 0$ fixé, l'expression (16) est bien $O(\log x)$ pour $x \to \infty$.

Le résultat suivant constitue un principe général, assez important pour la comparaison des produits canoniques.

**Théorème 2.** — *Soient $C_1(z)$ et $C_2(z)$ les produits canoniques correspondant aux suites $n_1(t)$ et $n_2(t)$ de densité finie.*

*Si $|n_1(t) - n_2(t)| <$ Cte, la majoration de $|C_1(x)|$ par un polynome en $x$ entraîne celle de $|C_2(x)|$ (avec, peut-être, un autre polynome).*

*Démonstration.* — $C_1(z)$ est de type exponentiel fini, donc par le théorème de Phragmén-Lindelöf, l'inégalité $|C_1(x)| \leq Ax^K + B$ entraîne une inégalité de la même forme avec $C_1(x)$ remplacée par $C_1(x + iy)$, $y > 0$ fixé. Le lemme 4 montre alors qu'il en est de même pour $C_2(x + iy)$ (avec, peut-être, des constantes A, B et K différentes), et, enfin, pour $C_2(x)$ par le lemme 2.

C. Q. F. D.

THÉORÈME 3. — *Soit* $C(z)$ *le produit canonique associé à une suite* $n(t)$ *de densité finie. Soit* $\nu(t)$ *une fonction satisfaisant à l'hypothèse du lemme* 3, *et soit* $|n(t)-\nu(t)|<$ Cte. *Alors,* $|C(x)|$ *est bornée par un polynome en* $x$ *si et seulement si*

$$\int_0^{\infty} \log\left|1-\frac{x^2}{t^2}\right| d\nu(t) \leqq O(\log x) \qquad (x\to\infty).$$

*Démonstration.* — Fixons un $y>0$. Si $|C(x)|$ est bornée par un polynome en $x$ on voit, comme dans la démonstration du théorème 2, que

$$F(z)\equiv\int_0^{\infty} \log\left|1-\frac{z^2}{t^2}\right| d\nu(t) \leqq O(\log x),$$

avec $z=x+iy$ et $x\to\infty$, donc, par le lemme 2, le même résultat avec $z$ remplacé par $x$.

Si, en revanche, $F(x)\leqq O(\log x)$ pour $x\to\infty$, on peut, par le lemme 3, appliquer le théorème de Phragmén-Lindelöf à la fonction $F(z)$ harmonique et continue dans $\mathcal{I} z\geqq 0$; on en déduit que $F(z)\leqq \text{Cte}(\log|z|+y)$, ce qui est $O(\log x)$ pour $z=x+iy$, $y$ fixé, et $x\to\infty$. Comme tout à l'heure, on aura

$$\log|C(z)|\leqq O(\log x) \qquad (x\to\infty),$$

et, enfin, la même inégalité avec $x$ au lieu de $z$. C. Q. F. D.

3. RÉSULTATS BASÉS SUR LE THÉORÈME 3. UNE CONDITION NÉCESSAIRE. — Considérons une suite $n(t)$. Soit L la ligne polygonale qui relie successivement le point $(0, 0)$ à $(\lambda_1, 1)$, puis $(\lambda_1, 1)$ à $(\lambda_2, 2)$ et ainsi de suite. Nous appellerons L le *graphique* de la suite $n(t)$. Si, pour $t\geqq 0$, $\nu(t)$ est l'ordonnée de L correspondant à l'abscisse $t$, $\nu(t)$ est une fonction continue, croissant avec $t$, et $\nu'(t)$ existe à l'intérieur de chaque intervalle $(\lambda_{n-1}, \lambda_n)$, où elle prend la valeur constante $(\lambda_n-\lambda_{n-1})^{-1}$.

Il est évident que $n(t)=[\nu(t)]$, $t\geqq 0$, donc, si $\frac{n(t)}{t}\to D$, $t\to\infty$, il en est de même avec $n(t)$ remplacée par $\nu(t)$. On a d'ailleurs

$$\nu(t)-1<n(t)\leqq\nu(t),$$

et il résulte que le théorème 3 est valable pour cette fonction $\nu(t)$.

Si la suite $n(t)$ est de densité $D<\infty$, il convient de poser $\nu(t)-Dt=\theta(t)$, notation que nous conserverons dans la suite. La fonction $\theta(t)$ joue un rôle analogue à celui de $\psi(t)$ utilisée dans le paragraphe 1, mais, vu qu'elle est continue et même dérivable sauf aux points isolés $\lambda_n$, elle convient davantage que celle-ci à nos considérations. Remarquons que $|\theta(t)-\psi(t)|\leqq 1$, $\frac{\theta(t)}{t}\to 0$ pour $t\to\infty$, et que $\theta(0)=0$.

Correspondant au lemme 1 et son complément, on a le

LEMME 5 :

$$\int_0^\infty \log\left|1-\frac{x^2}{t^2}\right| d\nu(t) = 2\int_0^1 \frac{\dfrac{\theta(x\tau)}{\tau}-\tau\theta\left(\dfrac{x}{\tau}\right)}{1-\tau^2}\,d\tau$$

$$\leq \nu(x)\log\frac{1}{\lambda^2}+2\int_0^\lambda \frac{\dfrac{\theta(x\tau)}{\tau}-\tau\theta\left(\dfrac{x}{\tau}\right)}{1-\tau^2}\,d\tau \qquad \textit{pour} \quad 0<\lambda<1.$$

Sauf, pour des petits détails, la démonstration en est de même que pour le lemme 1.

Et du théorème 3 on tire immédiatement :

THÉORÈME 4. — *Le produit canonique* $C(x)$ *est majoré par un polynome en* $x$ *si et seulement si*

$$\frac{1}{\log x}\int_0^1 \frac{\dfrac{\theta(x\tau)}{\tau}-\tau\theta\left(\dfrac{x}{\tau}\right)}{1-\tau^2}\,d\tau$$

*est bornée supérieurement pour* $x\to\infty$.

Ce théorème peut être mis sous une forme plus commode. On a

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\theta(x\tau)}{\tau}-\tau\theta\left(\frac{x}{\tau}\right)\right) = -\frac{\theta(x\tau)-x\tau\theta'(x\tau)}{\tau^2}-\left(\theta\left(\frac{x}{\tau}\right)-\frac{x}{\tau}\theta'\left(\frac{x}{\tau}\right)\right);$$

donc, pour $0<\delta<\lambda<1$, une intégration par parties donne

$$2\int_\delta^\lambda \frac{\dfrac{\theta(x\tau)}{\tau}-\tau\theta\left(\dfrac{x}{\tau}\right)}{1-\tau^2}\,d\tau = \left(\frac{\theta(x\tau)}{\tau}-\tau\theta\left(\frac{x}{\tau}\right)\right)\log\frac{1+\tau}{1-\tau}\Bigg]_\delta^\lambda$$

$$+\int_\delta^\lambda \log\left(\frac{1+\tau}{1-\tau}\right)\frac{\theta(x\tau)-x\tau\theta'(x\tau)}{\tau^2}\,d\tau$$

$$+\int_\delta^\lambda \left(\theta\left(\frac{x}{\tau}\right)-\frac{x}{\tau}\theta'\left(\frac{x}{\tau}\right)\right)\log\left(\frac{1+\tau}{1-\tau}\right)d\tau.$$

De sa définition, il s'ensuit que $\theta(t)$ satisfait à une condition de Lipschitz en chaque point, donc le premier terme de droite tend vers zéro pour $\delta\to 0$, $\lambda\to 1$. En même temps, le deuxième terme de droite devient

$$\int_0^1 \log\left|\frac{1+t}{1-\tau}\right|\frac{\theta(x\tau)-x\tau\theta'(x\tau)}{\tau^2}\,d\tau,$$

et le troisième,

$$\int_1^\infty \log\left|\frac{1+\tau}{t-1}\right|\frac{\theta(xt)-xt\theta'(xt)}{t^2}\,dt,$$

en posant $\frac{1}{\tau}=t$.

