ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

RENÉ LAGRANGE

Sur le groupe ponctuel conservant la famille des coniques du plan qui ont un élément de contact donné

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 74, nº 3 (1957), p. 197-229
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1957_3_74_3_197_0>

SUR LE GROUPE PONCTUEL CONSERVANT LA FAMILLE DES CONIQUES DU PLAN QUI ONT UN ÉLÉMENT DE CONTACT DONNÉ

PAR M. RENÉ LAGRANGE

INTRODUCTION.

Le groupe anallagmatique du plan a six paramètres, et il en est naturellement de même pour le groupe G qui conserve la famille des coniques Γ du plan qui ont deux points fixes donnés I, J, distincts. On se propose d'étudier ici ce que devient ce groupe G lorsque I et J sont confondus, c'est-à-dire lorsque les coniques Γ ont en commun un élément de contact donné. Quelle est la structure de ce groupe? Des transformations particulières se présentent tout de suite à l'esprit; ce sont celles qui conservent les coniques Γ appartenant à un faisceau particulier; si (A, B) est le bipoint qui définit ce faisceau dans la famille, avec $A \neq B$, on fait correspondre plus particulièrement à chaque point M du plan son conjugué harmonique M_1 par rapport à A, B, sur la conique du faisceau qui passe par M. Cette transformation $M_1 = H_{A,B}M$ est symétrique, et peut s'appeler la symétrie par rapport au bipoint (A, B), dans ce groupe G. Tout produit d'un nombre fini de ces symétries est une transformation dont l'ensemble est un sous-groupe H de G. H dépend de six paramètres. On en déduit aisément le groupe G, qui a sept paramètres. On verra comment on est amené à associer à chaque conique Γ de la famille un point de l'espace E à trois dimensions, de sorte que les transformations de H correspondent aux déplacements dans E, tandis que G est isomorphe au groupe des similitudes. Il est remarquable que, dans cette correspondance, l'image d'un $H_{A,B}$ est la symétrie par rapport à une droite. La construction du déplacement le plus général à l'aide de deux telles symétries devrait avoir son équivalent dans H; cependant, certaines transformations de H ne sont pas le produit de deux symétries $H_{A,B}$, mais de trois; il s'agit d'ailleurs de transformations correspondant, dans E, à certains déplacements hélicoïdaux d'axe isotrope, ou à certaines translations isotropes, qui n'échappent pas pour autant au théorème général; l'anomalie tient à la nature de la correspondance entre les coniques et leurs images.

Évidemment, on peut construire par ce procédé le groupe qui conserve la famille des coniques qui ont deux points distincts donnés I, J. Afin de mieux souligner les différences produites par la coïncidence de ces points, il m'a semblé utile d'exposer en premier lieu ce que donne cette méthode quand I diffère de J, bien qu'il ne puisse s'agir que de propriétés si connues chez le groupe anallagmatique. On sait, par exemple, que tout produit d'un nombre pair d'inversions est un produit de couples d'inversions dont les deux cercles sont orthogonaux; la méthode utilisée ici consiste à construire H à partir de ces couples, qui sont les symétries $H_{A,B}$. Le sous-groupe H de G est celui qui conserve séparément I et J, tandis que les transformations de G — H permutent ces deux points. Lorsque $I \neq J$, il correspond à chaque conique Γ_0 de la famille une transformation de G qui conserve chaque point de Γ_0; c'est ce qu'on peut appeler l'inversion par rapport à Γ_0; toute transformation $H_{A,B}$ est le produit de deux telles inversions particulières, et H est l'ensemble des produits d'un nombre pair d'inversions, tandis que G est le groupe des produits d'un nombre quelconque d'inversions. Mais, lorsque $I = J$, c'est un sous-groupe à un paramètre qui conserve tous les points d'une conique Γ_0; la construction de G à partir des inversions n'est plus possible, tandis que la construction et son étude à partir des symétries $H_{A,B}$ restent valables.

CHAPITRE I.

Groupe G associé a deux points distincts.

1. Symétrie par rapport a un bipoint du plan. — (A, B) désignant un bipoint dont aucun élément n'est sur la droite qui joint les deux points I, J communs à toutes les coniques Γ de la famille, nous appelons symétrie $H_{A,B}$ par rapport à (A, B) la transformation qui associe à chaque point M du plan le point M_1 conjugué harmonique de M par rapport à A, B sur la conique Γ qui passe par M, A, B. Écrivons les formules de cette transformation en coordonnées trilinéaires x, y, t dont I, J sont deux sommets du triangle de référence, soit (1, 0, 0) pour I et (0, 1, 0) pour J. Désignons par $(a, a', 1)$ et $(b, b', 1)$ deux systèmes de coordonnées de A et B, par $(x, y, 1)$ le point M et $(x_1, y_1, 1)$ son homologue M_1.

L'harmonicité du faisceau $J(M, M_1; A, B)$ s'écrit

$$\frac{x-a}{x-b}+\frac{x_1-a}{x_1-b}=0,$$

donc

$$x_1 = \frac{\frac{a+b}{2}x - ab}{x - \frac{a+b}{2}}.$$

Le faisceau harmonique I(M, M_1 ; A, B) donne de même

$$y_1 = \frac{\frac{a'+b'}{2}y - a'b'}{y - \frac{a'+b'}{2}}.$$

La transformation $H_{A,B}$ est donc représentée par le couple de transformations homographiques du type

$$(1) \qquad x_1 = \frac{\alpha x + \beta}{x - \alpha}, \qquad y_1 = \frac{\alpha' y + \beta'}{y - \alpha'},$$

où a, b sont les racines de $x^2 - 2\alpha x - \beta = 0$, et a', b' celles de $y^2 - 2\alpha' y - \beta' = 0$.

$H_{A,B}$ dépend bien de quatre paramètres comme le bipoint (A, B), mais elle coïncide avec la symétrie $H_{A',B'}$ définie par les points $A'(a, b', 1)$ et $B'(b, a', 1)$. (A′, B′) est le seul bipoint qui donne la même symétrie que (A, B). A′, B′ sont les cinquième et sixième sommets du quadrilatère complet de sommets I, J, A, B. Si I, J sont les points cycliques, (A′, B′) est le bipoint focal de (A, B). On déduit de cette remarque une autre définition de $H_{A,B}$: on associe à chaque bipoint (A, B) le bipoint (A′, B′) qui complète le quadrilatère IJAB, et M_1 est le quatrième point commun aux deux coniques Γ qui passent respectivement par A, B, M et A′, B′, M.

Si M décrit une courbe de pente $y' = \frac{dy}{dx}$ en M, t restant égal à 1, M_1 décrit une courbe de pente [1] $y'_1 = \frac{dy_1}{dx_1}$, avec $t_1 = 1$, et il résulte de (1) que

$$(2) \qquad y'_1 = \frac{\alpha'^2 + \beta'}{\alpha^2 + \beta} \frac{(x-\alpha)^2}{(y-\alpha')^2} y'.$$

On observe donc que

(3) $\frac{y'_1}{y'}$ *ne dépend que du point* M, *et non de* y',

autrement dit que le birapport de I, J avec les points où les tangentes rencontrent $t = 0$ ne dépend que de M.

2. Groupe H. — Chaque $H_{A,B}$ est une transformation symétrique, et l'ensemble des produits d'un nombre fini de telles transformations est un groupe. Nous

---

[1] $(dx, dy, 0)$ est le point de rencontre de la tangente avec la droite IJ, mais il est commode d'utiliser le même langage que si $t = 0$ était la droite de l'infini.

l'appelons le groupe H. D'après (1), un produit de telles symétries est de la forme

$$x_1 = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}, \qquad y_1 = \frac{\alpha' y + \beta'}{\gamma' y + \delta'}, \tag{4}$$

et l'on vérifie sans peine que, réciproquement, toute transformation (4) est le produit de deux symétries biponctuelles au plus, quels que soient les six paramètres essentiels dont dépend (4).

La conique Γ la plus générale se représente par la relation homographique générale entre $\frac{x}{t}$ et $\frac{y}{t}$, donc (4) conserve la famille de ces coniques. H possède également la propriété (3). Nous allons établir le

THÉORÈME. — H *est le groupe des transformations qui conservent la famille des coniques* Γ, *et pour lesquelles* $\frac{y'_1}{y'}$ *ne dépend que du point transformé.*

Écrivons d'abord que $\frac{y'_1}{y'}$ ne dépend pas de y', dans la transformation

$$x_1 = \varphi(x, y), \qquad y_1 = \psi(x, y), \qquad \frac{D(\varphi, \psi)}{D(x, y)} \neq 0,$$

donc qu'il existe un facteur $\lambda(x, y)$ tel qu'on ait

$$\frac{\dfrac{\partial\psi}{\partial x} + \dfrac{\partial\psi}{\partial y} y'}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} y'} \equiv \lambda(x, y) y',$$

quel que soit y'. $\lambda = 0$ entraînerait $\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y} = 0$, ce qui est inadmissible. Il reste donc la solution $\frac{\partial\psi}{\partial x} \equiv \frac{\partial\varphi}{\partial y} \equiv 0$, et les transformations en question sont

$$x_1 = \varphi(x), \qquad y_1 = \psi(y), \qquad \varphi'(x)\psi'(y) \neq 0.$$

L'invariance de la famille des coniques Γ s'exprime par le fait qu'une relation homographique entre x et y entraîne une relation analogue entre x_1 et y_1, donc que la nullité du schwarzien

$$\left(\frac{y''}{y'}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{y''}{y'}\right)^2$$

entraîne celle de

$$\left(\frac{y''_1}{y'_1}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{y''_1}{y'_1}\right)^2;$$

les dérivées de ce dernier sont prises par rapport à x_1. Il vient

$$y'_1 = \frac{\psi'}{\varphi'} y',$$

$$\frac{y''_1}{y'_1} = \frac{1}{\varphi'}\left(\frac{y''}{y'} + \frac{\psi''}{\psi'} y' - \frac{\varphi''}{\varphi'}\right),$$

où chaque fonction est dérivée par rapport à son propre argument. On a ensuite

$$\left(\frac{y''_1}{y'_1}\right)' = \frac{1}{\varphi'^2}\left[\left(\frac{y''}{y'}\right)' + \left(\frac{\psi''}{\psi'}\right)y'' + \left(\frac{\psi''}{\psi'}\right)'y'^2 - \left(\frac{\varphi''}{\varphi'}\right)'\right] - \frac{\varphi''}{\varphi'^3}\left(\frac{y''}{y'} + \frac{\psi''}{\psi'}y' - \frac{\varphi''}{\varphi'}\right),$$

donc

$$\begin{aligned}\left(\frac{y''_1}{y'_1}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{y''_1}{y'_1}\right)^2 &= \frac{1}{\varphi'^2}\left[\left(\frac{y''}{y'}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{y''}{y'}\right)^2\right] \\ &+ \frac{y'^2}{\varphi'^2}\left[\left(\frac{\psi''}{\psi'}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{\psi''}{\psi'}\right)^2\right] - \frac{1}{\varphi'^2}\left[\left(\frac{\varphi''}{\varphi'}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{\varphi''}{\varphi'}\right)^2\right].\end{aligned}$$

Le schwarzien est fonction de y', y'', y''', et la nullité du premier crochet au second membre, qui dépend seul de y''', doit entraîner la nullité du premier membre, donc de la somme des deux derniers termes au second membre, quel que soit y'. La condition nécessaire et suffisante est que les schwarziens de φ et ψ soient nuls, donc que φ et ψ soient des fonctions homographiques.

