J.-P. KAHANE
SZOLEM MANDELBROJT

Sur l'équation fonctionnelle de Riemann et la formule sommatoire de Poisson

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 75, nº 1 (1958), p. 57-80
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1958_3_75_1_57_0>

SUR
L'ÉQUATION FONCTIONNELLE DE RIEMANN ET LA FORMULE SOMMATOIRE DE POISSON

PAR MM. J. P. KAHANE ET S. MANDELBROJT.

Introduction.

En 1922, Hamburger montrait le lien entre les conditions suivantes, portant sur deux suites réelles $\{\lambda_n\}$ et $\{\mu_n\}$ et deux suites de coefficients complexes $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ $(n=1, 2, \ldots)$[1] :

I. Les séries $\sum_1^\infty a_n\lambda_n^{-s}$ et $\sum_1^\infty b_n\mu_n^{-s}$ sont convergentes pour $\sigma = \mathrm{R}s > 1$, et représentent des fonctions méromorphes $\varphi(s)$ et $\psi(s)$, ayant 1 pour seul pôle, et satisfaisant « l'équation fonctionnelle de Riemann »

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\varphi(s)=\pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\psi(1-s)$$

[on suppose, de plus, que $(1-s)\varphi(s)$ est une fonction entière d'ordre fini].

II. On a « la relation θ »

$$\sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{-\pi\lambda_n^2\tau}=\tau^{-\frac{1}{2}}\sum_{-\infty}^{\infty} b_n e^{-\frac{\pi\mu_n^2}{\tau}},$$

avec

$$a_{-n}=a_n,\qquad b_{-n}=b_n,\qquad \lambda_{-n}=-\lambda_n,\qquad \mu_{-n}=-\mu_n.$$

III. On a

$$a_0+2\sum_1^\infty a_n e^{-2\pi\lambda_n z}=\frac{b_0}{\pi z}+\frac{2z}{\pi}\sum_2^\infty \frac{b_n}{z^2+\mu_n^2}.$$

IV. Pour $\mu_m < y < \mu_{m+1}$, on a

$$\sum_1^m b_n(y-\mu_n) = \frac{a_0 y^2 - b_0 y}{2} - \frac{1}{2\pi^2}\sum_1^\infty \frac{a_n}{\lambda_n^2}(\cos 2\pi\lambda_n y - 1).$$

V. Si f est une fonction sommable sur $(-\infty, \infty)$, à variation bornée sur chaque segment, et si

$$\hat{f}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-2\pi i u x}\, dx,$$

on a

$$\sum_{-\infty}^{\infty} a_n f(-\lambda_n) = \sum_{-\infty}^{\infty} b_n \hat{f}(\mu_n).$$

Récemment, Bochner et Chandrasekharan [2], puis Chandrasekharan et Mandelbrojt [3], [4] ont considéré des « équations fonctionnelles de Riemann » plus générales que celles de Hamburger, et ont dégagé des propriétés simples satisfaites par les exposants λ_n, μ_n et les coefficients a_n, b_n des fonctions $\varphi(s)$ et $\psi(s)$ satisfaisant de telles équations. L'outil essentiel utilisé par ces auteurs est une formule du type III.

L'objet de la présente étude est constitué par :

a. de telles « équations fonctionnelles de Riemann »;

b. les formules du type V, qui sont des sortes de « formules sommatoires de Poisson »;

c. les distributions presque-périodiques de L. Schwartz [5], sommes de masses ponctuelles aux points λ_n, et de spectre $\{\mu_n\}$, qui peuvent être considérées comme des dérivées secondes du premier membre de IV.

Moyennant une légère restriction sur les suites considérées, chaque « formule sommatoire de Poisson » équivaut à la donnée d'une distribution du type *c*. Dans les mêmes conditions, chaque distribution du type *c*, soit paire, soit impaire conduit à une « équation fonctionnelle de Riemann ». Un maniement élémentaire des distributions du type *c* permet ainsi la construction d'une infinité de « formules de Poisson » et d' « équations de Riemann », C'est là une série de résultats immédiats (§ 1).

Nous montrerons que, moyennant des restrictions convenables, chaque « équation fonctionnelle de Riemann » conduit inversement à une distribution du type *c* (§ 2). Pour cela, nous poursuivons les calculs faits en [2] (simplifiés comme nous l'a indiqué M. Chandrasekharan) jusqu'à mettre en évidence une telle distribution. Pour obtenir des théorèmes d'unicité concernant *a*, nous aurons donc à uitliser la technique des distributions presque-périodiques au lieu de celle des séries de Dirichlet, exploitée dans [2], [3], [4].

Nous nous intéresserons particulièrement à la relation entre le spectre $\{\mu_n\}$ et le support $\{\lambda_n\}$ d'une distribution du type *c*. Un rôle important sera joué par les densités supérieure et inférieure de répartition de ces deux suites. Si ces densités existent, on a, entre autres, le résultat suivant, inspiré par le théorème 3 de [4] (qu'il permet de retrouver et de généraliser) : chacune des suites $\{\lambda_n\}$ et $\{\mu_n\}$ admet une base finie. Nous établirons également des propriétés remarquables des ensemble de sommes et de différences $\{\lambda_n \pm \lambda_m\}$ et $\{\mu_n \pm \mu_m\}$ (§ 3).

Énoncé des problèmes. — *a. Soit* $\{\lambda_n\}$ *et* $\{\mu_n\}$ *deux suites positives croissantes tendant vers l'infini,* $\{a_n\}$ *et* $\{b_n\}$ *deux suites complexes* $(n = 1, 2, \ldots)$ *et* δ *un nombre* > 0. *Il s'agit d'étudier la relation* $\mathrm{A}\{\lambda_n, \mu_n, a_n, b_n; \delta\}$ *équivalente à la compatibilité des conditions suivantes :*

(A_1) : $\varphi(s) = \sum_1^{\infty} a_n \lambda_n^{-s}$ *converge absolument pour* $\sigma = \mathrm{R}s$ *assez grand* $(\sigma \geqq \alpha)$;

(A_2) : $\psi(s) = \sum_1^{\infty} a_n \mu_n^{-s}$ *converge absolument pour* $\sigma = \mathrm{R}s$ *assez grand* $(\sigma \geqq \beta)$;

(A_3) : $\chi(s) \not\equiv 0$ *est holomorphe à distance finie hors d'un compact* K, *et de type exponentiel nul dans toute bande verticale* $\left(\textit{c'est-à-dire } \lim_{|t| \to \infty} \frac{\log|\chi(\sigma+it)|}{t} = 0\right.$ *uniformément par rapport à* σ *quand* σ *parcourt un intervalle borné*$\left.\right)$ (¹);

(A_4) : $\chi(s) = \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \varphi(s)$ *pour* σ *assez grand*;

(A_5) : $\chi(s) = \pi^{-\frac{\delta - s}{2}} \Gamma\left(\frac{\delta - s}{2}\right) \psi(\delta - s)$ *pour* $-\sigma$ *assez grand*;

b. Soit maintenant $\{\lambda_n\}$ *et* $\{\mu_n\}$ *deux suites réelles croissantes de* $-\infty$ *à* $+\infty$, $\{a_n\}$ *et* $\{b_n\}$ *deux suites complexes* $(n = \ldots -1, 0, 1, \ldots)$. *A une fonction* f *sommable on associe sa transformée de Fourier*

$$\hat{f}(u) = \int e^{-2\pi i u x} f(x)\, dx.$$

Il s'agit d'étudier la relation $\mathrm{B}_{\mathcal{C}, \mathcal{S}, \mathcal{S}'}\{\lambda_n, \mu_n, a_n, b_n\}$ *équivalente à l'affirmation suivante :*

Pour chaque f *d'une classe* $\mathcal{C}$, *on a*

$$\sum_{-\infty}^{\infty} a_n f(-\lambda_n) = \sum_{-\infty}^{\infty} b_n \hat{f}(\mu_n),$$

les séries étant sommées par les procédés $\mathcal{S}$ *et* $\mathcal{S}'$.

c. $\{\lambda_n\}$, $\{\mu_n\}$, $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ *ayant un même sens qu'en b, il s'agit d'étudier la relation* $\mathrm{C}\{\lambda_n, \mu_n, a_n, b_n\}$ *équivalente à l'affirmation suivante :* δ_{X} *représentant la*

(¹) Cette condition est moins stricte que celle imposée dans [2], [3] et [4].

masse de Dirac au point X, *la distribution de Schwartz* $\sum_{-\infty}^{\infty} a_n \delta_{\lambda_n}$ *est presque-périodique et a pour série de Fourier* $\sum_{-\infty}^{\infty} b_m e^{2\pi i \mu_m x}$ (pour ces notions, *voir* [5]).
Nous noterons cette dernière phrase :

$$\sum_{-\infty}^{\infty} a_n \delta_{\lambda_n} \sim \sum_{-\infty}^{\infty} b_m e^{2\pi i \mu_m x}.$$

Lorsque les suites $\{\lambda_n\}$, $\{\mu_n\}$, $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ sont définies comme en *a*, on les prolongera par la *condition de symétrie*

(S) $\lambda_{-n} = -\lambda_n, \quad \mu_{-n} = -\mu_n, \quad a_{-n} = a_n, \quad b_{-n} = b_n \quad (n = 0, 1, \ldots),$

a_0 et b_0 convenablement choisis.