Définissons une nouvelle fonction $I(t)$ par $I(t)=\theta(t)-t\theta'(t)$; $I(t)$ s'appellera la *fonction indicatrice* de la suite $n(t)=[Dt+\theta(t)]$. D'après le lemme 5 on a alors le

LEMME 6 :

$$\int_0^\infty \log\left|1-\frac{x^2}{t^2}\right| d\nu(t)=\int_0^\infty \log\left|\frac{1+t}{1-t}\right|\frac{I(xt)}{t^2}\,dt. \tag{17}$$

[Selon sa définition, la fonction $I(t)$ est bornée sur des intervalles finis, et $O(t)$ pour $t\to 0$. Prise entre des limites finies, l'intégrale de droite dans (17) converge donc absolument, et est ainsi à entendre comme intégrale impropre (par rapport à sa limite supérieure) lorsqu'on le prend entre $0$ et $\infty$.]

Le théorème 4 devient :

THÉORÈME 5. — *Le produit canonique* $C(x)$ *associé à une suite* $n(t)$ *est majoré par un polynome en* $x$ *si et seulement si*

$$\int_0^\infty \log\left|\frac{1+t}{1-t}\right|\frac{I(xt)}{t^2}\,dt \leq O(\log x) \qquad (x\to\infty),$$

$I(t)$ *étant la fonction indicatrice de la suite* $n(t)$.

La fonction $I(t)$ a un rapport géométrique simple avec le graphique L de la suite $n(t)$. En effet, l'identité

$$I(t)=\theta(t)-t\theta'(t)=\nu(t)-t\nu'(t)$$

fait apparaître $I(t)$ comme ordonnée à l'origine de la tangente à L au point d'abscisse $t$. Notons aussi que

$$I(t)=-t^2\frac{d}{dt}\left(\frac{\theta(t)}{t}\right),$$

d'où il résulte qu'on peut toujours déterminer $\theta(t)$ si $I(t)$ est connue, puisque $\theta(t)=o(t)$, $t\to\infty$.

Il est, selon le cas, plus ou moins difficile de vérifier si la condition du théorème 5 est satisfaite ou non par une suite donnée. Citons seulement quelques corollaires généraux de ce théorème, conséquences directes de notre interprétation géométrique.

La quantité $t^{-2}\log\left|\frac{t+1}{t-1}\right|$ est positive pour $t>0$. Aussi, comme l'on voit immédiatement avec l'aide d'un croquis, la fonction indicatrice $I(t)$ est respectivement non négative et non décroissante ou non positive et non croissante selon que L est concave ou convexe. De là :

COROLLAIRE 1. — *Si le graphique d'une suite est convexe, son produit canonique associé est majoré par un polynome sur l'axe réel.*

Pour $\mathrm{I}(t) \geq 0$ et non décroissante, l'intégrale (17) de droite est supérieure à

$$\mathrm{I}(\sqrt{x})\int_{\frac{1}{\sqrt{x}}}^{\infty} t^{-2}\log\left|\frac{t+1}{t-1}\right| dt = \mathrm{I}(\sqrt{x})\,(\log x + \mathrm{O}(1)).$$

Un simple raisonnement géométrique montre que $\mathrm{I}(t)$ ne peut pas être bornée à moins que $\theta(t)$ ne le soit, d'où :

Corollaire 2. — *Le produit canonique associé à une suite $n(t)$ avec* graphique concave *n'est majoré par un polynome sur l'axe réel que si $\theta(t)$ (et donc $|n(t) - \mathrm{D}t|$) est bornée.*

Pour une suite $n(t)$ quelconque de densité $\mathrm{D} > 0$, on peut toujours former le polygone de Newton correspondant à l'ensemble de points $(\lambda_n, n)$; c'est la plus haute courbe convexe qui se trouve au-dessous de la graphique L. Le corollaire 1 donne avec le théorème 2 :

Corollaire 3. — *Si tous les points $(\lambda_n, n)$ se trouvent à distance bornée de leur polygone de Newton, le produit canonique $\mathrm{C}(x)$ associé à la suite $\{\lambda_n\}$ est majoré par un polynome en $x$.*

Remarquons que l'hypothèse du corollaire 3 est toujours satisfaite quand les côtés du polygone de Newton ont une longueur bornée.

Les corollaires 1 et 3 constituent des résultats positifs qui ne sont pas contenus dans le théorème 1.

Maintenant, nous allons trouver une condition nécessaire, satisfaite par toutes les suites de densité finie dont les produits canoniques sont majorés par un polynome sur l'axe réel.

Après un changement de variable, l'intégrale (17) de droite s'écrit

$$\int_0^{\infty} x\log\left|\frac{x+t}{x-t}\right| \frac{\mathrm{I}(t)}{t^2}\,dt. \tag{18}$$

Supposons que cette quantité est inférieure à $\mathrm{Cte}\log x$ pour $x \to \infty$. Pour $\mathrm{M} > 1$ et $s > 0$, on a, en posant $\frac{x}{s} = u$,

$$0 < \int_0^{\mathrm{M}} \frac{1}{x}\log\left|\frac{x+s}{x-s}\right| dx < \int_0^{\infty} \frac{1}{u}\log\left|\frac{u+1}{u-1}\right| du = \mathrm{A}, \tag{19}$$

$$\int_0^{\mathrm{M}} \frac{\log x}{x}\log\left|\frac{x+s}{x-s}\right| dx < \int_0^{\infty} \frac{\log s + \log u}{u}\log\left|\frac{u+1}{u-1}\right| du = \mathrm{A}\log s + \mathrm{B}, \tag{20}$$

A et B étant des constantes indépendantes de M.

Nous allons multiplier l'intégrale (18) par $\frac{1}{x}\log\left|\frac{x+s}{x-s}\right|$ et intégrer de 0 à $\infty$, les relations (19) et (20) donnant une borne supérieure pour l'intégrale double ainsi obtenue. Puis on invertira l'ordre des deux intégrations, et l'on obtiendra la condition cherchée après l'utilisation de la formule (24) ci-dessous. Cependant, l'intégrale (18) n'étant forcément pas absolument convergente, ce procédé nécessite la justification suivante.