C. Q. F. D.

3. Conique symétrique d'une conique Γ. — Soit une conique Γ, d'équation

$$hxy + uxt + vyt + wt^2 = 0, \tag{5}$$

et sa transformée $\Gamma_1 = H_{A,B}\Gamma$, d'équation

$$h_1xy + u_1xt + v_1yt + w_1t^2 = 0. \tag{6}$$

On obtient tout de suite

$$\left\{\begin{aligned} u_1 &= -\alpha\alpha'u + \beta'v - \alpha'w + \alpha\beta'h, \\ v_1 &= \beta u - \alpha\alpha'v - \alpha w + \beta\alpha'h, \\ w_1 &= -\beta\alpha'u - \alpha\beta'v + \alpha\alpha'w + \beta\beta'h, \\ h_1 &= \alpha u + \alpha'v + w + \alpha\alpha'h, \end{aligned}\right. \tag{7}$$

dont le déterminant des coefficients est $(\alpha^2 + \beta)^2(\alpha'^2 + \beta')^2$. Les mêmes relations sont valables en permutant u, v, w, h avec u_1, v_1, w_1, h_1, au facteur arbitraire près dont dépendent ces coefficients.

Γ_1 est une droite, ou mieux l'ensemble d'une droite et de la droite IJ, pourvu que $h_1 = 0$, c'est-à-dire pourvu que Γ passe par le point C de coordonnées

$$(\alpha, \alpha', 1) = \left(\frac{a+b}{2}, \frac{a'+b'}{2}, 1\right),$$

qui est le point de rencontre des diagonales AB, A′B′ du quadrilatère complet ABIJ. On peut l'appeler le pôle de la droite IJ par rapport au bipoint (A, B).

4. Groupe G. — Un raisonnement classique permet de déduire de H le groupe G de toutes les transformations ponctuelles qui conservent la famille des coniques Γ. Soit $\mathfrak{T}$ une transformation quelconque de G, et deux points homologues C, $C_1 = \mathfrak{T}C$. Soit (A, B) et (A_1, B_1) deux bipoints par rapport

auxquels les pôles de IJ soient respectivement C et C_1. La transformation $S = H_{A_1, B_1} \mathfrak{T} H_{A, B}$ transforme toute droite du plan en droite; en effet, $H_{A,B}$ transforme toute droite en une conique Γ passant par C; $\mathfrak{T}$ transforme cette conique en une conique Γ passant par C_1 et H_{A_1, B_1} transforme cette dernière en une droite. S est donc projective. En outre, elle conserve le bipoint (I, J), et, en particulier, la droite $t = 0$. Elle est donc de la forme

$$(8)\qquad \begin{cases} x_1 = \lambda\, x + \mu\, y + \nu\, t, \\ y_1 = \lambda' x + \mu' y + \nu' t, \\ t_1 = t. \end{cases}$$

Si I et J sont séparément invariants, $\lambda' = \mu = 0$; (8) se réduit à

$$(9)\qquad \begin{cases} x_1 = \lambda x + \nu\, t, \\ y_1 = \mu' y + \nu' t, \\ t_1 = t, \end{cases}$$

et est une transformation linéaire du groupe H; $\mathfrak{T} = H_{A_1, B_1} S H_{A, B}$ est elle-même de la forme (4). Si I et J sont permutés, $\lambda = \mu' = 0$; (8) est de la forme

$$\begin{aligned} x_1 &= \mu\, y + \nu\, t, \\ y_1 &= \lambda' x + \nu' t, \\ t_1 &= t, \end{aligned}$$

ce qui revient à permuter x et y dans la transformation S du type (9), donc à permuter x et y dans (4). Les transformations $\mathfrak{T}$ de ce sous-ensemble sont les couples de transformations homographiques de la forme

$$(10)\qquad x_1 = \frac{\alpha y + \beta}{\gamma y + \delta}, \qquad y_1 = \frac{\alpha' x + \beta'}{\gamma' x + \delta'}.$$

En résumé, *toute transformation de* G *est une transformation de* H, *ou le produit d'une telle transformation par la permutation*

$$(11)\qquad x_1 = y, \qquad y_1 = x, \qquad t_1 = t.$$

C'est encore, ou bien *une symétrie* $H_{A,B}$, *ou le produit de deux telles symétries, associés ou non à* (11).

Dans la transformation (10), c'est le produit $y'y'_1$ des pentes des lieux homologues qui ne dépend que du point transformé. On est ainsi amené à considérer, pour le groupe G, l'expression $\log y'$, définie à $2k\pi i$ près, de sorte que c'est $\log y'_1 \pm \log y'$ qui ne dépend que du point M. Pour deux lieux passant par M, de pentes y' et $\bar{y}'$, il vient, après transformation en les pentes y'_1 et $\bar{y}'_1$,

$$\log \bar{y}'_1 \mp \log \bar{y}' = \log y'_1 \mp \log y',$$

avec le même signe — ou + suivant que la transformation $\mathfrak{T}$ appartient, ou non, à H. Ceci s'écrit

$$(12)\qquad \log \frac{\bar{y}'_1}{y'_1} = \pm \log \frac{\bar{y}'}{y'},$$

avec le signe $+$ ou $-$ suivant que $\mathfrak{C}$ appartient, ou non, à H. En appelant *écart de deux courbes* passant par M l'expression $\frac{1}{2i}\log\frac{\overline{y}'}{y'}$, qui est définie à $k\pi$ près, on peut dire que G conserve l'écart en valeur absolue, H étant le sous-groupe qui conserve l'écart algébrique. C'est la définition de Laguerre quand I, J sont les points cycliques.

5. Écart de deux coniques Γ. — Considérons deux coniques Γ, Γ' d'équations respectives

$$hxy+ux+vy+w=0, \tag{13}$$

$$h'xy+u'x+v'y+w'=0. \tag{13'}$$

En un point commun autre que I, J, on a respectivement

$$\tau=\left(\frac{dy}{dx}\right)_\Gamma=-\frac{uv-wh}{(hx+v)^2},$$

$$\tau'=\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\Gamma'}=-\frac{u'v'-w'h'}{(h'x+v')^2}$$

et (²)

$$\sqrt{\frac{\tau}{\tau'}}=\sqrt{\frac{uv-wh}{u'v'-w'h'}}\,\frac{h'x+v'}{hx+v}. \tag{14}$$

L'élimination de y entre (13) et (13′) donne, d'autre part, l'équation aux x des deux points communs, soit

$$(ux+w)(h'x+v')-(hx+v)(u'x+w')=0. \tag{15}$$

Posons

$$\frac{h'x+v'}{hx+v}=\frac{u'x+w'}{ux+w}=\rho,$$

de sorte que ρ est donné par l'équation

$$(uv-wh)\rho^2-(uv'+vu'-wh'-hw')\rho+u'v'-w'h'=0. \tag{16}$$

Il en résulte que

$$\sqrt{\frac{\tau}{\tau'}}=\frac{\sqrt{uv-wh}}{\sqrt{u'v'-w'h'}}\,\rho=\frac{uv'+vu'-wh'-hw'}{2\sqrt{uv-wh}\sqrt{u'v'-w'h'}}\pm\sqrt{\left(\frac{uv'+vu'-wh'-hw'}{2\sqrt{uv-wh}\sqrt{u'v'-w'h'}}\right)^2-1};$$

on est conduit à poser

$$\frac{uv'+vu'-wh'-hw'}{2\sqrt{uv-wh}\sqrt{u'v'-w'h'}}=\cos\theta, \tag{17}$$

de sorte que

$$\sqrt{\frac{\tau}{\tau'}}=\cos\theta\pm i\sin\theta=e^{\pm i\theta},$$

(²) La Hessienne de Γ est $h(uv-wh)$.

et l'écart $\frac{1}{i}\log\sqrt{\frac{\tau}{\tau'}}$ n'est rien d'autre que $\pm\theta$. On a deux écarts opposés quand on change le point d'intersection considéré sans changer l'ordre des deux coniques. θ est infini ou indéterminé si l'une des coniques au moins est singulière ($uv - wh = 0$, par exemple).

(17) devient effectivement le quotient d'un produit scalaire de deux vecteurs par le produit de leurs longueurs en posant

$$(18)\quad \begin{cases} h = x_1 - ix_2, & w = -(x_1 + ix_2), & u = x_3 - ix_4, & v = x_3 + ix_4, \\ h' = x'_1 - ix'_2, & w' = -(x'_1 + ix'_2), & u' = x'_3 - ix'_4, & v' = x'_3 + ix'_4; \end{cases}$$

on a, en effet,

$$uv - wh = \sum_{j=1}^{4} x_j^2, \qquad u'v' - w'h' = \sum_{j=1}^{4} x'^2_j,$$
$$\frac{uv' + vu' - wh' - hw'}{2} = \sum_{j=1}^{4} x_j x'_j.$$

On associe ainsi à chaque conique Γ la droite Og de paramètres directeurs x_1, x_2, x_3, x_4 dans l'espace euclidien E, à quatre dimensions, en coordonnées cartésiennes rectangulaires de sommet O, et l'écart de deux coniques Γ est l'angle de leurs images dans E. Les droites Og isotropes sont les images des coniques singulières.