Lorsque les suites $\{\lambda_n\}$, $\{\mu_n\}$, $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ sont définies comme en *b* ou en *c*, les conditions (A_1) [resp. (A_2)] seront prises dans le sens suivant : *il existe un* α (*resp.* β) *tel que*

$$\sum_{\lambda_n \neq 0} |a_n| |\lambda_n|^{-\alpha} < \infty \quad \text{resp.} \quad \sum_{\mu_n \neq 0} |b_n| |\mu_n|^{-\beta} < \infty.$$

Remarquons que A $\{n, n, 1, 1; 1\}$ exprime l'équation fonctionnelle de Riemann

$$\varphi(s) = \psi(s) = \zeta(s), \qquad \chi(s) = \frac{1}{s(s-1)} + \text{fonction entière};$$

$B_{\mathcal{C}, \mathcal{S}, \mathcal{S}'}\{n, n, 1, 1\}$ exprime la formule sommatoire de Poisson ($\mathcal{C}$, $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ étant convenablement définis); C $\{n, n, 1, 1\}$ exprime

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \delta_n \sim \sum_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i m x} \quad (\textit{cf.}\ [5],\ \text{p. } 110).$$

1. Résultats immédiats.

PROPOSITION 1. — *Supposons que, pour toute fonction f indéfiniment dérivable à support compact, la série* $\sum_{-\infty}^{\infty} b_n \hat{f}(\mu_n)$ *soit absolument convergente, et égale* $\sum_{-\infty}^{\infty} a_n f(-\lambda_n)$. *On a alors* C $\{\lambda_n, \mu_n, a_n, b_n\}$.

Démonstration. — Posons $T = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n \delta_{\lambda_n}$; alors

$$T \star f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n f(x - \lambda_n) = \sum_{-\infty}^{\infty} b_m \hat{f}(\mu_m) e^{2\pi i \mu_m x}.$$

Ainsi, toutes les régularisées de T sont presque-périodiques au sens de Bohr; il en résulte ([5], p. 62) que T est une distribution presque-périodique, soit

$$\mathrm{T} \sim \sum_{-\infty}^{\infty} b'_m \, e^{2\pi i \mu'_m x};$$

mais on sait alors ([5], p. 64) que

$$\mathrm{T} \star f \sim \sum_{-\infty}^{\infty} b'_m \hat{f}(\mu'_m) \, e^{2\pi i \mu'_m x}.$$

Donc

$$\mathrm{T} \sim \sum_{-\infty}^{\infty} b_m \, e^{2\pi i \mu_m x}.$$

C. Q. F. D.

Proposition 2. — *Supposons* $\mathrm{C}\{\lambda_n, \mu_n, a_n, b_n\}$, (A_1) *et* (A_2). *Il existe un entier p tel que, pour toute f sommable ainsi que ses p premières dérivées, et bornée par* $|x|^{-p}$, *on ait*

$$\sum_{-\infty}^{\infty} b_n \hat{f}(\mu_n) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n f(-\lambda_n),$$

les deux membres étant absolument convergents.

Démonstration. — Prenons $p > \alpha$, $p > \beta$. Puisque $f \in \mathrm{L}^1, \ldots, f^{(p)} \in \mathrm{L}^1$, on a

$$\hat{f}(u) = \mathrm{O}(|u|^{-p}) \qquad (|u| \to \infty),$$

donc $\sum_{-\infty}^{\infty} b_n \hat{f}(\mu_n) e^{2\pi i \mu_n x}$ converge absolument d'après (A_2). Mais c'est la série de Fourier de

$$\mathrm{T} \star f = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n f(x - \lambda_n),$$

et cette dernière série converge absolument d'après (A_1).

Les propositions 1 et 2 indiquent une relation simple entre la condition $\mathrm{C}\{\lambda_n, \mu_n, a_n\, b_n\}$ et les formules de Poisson généralisées. En les combinant, on a

Théorème 1. — *Supposons satisfaites les conditions* (A_1) et (A_2). *La condition* $\mathrm{C}\{\lambda_n, \mu_n, a_n, b_n\}$ *équivaut à la formule de Poisson*

$$\sum_{-\infty}^{\infty} b_n \hat{f}(\mu_n) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n f(-\lambda_n)$$

pour les fonctions f indéfiniment dérivables à décroissance rapide [*c'est-à-dire telles* *que* $f^{(q)}(x) = o(|x|^{-p})$, $|x| \to \infty$, *quels que soient q et p*]. *Les formules*

$$T_{a,\lambda} = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n \delta_{\lambda_n} \sim \sum_{-\infty}^{\infty} b_m e^{2\pi i \mu_m x},$$

$$T_{b,\mu} = \sum_{-\infty}^{\infty} b_m \delta_{\mu_m} \sim \sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{-2\pi i \lambda_n x}$$

sont donc équivalentes.

Remarques 1. — Dans les hypothèses du théorème 1, $T_{b,\mu}$ est transformée de Fourier de $T_{a,\lambda}$ au sens de [5].

2. Il est facile de voir que la condition (A_2) résulte de $C\{\lambda_n, \mu_n, a_n\, b_n\}$ et de $\sum_{\mu_n \neq 0} |\mu_n|^{-q} < \infty$ pour q assez grand.

3. On peut obtenir des résultats du même type que la proposition 2, faisant intervenir les procédés de sommation; nous ne le ferons pas ici.

PROPOSITION 3. — *Les relations* $C\{\lambda_n, \mu_n, a_n, b_n\}$, (A_1) *et* (A_2) *entraînent la « relation modulaire »*

$$\text{(M)} \qquad \sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n^2 \pi x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{-\infty}^{\infty} b_n e^{-\mu_n^2 \frac{\pi}{x}}.$$

Évident, en prenant

$$f(u) = e^{-u^2 \pi x}, \qquad \hat{f}(u) = \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-u^2 \frac{\pi}{x}}.$$

PROPOSITION 4. — *Les relations* (M), (S), (A_1) *et* (A_2) *entraînent* $A\{\lambda_n, \mu_n, a_n, b_n; 1\}$, *avec*

$$\chi(s) = \frac{b_0}{s-1} - \frac{a_0}{s} + \textit{fonction entière.}$$

Démonstration. — Copiée à la lettre sur celle de l'équation fonctionnelle de Riemann, d'après [6], p. 21-22; la fonction entière est

$$\int_1^{\infty} \left(x^{\frac{s}{2}-1} \sum_1^{\infty} a_n e^{-\lambda_n^2 \pi x} + x^{\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} \sum_1^{\infty} b_m e^{-\mu_n^2 \pi x} \right) dx.$$

PROPOSITION 5. — *Les relations* $C\{\lambda_n, \mu_n, a_n \lambda_n^{-1}, i b_n \mu_n^{-1}\}$, (A_1) *et* (A_2) *entraînent la pseudo-relation modulaire*

$$\text{(M}'\text{)} \qquad \sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n^2 \pi x} = x^{-\frac{3}{2}} \sum_{-\infty}^{\infty} b_n e^{-\mu_n^2 \frac{\pi}{x}}.$$

Évident d'après la proposition 2, en prenant

$$f(u) = u\, e^{-\pi u^2 x}, \qquad \hat{f}(u) = -\, i x^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{\pi u^2}{x}}.$$

PROPOSITION 6. — *Les relations* (M') (S) (*avec* $a_0 = b_0 = 0$), (A_1) *et* (A_2) *entraînent* $A\{\lambda_n, \mu_n, a_n, b_n; 3\}$, *avec* $\chi(s) =$ *fonction entière.*

Démonstration analogue à celle de la proposition 4. On a

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\varphi(s)\pi^{-\frac{s}{2}} = \int_0^\infty x^{\frac{s}{2}-1}\sum_{n=1}^\infty a_n e^{-\pi\lambda_n^2 x}\,dx \qquad \text{pour} \quad \sigma > \alpha,$$

d'après [6], p. 21. On partage l'intégrale en $A(s) = \int_0^1$ et $B(s) = \int_1^\infty$. D'après (M'),

$$\begin{aligned} A(s) &= \int_0^1 x^{\frac{s}{2}-\frac{5}{2}} \sum_{n=1}^\infty b_n e^{-\mu_n^2 \frac{\pi}{x}}\,dx \\ &= \int_1^\infty x^{-\frac{s}{2}+\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^\infty b_n e^{-\mu_n^2 \pi x}\,dx. \end{aligned}$$

Ainsi $A(s)$ et $B(s)$ sont des fonctions entières, et elles sont échangées quand on échange les a_n et les b_n, les λ_n et les μ_n, s et $3-s$. D'où le résultat, avec $\chi(s) = A(s) + B(s)$.

Résumons les propositions 3, 4, 5 et 6.

THÉORÈME 2. — *Supposons satisfaites la condition de symétrie* (S), *et les conditions* (A_1) *et* (A_2). *Si l'on a*

$$\sum_{-\infty}^\infty a_n \delta_{\lambda_n} \sim \sum_{-\infty}^\infty b_n e^{-2\pi i \mu_n x},$$

$\varphi(s)$ *et* $\psi(s)$ *satisfont les conditions* (A_3), (A_4) *et* (A_5) *avec*

$$\delta = 1, \qquad \chi(s) = \frac{b_0}{s-1} - \frac{a_0}{s} + \textit{fonction entière}.$$

Si l'on a

$$\sum_{-\infty}^{\infty}{}' a_n \lambda_n^{-1} \delta_{\lambda_n} \sim i \sum_{-\infty}^{\infty}{}' b_n \mu_n^{-1} e^{2\pi i \mu_n x}$$

(*les sommations étant prises pour* $n \neq 0$, $m \neq 0$), $\varphi(s)$ *et* $\psi(s)$ *satisfont les conditions* (A_3), (A_4) *et* (A_5) *avec* $\delta = 3$, $\chi(s) =$ *fonction entière.*

Le théorème 2 permet d'obtenir aisément des équations fonctionnelles du type de Riemann, en construisant des couples de distribution $T_{a,\lambda}$ et $T_{b,\mu}$, soit paires, soit impaires, satisfaisant les hypothèses du théorème 1.