Prenons un $M > 1$. Par (19) et (20),

$$\int_0^M \frac{1}{x}\log\left|\frac{x+s}{x-s}\right| \int_0^\infty x\log\left|\frac{x+t}{x-t}\right|\frac{I(t)}{t^2}\,dt\,dx < C\log s \qquad (s > 2); \tag{21}$$

C étant indépendant de M. Mais $n(t) = [Dt + \theta(t)]$ est non décroissante, donc $\theta'(t) \geqq -D$, tandis que $\theta(t) = o(t)$, $t \to \infty$. La fonction $\varphi(t) = \frac{I(t)}{t^2} - \frac{K}{t}$ sera donc $\leqq 0$ pour K assez grand. L'interversion de l'ordre des intégrations dans (21) sera ainsi permis avec $\frac{I(t)}{t^2}$ remplacée, soit par $\varphi(t) \leqq 0$, soit par $\frac{K}{t} > 0$. Dans le dernier cas on obtiendra d'ailleurs une valeur finie, à savoir

$$\int_0^M \log\left|\frac{x+s}{x-s}\right| dx \int_0^\infty K\log\left|\frac{u+1}{u-1}\right|\frac{du}{u}.$$

L'ordre des intégrations dans (21) elle-même est donc aussi inversible, et l'on a

$$\int_0^\infty \frac{I(t)}{t^2}\int_0^M \log\left|\frac{x+s}{x-s}\right|\log\left|\frac{x+t}{x-t}\right| dx\,dt < C\log s \qquad (s > 2); \tag{22}$$

quel que soit $M > 1$.

Maintenant, nous avons besoin du :

**Lemme 7.** — *Pour* $M > 0$ *et* $s > 0$, *la fonction*

$$F(t) = \int_0^M \log\left|\frac{x+s}{x-s}\right|\log\left|\frac{x+t}{x-t}\right| dx$$

*est non décroissante pour* $t > s$.

*Démonstration :*

$$F(t+\delta) - F(t-\delta) = \int_0^M \log\left|\frac{x+s}{x-s}\right|\log\left|\frac{(x+\delta)^2 - t^2}{(x-\delta)^2 - t^2}\right| dx, \tag{23}$$

intégrale qui est absolument convergente pour $t > s + \delta$. Un examen assez simple montre alors que pour $x > 0$, $t > \delta > 0$, $\log\left|\frac{(x+\delta)^2 - t^2}{(x-\delta)^2 - t^2}\right|$ est positif ou négatif suivant que $x$ est supérieur ou inférieur à $\sqrt{t^2 - \delta^2}$.

Si donc $M \leqq \sqrt{t^2 - \delta^2}$, l'intégrale (23) sera évidemment négative. Sinon, on utilise la formule ([5], p. 180, form. (7.3.3))

$$\int_0^\infty \log\left|\frac{x+s}{x-s}\right|\log\left|\frac{x+t}{x-t}\right| dx = \pi^2 \min(s, t), \tag{24}$$

valide pour $s, t > 0$. Elle montre que l'intégrale (23) avec M remplacé par $\infty$ sera nulle pour $t > s + \delta$. Mais en même temps, l'intégrale (23) prise entre les limites M et $\infty$ sera positive si $M > \sqrt{t^2 - \delta^2}$, ce qui, joint au précédent, entraîne encore que l'intégrale (23) elle-même est négative. C. Q. F. D.

Maintenant, nous partageons l'intégrale (22) en deux parties dans lesquelles $t$ varie respectivement entre 0 et un nombre $a > s$, et entre $a$ et $\infty$. Par le lemme, on peut appliquer le deuxième théorème de la moyenne à la seconde partie pour en trouver la valeur

$$\int_a^{a'} \frac{I(t)}{t^2}\,dt \int_0^M \log\left|\frac{x+s}{x-s}\right| \log\left|\frac{x+a}{x-a}\right| dx \qquad (a' > a).$$

La formule (24) montre alors que la valeur absolue de celle-ci est, pour chaque $M > 0$, inférieure à

$$\pi^2 s \left| \frac{\theta(a)}{a} - \frac{\theta(a')}{a'} \right|, \tag{25}$$

vu que $a > s$ et

$$\frac{I(t)}{t^2} = -\frac{d}{dt}\left(\frac{\theta(t)}{t}\right).$$

Quant à la première partie, on fait tendre M vers $\infty$, grâce à quoi l'intégrale intérieure converge uniformément vers la valeur (24) pour $0 < t < a$, et l'expression tout entière tend vers

$$\int_0^a \frac{I(t)}{t^2}\pi^2 \min(s, t)\,dt = \pi^2 \int_0^s \frac{\theta(t)}{t}\,dt - \pi^2 s \frac{\theta(a)}{a}. \tag{26}$$

L'estimation (22) donne donc, avec les résultats (25) et (26) :

$$\pi^2 \int_0^s \frac{\theta(t)}{t}\,dt - \pi^2 s \frac{\theta(a)}{a} - \pi^2 s \left| \frac{\theta(a)}{a} - \frac{\theta(a')}{a'} \right| < C \log s \qquad (s > 2,\ a > s).$$

Or, le nombre $a > s$ était complètement arbitraire. On peut donc le faire tendre vers l'infini, lorsqu'on aura $\frac{\theta(a)}{a} \to 0$ et $\frac{\theta(a')}{a'} \to 0$ puisque $a' > a$.

On arrive ainsi au :

Théorème 6. — *Le produit canonique correspondant à la suite* $[Dt + \theta(t)]$ *n'est majoré par un polynome sur l'axe réel que si*

$$\frac{1}{\log s} \int_0^s \frac{\theta(t)}{t}\,dt < \text{Cte} < \infty \qquad (s \to \infty).$$

Cela exige une sorte de borne supérieure en moyenne pour la fonction $\theta(t)$, et ressemble donc un peu à la condition suffisante du théorème 1.

Vu que

$$|\theta(t) - \psi(t)| \leq 1, \qquad \psi(t) = n(t) - Dt,$$

on peut donner à la conclusion du théorème 6 la formulation suivante :

$$\frac{1}{\log s}\int_0^s \frac{n(t)-\mathrm{D}t}{t}\,dt < \mathrm{Cte} \qquad (s\to\infty).$$

[Si $n(t)$ est de densité $\mathrm{D}=0$, cela montre que son produit canonique associé n'est borné par un polynome que si $n(t)$ est bornée, c'est-à-dire que le produit canonique se réduit à un polynome. Fait d'ailleurs connu, car alors $\mathrm{C}(z)$ sera de type exponentiel zéro, et une extension classique du théorème de Phragmén-Lindelöf affirmera le même résultat.]

Il est à remarquer que, comme M. Kahane m'a fait observer, le dernier théorème pourrait aussi être obtenu en partant d'une certaine formule, conséquence des théorèmes de Jensen et de Nevanlinna (*voir* [6], § 5). Cependant, une telle démonstration serait étrangère aux méthodes de cet article, et nous avons préféré celle que nous venons de donner.