Avec les éléments x_j, l'équation (13) de Γ s'écrit

$$x_1(xy - 1) + x_2\frac{xy + 1}{i} + x_3(x + y) + x_4\frac{x - y}{i} = 0,$$

ce qui conduit à associer au point $M(x, y, 1)$ les quatre quantités

$$(19)\qquad X_1 = \frac{xy - 1}{2}, \qquad X_2 = \frac{xy + 1}{2i}, \qquad X_3 = \frac{x + y}{2}, \qquad X_4 = \frac{x - y}{2i}.$$

On a donc $\sum_{j=1}^{4} X_j^2 = 0$, et l'équation de (13) devient

$$(20)\qquad \sum_{j=1}^{4} x_j X_j = 0.$$

On peut considérer les X_j comme les coordonnées tangentielles d'un plan isotrope μ passant par O, de sorte que les points M de la conique Γ ont pour images les plans μ qui passent par l'image Og de Γ.

Au lieu du plan μ, on peut associer à M la droite isotrope $O\nu$ de paramètres directeurs X_j; $O\nu$ est également l'image de la conique singulière qui consiste en les deux droites MI, MJ. En effet, les coordonnées du point double d'une conique (13) singulière ($uv - wh = 0$, $h \neq 0$) sont

$$x = -\frac{v}{h}, \qquad y = -\frac{u}{h};$$

par conséquent,

$$xy = \frac{uv}{h^2} = \frac{w}{h},$$

et

$$X_1 = \frac{w-h}{2h} = -\frac{x_1}{h}, \qquad X_2 = \frac{w+h}{2ih} = -\frac{x_2}{h},$$

$$X_3 = -\frac{u+v}{2h} = -\frac{x_3}{h}, \qquad X_4 = \frac{u-v}{2ih} = -\frac{x_4}{h}.$$

Sous la forme (20), l'équation de toute conique Γ est une combinaison linéaire des équations de quatre coniques Γ de référence, les $X_j = 0$. Celles-ci forment évidemment l'équivalent du tétracycle de référence de la géométrie analagmatique.

6. Inversion par rapport a une conique Γ. — C'est la transformation de G, autre que l'identité, qui conserve tous les points de Γ. Vérifions qu'elle est unique.

Cela ne peut être une transformation de H, car $x_1 = x$, $y_1 = y$ n'est possible pour un point, avec une transformation (4), que si les deux transformations homographiques qui la composent sont l'identité. Il ne peut s'agir que d'une transformation (10), qui doit être telle qu'on ait

$$x = \frac{\alpha y + \beta}{\gamma y + \delta}, \qquad y = \frac{\alpha' x + \beta'}{\gamma' x + \delta'}$$

pour tous les points de Γ. Chacune de ces équations, où x et y varient, est celle d'une conique Γ; cela doit être celle de la conique considérée, d'équation donnée (13). La transformation cherchée est donc

$$(21) \qquad x_1 = -\frac{vy + w}{hy + u}, \qquad y_1 = -\frac{ux + w}{hx + v}.$$

On vérifie aisément que (21) est caractérisée par la condition que toutes les coniques Γ qui passent par deux points homologues M, M_1 ont le même écart absolu avec (13). On peut placer O en M sans restreindre la généralité. Les coniques sécantes sont alors de la forme

$$h'xy + u'x + v'y = 0,$$

avec la condition

$$(22) \qquad h'x_1y_1 + u'x_1 + v'y_1 = 0.$$

Ceci doit entraîner la constance de (17), donc

$$(23) \qquad \frac{uv' + vu' - wh'}{\sqrt{u'v'}} = \text{const.} = K.$$

L'élimination de h' entre (22) et (23) établit une relation entre les deux variables indépendantes u', v', qui doit se réduire à une identité; on obtient ainsi les trois conditions

$$vy_1 + w = 0, \qquad ux_1 + w = 0, \qquad K = 0,$$

qui donnent bien le même point M_1 que (21), et montrent de plus que cet écart constant est $\frac{\pi}{2}$ (orthogonalité dans le cas des cercles). Le calcul suppose $x_1 y_1 \neq 0$; mais, si $x_1 = 0$, (22) exige $y_1 = 0$ puisque $v' \neq 0$ pour une conique régulière; M_1 coïnciderait avec M et le problème n'aurait plus de sens.

7. Formules de transformation d'une conique Γ par le groupe G. — (4) transforme (13) en une conique d'équation

$$h_1 xy + u_1 x + v_1 y + w_1 = 0, \tag{24}$$

avec

$$\left\{\begin{aligned} h_1 &= \delta\delta' h + \gamma\gamma' w - \delta\gamma' u - \gamma\delta' v, \\ w_1 &= \beta\beta' h + \alpha\alpha' w - \beta\alpha' u - \alpha\beta' v, \\ u_1 &= -\delta\beta' h - \gamma\alpha' w + \delta\alpha' u + \gamma\beta' v, \\ v_1 &= -\beta\delta' h - \alpha\gamma' w + \beta\gamma' u + \alpha\delta' v. \end{aligned}\right. \tag{25}$$

On vérifie tout de suite que

$$u_1 v_1 - w_1 h_1 = (\alpha\delta - \beta\gamma)(\alpha'\delta' - \beta'\gamma')(uv - wh); \tag{26}$$

d'ailleurs un système de deux droites passant par I, J doit se transformer en un système semblable. Avec les coordonnées x_j et y_j des images des deux coniques, (26) exprime la covariance de $\sum x_j^2$. A l'aide des relations du type (18), les formules de transformation des x_j sont

$$\left\{\begin{aligned} y_1 = {} & \frac{\alpha\alpha' - \beta\beta' - \gamma\gamma' + \delta\delta'}{2} x_1 + \frac{-\alpha\alpha' - \beta\beta' + \gamma\gamma' + \delta\delta'}{2i} x_2 \\ & + \frac{\alpha\beta' + \beta\alpha' - \gamma\delta' - \delta\gamma'}{2} x_3 + \frac{-\alpha\beta' + \beta\alpha' + \gamma\delta' - \delta\gamma'}{2i} x_4, \\ y_2 = {} & \frac{\alpha\alpha' - \beta\beta' + \gamma\gamma' - \delta\delta'}{2i} x_1 + \frac{\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' + \delta\delta'}{2} x_2 \\ & + \frac{\alpha\beta' + \beta\alpha' + \gamma\delta' + \delta\gamma'}{2i} x_3 + \frac{\alpha\beta' - \beta\alpha' + \gamma\delta' - \delta\gamma'}{2} x_4, \\ y_3 = {} & \frac{\alpha\gamma' + \gamma\alpha' - \beta\delta' - \delta\beta'}{2} x_1 + \frac{-\alpha\gamma' - \gamma\alpha' - \beta\delta' - \delta\beta'}{2i} x_2 \\ & + \frac{\alpha\delta' + \delta\alpha' + \beta\gamma' + \gamma\beta'}{2} x_3 + \frac{-\alpha\delta' + \delta\alpha' + \beta\gamma' - \gamma\beta'}{2i} x_4, \\ y_4 = {} & \frac{\alpha\gamma' - \gamma\alpha' - \beta\delta' + \delta\beta'}{2i} x_1 + \frac{\alpha\gamma' - \gamma\alpha' - \beta\delta' + \delta\beta'}{2} x_2 \\ & + \frac{\alpha\delta' - \delta\alpha' + \beta\gamma' - \gamma\beta'}{2i} x_3 + \frac{\alpha\delta' + \delta\alpha' - \beta\gamma' - \gamma\beta'}{2} x_4. \end{aligned}\right. \tag{27}$$

Elles s'identifient avec la représentation classique par le produit

$$Y = Q'XQ \tag{28}$$

des quaternions

$$\left\{\begin{aligned} X &= x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + x_3\varepsilon_3 + x_4, \\ Y &= y_1\varepsilon_1 + y_2\varepsilon_2 + y_3\varepsilon_3 + y_4, \\ Q &= \lambda_1\varepsilon_1 + \lambda_2\varepsilon_2 + \lambda_3\varepsilon_3 + \lambda_4, \\ Q' &= \lambda'_1\varepsilon_1 + \lambda'_2\varepsilon_2 + \lambda'_3\varepsilon_3 + \lambda'_4, \end{aligned}\right. \tag{29}$$

avec

$$\left\{\begin{aligned} &\alpha = \lambda_3 + i\lambda_4, \qquad \delta = \lambda_3 - i\lambda_4, \qquad \beta = -(\lambda_1 + i\lambda_2), \qquad \gamma = \lambda_1 - i\lambda_2, \\ &\alpha' = \lambda'_3 + i\lambda'_4, \qquad \delta' = \lambda'_3 - i\lambda'_4, \qquad \beta' = -(\lambda'_1 + i\lambda'_2), \qquad \gamma' = \lambda'_1 - i\lambda'_2. \end{aligned}\right. \tag{30}$$

La transformation de (13) par une transformation (10) se déduit de ce que donne (4) en permutant simplement x avec y dans les coordonnées ponctuelles, donc u avec v dans les coordonnées tangentielles u, v, w, h; sans écrire les équations qui remplacent (27), on observe que cette permutation de u et v se traduit pour l'image x_1, x_2, x_3, x_4 par le changement de x_4 en $-x_4$. Les équations qui se substituent à (27) s'en déduisent immédiatement, et équivalent, sous la forme (28), à

$$Y = -Q'X_0Q, \tag{31}$$

où

$$X_0 = -\varepsilon_1 x_1 - x_2\varepsilon_2 - x_3\varepsilon_3 + x_4$$

est le quaternion conjugué de X.

CHAPITRE II.

Groupe G associé a un élément de contact.

1. Choisissons un triangle de référence dont le côté $t = 0$ soit la tangente commune à toutes les coniques Γ, et le sommet $x = t = 0$ le point de contact commun I. Le côté $y = 0$ reste indéterminé.