CONSTRUCTION DE $T_{a,\lambda}$ ET $T_{b,\mu}$ SATISFAISANT LES HYPOTHÈSES DU THÉORÈME 1. — A partir de couples $T_{a,\lambda}$, $T_{b,\mu}$ connus, on peut en construire d'autres par les opérations simples suivantes (les trois premières permettant de transformer un couple en un autre) :

1° Homothétie : changement de λ_n en $\rho\lambda_n$, de μ_n en $\frac{\mu_n}{\rho}$, de b_n en $\frac{b_n}{\rho}$;

2° Translation de $T_{a,\lambda}$ et multiplication de $T_{b,\mu}$ par une exponentielle : changement de λ_n en λ_n+h, et de b_m en $b_m e^{-2\pi i\mu_m h}$;

3° Changement de $T_{a,\lambda}$, $T_{b,\mu}$ en $T_{b,\mu}$, $T_{a,(-\lambda)}$;

4° Combinaisons linéaires de couples connus.

Le couple le plus simple est

$$T_{a,\lambda}=\sum_{-\infty}^{\infty}\delta_n, \qquad T_{b,\mu}=\sum_{-\infty}^{\infty}\delta_n,$$

qui correspond à la formule de Poisson (th. 1) et à l'équation fonctionnelle de Riemann (th. 2). Les opérations 1°, 2°, 3°, 4° permettent d'en tirer une infinité de formules du type de Poisson et d'équations fonctionnelles du type de Riemann. Ainsi

$$T_{a,\lambda}=\sum_{-\infty}^{\infty}\left(\delta_{n+\frac{1}{6}}+\delta_{n-\frac{1}{6}}\right), \qquad T_{b,\mu}=2\sum_{-\infty}^{\infty}\delta_n\cos\frac{2\pi n}{6}\cdot$$

donne la formule de Poisson-Ramanujan;

$$T_{a,\lambda}=\sum_{-\infty}^{\infty}\delta_{n+\frac{1}{2}}, \qquad T_{b,\mu}=\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^n\delta_n$$

donne l'équation fonctionnelle liant $(2^s-1)\zeta(s)$ et $(2^{1-s}-1)\zeta(s)(\delta=1)$;

$$T_{a,\lambda}=\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^n\delta_{n+\frac{1}{2}}, \qquad T_{b,\mu}=i\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^n\delta_{n+\frac{1}{2}}$$

donne l'équation fonctionnelle de $2^{s-1}L(s-1)$ $(\delta=3)$. On notera que seuls les couples de distributions $T_{a,\lambda}$, $T_{b,\mu}$ paires, resp. impaires, donnent une équation fonctionnelle (avec $\delta=1$, resp. 3).

Le but de notre prochaine section est de donner une sorte de réciproque au théorème 2.

2. Étude de $A\{\lambda_n, \mu_n, a_n, b_n; \delta\}$ avec δ impair.

Supposons $A\{\lambda_n, \mu_n, a_n, b_n; \delta\}$. La condition (A_2) entraîne que $\sum_1^{\infty} b_n\cos(2\pi\mu_n x)$ est la série de Fourier d'une distribution presque périodique. Quand δ est impair, nous expliciterons très simplement cette distribution (moyennant une condition additionnelle sur les λ_n) en fonction de $\{\lambda_n\}$ et de $\{a_n\}$.

Pour cela, nous commençons, comme en [2], à calculer

$$g(t)=\sum_1^{\infty} b_n e^{-2\pi\mu_n t} \qquad (t=\sigma+ix;\ \sigma>0).$$

Voici une variante du calcul fait en [2], qui nous a été communiquée par

M. Chandrasekharan; elle permet d'aboutir plus vite à la formule (6) et de remplacer par (A_3) la condition plus restrictive de Bochner et Chandrasekharan [*cf.* [2], form. (2.8)] Elle se fonde sur les formules élémentaires

$$(1)\qquad e^{-t} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty} \Gamma(s)\, t^{-s}\, ds \qquad \text{pour}\quad \mathrm{R}t > 0, \quad \sigma_0 > 0,$$

$$(2)\qquad \Gamma(s) = \pi^{-\frac{1}{2}} 2^{s-1} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right),$$

$$(3)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty} X^{-s}\,\Gamma(q-s)\,\Gamma(s)\, ds = \Gamma(q)\left((1+X)^{-q} + \sum_{0 \leq j < \sigma_0 - q} A_j X^{-q-j}\right),$$

avec

$$A_j = \frac{(-1)^j \Gamma(q+j)}{j!\,\Gamma(q)} \qquad \text{pour}\quad |\arg X| < \pi, \quad \sigma_0 > q > 0.$$

Supposons $\mathrm{R}t > 0$ et σ_0 assez grand. On a alors, d'après (1),

$$g(t) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{1}^{\infty} b_n \int_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty} \Gamma(s)\,(2\pi\mu_n t)^{-s}\, ds$$

et, d'après (A_2),

$$g(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty} G(s, t)\, ds,$$

avec

$$G(s, t) = \Gamma(s)\,(2\pi t)^{-s}\psi(s)$$

qui s'écrit, grâce à (2) et (A_5),

$$(4)\qquad G(s, t) = \frac{1}{2}\pi^{-\frac{s+1}{2}}\, t^{-s}\,\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)\chi(\delta - s).$$

Soit C une courbe rectifiable entourant K. Posons

$$(5)\qquad K(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C+} G(s, t)\, ds.$$

Toujours pour $\mathrm{R}t > 0$ et σ_0 assez grand, on a

$$g(t) = K(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_{\delta - \sigma_0 - i\infty}^{\delta - \sigma_0 + i\infty} G(s, t)\, dt = K(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty} G(\delta - s, t)\, ds,$$

avec

$$G(\delta - s, t) = \frac{1}{2}\pi^{-\frac{\delta+1}{2}}\, t^{-\delta}\pi^{\frac{s}{2}}\, t^{s}\,\Gamma\left(\frac{\delta - s + 1}{2}\right)\chi(s)$$

et, d'après (A_4),

$$G(\delta - s, t) = \frac{1}{2}\pi^{-\frac{\delta+1}{2}}\, t^{-\delta}\, t^{s}\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\delta - s + 1}{2}\right)\varphi(s).$$

Posons $q = \frac{\delta + 1}{2}$. D'après (A_1) et (3), on a

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty} \frac{1}{2} t^s \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(q - \frac{s}{2}\right)\varphi(s)\, ds = \Gamma(q)\sum_{n=1}^{\infty} a_n \left[\left(1 + \frac{\lambda_n^2}{t^2}\right)^{-q} + \sum_{0 \leq 2j < \sigma_0 - 2q} A_j \left(\frac{t^2}{\lambda_n^2}\right)^{q+j}\right],$$

donc

$$g(t) = K(t) + \pi^{-q}\Gamma(q)\sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{t}{(t^2 + \lambda_n^2)^q} + \sum_{0 \leq 2j < \sigma_0 - 2q} A_j \frac{t^{1+2j}}{\lambda_n^{2q+2j}}\right). \tag{6}$$

La formule (6) est valable quel que soit $\delta > 0$, pour $\mathrm{R}t > 0$, à condition de choisir σ_0 assez grand. On s'assure aisément que la série converge uniformément sur tout compact. Comme

$$\frac{1}{2}(g(\sigma + ix) + g(\sigma - ix)) = \sum_{1}^{\infty} b_n e^{-2\pi\mu_n\sigma}\cos(2\pi\mu_n x),$$

on a

$$T = \lim_{\sigma \to 0+} \frac{1}{2}(g(\sigma + ix) + g(\sigma - ix)) \tag{7}$$

[car, d'après (A_2), une primitive d'ordre α assez grand de T est limite uniforme de primitives d'ordre α du second membre].

Supposons maintenant δ impair, de sorte que q soit un entier naturel. Alors

$$T = T_1 + T_2, \qquad \text{où} \quad T_1 = \lim_{\sigma \to 0+} \frac{1}{2}(K(\sigma + ix) + K(\sigma - ix))$$

et T_2 est une distribution portée par les $\pm\lambda_n$. Si $\delta = 1$ ou $\delta = 3$, et si $\inf(\mu_{n+1} - \mu_n) > 0$, nous pourrions nous appuyer sur un théorème d'Agmon [9] pour montrer que $K(t)$ est une fonction méromorphe, ce qui facilite considérablement le calcul de T_1. Nous préférons faire l'étude dans le cas général; sans recourir au théorème d'Agmon, nous retrouverons, dans des conditions moins restrictives, le fait que $K(t)$ est méromorphe.