4. Impossibilité de certaines propositions inverses du théorème 6. — Le théorème 6 ne peut pas être étendu de façon à assurer aussi une sorte de borne inférieure pour la fonction $\theta(t)$. En effet, étant donné n'importe quelle fonction $\omega(t)$ tendant vers $-\infty$ mais $o(t)$ pour $t\to\infty$, on peut construire une fonction $\theta(t)$ convexe telle que $\theta(t)\leqq\omega(t)$ pour $t$ assez grand, $\theta(t)=o(t)$, $t\to\infty$ et $t+\theta(t)$ soit non décroissante. (Même procédé que pour construire des polygones de Newton.) La suite $[t+\theta(t)]$ satisfera donc à l'hypothèse du corollaire 1 (§ 3), et le produit canonique associé sera majoré par un polynome sur l'axe réel, alors que $-\theta(t)$ sera assez grand.

En se servant de l'exemple de Kahane auquel on a fait allusion dans l'introduction, on peut voir d'autre part qu'une condition, même de la forme $\theta(t)\leqq 0$, n'est nullement suffisante pour que le produit canonique soit majoré par un polynome sur l'axe réel (à ceci nous reviendrons plus tard).

Il semblerait peut-être encore probable qu'une condition de la forme

$$\left|\int_0^s \frac{\theta(t)}{t}\,dt\right| = \mathrm{O}(\log s) \qquad \text{ou même} \qquad \int_0^s \frac{|\theta(t)|}{t}\,dt = \mathrm{O}(\log s)$$

pour $s\to\infty$, serait suffisante pour avoir la majorisation cherchée du produit canonique, ce qui donnerait une extension assez naturelle au théorème 1. Cependant, aucune condition du type envisagé n'est valable ; ce que nous montrerons maintenant en donnant des exemples.

NORMALE SUPÉR BIBLIOTHÈQUE

*Exemple* 2. — Il existe une suite $n(t)=[t+\theta(t)]$, avec

$$\theta(t)\geqq 0 \qquad \text{et} \qquad \int_0^s \frac{\theta(t)}{t}\,dt = \mathrm{O}(\log s) \qquad (s\to\infty),$$

telle que le produit canonique $C(x)$ associé ne satisfait aucune inégalité de la forme

$$|C(x)| < x^{K} \qquad (x \to \infty).$$

*Preuve.* — Utilisons le théorème 4. Prenons d'abord un $x$ et un $M > 0$, avec $x - 2M > 0$. Posons

$$\omega(t) = \frac{1}{2}(x - t) \qquad \text{pour} \quad x - 2M \leqq t \leqq x,$$

o pour $t$ dehors de $[x - 2M - \varepsilon, x]$, et linéaire sur $[x - 2M - \varepsilon, x - 2M]$; $\varepsilon$ étant une petite quantité positive. Si $\frac{M}{x}$ est petit, on aura

$$(27) \quad 2\int_0^1 \frac{\frac{\omega(x\tau)}{\tau} - \tau\omega\left(\frac{x}{\tau}\right)}{1 - \tau^2} d\tau \geqq x \int_{1 - \frac{2M}{x}}^{1} (\tau(1 + \tau))^{-1} d\tau$$

$$= x \log\left(1 - \frac{2M}{x}\right)^{-1} - x \log\left(1 - \frac{M}{x}\right)^{-1} = M + x O\left(\frac{M^2}{x^2}\right).$$

En particulier, pour $M = \sqrt{x \log x}$, la quantité (27) de droite est $\sqrt{x \log x} + o(1)$, $x \to \infty$.

D'autre part, on a

$$(28) \qquad \int_0^x \frac{\omega(t)}{t} dt \leqq \int_{x-2M}^{x} \left(\frac{x}{t} - 1\right) dt = x\left(\frac{2M}{x} + \frac{4M^2}{2x^2} + \ldots\right) - 2M$$

$$= \frac{2M^2}{x} + O\left(\frac{M^3}{x^2}\right) = 2 \log x + o(1)$$

pour $M = \sqrt{x \log x}$ et $x \to \infty$, si $\varepsilon$ est choisi assez petit.

Alors, prenons une suite de nombres $x_n \to \infty$ et une suite des $\varepsilon_n > 0$ telles que :

i. $x_{n+1} - 2\sqrt{x_{n+1} \log x_{n+1}} - \varepsilon_{n+1} > x_n^2$;

ii. Pour chaque $n$, l'estimation (28) ait lieu avec $x$ et $\varepsilon$ remplacés respectivement par $x_n$ et $\varepsilon_n$.

Définissons enfin :

$$\theta(t) = \frac{1}{2}(x_n - t), \qquad x_n - 2\sqrt{x_n \log x_n} \leqq t \leqq x_n;$$

$\theta(t) = 0$ dehors des intervalles $[x_n - 2\sqrt{x_n \log x_n} - \varepsilon_n, x_n]$; et $\theta(t) =$ fonction linéaire sur les intervalles

$$[x_n - 2\sqrt{x_n \log x_n} - \varepsilon_n, x_n - 2\sqrt{x_n \log x_n}].$$

Selon (28) joint à la propriété ii,

$$\int_0^{x_n} \frac{\theta(t)}{t} dt \leqq \sum_1^n 3 \log x_k,$$

ce qu'on voit facilement être $\leq 6\log x_n$ par un raisonnement inductif, puisque $x_{k+1} > x_k^2$. Avec le fait que

$$\frac{\sqrt{x_n \log x_n}}{x_n} \to 0 \qquad (n \to \infty),$$

cela montre bien que

$$\int_0^x \frac{\theta(t)}{t}\,dt = O(\log x) \qquad (x \to \infty). \tag{29}$$

Cependant, par (27), la propriété i, et la définition de $\theta(t)$ :

$$2\int_0^1 \frac{\dfrac{\theta(x_n\tau)}{\tau} - \tau\theta\left(\dfrac{x_n}{\tau}\right)}{1-\tau^2}\,d\tau \geq 2\int_0^1 \frac{\theta(x_n\tau)}{\tau(1-\tau^2)}\,d\tau - 2\int_0^{\frac{1}{x_n}} \frac{\tau\theta\left(\dfrac{x_n}{\tau}\right)}{1-\tau^2}\,d\tau$$
$$\geq \sqrt{x_n \log x_n} + o(1) - \sup_{t \geq x_n^2} \frac{\theta(t)}{t}\, x_n \log\frac{x_n+1}{x_n-1} = \sqrt{x_n \log x_n} + o(1)$$

pour $n \to \infty$, ce qui n'est pas $O(\log x_n)$, $n \to \infty$.

La fonction $[t + \theta(t)]$ est non décroissante, donc définit une suite $n(t)$ pour laquelle le produit canonique associé n'est majoré par aucun polynome sur l'axe réel (théorème 4), malgré la relation (29).

Cet exemple montre que la condition

$$\int_0^s \frac{|\theta(t)|}{t}\,dt = O(\log s) \qquad (s \to \infty)$$

n'est pas suffisante.