Un bipoint (A, B) étant donné, il est commode de placer d'abord le sommet $x = y = 0$ en B et le côté $y = 0$ suivant AB. Soit $(a, 0, 1)$ le point A. L'équation générale des coniques Γ qui passent par A et B est

$$\lambda YT + \mu X(X - aT) = 0, \tag{1}$$

où X, Y, T sont les coordonnées trilinéaires courantes. La conique qui passe également par le point $M(x, y, 1)$ est définie par la condition

$$\lambda y + \mu x(x - a) = 0. \tag{2}$$

En désignant par x_1, y_1, 1 les coordonnées du transformé $M_1 = H_{A,B}M$, c'est-à-dire du conjugué harmonique de M par rapport à A, B, sur la conique en question, l'harmonicité du faisceau I(M, M_1, A, B) donne d'abord

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x}=\frac{2}{a},$$

donc

$$x_1=\frac{ax}{2x-a}.$$

Ensuite

$$\frac{y_1}{y}=\frac{x_1(x_1-a)}{x(x-a)}=\frac{-a^2}{(2x-a)^2},$$

d'où résultent, dans ce cas particulier, les formules de transformation

$$\left\{\begin{aligned} x_1&=\frac{ax}{2x-a},\\ y_1&=\frac{-a^2y}{(2x-a)^2}.\end{aligned}\right. \tag{3}$$

2. Lorsque I et J sont distincts, sur la droite $t=0$, les points τ et τ_1, où $t=0$ est rencontrée par les tangentes aux deux lieux homologues que décrivent M et M_1, sont tels que le birapport (τ, τ_1, I, J) soit fonction de M seul, et non de τ. Pour passer à la limite, prenons J en $(\alpha, 1, 0)$, I restant en $(0, 1, 0)$. τ et τ_1 ont les coordonnées respectives

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{y'},\quad 1,\quad 0\qquad\text{et}\qquad \frac{dx_1}{dy_1}=\frac{1}{y'_1},\quad 1,\quad 0,$$

avec

$$(\tau, \tau_1, I, J)=\left(\frac{1}{y'}, \frac{1}{y'_1}, 0, \alpha\right)=1+\alpha\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{y'}, \frac{1}{y'_1}, 0, \alpha\right)\right]_{\alpha=0}+\ldots.$$

On en déduit que $\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{y'}, \frac{1}{y'_1}, 0, \alpha\right)_{\alpha=0}$ ne dépend que de M, c'est-à-dire que $y'-y'_1$ ne dépend pas de y'. Les différentielles sont calculées en faisant $dt=dt_1=0$, et la valeur fixe de la différence $y'-y'_1$ s'obtient en faisant $dx=1$, $dy=0$ dans (3); il vient ainsi

$$dx_1=\frac{-a^2}{(2x-a)^2},\qquad dy_1=\frac{4a^2y}{(2x-a)^3},$$

d'où résulte la formule remarquable

$$y'-y'_1=\frac{2y}{x-\frac{a}{2}}. \tag{4}$$

3. Établissons maintenant les formules de la symétrie $H_{A,B}$ la plus générale. Soit $(a, a', 1)$ et $(b, b', 1)$ les points A et B. On passe du cas précédent à celui-ci par un changement de variables linéaire conservant $t=0$ et le point $(0, 1, 0)$,

donc de la forme

$$x = l\bar{x} + n\bar{t},$$
$$y = l'\bar{x} + \bar{y} + n'\bar{t},$$
$$t = n''\bar{t}.$$

Si $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{t}$ désignent le système des coordonnées dans lequel B et A sont en (0, 0, 1) et (1, 0, 1), et si x, y, z sont les coordonnées actuelles, on a de plus

$$b = n, \qquad b' = n', \qquad n'' = 1,$$
$$a = l + n, \qquad a' = l' + n';$$

avec $\bar{t} = 1$, il vient donc

$$(5) \qquad \begin{cases} x = (a-b)\,\bar{x} + b, \\ y = (a'-b')\bar{x} + \bar{y} + b', \\ t = \bar{t} = 1, \end{cases}$$

et, réciproquement [3],

$$(6) \qquad \begin{cases} \bar{x} = \dfrac{x-b}{a-b}, \\ \bar{y} = y - b' - \dfrac{(a'-b')(x-b)}{a-b}, \\ t = t = 1. \end{cases}$$

(3) s'écrit ici

$$\bar{x}_1 = \frac{\bar{x}}{2\bar{x} - 1}, \qquad \bar{y}_1 = \frac{-\bar{y}}{(2\bar{x}-1)^2},$$

et se transforme par (5) et (6) en

$$x_1 = b + (a-b)\frac{x-b}{2(x-b)-(a-b)} = \frac{(a+b)x - 2ab}{2x-(a+b)};$$
$$y_1 = \frac{(a'-b')(x-b)}{2(x-b)-(a-b)} + b' - \frac{(a-b)(y-b') - (a'-b')(x-b)}{[2(x-b)-(a-b)]^2}(a-b)$$
$$= \frac{(a'+b')(x-b) - b'(a-b)}{2x-(a+b)} - \frac{(a-b)^2(y-b') - (a-b)(a'-b')(x-b)}{[2x-(a+b)]^2};$$

soit enfin

$$(7) \qquad \begin{cases} x_1 = \dfrac{\dfrac{a+b}{2}x - ab}{x - \dfrac{a+b}{2}}, \\ y_1 = \dfrac{-\left(\dfrac{a-b}{2}\right)^2 y + \dfrac{a'+b'}{2}x^2 - (ab'+ba')x + \dfrac{a^2b'+b^2a'}{2}}{\left(x - \dfrac{a+b}{2}\right)^2}. \end{cases}$$

---

[3] On suppose $a \neq b$, sans quoi A, B, I seraient alignés, et Γ se décomposerait en deux droites passant par I. Les bipoints (A, B) alignés avec I sont nécessairement écartés.

Posons

$$(8)\qquad \begin{cases} l=\dfrac{a+b}{2}, & m=ab, \qquad e=\dfrac{a'+b'}{2}, \\ f=-\dfrac{ab'+ba'}{2}, & g=\dfrac{a^2b'+b^2a'}{2}, \end{cases}$$

de sorte que les cinq nouveaux paramètres l, m, e, f, g sont liés par

$$(9)\qquad me+2lf+g=0;$$

les formules (7) de $H_{A,B}$ aux quatre paramètres essentiels a, a', b, b' s'écrivent ainsi

$$(10)\qquad \begin{cases} x_1=\dfrac{lx-m}{x-l}, \\ y_1=\dfrac{(m-l^2)y+ex^2+2fx+g}{(x-l)^2} \qquad (m-l^2\neq 0), \end{cases}$$

avec cinq paramètres non essentiels.

(7) montre que $H_{A,B}$ n'est conservé que par le changement des paramètres qui consiste à permuter a et b en même temps que a' et b' c'est-à-dire A et B. Ici, chaque symétrie est associée à un seul bipoint, et non deux comme dans le cas où I et J diffèrent.

En ce qui concerne la généralisation de (4), il résulte de la forme des relations (5) que $\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{dy_1}{dx_1}$ est encore indépendant de $\dfrac{dy}{dx}$, et l'on peut encore obtenir sa valeur en fonction de M, en faisant $dy=0$, $dx=1$. A l'aide de (5) et (4), on peut aussi écrire

$$\frac{dy}{dx}-\frac{dy_1}{dx_1}=\frac{1}{a-b}\left(\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}}-\frac{d\bar{y}_1}{d\bar{x}_1}\right)=\frac{2}{a-b}\,\frac{\bar{y}}{\bar{x}-\frac{1}{2}}$$
$$=\frac{2}{a-b}\,\frac{(a-b)(y-b')-(a'-b')(x-b)}{x-\frac{a+b}{2}},$$

et enfin

$$(11)\qquad y'-y'_1=\frac{2}{a-b}\,\frac{(a-b)y+(b'-a')x-(ab'-ba')}{x-\frac{a+b}{2}}.$$

Avec les paramètres de (10), et compte tenu de (8) et (9), cela s'écrit

$$(12)\qquad y'-y'_1=\frac{2}{m-l^2}\,\frac{(m-l^2)y+(le+f)x+(lf+g)}{x-l}.$$

4. Groupe H. — $H_{A,B}$ étant sa propre réciproque, l'ensemble des produits de symétries est un groupe, que nous appelons le groupe H. H appartient à l'ensemble des transformations ponctuelles

$$x_1=\varphi(x,y), \qquad y_1=\psi(x,y), \qquad t_1=t, \qquad \frac{D(\varphi,\psi)}{D(x,y)}\neq 0$$

pour lesquelles

$$\frac{dy_1}{dx_1} - \frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{\partial\psi}{\partial x} + \dfrac{\partial\psi}{\partial y}\dfrac{dy}{dx}}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\dfrac{dy}{dx}} - \frac{dy}{dx}$$

est indépendant de $\frac{dy}{dx}$. Pour cela, il faut et il suffit que $\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial\psi}{\partial y} - \frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0$, donc qu'on ait

$$(13) \qquad \begin{cases} x_1 = \varphi(x), \\ y_1 = \varphi'(x)y + \chi(x), \end{cases}$$

où $\varphi(x)$, $\chi(x)$ sont des fonctions arbitraires (⁴) de x, avec $\varphi'(x) \neq 0$.

Les transformations de H conservent également la famille des coniques Γ; elles appartiennent donc à l'ensemble des transformations (13) dont les fonctions φ et χ sont particularisées de manière que toute conique

$$(14) \qquad hy + ux^2 + vx + w = 0$$

conserve sa forme. (13) transforme

$$hy_1 + ux_1^2 + vx_1 + w = 0$$

en

$$(15) \qquad hy + h\frac{\chi(x)}{\varphi'(x)} + u\frac{\varphi(x)^2}{\varphi'(x)} + v\frac{\varphi(x)}{\varphi'(x)} + w\frac{1}{\varphi'(x)} = 0;$$

cela doit être de la forme (14) quels que soient les coefficients h, u, v, w, donc il faut et il suffit que la somme des termes autres que hy soit un polynome quadratique en x, quels que soient ces coefficients. Les termes en w et v donnent d'abord, pour $\varphi(x)$ et $\varphi'(x)$, des expressions de la forme

$$\varphi'(x) = \frac{1}{ax^2 + bx + c},$$
$$\varphi(x) = \frac{a_1x^2 + b_1x + c_1}{ax^2 + bx + c},$$

où a, b, c, a_1, b_1, c_1 sont des constantes. Une primitive de l'expression de $\varphi'(x)$ n'est rationnelle que si $ax^2 + bx + c$ est un carré parfait; $\varphi(x)$ est alors homographique, soit

$$\varphi(x) = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}, \qquad \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0.$$

Dans ces conditions, le coefficient de u dans (15) a la forme voulue, et celui de h donne, pour $\frac{\chi(x)}{\varphi'(x)}$, un polynome du second degré, d'ailleurs arbitraire;

(⁴) $\chi(x)$ et $\varphi'(x)$ sont évidemment continues. D'ailleurs les transformations de H sont algébriques, puisque $H_{A,B}$ l'est.

avec

$$\chi(x) = \frac{ex^2 + 2fx + g}{(\gamma x + \delta)^2},$$

les transformations qui possèdent les deux propriétés en question sont celles du groupe à 6 paramètres

$$(16) \qquad \begin{cases} x_1 = \dfrac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}, \\ y_1 = \dfrac{(\alpha\delta - \beta\gamma)y + ex^2 + 2fx + g}{(\gamma x + \delta)^2}. \end{cases}$$

Nous allons établir que H est ce groupe, en démontrant que toute transformation (16) est un produit de plusieurs symétries.