Calcul de T_2. — On a

$$T_2 = \pi^{-q}\Gamma(q)\sum_{1}^{\infty} a_n S(\lambda_n), \tag{8}$$

$$S(\lambda) = \lim_{\sigma \to 0+} \frac{1}{2}\left(\frac{\sigma + ix}{((\sigma + ix)^2 + \lambda^2)^q} + \frac{\sigma - ix}{((\sigma - ix)^2 + \lambda^2)^q}\right).$$

On calcule facilement $S(\lambda)$ en décomposant la fraction $\frac{x}{(x^2 - \lambda^2)^q}$ en éléments simples

$$x(x^2 - 1)^{-q} = \sum_{k=1}^{q} C_k((x - 1)^{-k} - (-x - 1)^{-k}), \tag{9}$$

$$x(x^2 - \lambda^2)^{-q} = \sum_{k=1}^{q} C_k(\lambda^{k-2q+1}((x - \lambda)^{-k} - (-x - \lambda)^{-k}).$$

En observant que

$$\lim_{\sigma\to 0+}((x-i\sigma-\lambda)^{-k}-(-x+i\sigma-\lambda)^{-k}+(-x-i\sigma-\lambda)^{-k}-(x+i\sigma-\lambda)^{-k})$$
$$=\frac{2\pi i}{(k-1)!}(\delta_\lambda^{(k-1)}+(-1)^{k-1}\delta_{-\lambda}^{(k-1)}),$$

on obtient

$$S(\lambda)=(-1)^{q+1}\pi\sum_{k=1}^{q}\frac{C_k\lambda^{k-2q+1}}{(k-1)!}(\delta_\lambda^{(k-1)}+(-1)^{k-1}\delta_{-\lambda}^{(k-1)}). \tag{10}$$

Si $\delta=1$, on a $q=1$, $C_1=\frac{1}{2}$ et

$$T_2=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}a_n(\delta_{\lambda_n}+\delta_{-\lambda_n}). \tag{11}$$

Si $\delta=3$, on a $q=2$, $C_1=0$, $C_2=\frac{1}{4}$, et

$$T_2=\frac{-1}{4\pi}\sum_{n=1}^{\infty}a_n\lambda_n^{-1}(\delta'_{\lambda_n}-\delta'_{-\lambda_n}). \tag{11'}$$

Si $\delta>3$, q est un entier >2; le premier membre de (9) étant, à un facteur près, la dérivée de $(x^2-1)^{-q+1}$, on voit que $C_1=0$ et $C_2, C_3, \ldots, C_q\neq 0$. Comme $C_q\neq 0$, les primitives d'ordre q de T sont des fonctions discontinues [admettant en λ_n un saut égal au coefficient de $\delta_{\lambda_n}^{(q-1)}$ dans le développement de T]. On ne peut donc avoir

$$\sum_{1}^{\infty}|b_m|\mu_m^{-q}<\infty.$$

En utilisant le fait que $C_2\neq 0$, nous verrons dans la suite que, moyennant l'hypothèse $\inf(\lambda_{n+1}-\lambda_n)>0$ (ou même une hypothèse plus faible, que nous énoncerons) le cas $\delta>3$ est à éliminer.

Calcul de T_1. — Supposons qu'on ajoute à la condition (A_3) l'hypothèse suivante, soit $H\{\chi(s)\}$: $\chi(s)$ est méromorphe, et n'admet pas de pôle en dehors des entiers $0, \pm 1, \ldots$. Alors les formules (4) et (5) entraînent que $K(t)$ est la somme d'un polynome en t et d'un polynome en $\frac{1}{t}$, de sorte que

$$T_1=\lim_{\sigma\to 0+}\frac{1}{2}(K(\sigma+ix)+K(\sigma-ix))$$

est la somme d'une constante et d'une distribution portée par 0. Nous allons atteindre le même résultat en faisant une hypothèse sur la suite $\{\lambda_n\}$.

Hypothèse $H_0\{\lambda_n\}$: Il existe un entier ν et des intervalles disjoints $I_j (j=1, 2, \ldots)$ de longueurs indéfiniment croissantes tels que tout intervalle de longueur unité contenu dans un I_j contienne au plus ν points λ_n.

Posons $t=e^\zeta$. D'après (4) et (5), $K(t)=L(\zeta)$ est une fonction entière de type exponentiel en ζ. En dehors de l'origine, on a

$$(12)\qquad T_1 = \frac{1}{2}\left(L\left(\xi + i\frac{\pi}{2}\right) + L\left(\xi - i\frac{\pi}{2}\right)\right) = L_1(\xi) = K_1(x) \qquad (x = \pm e^{\xi}).$$

Nous allons montrer que cette quantité est une constante; cela prouve que T_1 est la somme d'une constante et d'une distribution portée par o.

Remarquons que $L_1(\xi)$ est une fonction entière de type exponentiel, soit

$$L_1(\xi) = O(e^{A|\xi|});$$

alors on a, pour les dérivées d'ordre p,

$$L_1^{(p)}(\xi) = O(e^{A|\zeta|}) \text{ et } K_1^{(p)}(x) = O(|x|^{A-p}) \ (x \to \infty).$$

Prenons $p > A$, et soit α une fonction indéfiniment dérivable à support $[-\eta, \eta]$, non négative, et telle que

$$\int \alpha(x)\, dx = 1.$$

En dehors des intervalles $(\lambda_n - \eta, \lambda_n + \eta)$, on a

$$T^{(p)} \star \alpha(x) = K_1^{(p)} \star \alpha(x) = o(1) \qquad (x \to \infty).$$

Supposons $2\eta\nu < 1$; d'après la condition $H_0\{\lambda_n\}$, tout segment de longueur $2\eta\nu$ contenu dans un I_j contient au moins un x tel que

$$T^{(p)} \star \alpha(x) = K_1^{(p)} \star \alpha(x),$$

donc tel que

$$|T^{(p)} \star \alpha(x)| < \varepsilon_j \qquad (\varepsilon_j \to 0 \text{ quand } j \to \infty).$$

Supposons maintenant $K_1^{(p)} \not\equiv 0$, et montrons que nous arrivons à une contradiction. Il existe sur $(0, \infty)$ un intervalle J, ne contenant aucun λ_n et de mesure < 1, où l'argument de $K_1^{(p)}$ varie de moins de $\frac{\pi}{2}$ et où son module est supérieur à $4\varepsilon > 0$. Prenons $\eta = \frac{\text{mes. J}}{2\nu + 2}\left(< \frac{1}{2\nu}\right)$ et α comme ci-dessus; alors, sur l'intervalle J_η concentrique à J et de longueur $2\eta\nu$, on a

$$|K_1^{(p)} \star \alpha| = |T^{(p)} \star \alpha| > 2\varepsilon.$$

Comme $T^{(p)} \star \alpha$ est presque-périodique au sens de Bohr, elle admet une ε-presque-période dans tout intervalle assez grand; pour $j > j_0$ assez grand, elle admet donc une ε-presque-période qui translate J_η à l'intérieur de I_j; sur ce translaté, soit $J_\eta^{(j)}$, on a

$$|T_1^{(p)} \star \alpha(x)| > \varepsilon.$$

Mais, d'après l'alinéa précédent, il existe un point $x \in J_\eta^{(j)}$, où

$$|T^{(p)} \star \alpha(x)| < \varepsilon_j,$$

et l'on peut prendre $\varepsilon_j < \varepsilon$. D'où la contradiction.

Donc $K_1^{(p)} \equiv 0$, et K_1 est un polynome. En utilisant encore la presque-périodicité de T et l'hypothèse $H_0\{\lambda_n\}$, il est immédiat que K_1 est une constante. Ainsi, comme nous l'avons déjà annoncé, T_1 est la somme d'une constante, soit $-\frac{b_0}{2}$, et d'une distribution S_0 portée par o. On a

$$S_0 + T_2 \sim \frac{b_0}{2} + \sum_1^\infty b_n \cos(2\pi\mu_n(x)), \tag{13}$$

T_2 étant donné par (8) et (10).

Calcul de b_0. — Observons que $\frac{b_0}{2}$ est la valeur moyenne de $(S_0 + T_2) \star \alpha$, où α est indéfiniment dérivable à support compact, $\int \alpha(x)\,dx = 1$. L'hypothèse $H_0\{\lambda_n\}$ entraîne l'existence d'une suite infinie $\{n_i\}$ telle que

$$\inf(\lambda_{n_i+1} - \lambda_{n_i}) = 2\eta > 0;$$

on prendra $[-\eta, \eta]$ pour support de α. En écrivant

$$\frac{b_0}{2} = \lim_{i \to \infty} (\lambda_{n_i} + \eta)^{-1} \int_0^{\lambda_{n_i}+\eta} (S_0 + T_2) \star \alpha(x)\,dx,$$

on obtient une expression explicite de b_0 [rappelons que pour $\delta = 3, 5, \ldots$, on a $C_1 = 0$ dans (10)]

$$\begin{cases} b_0 = \lim\limits_{i \to \infty} \dfrac{a_1 + \ldots + a_{n_i}}{\lambda_{n_i}} & \text{pour} \quad \delta = 1, \\ b_0 = 0 & \text{pour} \quad \delta = 3, 5, \ldots. \end{cases} \tag{14}$$

Calcul de S_0. — Reportons-nous à la formule (12). Moyennant $H_0\{\lambda_n\}$, on a démontré que

$$L\left(\xi + i\frac{\pi}{2}\right) + L\left(\xi - i\frac{\pi}{2}\right) \equiv -b_0.$$

Ainsi $L(\xi) + \frac{b_0}{2}$, fonction de type exponentiel, est de la forme $\sum_{-P}^{P} \gamma_p e^{-(2p+1)\xi}$.