Or, il en est de même pour $|\theta(t)|$ remplacée par $|\theta(t)|^p$, $p > 1$ quelconque. Ceci se montre par une construction analogue à celle que nous venons de faire; il suffit de la reprendre avec $\sqrt{x_n \log x_n}$ toujours remplacé par $\sqrt[p+1]{x_n \log x_n}$.

On pourrait encore croire que la condition

$$\int_0^s \frac{|\theta(t)|}{t}\,dt = O(\log s) \qquad (s \to \infty)$$

est suffisante si l'on impose une restriction supplémentaire sur la rapidité de croissance de la fonction $\theta(t)$. Or, un résultat de ce genre devrait être assez faible :

*Exemple* 3. — Il existe une suite $[2t + \theta(t)]$, avec

$$|\theta(s)| = O(\log s) \qquad \text{et} \qquad \int_0^s \frac{|\theta(t)|}{t}\,dt = O(\log s) \qquad (s \to \infty),$$

pour laquelle le produit canonique associé n'est majoré par aucun polynome sur l'axe réel.

*Preuve.* — Prenons d'abord un nombre $x$ assez grand, et considérons la fonction $\omega(t)$ définie par

$$\omega(t) = \log x, \qquad \frac{x}{e} \leqq t \leqq x - \log x; \qquad x - t, \quad x - \log x \leqq t \leqq x;$$

o dehors de l'intervalle $\left[\frac{x}{e} - \varepsilon, x\right]$; et linéaire sur l'intervalle $\left[\frac{x}{e} - \varepsilon, \frac{x}{e}\right]$; $\varepsilon$ étant un petit nombre positif.

Pour $\varepsilon$ assez faible, on a

$$\int_0^x \frac{\omega(t)}{t}\,dt < \log x,$$

tandis que

$$2\int_0^1 \frac{\omega(x\tau)}{\tau(1-\tau^2)}\,d\tau > \log x \int_{\frac{1}{e}}^{1-\frac{\log x}{x}} \frac{2\,d\tau}{\tau(1-\tau^2)} = \log x \log \frac{(e^2-1)\left(1-\dfrac{\log x}{x}\right)^2}{1-\left(1-\dfrac{\log x}{x}\right)^2}$$
$$= (\log x)^2(1+o(1)) \qquad (x \to \infty),$$

ce qui n'est pas $O(\log x)$.

La construction est maintenant à achever comme dans l'exemple 2.

5. La « redressabilité » de certaines suites $n(t)$. — Revenons au problème général posé dans l'introduction. On a le théorème suivant :

Théorème 7. — *Étant donné une suite $n(t)$ de densité $D < \infty$, formée de nombres $\lambda_n > 0$. Une condition nécessaire et suffisante pour que l'ensemble des exponentielles* $\exp(\pm i\lambda_n x)$ *soit non totale sur chaque intervalle de longueur $> 2\pi D$ est, que pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe une suite de nombres réels positifs $\mu_n$ de densité $\leqq \varepsilon$ telle que $C(x)C_\varepsilon(x)$ est majoré par un polynome sur l'axe réel, $C(x)$ et $C_\varepsilon(x)$ étant respectivement les produits canoniques associés aux suites $\{\lambda_n\}$ et $\{\mu_n\}$.*

*Démonstration.* — Que la condition soit suffisante, c'est une conséquence des raisonnements au début du paragraphe 1.

Quant à la nécessité, supposons qu'il existe une mesure $m$ sur l'intervalle $[-2\pi(D+\varepsilon), 2\pi(D+\varepsilon)]$ telle que

$$F(z) = \int_{-2\pi(D+\varepsilon)}^{2\pi(D+\varepsilon)} \exp(itz)\,dm(t)$$

soit nulle pour $z = \pm\lambda_n$. Quitte à diviser $F(z)$ par une puissance de $z$, on peut supposer qu'elle n'est pas une fonction impaire; posons donc

$$G(z) = F(z) + F(-z);$$

$G(z) \not\equiv 0$ est une fonction de type exponentiel $\leqq 2\pi(D+\varepsilon)$ et bornée sur l'axe réel, et

$$G(z) = G(-z), \qquad G(\pm\lambda_n) = 0.$$

A un facteur de la forme Cte$x^{\mathrm{K}} \exp(i\alpha x)$ près,

$$\mathrm{G}(z) = \prod_n \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2}\right) \prod_n \left(1 - \frac{z^2}{\alpha_n^2}\right),$$

les $\alpha_n$ étant les zéros de $\mathrm{G}(z)$, outre des $\lambda_n$. Par un théorème de Levinson (*voir* [6]), la réunion des suites $\{\lambda_n\}$ et $\{\alpha_n\}$ a une densité $\leqq \mathrm{D} + \varepsilon$, tandis que $\{\lambda_n\}$ est de densité D; la suite de nombres complexes $\alpha_n$ a donc une densité $\leqq \varepsilon$. Il en est de même pour la suite de nombres réels positifs $\mu_n = |\alpha_n|$ et, puisque $|\alpha_n^2 - x^2| \geqq |\mu_n^2 - x^2|$, $x$ réel, on a

$$\prod_n \left(1 - \frac{x^2}{\lambda_n^2}\right) \prod_n \left(1 - \frac{x^2}{\mu_n^2}\right) \leqq |\mathrm{G}(x)| \leqq \mathrm{Cte}.$$

On introduit donc la définition suivante :

Une suite $n(t)$ est dite ***redressable*** si, pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe une suite $n_\varepsilon(t)$ de densité $\leqq \varepsilon$ telle que $\mathrm{C}(x)\mathrm{C}_\varepsilon(x)$ est majoré par un polynome en $x$, $\mathrm{C}(x)$ et $\mathrm{C}_\varepsilon(x)$ étant respectivement les produits canoniques correspondant aux suites $n(t)$ et $n_\varepsilon(t)$.

THÉORÈME 8. — *Une suite concave est toujours redressable.*

*Démonstration.* — Si la suite $n(t) = [\mathrm{D}t + \theta(t)]$ est concave, la fonction $\theta(t) \geqq 0$ l'est aussi, ce qui, joint au fait que $\theta(t) = o(t)$, $t \to \infty$, entraîne

$$\theta'(t) \to 0, \qquad t \to \infty.$$

Pour $\varepsilon > 0$, prenons un $a$ pour lequel $\theta'(t) < \varepsilon$, $\frac{\theta(t)}{t} < a$, $t \geqq a$, et posons $\theta_1(t) = \frac{t\theta(a)}{a}$ pour $t \leqq a$ et $\theta(t)$ pour $t > a$. On a toujours $\theta_1'(t) < \varepsilon$; la fonction $[\varepsilon t - \theta_1(t)]$ est donc non décroissante et définit une suite $n_\varepsilon(t)$ de densité $\varepsilon$. Pour $t > a$,

$$n(t) + n_\varepsilon(t) = (\mathrm{D} + \varepsilon)t + \theta(t) - \theta(t) + \mathrm{O}(1) = (\mathrm{D} + \varepsilon)t + \mathrm{O}(1),$$

et le produit canonique associé à la suite $n(t) + n_\varepsilon(t)$, réunion des deux suites $n(t)$ et $n_\varepsilon(t)$, est majoré par un polynome sur l'axe réel par le théorème 1.