5. Cherchons d'abord si une transformation (16) peut être le produit de deux symétries $H_{A_2, B_2} \times H_{A_1, B_1}$. Prenons celles-ci sous la forme (10), soit

$$(17) \qquad H_{A_i, B_i} \begin{cases} x' = \dfrac{l_i x - m_i}{x - l_i}, \\ y' = \dfrac{(m_i - l_i^2)y + e_i x^2 + 2f_i x + g_i}{(x - l_i)^2} \end{cases} \qquad (i = 1, 2),$$

avec

$$(18) \qquad m_i e_i + 2 l_i f_i + g_i = 0.$$

La transformée finale de x est

$$x_1 = \frac{(l_1 l_2 - m_2)x + l_1 m_2 - m_1 l_2}{(l_1 - l_2)x + l_1 l_2 - m_1},$$

qu'il s'agit d'identifier avec la première équation (16). On a ainsi, avec un facteur auxiliaire [5] k, non nul,

$$(19) \qquad \begin{cases} m_1 = l_1 l_2 - k\delta, & m_2 = l_1 l_2 - k\alpha, \\ l_1 - l_2 = k\gamma, & l_1 m_2 - l_2 m_1 = k\beta; \end{cases}$$

l'élimination de m_1 et m_2 définit l_1 et l_2 par le système

$$(20) \qquad \begin{cases} l_1 - l_2 = k\gamma, \\ \gamma l_1 l_2 - \alpha l_1 + \delta l_2 - \beta = 0. \end{cases}$$

Si $\gamma \neq 0$, (20) représente, en coordonnées cartésiennes l_1, l_2, une droite et une hyperbole sans point commun à l'infini. L'intersection consiste en deux points, distincts ou non. Pour chaque valeur du paramètre arbitraire k, (19) admet alors deux solutions, distinctes ou non, en l_1, l_2, m_1, m_2.

---

(5) Lorsqu'on multiplie α, β, γ, δ par k, les coefficients e, f, g doivent être multipliés par k^2 afin de conserver la transformation (16). Ce caractère d'homogénéité permet de ne faire les calculs qu'avec la valeur $k = 1$.

Si $\gamma = 0$ et $\alpha \neq \delta$, (20) donne

$$l_1 = l_2 = \frac{\beta}{\delta - \alpha},$$

et, grâce à (19),

$$m_1 = l_1^2 - k\delta, \qquad m_2 = l_1^2 - k\alpha.$$

Si $\gamma = \alpha - \delta = 0$, (20) est impossible si $\beta \neq 0$, et indéterminé si $\beta = 0$, avec $l_1 = l_2$. Dans ce dernier cas, (19) donne d'ailleurs $m_1 = m_2$ de sorte que $H_{A_1, B_1} = H_{A_2, B_2}$ et le produit des deux symétries est l'identité. Poursuivons les calculs dans ces trois cas.

1° $\gamma \neq 0$: Observons d'abord que la deuxième relation (20) s'écrit encore

$$(21) \qquad (\gamma l_1 + \delta)(\gamma l_2 - \alpha) = \beta\gamma - \alpha\delta \neq 0$$

et que

$$H_{A_1, B_1} x - l_2 = \frac{l_1 x - m_1}{x - l_1} - l_2 = \frac{(l_1 - l_2)x + l_1 l_2 - m_1}{x - l_1} = k\frac{\gamma x + \delta}{x - l_1}.$$

Le produit des deux symétries transforme alors y en

$$y_1 = \frac{1}{k^2(\gamma x + \delta)^2}\{(m_2 - l_2^2)[(m_1 - l_1^2)y + e_1 x^2 + 2f_1 x + g_1] + e_2(l_1 x - m_1)^2 + 2f_2(l_1 x - m_1)(x - l_1) + g_2(x - l_1)^2\}.$$

Il s'agit d'identifier l'accolade avec le produit, par k^2, du numérateur de l'expression (16) de y_1.

La vérification est inutile pour les coefficients des termes en y, car le produit de deux symétries est *a priori* de la forme (16), de sorte que son coefficient $(m_2 - l_2^2)(m_1 - l_1^2)/k^2$ est le discriminant $\alpha\delta - \beta\gamma$ de la formule qui transforme x. Ce fait résulte également de la propriété du discriminant dans le produit de deux transformations homographiques. Compte tenu de (18), l'identification des termes en x^2 donne

$$k^2 e = (m_2 - l_2^2)e_1 + (l_1^2 - m_2)e_2 + 2f_2(l_1 - l_2),$$

ou, grâce à (19),

$$ke = (\gamma l_2 - \alpha)e_1 + (\gamma l_1 + \alpha)e_2 + 2\gamma f_2.$$

Les termes en x donnent, de même,

$$k^2 f = (m_2 - l_2^2)f_1 - l_1 m_1 e_2 - (l_1^2 + m_1)f_2 + l_1(m_2 e_2 + 2l_2 f_2)$$

ou

$$kf = (\gamma l_2 - \alpha)f_1 + (\delta - \alpha)l_1 e_2 - (\gamma l_1 - \delta)f_2.$$

Les termes indépendants de x donnent

$$k^2 g = (m_2 - l_2^2)g_1 + m_1^2 e_2 + 2l_1 m_1 f_2 - l_1^2(m_2 e_2 + 2l_2 f_2)$$

ou, compte tenu de (19) et de (20),

$$\begin{aligned} kg &= (\gamma l_2 - \alpha) g_1 + (k\delta^2 - \gamma l_1^2 l_2 - 2\delta l_1 l_2 + \alpha l_1^2) e_2 - 2\delta l_1 f_2 \\ &= (\gamma l_2 - \alpha) g_1 + (k\delta^2 - \delta l_1 l_2 - \beta l_1) e_2 - 2\delta l_1 f_2 \\ &= (\gamma l_2 - \alpha) g_1 - (\delta m_1 + \beta l_1) e_2 - 2\delta l_1 f_2. \end{aligned}$$

On peut remplacer cette dernière équation par celle que fournit la combinaison $k(g + 2l_1 f + m_1 e)$, qui élimine g_1 et donne un second membre de la forme

$$[(\gamma l_1 + \alpha) m_1 + 2(\delta - \alpha) l_1^2 - \beta l_1 - \delta m_1] e_2 + 2[\gamma m_1 - (\gamma l_1 - \delta) l_1 - \delta l_1] f_2;$$

le coefficient de $2f_2$ est $\gamma(m_1 - l_1^2) = -k\gamma(\gamma l_1 + \delta)$; celui de e_2 est

$$(\delta - \alpha)(2l_1^2 - m_1) + l_1(\gamma m_1 - \beta),$$

avec, grâce à (20),

$$\gamma m_1 - \beta = \gamma(l_1 l_2 - k\delta) - \beta = \alpha l_1 - \delta l_2 - k\gamma\delta = (\alpha - \delta) l_1;$$

le coefficient de e_2 est ainsi

$$(\delta - \alpha)(l_1^2 - m_1) = k(\delta - \alpha)(\gamma l_1 + \delta).$$

En définitive, on obtient le système des trois équations

$$(22) \qquad \left\{ \begin{aligned} &(\gamma l_2 - \alpha) e_1 + (\gamma l_1 + \alpha) e_2 + 2\gamma f_2 = ke, \\ &(\gamma l_2 - \alpha) f_1 + (\delta - \alpha) l_1 e_2 - (\gamma l_1 - \delta) f_2 = kf, \\ &(\gamma l_1 + \delta)[(\delta - \alpha) e_2 - 2\gamma f_2] = g + 2l_1 f + m_1 e, \end{aligned} \right.$$

aux quatre inconnues e_1, f_1, e_2, f_2, après avoir choisi k et déterminé l_1, l_2, m_1, m_2. (21) montre que $\gamma l_1 + \delta$ et $\gamma l_2 - \alpha$ ne sont pas nuls. La troisième équation (22) détermine donc f_2 lorsqu'on se donne e_2, arbitrairement; les deux autres équations du système fournissent ensuite e_1 et f_1. Dans ce cas, (16) est le produit de deux symétries d'une double infinité de façons, à cause du choix arbitraire de k et de e_2.

2° $\gamma = 0$ *et* $\alpha \neq \delta$: Nous avons déjà vu que $l_1 = l_2 = \frac{\beta}{\delta - \alpha}$, tandis que

$$m_1 = l_1^2 - k\delta, \qquad m_2 = l_1^2 - k\alpha.$$

Les calculs qui ont conduit à (22) sont encore valables, et ce système se réduit à

$$(23) \qquad \left\{ \begin{aligned} \alpha(e_2 - e_1) &= ke, \\ -\alpha f_1 + \beta e_2 + \delta f_2 &= kf, \\ \delta(\delta - \alpha) e_2 &= g + 2l_1 f + m_1 e, \end{aligned} \right.$$

avec $\alpha\delta \neq 0$. Les deux équations extrêmes déterminent e_1 et e_2, et il ne reste qu'une relation linéaire à satisfaire, entre f_1 et f_2. La réponse au problème est encore affirmative, avec la même double indétermination, mais le système (20) ne fournit qu'une solution.

3° $\gamma = \beta = \alpha - \delta = 0$: Ici, (16) se réduit à

$$(24) \qquad \begin{cases} x_1 = x, \\ y_1 = y + ex^2 + 2fx + g, \end{cases}$$

de sorte que $\alpha = \delta = 1$; (19) donne $l_1 = l_2$, $m_1 = m_2 = l_1^2 - k$, tandis que (22), toujours valable, s'écrit

$$(25) \qquad \begin{cases} e_2 - e_1 = ke, \\ f_2 - f_1 = kf, \\ g + 2l_1 f + m_1 e = 0. \end{cases}$$

La dernière équation permet de calculer l_1, non encore déterminé; elle s'écrit, en effet,

$$el_1^2 + 2fl_1 + g - ke = 0,$$

du second degré en l_1 si $e \neq 0$. Les deux autres équations (25) fournissent e_2 et f_2 en fonction des deux valeurs arbitraires de e_1 et f_1. Il y a impossibilité si $e = f = 0$, $g \neq 0$, et quadruple indétermination si $e = f = g = 0$. Dans ce dernier cas, (24) est d'ailleurs l'identité, et $H_{A_1, B_1} = H_{A_2, B_2}$ est complètement indéterminé puisque le carré de toute symétrie est l'identité.

Les résultats de cette discussion peuvent être rassemblés dans l'énoncé du

Théorème I. — *Toute transformation* (16) *est le produit de deux symétries, et cela d'une double infinité de façons au moins, sauf si* $\gamma = \alpha - \delta = 0$, $\beta \neq 0$, *ou si* $\gamma = \beta = \alpha - \delta = 0$, *avec* $e = f = 0$, $g \neq 0$.