Autrement dit,

$$K(t) = \frac{b_0}{2} + \sum_{-P}^{P} \gamma_p t^{-2p-1}. \tag{15}$$

D'après (4) et (5), cela signifie que

$$\chi(\delta - s) = \frac{r_0}{s} + \sum_0^P \frac{r_p}{s - 2p - 1} + \text{fonction entière}, \tag{16}$$

avec

$$-\frac{b_0}{2} = \frac{1}{2}\pi^{-\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) r_0 = \frac{r_0}{2}$$

et

$$\gamma_p = \frac{1}{2}\pi^{-p-1}\Gamma(p+1)r_p \qquad (p=0,\ 1,\ \ldots,\ \mathrm{P}).$$

Supposons maintenant qu'on calcule, par le même procédé que T, la distribution

$$\mathrm{T}' \sim \sum_{1}^{\infty} a_n \cos(2\pi\lambda_n x),$$

On aura $\mathrm{T}' = \mathrm{T}'_1 + \mathrm{T}'_2$, T'_2 étant porté par les $\pm\mu_n$. En se reportant au calcul de T_1, on voit que l'hypothèse $\mathrm{H}\{\chi(\delta - s)\}$ est satisfaite d'après (16), donc que T'_1 est somme d'une distribution S'_0 portée par o et d'une constante $-\frac{a_0}{2}$. Le calcul de S'_0 donnera

$$\chi(s) = \frac{r'_0}{s} + \sum_{0}^{\mathrm{P}'} \frac{r'_p}{s-2p-1} + \text{fonction entière}. \tag{16'}$$

Pour $\delta = 1$, (16) et (16′) ne sont compatibles que si $r_p = \gamma_p = 0$ quand $p \geqq 1$.

Pour $\delta = 3,\ 5,\ \ldots$, on a $b_0 = r_0 = r'_0 = 0$: (16) et (16′) ne sont compatibles que si χ est une fonction entière. D'où

$$\begin{cases} \mathrm{S}_0 = \frac{a_0}{2}\delta_0 & \text{pour } \delta = 1, \\ \mathrm{S}_0 = 0 & \text{pour } \delta = 3,\ 5,\ \ldots. \end{cases} \tag{17}$$

Discussion suivant les valeurs de δ :

$\delta = 1$: On traduit (13) à l'aide de (11) et (17); on obtient

$$\sum_{-\infty}^{\infty} a_n \delta_{\lambda_n} \sim \sum_{-\infty}^{\infty} b_n e^{2\pi i \mu_n x}, \tag{18}$$

les suites étant définies pour $n < 0$ par la condition de symétrie (S).

$\delta = 3$: D'après (11′), (13) et (17), on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \lambda_n^{-1} (\delta'_{\lambda_n} - \delta'_{-\lambda_n}) \sim -4\pi \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos(2\pi\mu_n x),$$

soit, en intégrant

$$\sum_{-\infty}^{\infty}{}' a_n \lambda_n^{-1} \delta_{\lambda_n} \sim i \sum_{-\infty}^{\infty}{}' b_n \mu_n^{-1} e^{2\pi i \mu_n x}, \tag{19}$$

les sommations étant prises pour $n \neq 0$, et les suites étant définies par (S) pour $n < 0$.

$\delta = 3,\ 5,\ \ldots$. Nous faisons maintenant l'hypothèse $\mathrm{H}_1\{\lambda_n\}$ un peu plus forte que $\mathrm{H}_0\{\lambda_n\}$: il existe une constante $h > 0$ et des intervalles I_j de longueur indéfiniment croissante ($j=1, 2, \ldots$) tels que, sur les I_j, la distance entre deux points λ_n consécutifs dépasse toujours h. D'après (14), il existe une primitive double de T, soit $T^{(-2)}$, qui est une distribution presque-périodique; elle est somme d'une distribution portée par les λ_n, et d'une fonction F constante dans chaque intervalle $(\lambda_n, \lambda_{n+1})$, le saut en λ_n étant le coefficient de δ'_{λ_n} dans le développement de T, soit

$$F_n = (-\pi)^{-q+1}\Gamma(q)C_2 a_n \lambda_n^{3-2q}.$$

Prenons pour α une fonction indéfiniment dérivable non négative à support $\left[-\frac{h}{3}, \frac{h}{3}\right]$. Choisissons un $a_\nu \neq 0$, et $\varepsilon < \frac{|F_\nu|}{3}$. Comme, pour j assez grand, il existe une ε-presque période de $T^{(-2)} \star \alpha$ translatant λ_ν dans I_j, il existe dans chaque I_j assez grand un λ_n tel que $|F_n| > \frac{|F_\nu|}{3}$. Donc on a

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \, |a_n \lambda_n^{3-2q}| > 0.$$

Supposons, en outre (ce qui est possible), que

$$\alpha'(0) = \ldots = \alpha^{(q-2)}(0) = 0, \qquad \alpha^{(q-1)}(0) = 1.$$

Alors la valeur de $T\star\alpha$ en λ_n est le coefficient de $\delta_n^{(q-1)}$ dans le développement de T, qui est $(-\pi)^{-q+1}\Gamma(q)C_q a_n \lambda_n^{1-q}$. Cette valeur n'est pas bornée quand $n\to\infty$, ce qui contredit le fait que $T\star\alpha$ est une fonction p.-p. usuelle. On arrive donc à une contradiction : l'hypothèse $H_1\{\lambda_n\}$ est incompatible avec $\delta = 3, 5, \ldots$.

Il nous paraît probable mais nous n'avons pas démontré, que l'hypothèse $H_0\{\lambda_p\}$ est elle-même incompatible avec δ impair > 3.

Résumons maintenant les principaux résultats obtenus. Rappelons le sens des hypothèses :

$H_0\{\lambda_n\}$: *existence d'intervalles* I_j *de longueur indéfiniment croissante, et d'un* ν *tels que, pour tout* $\lambda_n \in I_j$, *on ait* $\lambda_{n+\nu} - \lambda_n > 1$;

$H_1\{\lambda_n\}$: *existence d'intervalles* I_j *de longueur indéfiniment croissante, et d'un* $h > 0$ *tel que, pour tout* $\lambda_n \in I_j$, *on ait* $\lambda_{n+1} - \lambda_n > h$.

THÉORÈME 3. — *Moyennant* $H_0\{\lambda_n\}$, $A\{\lambda_n, \mu_n, a_n, b_n; \delta)$ *entraîne :*

— *pour* $\delta = 1$,

$$\sum_{-\infty}^{\infty} a_n \delta_{\lambda_n} \sim \sum_{-\infty}^{\infty} b_n e^{2\pi i \mu_n x},$$

avec la condition de symétrie (S) *et*

$$b_0 = \lim_{i\to\infty} \frac{a_1 + \ldots + a_{n_i}}{\lambda_{n_i}}$$

si $\inf(\lambda_{n_i+1} - \lambda_{n_i}) > 0$, *et avec* a_0 *convenablement choisi;*

— *pour* $\delta = 3$,

$$\sum_{-\infty}^{\infty}{}' a_n \lambda_n^{-1} \delta_{\lambda_n} \sim i \sum_{-\infty}^{\infty}{}' b_n \mu_n^{-1} e^{2\pi i \mu_n x},$$

avec la condition de symétrie (S), *les sommations étant faites pour* $n \neq 0$. *Moyennant* $H_1\{\lambda_n\}$, *il est impossible d'avoir* $A\{\lambda_n, \mu_n, a_n, b_n; \delta\}$ *avec* δ *impair supérieur à* 3.

Ce théorème permet d'interpréter tous les résultats de notre prochaine et dernière section, portant sur des distributions du type *c*, comme résultats concernant le problème *a*. Nous ne ferons pas systématiquement cette traduction.

Remarquons que, d'après les propositions 4 et 6, les relations modulaires (M) et (M′), jointes à (A_1), (A_2) et (S), entraînent $A\{\lambda_n, \mu_n, a_n, b_n; \delta\}$, avec $\delta = 1$ ou 3. Si l'on ajoute la condition $H_0\{\lambda_n\}$, ces relations modulaires entraînent donc des formules du type de Poisson (prop. 2). Il est sans doute possible d'atteindre ce résultat plus directement.

3. Théorèmes d'unicité pour des distributions du type *c*.

Les suites $\{\lambda_n\}$ et $\{\mu_n\}$ seront ici réelles, croissantes, les suites $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ complexes ($n = \ldots -1, 0, 1, \ldots$) et l'on suppose réalisées les conditions

$$(A_1): \quad \sum_{\lambda_n \neq 0} |a_n|\,|\lambda_n|^{-\alpha} < \infty \quad \text{pour un } \alpha \text{ réel},$$

$$(A_2): \quad \sum_{\mu_n \neq 0} |b_n|\,|\mu_n|^{-\beta} < \infty \quad \text{pour un } \beta \text{ réel};$$

$$C\{\lambda_n, \mu_n, a_n, b_n\}: \quad T_{a,\lambda} = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n \delta_{\lambda_n} \sim \sum_{-\infty}^{\infty} b_n e^{2\pi i \mu_n x}$$

qui sont les hypothèses du théorème 2. Comme nous l'avons remarqué,

$$T_{b,\mu} = \sum_{-\infty}^{\infty} b_n \delta_{\mu_n}$$

est la transformée de Fourier de $T_{a,\lambda}$ au sens de [5].

Plus généralement, si S et $\hat{S}$ sont deux distributions tempérées à support discret telle que $\hat{S}$ est la transformée de Fourier de S (pour ces notions, *voir* [5]), nous appellerons « support ordonné » de S une suite $\{\nu_n\}$ ($n = \ldots -1, 0, 1, \ldots$) non décroissante, et comptant p éléments en un point où la restriction de S est une distribution d'ordre $p - 1$; nous appellerons spectre de S tout support ordonné de $\hat{S}$.