Par le même procédé exactement, on démontre qu'une suite $\{\lambda_n\}$ de densité zéro avec $\lambda_{n+1} - \lambda_n \to \infty$, $n \to \infty$, est redressable. (Fait cité comme « théorème de Ingham » par Schwartz [2].)

Le théorème 8 montre qu'aucune conclusion comme celle du théorème 6 ne résulte de la seule redressabilité d'une suite.

En revanche,

$$\int_0^s \frac{\theta(t)}{t}\,dt < \mathrm{O}(\log s) \qquad (s \to \infty)$$

n'entraîne pas la redressabilité. Pour voir ceci, prenons la suite $n_{\mathrm{K}}(t)$ de

M. Kahane [3], qui est de densité nulle, mais qui n'est contenue dans aucune suite redressable. Soit $\omega(t)$ une fonction concave, majorante de $n_K(t)$, telle que $\omega(t) = o(t)$, $t \to \infty$. [$\omega(t)$ est formée comme on construit le polygone de Newton.] Pour D assez grand, la fonction $[Dt - \omega(t)]$ sera non décroissante, et définira une suite de densité D. On a

$$n(t) + n_K(t) = [Dt + \theta(t)], \qquad \text{avec} \quad \theta(t) < O(1),$$

puisque $\omega(t) \geqq n_K(t)$, mais la réunion des deux suites $n(t)$ et $n_K(t)$ ne peut pas être redressable.

Passons à un théorème plus général. C'est M. Kahane qui nous a fait remarquer la possibilité d'avoir un résultat du type suivant, en observant qu'il s'ensuivrait de certaines estimations de Mandelbrojt-Ostrowski (*voir* [7], chap. V, et [8], p. 61 et 119). Cependant, nous en donnons une preuve directe, basée sur la méthode de cet article.

Théorème 9. — *Soit $n(t) = [\nu(t)]$ une suite et $C(x)$ son produit canonique associé. S'il existe une fonction non décroissante $T(x) \geqq 0$, avec*

$$\log|C(x)| \leqq T(x) \qquad \textit{et} \qquad \int_0^\infty \frac{T(x)}{x^2}\,dx < \infty,$$

*la suite $n(t)$ est redressable.*

*Remarque.* — Le même vaut avec $\log|C(x)|$ remplacé par $\displaystyle\int_0^\infty \log\left|1 - \frac{x^2}{t^2}\right| d\nu(t)$, la preuve en restant à peu près de même.

*Démonstration du théorème.* — Prenons un $\varepsilon > 0$. Il suffit de trouver une suite $n_\varepsilon(t)$ de densité $\varepsilon$ dont le produit canonique $C_\varepsilon(x)$ associé satisfasse

$$\log|C_\varepsilon(x)| \leqq -T(x) + O(\log x)$$

pour $x$ assez grand.

Posons

$$\omega(x) = x\int_x^\infty \frac{T(t)}{t^2}\,dt.$$

Par l'hypothèse on a

$$\frac{\omega(x)}{x} \to 0 \qquad (x \to \infty).$$

De plus, par la non décroissance et positivité de $T(t)$,

$$\int_x^\infty \frac{T(t)}{t^2}\,dt \geqq \frac{T(x)}{x} \geqq 0, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{\omega(x)}{x} \geqq \int_x^\infty \frac{T(t)}{t^2}\,dt - \frac{T(x)}{x} = \omega'(x) \geqq 0,$$

ce qui montre à la fois que $\omega(t)$ est non décroissante et que $\omega'(t) \to 0$, $t \to \infty$. Enfin,

$$\omega(x) - x\omega'(x) = T(x).$$

Prenons un $a$ tel que

$$\frac{\omega(x)}{x} < \varepsilon, \qquad \omega'(x) < \varepsilon, \qquad x > a,$$

et posons

$$\omega_1(t) = \frac{t\,\omega(a)}{a} \quad \text{pour} \quad t \leqq a, \qquad \omega_1(t) = \omega(t), \quad t > a.$$

$\omega_1(t)$ est aussi non décroissante, et si l'on pose

$$J(t) = \omega_1(t) - t\omega'_1(t),$$

on a

$$J(t) = 0, \quad t < a, \qquad J(t) = T(t) \geqq 0, \quad t > a.$$

Alors, par le lemme 6, on a pour $x > a$,

$$(30) \quad \int_0^\infty \log\left|1 - \frac{x^2}{t^2}\right| d\omega_1(t) = \int_0^\infty \log\left|\frac{\tau+1}{\tau-1}\right| \frac{J(x\tau)}{\tau^2}\,d\tau \geqq \int_1^\infty \frac{1}{\tau^2}\log\left|\frac{\tau+1}{\tau-1}\right| T(x\tau)\,d\tau$$
$$\geqq T(x)\int_1^\infty \log\left|\frac{\tau+1}{\tau-1}\right|\frac{d\tau}{\tau^2} > T(x),$$

vu que $T(t)$ est non décroissante. Fixons un $y > 0$. Pour $z = x + iy$, $x > a$, le lemme 2 donne, avec (30),

$$(31) \qquad \int_0^\infty \log\left|1 - \frac{z^2}{t^2}\right| d\omega_1(t) \geqq T(x).$$

La fonction $\nu_\varepsilon(t) = \varepsilon t - \omega_1(t)$ ne décroît pas, car $\omega'_1(t) < \varepsilon$. Par le lemme 6,

$$\int_0^\infty \log\left|1 - \frac{x^2}{t^2}\right| d(\varepsilon t) = 0,$$

donc, on peut appliquer le lemme 3 pour faire un raisonnement analogue à celui dans la deuxième partie de la démonstration du théorème 3, et conclure :

$$\int_0^\infty \log\left|1 - \frac{z^2}{t^2}\right| d(\varepsilon t) \leqq O(1).$$

Avec (31), cela donne

$$\int_0^\infty \log\left|1 - \frac{z^2}{t^2}\right| d\nu_\varepsilon(t) \leqq -T(x) + O(1) \qquad (x > a);$$

donc, si $n_\varepsilon(t) = [\nu_\varepsilon(t)]$,

$$\int_0^\infty \log\left|1 - \frac{z^2}{t^2}\right| dn_\varepsilon(t) \leqq -T(x) + O(\log x) \qquad (x \to \infty).$$

Utilisons encore une fois le lemme 2 pour en déduire :

$$\log|C_\varepsilon(x)| = \int_0^\infty \log\left|1 - \frac{x^2}{t^2}\right| dn_\varepsilon(t) \leqq -T(x) + O(\log x) \qquad (x \to \infty),$$

et la suite $n_\varepsilon(t)$ est de densité $\varepsilon$, car

$$\frac{\omega_1(t)}{t} \leqq \frac{\omega(t)}{t} \to 0 \qquad (t \to \infty).$$

C. Q. F. D.

Il serait bon de voir si la réciproque du théorème 9 est vraie, même en se restreignant à des suites de densité zéro. Malheureusement, nous ne sommes nullement parvenus à le faire.