6. Les transformations (16) qui ne sont pas un produit de deux symétries sont celles du type

$$(26) \qquad \begin{cases} x_1 = x + \beta, \\ y_1 = y + ex^2 + 2fx + g, \end{cases}$$

où $\beta \neq 0$, ou bien $\beta = e = f = 0$, $g \neq 0$. Multiplions une telle transformation [6] S par une symétrie $H_{A, B}$ dont le bipoint est sur $y = 0$, c'est-à-dire une symétrie (7) où $a' = b' = 0$; la forme (10) de celle-ci est alors

$$x_1 = \frac{lx - m}{x - l}, \qquad y_1 = \frac{(m - l^2)y}{(x - l)^2},$$

et les formules de la transformation $H_{A, B}S$ sont

$$x_1 = \frac{lx + \beta l - m}{x + \beta - l}, \qquad y_1 = \frac{(m - l^2)y + (m - l^2)(ex^2 + 2fx + g)}{(x + \beta - l)^2}.$$

(6) S n'est pas une symétrie $H_{A,B}$, car ce n'est pas une transformation symétrique.

Ce n'est plus une transformation (16) exceptionnelle, et l'on peut l'identifier d'une infinité de façons à un produit $H_{A_1,B_1}H_{A_2,B_2}$. On en déduit que $S = H_{A,B}H_{A_1,B_1}H_{A_2,B_2}$, et l'on a le

Théorème II. — *Toute transformation* (16) *appartient à* H *et est le produit de trois symétries au plus.*

7. **Groupe G.** — Le groupe G des transformations qui conservent la famille des coniques Γ se déduit de H par le raisonnement suivi au paragraphe 4 du chapitre I. La symétrie $H_{A,B}$ représentée par (3) transforme la conique générale (14) en la conique d'équation homogène

$$h\frac{a^2}{4}yt - u\frac{a^2}{4}x^2 - v\frac{a}{2}x\left(x-\frac{a}{2}t\right) - w\left(x-\frac{a}{2}t\right)^2 = 0.$$

Celle-ci se décompose en $t = 0$ et une droite pourvu que

$$u\frac{a^2}{4} + v\frac{a}{2} + w = 0,$$

qui exprime que (14) passe par le point $\left(\frac{a}{2}, 0, 1\right)$; ce point C est encore le conjugué harmonique, par rapport à A, B, du point où la droite AB rencontre $t = 0$, que nous avons convenu d'appeler le pôle de $t = 0$ (tangente de contact de la famille des coniques Γ) par rapport au bipoint (A, B). Il suffit ensuite de raisonner comme au paragraphe cité pour voir que toute transformation $\mathfrak{T}$ de G est de la forme $H_{A_1,B_1}SH_{A,B}$, où $H_{A,B}$ et H_{A_1,B_1} sont deux symétries telles que les pôles C et C_1 de $t = 0$ par rapport aux bipoints (A, B) et (A_1, B_1) soient homologues pour $\mathfrak{T}(C_1 = \mathfrak{T}C)$, et où S est projective et appartient à G. S conserve donc $t = 0$ et le point I(0, 1, 0) et ces propriétés suffisent. S a ainsi la forme générale

$$(27)\qquad \begin{cases} x_1 = \lambda x + \nu t, \\ y_1 = \lambda' x + \mu' y + \nu' t, \\ t_1 = t, \end{cases}$$

avec $\lambda\mu' \neq 0$; (27) n'appartient généralement pas à H, car, lorsque $t =$ const.,

$$\frac{dy_1}{dx_1} - \frac{dy}{dx} = \left(\frac{\mu'}{\lambda} - 1\right)\frac{dy}{dx} + \frac{\lambda'}{\lambda}$$

dépend de $\frac{dy}{dx}$ si $\mu' \neq \lambda$. Celles qui appartiennent à H sont celles de la forme

$$(28)\qquad \begin{cases} x_1 = \lambda x + \nu t, \\ y_1 = \lambda' x + \lambda y + \nu' t, \\ t_1 = t; \end{cases}$$

c'est naturellement la forme des équations (16), où $\gamma = e = 0$. Toute transformation (27) est le produit d'une transformation du type (28) et de la transformation (27) particulière

$$(29)\qquad \begin{cases} x_1 = x, \\ y_1 = my, \qquad \left(m = \dfrac{\mu'}{\lambda}\right), \\ t_1 = t. \end{cases}$$

En résumé, *toute transformation de* G *est telle que* $\dfrac{dy_1}{dx_1} - m\dfrac{dy}{dx}$ *soit indépendante de* $\dfrac{dy}{dx}$, *pour une certaine constante* m. C'est donc le produit d'une transformation (29) par une transformation de H, et réciproquement. Nous avons ainsi établi que la transformation générale de G est, avec $t = t_1 = 1$,

$$(30)\qquad \begin{cases} x_1 = \dfrac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}, \\ y_1 = \dfrac{ky + ex^2 + 2fx + g}{(\gamma x + \delta)^2}, \end{cases}$$

et dépend de sept paramètres essentiels.

8. De même que lorsque $I \neq J$, les transformations du groupe actuel G conservent le birapport de quatre points situés sur une conique Γ. On peut choisir le sommet (0, 0, 1) et le côté $y = 0$ du triangle de référence de manière que l'équation de Γ soit

$$(31)\qquad yt - x^2 = 0.$$

Le birapport de quatre points M_i de Γ est égal à celui des quatre droites IM_i, donc des quatre coordonnées x_i (avec $t = 1$), et la transformation (30) de x est homographique. Par contre, le fait remarquable qui distingue le groupe (30) du groupe G du chapitre I est le nombre des paramètres; (30) a un paramètre de plus que son sous-groupe H, alors que G et H ont tous les deux six paramètres lorsque $I \neq J$. On observe également qu'il n'existe pas de relation de continuité entre H et G — H dans ce dernier cas, alors que (16) se rattache à (30) en faisant tendre k vers $\alpha\delta - \beta\gamma$. Il est clair que la permutation de I et J, qui caractérisait la famille G — H au chapitre I, n'a plus de sens ici.

Ce paramètre supplémentaire se retrouve dans le sous-groupe de G qui conserve tous les points d'une conique Γ_0 donnée. Prenons celle-ci sous la forme (31), avec les coordonnées x_1, y_1, t_1, et transformons-la par (30). Elle devient

$$kyt + ex^2 + 2fxt + gt^2 - (\alpha x + \beta t)^2 = 0,$$

et se conserve pourvu qu'on ait $e = \alpha^2 - k$, $f = \alpha\beta$, $g = \beta^2$; le sous-groupe qui conserve la conique Γ_0 est ainsi le groupe à quatre paramètres essentiels

$$x_1 = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta},$$
$$y_1 = k\frac{y - x^2}{(\gamma x + \delta)^2} + x_1^2.$$

Chaque point de Γ_0 est invariant, pourvu que la transformation homographique de x soit l'identité, ce qui donne le sous-groupe à un paramètre

$$(32)\qquad \begin{cases} x_1 = x, \\ y_1 = ky + (1-k)\,x^2. \end{cases}$$

Alors que, pour $I \neq J$, il existe une transformation unique qui conserve tous les points de Γ_0, qui appartient à l'ensemble $G - H$, et est l'analogue de l'inversion pour le groupe anallagmatique, nous avons ici un sous-groupe, ce qui rend impossible l'extension de l'inversion.

Observons enfin que (29) est, pour $y = 0$, l'analogue de (32) pour la conique (31).

9. Écart de deux coniques Γ. — Lorsque deux courbes passant par M sont transformées dans le groupe G, les pentes de leurs tangentes en M n'offrent un invariant que dans le sous-groupe H, et c'est la différence de ces pentes. Nous l'appellerons *l'écart en* M. Il se définit algébriquement, et son invariance est algébrique. Calculons-le pour deux coniques Γ, Γ' d'équations

$$(33)\qquad h\,y + u\,x^2 + v\,x + w = 0,$$

$$(33')\qquad h'y + u'x^2 + v'x + w' = 0,$$

où l'on suppose $hh' \neq 0$, afin d'écarter les coniques formées par deux droites issues de I, que nous appelons « coniques Γ singulières ».

Soit $\tau = \left(\dfrac{dy}{dx}\right)_\Gamma$, $\tau' = \left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{\Gamma'}$ en l'un des deux points communs $M(x, y, 1)$ de ces deux coniques. On a

$$\tau - \tau' = \frac{2u'x + v'}{h'} - \frac{2ux + v}{h} = \frac{2(hu' - uh')x + hv' - vh'}{hh'},$$

où x désigne l'une des deux racines de l'équation

$$(34)\qquad (hu' - uh')x^2 + (hv' - vh')x + hw' - wh' = 0.$$

Il vient donc

$$(35)\qquad \tau - \tau' = \pm \frac{1}{hh'}\sqrt{(hv' - vh')^2 - 4(hu' - uh')(hw' - wh')},$$

où le double signe correspond aux deux points d'intersection de Γ et Γ'. $|\tau - \tau'|$ peut s'appeler *l'écart des deux coniques.*

Considérons u, v, w, h comme des coordonnées homogènes de l'espace à trois dimensions, et posons

$$(36)\qquad \frac{u}{h} = \frac{\xi - i\eta}{2}, \qquad \frac{w}{h} = -\frac{\xi + i\eta}{2}, \qquad \frac{v}{h} = \zeta;$$

on a, de même,

$$\frac{u'}{h'} = \frac{\xi' - i\eta'}{2}, \qquad \frac{w'}{h'} = -\frac{\xi' + i\eta'}{2}, \qquad \frac{v'}{h'} = \zeta',$$

et (35) s'écrit

$$|\tau - \tau'| = \sqrt{(\xi' - \xi)^2 + (\eta' - \eta)^2 + (\zeta' - \zeta)^2}; \tag{37}$$

ainsi l'écart de Γ et Γ' est représenté par la distance des images $c(\xi, \eta, \zeta)$ et $c'(\xi', \eta', \zeta')$ des deux coniques dans l'espace des coordonnées cartésiennes rectangulaires ξ, η, ζ. Dans cet espace, l'image de H est un groupe ponctuel conservant les distances, mais dont chaque transformation se rattache par continuité à l'identité à cause de l'invariance de l'écart algébrique dans H. Il est à présumer que cette image de H est le groupe des déplacements, puisque H a six paramètres essentiels. Nous le vérifierons plus loin.