Étant donné une telle suite $\{\nu_n\}$, nous posons les définitions suivantes :

$$n(r) = n_\nu(r) = n$$

sur chaque intervalle $]\nu_n, \nu_{n+1}[$, et $n(r)$ non décroissante;

$$N(r) = N_\nu(r) = \frac{1}{r}\int_{\pm 1}^{r} \frac{n(r)-n(0)}{r}\,dr, \qquad \pm 1 = \frac{r}{|r|};$$

$$\underline{D} = \underline{D}\{\nu\} = \varliminf_{r\to\infty} \frac{N(r)+N(-r)}{2r}.$$

Il existe une inégalité simple entre la distance de deux points consécutifs du support de S, et le $\underline{D}$ de son spectre.

Proposition 7. — *Soit* S *une distribution tempérée à support discret dont la transformée de Fourier a la même propriété, et soit* $\{\hat{\nu}_n\}$ *son spectre. Sur tout intervalle fermé de longueur* $\underline{D}\{\hat{\nu}\}$, *il y a au moins un point du support de* S.

La démonstration est une simple adaptation de l'étude faite pour les fonctions moyenne-périodiques en ([7], p. 72). Si l'intervalle $[-l, l]$ est disjoint du support de S, il existe une régularisée $S \star \alpha$ qui s'annule sur $[-l, l]$. Il est facile de voir que sa transformée de Carleman, définie par

$$F(w) = \int_{-\infty}^{0} S \star \alpha(x)\, e^{-2\pi i x w}\,dx \qquad (w = u + iv,\ v > 0),$$

$$F(w) = -\int_{0}^{\infty} S \star \alpha(x)\, e^{-2\pi i x w}\,dx \qquad (v < 0)$$

est méromorphe et que ses pôles (comptés avec leur ordre de multiplicité) sont contenus dans $\{\hat{\nu}_n\}$. D'autre part, $F(w) = |v|^{-p} e^{2\pi|v|l})$ pour un entier p. En appliquant à $F(w)$ la formule de Jensen, on obtient aisément $2l \leqq \underline{D}\{\hat{\nu}\}$. D'où, immédiatement, le résultat annoncé.

La proposition 7 pourrait être appliquée au problème *a* (moyennant, par exemple, les hypothèses du théorème 3) et permettrait de remplacer, dans plusieurs énoncés de [2] et [4], $\varlimsup_{r\to\infty} \frac{N(r)}{r}$ par $\varliminf \frac{N(r)}{r}$. Cependant elle peut être nettement améliorée, dans le cas où S est presque-périodique, en faisant intervenir les densités supérieure et inférieure de répartition.

Rappelons (*cf.* [8]) qu'une suite réelle $\{\nu_n^\star\}$ est dite bien répartie et de densité D si $\nu_n^\star - \frac{n}{D} = O(1)\ (n \to \pm\infty)$. Nous noterons $\Delta_\bullet = \Delta_\bullet(\nu)$ [resp. $\Delta^\bullet = \Delta^\bullet(\nu)$] la borne supérieure (resp. inférieure) des densités des suites bien réparties contenues dans $\{\nu_n\}$ (resp. contenant $\{\nu_n\}$); on a

$$\Delta^\bullet = \lim_{h\to\infty} \varlimsup_{|r|\to\infty} \frac{n(r+h)-n(r)}{h},$$

$$\Delta_\bullet = \lim_{h\to\infty} \varliminf_{|r|\to\infty} \frac{n(r+h)-n(r)}{h}.$$

On vérifie aisément que $\Delta_\bullet$ est inférieure à la densité minimum de Pólya (et *a fortiori* à $\underline{D}$) et que

$$\Delta_{.} \geq \frac{1}{\overline{\lim\limits_{|n| \to \infty}} |\nu_{n+1} - \nu_n|}.$$

Nous dirons que les suites $\Lambda^{(p)} = \{ \nu_n^{(p)} \}$ tendent vers $\Lambda = \{ \nu_n \}$ si $\lim\limits_p \nu_n^{(p)} = \nu_n$ pour chaque n. On vérifie facilement que, si Λ est une suite bien répartie de densité D, toute suite limite de translatées de Λ est également bien répartie et de densité D (mais, même si Λ n'admet pas de points multiples, la suite limite peut en admettre). Nous utiliserons le lemme suivant, dont la démonstration est copiée de celle du lemme 3 de [8].

LEMME. — *De l'ensemble des translatées d'une suite* $\{ \nu_n \}$, *on peut extraire une suite convergeant vers une* $\{ \nu_n^\star \}$ *telle que* $\underline{D} \{ \nu^\star \} \leq \Delta_{.} \{ \nu \}$.

Supposons que S est presque-périodique à support discret, et considérons une suite de ses translatées dont le support ordonné tend vers $\{ \nu_n^\star \}$. On peut en extraire (presque-périodicité) une suite convergeant vers une distribution presque-périodique $S^\star$ dont la série de Fourier ne diffère de celle de S que par les arguments des coefficients. Comme $\hat{S}$ est tempérée, il en est de même de $\hat{S}^\star$, dont $\hat{S}^\star$ admet une transformée de Fourier qui est la symétrique de $S^\star$. D'après la proposition 7 et le lemme, on a donc :

THÉORÈME 4. — *Soit* S *une distribution presque-périodique à support et à spectre discret, et soit* $\{ \nu_n \}$ *son support ordonné. Sur tout intervalle fermé de longueur* $\Delta_{.} \{ \nu \}$, *il y a au moins un point du spectre de* S.

Si nous interprétons ce résultat en prenant $S = T_{a,\lambda}$ et $\hat{S} = T_{b,\mu}$, nous avons le

COROLLAIRE. — *Pour tout* n, $\mu_{n+1} - \mu_n \leq \Delta_{.}(\lambda)$. *En particulier*, $\Delta_{.}(\lambda)\Delta_{.}(\mu) \geq 1$.

Cherchons dans quel cas on peut avoir égalité. Si pour *une* valeur de n, on a $\mu_{n+1} - \mu_n < \Delta_{.}(\lambda)$, il existe une suite bien répartie $\{ \mu_{n_i} \}$ pour lesquels on a la même propriété (presque-périodicité de $T_{a,\mu}$); dans ces conditions, on a $\Delta_{.}(\lambda)\Delta_{.}(\mu) < 1$. Donc, si l'on a $\Delta_{.}(\lambda)\Delta_{.}(\mu) = 1$, c'est que pour tout n on a

$$\mu_{n+1} - \mu_n = \Delta_{.}(\lambda) \qquad \text{et} \qquad \lambda_{n+1} - \lambda_n = \Delta_{.}(\mu).$$

Par une « homothétie » (opération 1 du paragraphe 1), on peut se ramener à $\Delta_{.}(\lambda) = \Delta_{.}(\mu) = 1$, et par « translation » (opération 2) à $\lambda_0 = \mu_0 = 0$; alors

$$\lambda_n = \mu_n = n \qquad (n = \ldots -1, 0, 1, \ldots),$$

donc chacune des distributions $T_{a,\lambda}$ et $T_{b,\mu}$ est périodique, donc finalement

$$T_{a,\lambda} = T_{b,\mu} = A \sum_{-\infty}^{\infty} \delta_n.$$

THÉORÈME 5. — *On a* $\Delta_{\bullet}(\lambda)\Delta_{\bullet}(\mu) > 1$, *sauf si le couple* $(T_{a,\lambda}, T_{b,\mu})$ *résulte par les opérations* 1 *et* 2 *de la page* 63 *du couple* $\left(A\sum_{-\infty}^{\infty}\delta_n,\ A\sum_{-\infty}^{\infty}\delta_n\right)$.

COROLLAIRE. — *Si* $\Delta_{\bullet}(\lambda) = \Delta_{\bullet}(\mu) = 1$, *et si* $T_{a,\lambda}$ *et* $T_{b,\mu}$ *sont paires, on a :*

— *soit*

$$T_{a,\lambda} = A\sum_{-\infty}^{\infty}\delta_n, \qquad T_{b,\mu} = A\sum_{-\infty}^{\infty}\delta_n;$$

— *soit*

$$T_{a,\lambda} = A\sum_{-\infty}^{\infty}\delta_{n+\frac{1}{2}}, \qquad T_{b,\mu} = A\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^n\delta_n;$$

— *soit*

$$T_{a,\lambda} = A\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^n\delta_n, \qquad T_{b,\mu} = A\sum_{-\infty}^{\infty}\delta_{n+\frac{1}{2}};$$

si $T_{a,\lambda}$ *et* $T_{b,\mu}$ *sont impaires, on a*

$$T_{a,\lambda} = A\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^n\delta_{n+\frac{1}{2}}, \qquad T_{b,\mu} = iA\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^n\delta_{n+\frac{1}{2}}.$$

On retrouve les couples auxquels, par le théorème 2, sont associées les équations fonctionnelles de $\zeta(s)$, $(2^s - 1)\zeta(s)$ et $(2^{1-s} - 1)\zeta(s)$, et $2^{s-1}L(s-1)$.

Appliquons le théorème 4 en prenant

$$S = T_{a,\lambda} \star \sum_{1}^{p} c_j\,\delta_{-\tau_j} \qquad \text{et} \qquad \hat{S} = T_{b,\mu}\sum_{j=1}^{p} c_j\,e^{2\pi i\tau_j x}.$$

On obtient immédiatement :

THÉORÈME 6. — *Supposons qu'existe une fonction*

$$P(x) = \sum_{j=1}^{p} c_j\,e^{2\pi i\tau_j x}$$

et un intervalle fermé I *de longueur* $p\,\Delta_{\bullet}(\lambda)$ *tel que* $P(x)$ *s'annule sur tous les* μ_n *contenus dans* I. *Alors* $P(x)$ *s'annule sur tous les* μ_n.