Donnons quelques applications du théorème 9.

THÉORÈME 10. — *Pour une suite* $n(t) = \mathrm{D}t + \psi(t)$ *avec*

$$\left|\int_0^x \frac{\psi(t)}{t}\,dt\right| = \mathrm{O}(\log x) \qquad (x \to \infty),$$

*il existe une fonction* $\mathrm{T}(x)$ *satisfaisant l'hypothèse du théorème* 9 [*et donc* $n(t)$ *est redressable*].

*Remarque.* — Ce résultat peut être considérablement amélioré; nous choisissons la formulation ci-dessus pour faciliter la comparaison avec la matière du paragraphe 4.

*Démonstration.* — Appliquons le complément du lemme 1 au produit canonique $\mathrm{C}(x)$ associé à $n(t)$. On prend $\lambda = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$ et l'on a

$$(32) \qquad \log|\mathrm{C}(x)| \leqq 2n(x)\log\frac{1}{\lambda} + 2\int_0^\lambda \frac{\frac{\psi(x\tau)}{\tau} - \tau\psi\left(\frac{x}{\tau}\right)}{1-\tau^2}\,d\tau.$$

Le premier terme de droite dans (32) est $\mathrm{O}(\sqrt{x})$, $x \to \infty$; considérons alors le deuxième. On a

$$(33) \qquad \int_0^\lambda \frac{\psi(x\tau)}{\tau(1-\tau^2)}\,d\tau = \frac{1}{1-\tau^2}\int_0^{\tau x}\frac{\psi(u)}{u}\,du\Bigg]_0^\lambda - \int_0^\lambda \frac{2\tau}{(1-\tau^2)^2}\int_0^{\tau x}\frac{\psi(u)}{u}\,du\,d\tau$$

$$\leqq \mathrm{O}(\log x)\left(\sqrt{x} + \int_0^{1-\frac{1}{\sqrt{x}}} 2\tau(1-\tau^2)^{-2}\,d\tau\right) = \sqrt{x}\,\mathrm{O}(\log x) \qquad (x \to \infty).$$

Pareillement, en posant $\frac{1}{\tau} = s$,

$$(34) \qquad -\int_0^\lambda \frac{\tau\psi\left(\frac{x}{\tau}\right)}{1-\tau^2}\,d\tau = -\int_{\frac{1}{\lambda}}^\infty \frac{1}{s^2-1}\,\frac{\psi(xs)}{s}\,ds$$

$$= -\frac{1}{s^2-1}\int_0^{sx}\frac{\psi(u)}{u}\,du\Bigg]_{\frac{1}{\lambda}}^\infty - \int_{\frac{1}{\lambda}}^\infty \frac{2s}{(s^2-1)^2}\int_0^{sx}\frac{\psi(u)}{u}\,du\,ds$$

$$\leqq \sqrt{x}\,\mathrm{O}(\log x) + \int_{\frac{1}{\lambda}}^\infty \frac{2s\,\mathrm{O}(\log sx)}{(s^2-1)^2}\,ds$$

$$\leqq 2 + \sqrt{x}\,\mathrm{O}(\log x) + 2 + \sqrt{x}\,\mathrm{O}(\log x) + \mathrm{O}\left(\int_{\frac{1}{\lambda}}^\infty \frac{ds}{s(s^2-1)}\right)$$

$$= (2\sqrt{x}+1)\,\mathrm{O}(\log x) \qquad (x \to \infty).$$

De (32) et la remarque qui la suit, (33) et (34); on a $\log|C(x)| \leqq \text{Cte}\sqrt{x}\log x$ pour $x$ assez grand, et l'intégrale de $\dfrac{\sqrt{x}\log x}{x^2}$ prise entre 1 et $\infty$ converge.

THÉORÈME 11. — *Si pour un $p<1$, $\int_0^\infty \frac{|\psi(t)|}{t^{1+p}}dt<\infty$, il existe une fonction $T(x)$ satisfaisant à l'hypothèse du théorème 9 (et la suite est donc redressable).*

*Démonstration.* — Utilisons la formule (32) avec $\lambda = 1-(\log x)^{-2}$. Le premier terme de droite dans (32) sera alors $O\left(\dfrac{x}{(\log x)^2}\right)$, $x\to\infty$. Quant au deuxième,

$$\int_0^\lambda \frac{\frac{\psi(x\tau)}{\tau}}{1-\tau^2}d\tau \leqq \int_0^\lambda \frac{x^p\tau^p}{1-\tau^2}\,\frac{|\psi(x\tau)|}{(x\tau)^{1+p}}d(x\tau)$$
$$\leqq x^p(\log x)^2\int_0^\infty \frac{|\psi(u)|}{u^{1+p}}du = O(x^p(\log x)^2) \qquad (x\to\infty)$$

et

$$-\int_0^\lambda \frac{\tau\psi\left(\frac{x}{\tau}\right)}{1-\tau^2}d\tau \leqq \int_0^\lambda \frac{x^p\tau^{2-p}}{1-\tau^2}\,\frac{\left|\psi\left(\frac{x}{\tau}\right)\right|}{\left(\frac{x}{\tau}\right)^{1+p}}d\left(\frac{x}{\tau}\right) = O(x^p(\log x)^2) \qquad (x\to\infty).$$

Alors, pour $x\to\infty$,

$$\log|C(x)| \leqq \text{Cte}\left(x^p(\log x)^2+\frac{x}{(\log x)^2}\right),$$

ce qui est croissante pour $x$ assez grand. Et

$$\int_e^\infty \frac{x^p(\log x)^2+\dfrac{x}{(\log x)^2}}{x^2}dx<\infty \qquad \text{puisque} \quad p<1.$$

COROLLAIRE. — *Si, pour $t\to\infty$, $|n(t)-Dt| = O(t^\alpha)$, avec $\alpha<1$, la suite $n(t)$ est redressable.*

*Exemple* 4. — La condition $\int_0^\infty \frac{|\psi(t)|}{t^2}dt<\infty$ n'entraîne pas l'existence d'une fonction $T(x)$ satisfaisant à l'hypothèse du théorème 9. (Bien entendu, nous ne savons pas si la suite ne pourrait pas être redressable quand même, puisque nous ne savons pas si la réciproque du théorème 9 est vraie.)

*Preuve.* — Prenons deux suites de nombres positifs, $\{x_k\}$ et $\{M_k\}$, avec $x_{k+1}-x_k^2>M_{k+1}$; nous préciserons ces deux suites plus tard. Posons $\theta(t)=x_k-t$ pour $x_k-M_k\leqq t\leqq x_k$, $\theta(t)=0$ dehors des intervalles $[x_k-M_k-\varepsilon_k,\ x_k]$, et $\theta(t)$ linéaire sur des intervalles $[x_k-M_k-\varepsilon_k,\ x_k-M_k]$; les $\varepsilon_k$ sont des petites quantités $>0$. On note que toujours $\theta'(t)>-1$.