Avec les coordonnées de son image, l'équation (33) de Γ devient

$$\xi \frac{x^2 - 1}{2} + \eta \frac{x^2 + 1}{2i} + \zeta x + y = 0; \tag{38}$$

Γ est ainsi rapportée à un système de quatre coniques particulières de la famille, soit

$$X_1 \equiv \frac{x^2 - 1}{2} = 0, \qquad X_2 \equiv \frac{x^2 + 1}{2i} = 0, \qquad X_3 \equiv x = 0, \qquad X_4 \equiv y = 0. \tag{39}$$

En coordonnées rectangulaires homogènes x_i définies par

$$\frac{x_1}{\xi} = \frac{x_2}{\eta} = \frac{x_3}{\zeta} = \frac{x_4}{1}, \tag{40}$$

(38) s'écrit

$$x_1 X_1 + x_2 X_2 + x_3 X_3 + x_4 X_4 = 0. \tag{41}$$

Les coniques Γ' tangentes à une conique Γ donnée ont leurs images c' à la distance nulle de l'image c de Γ, donc sur la sphère-point c. Comme ces coniques, ces points dépendent bien de deux paramètres. En particulier, les points du cône $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 0$ sont les images de coniques tangentes à la droite $y = 0$, car l'image de $X_4 = 0$ est l'origine $\xi = \eta = \zeta = 0$.

Ici, nous ne pouvons assimiler le point courant du plan des coniques aux coniques singulières, comme nous avions pu le faire au chapitre I. Au point $M(x, y, t)$ on peut associer les coordonnées homogènes X_i définies comme en (39), avec $\frac{x}{t}, \frac{y}{t}$ au lieu de x, y, et à un facteur près, soit

$$X_1 = \lambda \frac{x^2 - t^2}{2}, \qquad X_2 = \lambda \frac{x^2 + t^2}{2i}, \qquad X_3 = \lambda x t, \qquad X_4 = \lambda y t, \tag{42}$$

de sorte que $X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = 0$. Si l'on considère les X_i comme les coefficients d'un plan $\sum_{i=1}^{4} X_i x_i = 0$ de l'espace des x_i, les images m des points M sont les plans isotropes, et (41) exprime que les points d'une conique Γ ont pour images les plans isotropes qui passent par l'image c de Γ. Réciproquement, les coniques Γ qui passent par un point donné M ont pour images les points c du plan isotrope m, image de M. Deux coniques Γ, Γ', tangentes en M, ont leurs images c, c' dans m, à une distance nulle l'une de l'autre; la droite cc' est la génératrice de contact de m avec la sphère-point c.

Observons également que les images des droites du plan qui ne passent pas par I sont les images de coniques Γ où $u=0$, donc les points du plan isotrope particulier $x_1 - ix_2 = 0$. L'image de la tangente à une conique Γ, en l'un de ses points M, est donc l'intersection de ce plan et de la génératrice de contact de la sphère-point c avec l'image m de M.

Les images des coniques Γ singulières sont les points à l'infini.

Deux coniques Γ, Γ', d'images c, c', se coupent en deux points M_1, M_2 dont les images sont les deux plans isotropes m_1, m_2 qui passent par la droite cc'. Les points de cette droite sont les images des coniques du faisceau défini par Γ, Γ'.

10. Transformation d'une conique Γ par G. — La transformation inverse de (30) transforme (33) en Γ_1, d'équation

$$h_1 y + u_1 x^2 + v_1 x + w_1 = 0,$$

de manière que, avec les notations de (30),

$$(\gamma x + \delta)^2 [h y_1 + u x_1^2 + v x_1 + w] \equiv h_1 y + u_1 x^2 + v_1 x + w_1.$$

Il vient ainsi

$$(43)\quad \left\{\begin{aligned} h_1 &= kh,\\ u_1 &= \alpha^2 u + \alpha\gamma v + \gamma^2 w + eh,\\ w_1 &= \beta^2 u + \beta\delta v + \delta^2 w + gh,\\ v_1 &= 2\alpha\beta u + (\alpha\delta + \beta\gamma) v + 2\gamma\delta w + 2fh.\end{aligned}\right.$$

Les cordonnées ξ_1, η_1, ζ_1 de l'image c_1 de Γ_1 sont alors

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= \frac{u_1 - w_1}{h_1} = \frac{(\alpha^2 - \beta^2) u + (\gamma^2 - \delta^2) w + (\alpha\gamma - \beta\delta) v + (e-g) h}{kh},\\
\eta_1 &= i\frac{u_1 + w_1}{h_1} = i\frac{(\alpha^2 + \beta^2) u + (\gamma^2 + \delta^2) w + (\alpha\gamma + \beta\delta) v + (e+g) h}{kh},\\
\zeta_1 &= \frac{v_1}{h_1},
\end{aligned}$$

et, par conséquent, en fonction des coordonnées ξ, η, ζ de l'image c de Γ,

$$(44)\quad \left\{\begin{aligned}
\xi_1 &= \frac{\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 + \delta^2}{2k}\xi + \frac{\alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2 - \delta^2}{2ik}\eta + \frac{\alpha\gamma - \beta\delta}{k}\zeta + \frac{e-g}{k},\\
\eta_1 &= \frac{-\alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2}{2ik}\xi + \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2}{2k}\eta + \frac{\alpha\gamma + \beta\delta}{-ik}\zeta + \frac{e+g}{-ik},\\
\zeta_1 &= \frac{\alpha\beta - \gamma\delta}{k}\xi + \frac{\alpha\beta + \gamma\delta}{ik}\eta + \frac{\alpha\delta + \beta\gamma}{k}\zeta + \frac{2f}{k}.
\end{aligned}\right.$$

C'est une transformation de H pour $k = \alpha\delta - \beta\gamma$; la matrice des coefficients est alors orthogonale. Dans le cas général, le déterminant de celle-ci vaut $\left(\frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{k}\right)^3$, et il se réduit à 1 pour une transformation de H. *Dans l'espace des images,* H *est donc le groupe des déplacements.*

Les formules de la rotation autour de l'origine $O(k = \alpha\delta - \beta\gamma,\ e = f = g = 0)$ deviennent les formules d'Olinde Rodrigues en posant

$$\alpha = \rho - i\nu, \qquad \beta = -(\mu - i\lambda), \qquad \gamma = \mu + i\lambda, \qquad \delta = \rho + i\nu,$$

où λ, μ, ν sont des paramètres directeurs de l'axe de la rotation d'angle

$$\theta = 2 \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}}{\rho}.$$

En particulier,

$$\alpha\delta - \beta\gamma = \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \rho^2 \neq 0.$$

Bien entendu, il s'agit ici de rotation réelle ou imaginaire, et c'est pourquoi les transformations de H pour lesquelles $\alpha\delta - \beta\gamma < 0$ se rattachent par continuité à l'identité, par l'intermédiaire des valeurs complexes de ces coefficients. Par exemple,

$$\alpha = -\delta \neq 0, \qquad \beta = \gamma = 0, \qquad e = f = g = 0, \qquad k = \alpha\delta - \beta\gamma = -\alpha^2$$

correspond à la symétrie

$$\xi_1 = -\xi, \qquad \eta_1 = -\eta, \qquad \zeta_1 = \zeta$$

par rapport à l'axe $O\zeta$.

Les formules générales (44) représentent le produit d'une rotation autour de O, d'une translation définie par les éléments e, f, g, et d'une homothétie de rapport $\frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{k}$. En résumé, G *est isomorphe au groupe des similitudes de l'espace à trois dimensions, et le sous-groupe* H *est isomorphe au groupe des déplacements.*

En particulier, les symétries, c'est-à-dire les transformations où les deux figures sont égales à une symétrie près par rapport à un plan, sont les transformations (44), où $k = -(\alpha\delta - \beta\gamma)$.

11. Une symétrie $H_{A,B}$, qui conserve les deux points A, B et chaque conique Γ qui passe par eux, correspond à un déplacement des images qui conserve tous les points de l'intersection Δ des plans isotropes qui sont les images de A et B. C'est donc une rotation autour de Δ. C'est même la symétrie par rapport à Δ, car les équations (7) sont des formules (30), où $\alpha + \delta = 0$, donc $\rho = 0$ et $\operatorname{cotg} \frac{\theta}{2} = 0$. La correspondance que $H_{A,B}$ établit entre les points d'une conique Γ passant par A, B a pour image la symétrie par rapport à Δ des plans isotropes qui passent par l'image c de Γ; c est d'ailleurs sur Δ. La relation (9) exprime, comme il se doit, que la translation représentée par les derniers termes des équations (44) est perpendiculaire à Δ.

La construction du déplacement le plus général dans l'espace à trois dimensions à l'aide de symétries par rapport à des droites est ainsi la traduction, pour les images, de la construction du groupe H à l'aide des symétries $H_{A,B}$. Une remarque s'impose, si l'on se rappelle l'énoncé du théorème I, puisqu'il est bien connu que tout déplacement de l'espace est le produit de deux symétries par rapport à deux droites, coupant orthogonalement l'axe du déplacement hélicoïdal, dont l'une peut d'ailleurs être choisie arbitrairement. La contradiction n'est qu'apparente, car les deux exceptions obtenues au paragraphe 5 correspondent à des déplacements imaginaires de l'espace des images.

La première d'entre elles est caractérisée par $\alpha = \delta = 1$, $\gamma = 0$, $\beta \neq 0$; le système (44) correspondant, compte tenu de $k = \alpha\delta - \beta\gamma = 1$, est de la forme

$$(45)\qquad \left\{\begin{aligned} \xi_1 &= \left(1 - \frac{\beta^2}{2}\right)\xi + i\frac{\beta^2}{2}\eta - \beta\zeta + p, \\ \eta_1 &= i\frac{\beta^2}{2}\xi + \left(1 + \frac{\beta^2}{2}\right)\eta + i\beta\zeta + q, \\ \zeta_1 &= \beta\xi - i\beta\eta + \zeta + r; \end{aligned}\right.$$

On a donc

$$\lambda = -i\frac{\beta}{2}, \qquad \mu = -\frac{\beta}{2}, \qquad \nu = 0, \qquad \rho = 1,$$

et l'axe Δ est isotrope.