COROLLAIRE 1. — *Si, sur un intervalle fermé de longueur* $2\Delta_{\bullet}(\lambda)$, *tous les* μ_n *sont multiples de* α, *il en est de même partout* $\left[\text{il suffit de prendre } P(x) = \sin\frac{\pi x}{\alpha}\right]$.

Donc $T_{a,\lambda}$ est périodique, et l'on a

$$T_{a,\lambda} = (c_1\,\delta_{\xi_1} + \ldots + c_q\,\delta_{\xi_q}) \star \sum_{-\infty}^{\infty}\delta_{n\alpha}$$

et

$$T_{b,\mu} = \alpha(c_1 e^{-2\pi i \xi_1 x} + \ldots c_q e^{-2\pi i \xi_q x}) \sum_{-\infty}^{\infty} \delta_{n\alpha}.$$

COROLLAIRE 2 (généralisant le corollaire 1). — *Si, sur un intervalle fermé de longueur* $2^p \Delta_\bullet(\lambda)$, *tous les* μ_n *appartiennent à la réunion de p progressions arithmétiques données, il en est de même partout*; on prend

$$P(x) = \sin \frac{\pi(x - x_1)}{\alpha_1} \cdots \sin \frac{\pi(x - x_p)}{\alpha_p}.$$

Le corollaire 1 entraîne que si $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$ sont commensurables, avec $\lambda_q - \lambda_1 > 2\Delta_\bullet(\lambda)$, tout λ_n est combinaison linéaire à coefficients entiers de $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$. Nous allons chercher à obtenir un résultat analogue, sans l'hypothèse de commensurabilité.

Nous recourrons à un lemme d'Agmon [4], [9] : *Soit* $\nu_1, \ldots, \nu_q$, ν *des nombres réels, et supposons que* ν *ne soit pas combinaison linéaire à coefficients entiers de* $\nu_1, \ldots, \nu_q$. *Alors il existe une suite* $\tau_j \to \infty$ *telle que*

$$\lim_{j \to \infty} e^{2\pi i \tau_j \nu_k} = 1 \qquad (k = 1, 2, \ldots, q),$$

mais

$$\lim_{j \to \infty} e^{2\pi i \tau_j \nu} = r \neq 1.$$

Prenons pour $\nu_1, \ldots, \nu_q$ les points μ_n contenus dans un intervalle fermé I de longueur $\Delta_\bullet(\lambda) + \Delta^\bullet(\lambda)$ et pour ν (si c'est possible) un μ_r tel que $b_r \neq 0$. De la suite $T_{a,\lambda} \star \delta_{\tau_j}$ on peut extraire (presque-périodicité) une suite convergente vers une distribution $T_{a^\star,\lambda^\star}$ telle que

$$\Delta_\bullet(\lambda^\star) \leq \Delta^\bullet(\lambda^\star) \leq \Delta^\bullet(\lambda)$$

(la dernière inégalité résulte d'une remarque faite lors de la définition de Δ et de $\Delta_\bullet$; la notation $T_{a^\star,\lambda^\star}$ est commode, mais abusive, dans la mesure où $\lambda^\star$ peut admettre des points multiples). En appliquant le théorème 4 avec

$$S = T_{a,\lambda} - T_{a^\star,\lambda^\star},$$

on arrive à une contradiction. Donc :

THÉORÈME 7. — *Tout* μ_n (*tel que* $b_n \neq 0$) *est combinaison linéaire à coefficients entiers de ceux que contient un intervalle fermé de longueur* $\Delta_\bullet(\lambda) + \Delta^\bullet(\lambda)$.

Compte tenu du théorème 3, le théorème 7 généralise le résultat essentiel de Chandrasekharan et Mandelbrojt (th. 3 de [4]), qui nécessite l'hypothèse $\lambda_{n+1} - \lambda_n > h_\lambda > 0$ pour tout n.

On peut encore raffiner en prenant pour $\nu_1, \ldots, \nu_q$, dans le lemme d'Agmon, tous les points μ_n situés dans un intervalle fermé de longueur $2(\Delta_\bullet(\lambda) + \Delta^\bullet(\lambda))$, à l'exception éventuelle de ceux qui appartiennent à une progression arithmétique P d'origine x_0 et raison α, et en prenant $\nu=\mu_r$ (avec $b_r\neq 0$). En appliquant le théorème 4 avec

$$S=(T_{a,\lambda}-T_{a^\star,\lambda^\star})\sin\frac{\pi(x-x_0)}{\alpha},$$

on arrive à une contradiction. Donc μ_r est, ou une combinaison linéaire à coefficients entiers de $\nu_1, \ldots, \nu_q$, ou un élément de P.

Convenons de dire que les progressions arithmétiques $P_1, \ldots, P_k$ sont « indépendantes » si, à l'exception des points communs à deux progressions, aucun point de l'une d'entre elles n'est combinaison linéaire à coefficients entiers d'éléments des autres. Si, sur un intervalle fermé de longueur $2(\Delta_\bullet(\lambda)+\Delta^\bullet(\lambda))$, tous les μ_n (soit $\nu_1, \ldots, \nu_s$) appartiennent chacun à une et une seule des progressions $P_1, \ldots, P_k$ indépendantes, on sait (th. 7) que tout μ_r (avec $b_r\neq 0$) est de la forme $k_1\nu_1+\ldots+k_s\nu_s$; soit $k_1\neq 0$; si μ_r n'appartenait pas à la progression P_j contenant ν_1, μ_r serait (d'après l'alinéa précédent) combinaison linéaire de $\nu_2, \ldots, \nu_s$, mais cela contredit l'indépendance de $P_1, \ldots, P_k$. On a donc le résultat suivant :

Théorème 8. — *Soit* I *un intervalle fermé de longueur* $2(\Delta_\bullet(\lambda)+\Delta^\bullet(\lambda))$, *et* $P_1, \ldots, P_k$ *des progressions arithmétiques indépendantes. Si, sur* I, *tous les* μ_n *appartiennent chacun à une et une seule des* P_i, *tout* μ_r (avec $b_r\neq 0$) *appartient à la réunion des* P_i.

Il est aisé de voir que, dans le théorème 7 ou dans la définition des progressions arithmétiques indépendantes, nous aurions pu remplacer « combinaison linéaire à coefficients entiers » par « combinaison linéaire à coefficients entiers, telle que la somme des coefficients égale 1 ». En effet, la conclusion du théorème 7 exprime l'égalité

$$\mu_n=\sum_{-N}^{N}A_j\mu_j \qquad (A_j \text{ entiers});$$

pour tout ε réel, on a

$$\mu_n+\varepsilon=\sum_{-N}^{N}A_j(\varepsilon)(\mu_j+\varepsilon) \qquad [A_j(\varepsilon) \text{ entiers}];$$

prenons ε différent d'une combinaison linéaire à coefficients rationnels de μ_n, $\mu_{-N}, \ldots, \mu_N$; on doit avoir $\sum_{-N}^{N}A_j(\varepsilon)=1$. C. Q. F. D.

Lorsque $\inf(\lambda_{n+1}-\lambda_n)>0$ [ce qui entraîne les conditions $H_0\{\lambda_n\}$ et $H_1\{\lambda_n\}$ du théorème 3, et aussi $\Delta^\bullet(\lambda)<\infty$], de nouveaux résultats peuvent être obtenus. La simple considération des régularisées $T_{a,\lambda}\star\alpha$ montre, par exemple, que les coefficients a_n sont bornés, et le théorème 3 donne

$$b_0=\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+\ldots+a_n}{\lambda_n}.$$

En changeant $T_{a,\lambda}$ en $T_{a,\lambda}\, e^{-2\pi i \mu_m x}$, on voit que les b_m sont aussi bornés. Donnons un résultat, plus difficile, rélatif à $\{\mu_n\}$.

Quand on a $\inf(\lambda_{n+1}-\lambda_n)>0$, les régularisées $T_{b,\mu}\star\alpha$ sont pseudo-périodiques au sens de Paley et Wiener ([10], p. 116 et [8]). Si I et J sont deux intervalles égaux de longuer $l>\Delta^{\bullet}(\lambda)$, on a alors

$$\int_{I} |T_{b,\mu}\star\alpha(x)|^2\,dx < K\int_{J} |T_{b,\mu}\star\alpha(x)|^2\,dx, \tag{20}$$

K ne dépendant que de l et de $\{\lambda_n\}$. Supposons, pour simplifier, $\mu_0=0$. Considérons une suite infinie $\{\mu_{n_j}\}$ telle que $b_{n_j}=\rho_j e^{i\theta_j}$, $\rho_j\geqq\rho>0$ $(j=1,2,\ldots)$ et supposons que, sur un intervalle I de longueur $l>\Delta^{\bullet}(\lambda)$ ne contenant pas o, les suites translatées $\{\mu_n-\mu_{n_j}\}$ (définies par la donnée de j) soient disjointes deux à deux; montrons qu'on arrive à une contradiction. Pour chaque k, posons

$$S=S_k=T_{b,\mu}\star\sum_{j=1}^{k} e^{-i\theta_j}\,\delta_{-\mu_{n_j}}$$

et choisissons $\alpha=\alpha_k$ de support assez petit pour que, sur l'intervalle I_η concentrique à I et de longueur $l+2\eta$, le support de $S\star\alpha$ soit formé d'intervalles disjoints de longueur 2η. Alors,

$$\int_{I_\eta} |S\star\alpha(x)|^2\,dx=\sum_{j=1}^{k}\int_{I_\eta} |T_{b,\mu}\star\delta_{-\mu_n}\star\alpha(x)|^2\,dx,$$

ce qui est $O(k)$, d'après (20). Mais

$$\int_{-l-\eta}^{l+\eta} |S\star\alpha(x)|^2\,dx\geqq\int_{-\eta}^{\eta} |S\star\alpha(x)|^2=\left(\sum_{j=1}^{k}\rho_j\right)^2\int_{-\eta}^{\eta}|\alpha(x)|^2\,dx$$

et comme $\rho_j\geqq\rho>0$, le second membre est de l'ordre de k^2. On a donc

$$\int_{I_\eta} |S\star\alpha(x)|^2\,dx=o\left(\int_{l-\eta}^{l+\eta} |S\star\alpha(x)|^2\,dx\right)$$

quand $k\to\infty$, ce qui contredit (20). Il est donc impossible que les suites $\{\mu_n-\mu_{n_j}\}$ soient disjointes deux à deux sur I. Par l'absurde, on établit alors l'existence sur I d'un nombre fini de points $\xi_1,\ldots,\xi_s$ tels que, dès que $|b_m|\geqq\rho>0$, l'un des points $\mu_m+\xi_1,\ldots,\mu_m+\xi_s$ appartienne à la suite $\{\mu_n\}$. D'où :