Si $\frac{\theta(t)}{t} \to 0$, $t \to \infty$, on a comme dans l'exemple 2,

$$2\int_0^{\lambda_k} \frac{\frac{\theta(x_k\tau)}{\tau} - \tau\theta\left(\frac{x_k}{\tau}\right)}{1-\tau^2} d\tau \geqq \frac{M_k}{2} + O(1) \qquad (k \to \infty),$$

où l'on a posé $\lambda_k = 1 - \frac{1}{5x_k}$. Ainsi, pour la suite

$$n(t) = [2t + \theta(t)]$$

on aura

$$|\theta(t) - \psi(t)| \leqq 1,$$

et par un calcul analogue à celui du théorème 1,

$$(35) \qquad 2\int_0^{\lambda_k} \frac{\frac{\psi(x_k\tau)}{\tau} - \tau\psi\left(\frac{x_k}{\tau}\right)}{1-\tau^2} d\tau \geqq \frac{M_k}{2} - O(\log x_k) \qquad (k \to \infty).$$

Si chaque $x_k$ est le quart d'un nombre entier impair, on a évidemment $n\left(\frac{x_k}{\lambda_k}\right) = n(x_k\lambda_k)$ et donc, par le complément du lemme 1,

$$\log|C(x_k)| \geqq \frac{M_k}{2} - O(\log x_k) + O(1) \qquad (k \to \infty) \quad \text{par (35)}.$$

Alors, si $T(x) \geqq \log|C(x)|$ est positive et non décroissante,

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{T(t)}{t^2} dt \geqq \left(\frac{M_k}{2} - O(\log x_k)\right)\left(\frac{1}{x_k} - \frac{1}{x_{k+1}}\right) \geqq \frac{M_k}{4x_k} - \frac{O(\log x_k)}{x_k}$$

pour $k$ assez grand, vu que $x_{k+1} > x_k^2$. On voit facilement que $\sum_k \frac{\log x_k}{x_k}$ converge, donc, si

$$\int_0^\infty \frac{T(t)}{t^2} dt < \infty, \qquad \sum_k \frac{M_k}{x_k} < \infty.$$

D'autre part, on a

$$\int_{x_k - M_k}^{x_k} \frac{\theta(t)}{t^2} dt < \frac{M_k^2}{(x_k - M_k)^2},$$

c'est-à-dire que si les $\varepsilon_k$ sont assez faibles,

$$\int_0^\infty \frac{|\psi(t)|}{t^2} dt < \infty$$

dès que $\sum_k \frac{M_k^2}{(x_k - M_k)^2}$ converge.

Il s'agit alors de choisir les $x_k$ et les $M_k$ de façon que

$$x_{k+1} - M_{k+1} > x_k^2, \qquad \frac{M_k}{x_k} \to 0,$$

$$\sum_k \frac{M_k^2}{(x_k - M_k)^2} < \infty \qquad \text{et} \qquad \sum_k \frac{M_k}{x_k} = \infty.$$

Ce qui est assez facile ; il suffit de prendre

$$x_{k+1} > 2x_k^2 \quad \text{et} \quad M_{k+1} = \frac{x_{k+1}}{k+1}.$$

*Exemple* 5. — Il existe des suites

$$n(t) = Dt + \psi(t), \quad \text{avec} \quad \int_0^\infty \frac{|\psi(t)|}{t^2}\,dt = \infty,$$

qui sont redressables.

*Preuve.* — Posons $\theta(t) = \frac{t}{2}$ pour $0 \leq t \leq e^2$, et $\frac{t}{\log t}$ pour $t > e^2$ ; prenons $n(t) = [t + \theta(t)]$. $\theta(t)$ est concave, donc $n(t)$ redressable par le théorème 8. Mais

$$\int_{e^2}^\infty \frac{\psi(t)}{t^2}\,dt > \int_{e^2}^\infty \frac{\theta(t) - 1}{t^2}\,dt = \infty.$$

Malgré l'exemple 4, on a le :

THÉORÈME 12. — *Si* $\psi(t)$ *est positive et non décroissante, et si*

$$\int_0^\infty \frac{\psi(t)}{t^2}\,dt < \infty,$$

*il existe une fonction* $T(x)$ *satisfaisant à l'hypothèse du théorème* 9 (*et la suite est redressable*).

*Démonstration.* — Si $x$ n'est pas un zéro de $C(x)$, on a, comme dans le lemme 6,

$$(36) \qquad 2\int_0^1 \frac{\dfrac{\psi(x\tau)}{\tau} - \tau\psi\left(\dfrac{x}{\tau}\right)}{1-\tau^2}\,d\tau = \int_0^\infty \frac{1}{\tau^2}\log\left|\frac{\tau+1}{\tau-1}\right|(\psi(x\tau)\,d\tau - \tau\,d\psi(x\tau))$$
$$\leq \int_0^\infty \frac{1}{\tau^2}\log\left|\frac{\tau+1}{\tau-1}\right|\psi(x\tau)\,d\tau,$$

si $\psi(t)$ est non décroissante. Notons par $T(x)$ la dernière intégrale dans (36) ; on a

$$\log|C(x)| \leq T(x), \qquad T(x) \geq 0,$$

et $T(x)$ est non décroissante, puisque pour $x' > x$,

$$\psi(x'\tau) \geq \psi(x\tau)$$

pour chaque $\tau > 0$. On a enfin,

$$\int_0^\infty \frac{T(x)}{x^2}\,dx = \int_0^\infty \frac{\psi(t)}{t^2}\int_0^\infty \frac{1}{x}\log\left|\frac{x+t}{x-t}\right|dx\,dt = \int_0^\infty \frac{\psi(t)}{t^2}\,dt \int_0^\infty \frac{1}{u}\log\left|\frac{u+1}{u-1}\right|du < \infty.$$

C. Q. F. D.

Ce théorème inclut le résultat (*voir* [2], p. 131) qu'une suite $\{\lambda_n\}$, avec $\sum_n \frac{1}{\lambda_n} < \infty$ est toujours redressable.

## BIBLIOGRAPHIE.

[1] R. P. Boas, *Entire functions*, Acad. Press, New-York, 1954.

[2] L. Schwartz, *Approximation d'une fonction quelconque par des sommes d'exponentielles imaginaires* (*Ann. Toulouse*, t. 6, 1942, p. 111-174).

[3] J. P. Kahane, *Sur la totalité des suites d'exponentielles imaginaires* [*Ann. Inst. Fourier* (sous presse)].

[4] R. Paley et N. Wiener, *Fourier Transforms in the Complex Domain* (*Amer. Math. Soc.*, New-York, 1934).

[5] E. Titchmarsh, *Theory of Fourier Integrals*, Oxford, 1948.

[6] P. Koosis, *Nouvelle démonstration d'un théorème de Levinson* (*Bull. Soc. math. Fr.*, sous presse).

[7] S. Mandelbrojt, *Séries de Fourier et classes quasi-analytiques de fonctions*, Gauthier-Villars, Paris, 1935.

[8] J. P. Kahane, *Sur quelques problèmes d'unicité et de prolongement* (*Ann. Inst. Fourier*, t. 5, 1953-1954, p. 39-130).