Théorème 9. — *Supposons* $\inf(\lambda_{n+1}-\lambda_n)>0$. *Alors les suites* $\{a_n\}$ *et* $\{b_n\}$ *sont bornées, et l'on a*

$$b_m=\lim_{n\to\infty}\frac{a_1 e^{2\pi i\mu_m\lambda_1}+\ldots+a_n e^{2\pi i\mu_m\lambda_n}}{\lambda_n}.$$

Supposons, de plus, $\inf|b_n|>0$, *et soit* I *un intervalle de longueur supérieure à* $\Delta^{\bullet}(\lambda)$: *il existe alors un nombre fini de points sur* I, *soit* $\xi_1,\ldots,\xi_s$, *tels que pour tout* m *l'un des points* $\mu_m+\xi_1,\ldots,\mu_m+\xi_s$ *appartienne à la suite* $\{\mu_n\}$.

Posons $h_\lambda = \inf(\lambda_{n+1} - \lambda_n) > 0$, et supposons $\Delta^\bullet(\mu) < 2h_\lambda$. Il existe alors (*voir*, par exemple, [10], p. 92) une fonction $\hat{H}(x)$ de type exponentiel $< 2\pi h_\lambda$, à décroissance rapide (c'est-à-dire plus rapide que toute fraction rationnelle) sur l'axe réel, et qui s'annule sur $\{\mu_n\}$. Pour tout entier k, il existe une fonction $\hat{H}_k$ jouissant des mêmes propriétés, sauf que $\hat{H}_k(\mu_k) = 1$ au lieu de 0. Soit H_k la cotransformée de Fourier de $\hat{H}_k$; H_k a son support dans $(-h_\lambda, h_\lambda)$ et l'on a (« formule de Poisson »)

$$\sum_{-\infty}^{\infty} b_n \hat{H}_k(\mu_n)\, e^{2\pi i \mu_n x} = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n H_k(x - \lambda_n),$$

soit, pour $x = \lambda_m$,

$$b_k e^{2\pi i \mu_k \lambda_m} = a_m H_k(0).$$

Cette formule vaut quels que soient k et m. Donc, quels que soient k, l, m, n avec $b_k b_l a_m a_n \neq 0$, on a

$$e^{2\pi i (\mu_k - \mu_l)(\lambda_m - \lambda_n)} = 1.$$

C'est dire :

1° que tous les $\lambda_m - \lambda_n$ sont multiples d'un même nombre, soit h_λ, et que tous les $\mu_k - \mu_l$ sont multiples de $h_\mu = \inf(\mu_{k+1} - \mu_k)$;

2° que $h_\lambda h_\mu$ est un entier. Par les opérations 1 et 2 de la page 63 (« homothétie » et « translation ») on se ramène au cas $\lambda_0 = \mu_0 = 0$, $h_\lambda = 1$; la périodicité de $T_{b,\mu}$, jointe à l'hypothèse $\Delta^\bullet(\mu) < 2$, montre alors que $T_{a,\lambda}$ et $T_{b,\mu}$ se réduisent, à un facteur multiplicatif près, à $\sum_{-\infty}^{\infty} \delta_n$ et $\sum_{-\infty}^{\infty} \delta_n$. Ainsi :

Théorème 10. — *On a* $\Delta^\bullet(\mu) \geq 2h_\lambda$, *sauf si le couple* $(T_{a,\lambda}, T_{b,\mu})$ *résulte par les opérations* 1 *et* 2 *de la page* 63 *du couple* $\left(A\sum_{-\infty}^{\infty}\delta_n,\ A\sum_{-\infty}^{\infty}\delta_n\right)$.

Supposons encore $h_\lambda = \inf(\lambda_{n+1} - \lambda_n) > 0$; soit maintenant G une fonction N fois dérivable (N assez grand) s'annulant hors de $(-h_\lambda, h_\lambda)$, et soit $\hat{G}$ sa transformée de Fourier. La transformée de Fourier du produit de convolution $T_{a,\lambda} \star G$ est $T_{b,\mu}.\hat{G}$; celle du produit $T_{a,\lambda}.(T_{a,\lambda} \star G)$ est le produit de convolution $T_{b,\mu} \star (T_{b,\mu}.\hat{G})$. Or

$$T_{a,\lambda} \,.\, (T_{a,\lambda} \star G) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n^2\, G(0)\, \delta_{\lambda_n},$$

$$T_{b,\mu} \star (T_{b,\mu} \,.\, \hat{G}) = \sum_{-\infty}^{\infty} \sum_{-\infty}^{\infty} b_n b_m \hat{G}(\mu_n)\, \delta_{\mu_n + \mu_m}.$$

Ainsi, pour chaque σ réel, $\sum\limits_{\mu_n + \mu_m = \sigma} b_n b_m \hat{G}(\mu_n)$ est proportionnel à $G(0)$. Supposons, comme il est permis de le faire, tous les $b_n \neq 0$. Le couple (k, l)

étant donné, désignons par $E(k, l)$ l'ensemble des μ_n tels que, pour une valeur de m, on ait

$$\mu_n + \mu_m = \mu_k + \mu_l.$$

Dès qu'on a $\hat{G}(\mu_n) = 0$ pour tout $\mu_n \in E(k, l)$, $G(0)$ est nul. Admettons maintenant qu'il existe une fonction F, N fois dérivable, nulle en dehors de $\left(-\frac{h_\lambda}{2}, \frac{h_\lambda}{2}\right)$, et orthogonale aux $e^{-2\pi i \mu_n x}(\mu_n \in E(k, l))$; on peut alors poser

$$G(x) = F(x+y) \qquad \text{pour tout} \quad y \in \left(-\frac{h_\lambda}{2}, \frac{h_\lambda}{2}\right),$$

et la remarque ci-dessus entraîne $G(0) = F(y) = 0$; ainsi $F \equiv 0$. Cela prouve, grâce à un argument déjà utilisé pour démontrer le théorème 9 :

THÉORÈME 11. — *Soit M_σ l'ensemble des μ_m tels que $\sigma - \mu_m \in \{\mu_n\}$* (on suppose tous les $b_n \neq 0$). *Ou bien M_σ est vide, ou bien l'ensemble $\{e^{2\pi i \mu_m x}\}$, $\mu_m \in M_\sigma$ est complet dans l'espace des distributions de support $\subset \left[-\frac{h_\lambda}{2}, \frac{h_\lambda}{2}\right]$. En particulier, la densité supérieure de répartition de la suite M_σ satisfait $\Delta_{\bullet}\{M_\sigma\} \geq h_\lambda$.*

COROLLAIRES. — 1. *Tout μ_k est milieu d'une infinité de couples (μ_n, μ_m), dès que $h_\lambda > 0$.*

2. *Si la suite $\{\mu_n\}$ est symétrique et $h_\lambda > 0$, chaque différence $\mu_n - \mu_m$ se répète une infinité de fois.*

BIBLIOGRAPHIE.

[1] H. HAMBURGER, *Ueber einige Beziehungen, die mit der Funktionalgleichung der Riemannschen ζ-Funktion äquivalent sind* (*Math. Ann.*, t. **85**, 1922, p. 129-140).

[2] S. BOCHNER et K. CHANDRASEKHARAN, *On Riemann's functional equation* (*Ann. Math.*, t. **63**, 1956, p. 336-360).

[3] K. CHANDRASEKHARAN et S. MANDELBROJT, *Sur l'équation fonctionnelle de Riemann* *C. R. Acad. Sc.*, t. **243**, 1956, p. 2793-2796).

[4] K. CHANDRASEKHARAN et S. MANDELBROJT, *On Riemann's functional equation* (*Ann. Math.*, t. **66**, 1956, p. 285-296).

[5] L. SCHWARTZ, *Théorie des distributions*, t. II, Paris.

[6] E. C. TITCHMARSTH, *The Theory of the Riemann ζ-function*, Oxford.

[7] J. P. KAHANE, *Sur quelques problèmes d'unicité et de prolongement* (*Ann. Inst. Fourier*, t. **5**, 1953-1954, p. 39-130).

[8] J. P. KAHANE, *Sur les fonctions moyenne-périodiques bornées* (*Ann. Inst. Fourier*, t. VII, 1957, p. 293-314).

[9] S. AGMON, *On the singularities of a class of Dirichlet series* (*Bull. Res. Council of Israël*, t. **3**, 1954, p. 385-389).

[10] R. PALEY et N. WIENER, *Fourier transforms in the Complex-domain*, Colloquium.