La deuxième exception est caractérisée par

$$\alpha = \delta = 1, \qquad \beta = \gamma = 0, \qquad e = f = 0, \qquad g \neq 0,$$

et le système (44) correspondant, où k est encore égal à 1, définit une translation isotrope

$$(46)\qquad \xi_1 = \xi - g, \qquad \eta_1 = \eta + ig, \qquad \zeta_1 = \zeta.$$

D'ailleurs, il faut se garder de conclure hâtivement en ce qui concerne cette correspondance entre le groupe H et celui des déplacements des images. En effet, l'espace des images se comporte comme un milieu isotrope pour les déplacements, tandis que l'espace des coordonnées $\frac{u}{h}, \frac{v}{h}, \frac{w}{h}$ des coniques Γ ne l'est pas pour celles-ci; c'est ainsi que, dans les formules de transformation (46), ξ et η jouent le même rôle dans l'espace, alors que u et w ne sont pas comparables dans la représentation (33) de Γ. Sous une autre forme, on peut dire que les pentes i et $-i$ des directions parallèles à $\xi o \eta$ ne jouent pas le même rôle dans la famille des coniques Γ. Effectivement, si (46) est la représentation d'une transformation exceptionnelle du groupe H, il n'en est pas de même pour

$$(46')\qquad \xi_1 = \xi + e, \qquad \eta_1 = \eta + ie, \qquad \zeta_1 = \zeta,$$

obtenue en faisant $\alpha = \delta = 1$, $\beta = \gamma = 0$, $f = g = 0$, $e \neq 0$, $k = 1$ dans (44). Le théorème I est d'accord avec la représentation de (46') par un produit de deux symétries par rapport à deux droites ([7]); cette représentation vaut donc aussi pour toute translation isotrope et, en particulier, pour (46). Le même genre d'observation s'applique à (45).

12. Coniques Γ invariantes dans une transformation de G. — La recherche de ces coniques équivaut à celle des points de l'espace qui sont invariants dans une transformation du groupe des similitudes. Il existe généralement un point invariant, unique, si le rapport de similitude diffère de 1 ; s'il s'agit d'un déplacement, il n'y a aucun point invariant à distance finie, ou il y en a une infinité. Il n'est pas sans intérêt de retrouver ces résultats à l'aide du système (43), car nous pourrons en même temps préciser quelques points de détail.

Les coniques Γ invariantes pour (43) sont celles qui sont fournies par le système d'équations

$$u_1=\chi u, \qquad v_1=\chi v, \qquad w_1=\chi w, \qquad h_1=\chi h, \tag{47}$$

donc $\chi=k$ si $h\neq 0$. Les coniques Γ autres que les systèmes de deux droites passant par I sont ainsi déterminées par le système des trois équations homogènes à quatre inconnues u, v, w, h

$$\left\{\begin{aligned} (\alpha^2-k)u+\alpha\gamma v+\gamma^2 w+eh&=0,\\ 2\alpha\beta u+(\alpha\delta+\beta\gamma-k)v+2\gamma\delta w+2fh&=0,\\ \beta^2 u+\beta\delta v+(\delta^2-k)w+gh&=0.\end{aligned}\right. \tag{48}$$

Si $h=0$, χ est quelconque, et l'on a le système à quatre inconnues u, v, w, χ, linéaire et homogène en u, v, w,

$$\left\{\begin{aligned} (\alpha^2-\chi)u+\alpha\gamma v+\gamma^2 w&=0,\\ 2\alpha\beta u+(\alpha\delta+\beta\gamma-\chi)v+2\gamma\delta w&=0,\\ \beta^2 u+\beta\delta v+(\delta^2-\chi)w&=0.\end{aligned}\right. \tag{49}$$

La discussion de (48), où k a une valeur *a priori* indépendante de α, β, γ, δ, fournit en même temps celle de (49). On a donc une conique Γ invariante unique lorsque la matrice des coefficients de (48)

$$\left\Vert\begin{matrix} \alpha^2-k & \alpha\gamma & \gamma^2 & e\\ 2\alpha\beta & \alpha\delta+\beta\gamma-k & 2\gamma\delta & 2f\\ \beta^2 & \beta\delta & \delta^2-k & g\end{matrix}\right\Vert \tag{50}$$

est de rang 3. Pour une vraie conique Γ, c'est le déterminant formé par les trois premières colonnes qui importe; il est égal à

$$D(k)\equiv -k^3+(\alpha^2+\delta^2+\alpha\delta+\beta\gamma)k^2-(\alpha\delta-\beta\gamma)(\alpha^2+\delta^2+\alpha\delta+\beta\gamma)k+(\alpha\delta-\beta\gamma)^3,$$

donc, en posant $\alpha\delta-\beta\gamma=K$,

$$D(k)\equiv -(k-K)[k^2-(\alpha^2+\delta^2+2\beta\gamma)k+K^2]. \tag{51}$$

([7]) Ces deux droites sont parallèles, non isotropes, et perpendiculaires à la translation isotrope.

Le rapport de la similitude étant $\frac{K}{k}$, $D(k) = 0$ lorsque (43) est une transformation de H, correspondant à un déplacement; comme prévu, ou il n'existe alors aucune conique invariante ayant une image à distance finie, ou il y en a une infinité. (51) fournit aussi deux autres valeurs de k, généralement différentes de K, donc fournissant des similitudes pour les images, pour lesquelles la réponse est la même. Le crochet au second membre de (51) s'écrit

$$k^2 - 2\left[\frac{(\alpha + \delta)^2}{2} - K\right] k + K^2 \equiv k^2 - 2(2\rho^2 - K)k + K^2,$$

où ρ est l'un des éléments des formules d'Olinde Rodrigues, lié à

$$K = \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \rho^2$$

par la formule

$$\rho^2 = K \cos^2 \frac{\theta}{2}.$$

Ce trinôme s'écrit donc encore

$$k^2 - 2kK \cos\theta + K^2$$

et s'annule pour les deux rapports de similitude $\frac{K}{k} = e^{\pm i\theta}$. Ces valeurs sont généralement imaginaires et, par conséquent, sans intérêt lorsqu'on s'en tient aux transformations réelles du groupe G. Cependant, elles sont réelles lorsque θ est un multiple de π. Il s'agit alors de transformations du groupe $H(\theta = 0)$, ou dont le rapport de similitude vaut $-1 (\theta = \pi)$. Effectivement il existe dans l'espace des similitudes de rapport -1 et qui ne conservent aucun point à distance finie. Ce sont celles qui équivalent à une symétrie par rapport à une droite D multipliée par une symétrie par rapport à un plan P parallèle à cette droite. Toute similitude équivaut à un tel produit, où D et P sont quelconques; si P coupe D, le point d'intersection est le point invariant unique; si P contient D, tous les points du plan Q perpendiculaire à P suivant D sont invariants; d'ailleurs, la similitude équivaut alors à la symétrie par rapport à Q. Effectivement, lorsque $\rho = 0$,

$$D(k) \equiv -(k - K)(k + K)^2$$

et, pour la racine double $k = -K$, le système d'équations (48) en u, v, w est de rang 1; il est donc ou insoluble, ou équivalent à une seule équation. La transformation (44) correspondant à ce dernier cas conserve toutes les coniques Γ d'un réseau linéaire, dont les images sont justement les points du plan de la symétrie correspondante.

13. Terminons par une représentation, remarquable dans l'espace des images, de la figure formée par une conique Γ divisée harmoniquement par deux autres. On a le

THÉORÈME. — *Pour que deux coniques Γ_1, Γ_2, d'images c_1, c_2, déterminent une division harmonique sur une conique Γ d'image c, il faut et il suffit que l'angle $\widehat{c_1 c c_2}$ soit droit.*

Le bipoint d'intersection (A_1, B_1) de Γ et Γ_1 a pour image le couple des plans isotropes (a_1, b_1) qui passent par la droite cc_1; pour que (A_1, B_1) soit conjugué harmonique, sur Γ, par rapport au bipoint (A_2, B_2) commun à Γ et Γ_2, il faut et il suffit que la symétrie H_{A_2, B_2} conserve (A_1, B_1), donc que, dans l'espace, la symétrie par rapport à la droite cc_2 conserve le couple (a_1, b_1) et, par conséquent, la droite cc_1. La condition est l'orthogonalité de ces deux droites. C. Q. F. D.

Par exemple, pour que Γ soit divisée harmoniquement par Γ_1 et Γ_2, en même temps que Γ_1 par Γ et Γ_2, il faut et il suffit que les deux angles c et c_1 du triangle cc_1c_2 soient droits. Ce n'est possible avec des coniques non exceptionnelles, dont les images sont à distance finie, que si la distance cc_1 est nulle, donc si Γ et Γ_1 sont tangentes. Dans ces conditions, il faut et il suffit que c_2 soit dans le plan isotrope qui passe par cc_1; les c_2 sont les images des coniques de la famille qui passent par le point de tangence de Γ, Γ_1 (autre que I) et dépendent effectivement de deux paramètres comme ces coniques.

D'une manière générale, montrons que le birapport des deux bipoints d'intersection (A_1, B_1), (A_2, B_2) est $-\operatorname{tg}^2 \frac{\widehat{c_1 c c_2}}{2}$ ou $-\operatorname{cotg}^2 \frac{\widehat{c_1 c c_2}}{2}$, suivant l'ordre des deux points d'un bipoint. En effet, représentons Γ par l'équation (33) et $\Gamma_i (i = 1, 2)$ par l'équation semblable de coefficients h_i, u_i, v_i, w_i. L'équation aux abscisses des deux points A_i, B_i est

$$(hu_i - uh_i)x^2 + (hv_i - vh_i)x + hw_i - wh_i = 0. \tag{52}$$

Le birapport $R = (A_1, B_1; A_2, B_2)$ est égal à celui des deux racines de l'équation (52) d'indice $i = 1$ avec celles de l'équation d'indice $i = 2$. On sait que si ces équations sont écrites

$$\alpha_i x^2 + 2\beta_i x + \gamma_i = 0,$$

R est donné par

$$\left|\frac{R+1}{R-1}\right| = \frac{|\alpha_1\gamma_2 + \alpha_2\gamma_1 - 2\beta_1\beta_2|}{2\sqrt{(\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2)(\alpha_2\gamma_2 - \beta_2^2)}}.$$

Avec les coordonnées des images, le numérateur

$$(hu_1 - uh_1)(hw_2 - wh_2) + (hw_1 - wh_1)(hu_2 - uh_2) - \frac{1}{2}(hv_1 - vh_1)(hv_2 - vh_2)$$

devient

$$\begin{aligned} -h^2 h_1 h_2 \Big[& \frac{\xi_1 - \xi - i(\eta_1 - \eta)}{2} \times \frac{\xi_2 - \xi + i(\eta_2 - \eta)}{2} + \frac{\xi_1 - \xi + i(\eta_1 - \eta)}{2} \\ & \times \frac{\xi_2 - \xi - i(\eta_2 - \eta)}{2} + \frac{1}{2}(\zeta_1 - \zeta)(\zeta_2 - \zeta)\Big] \\ = -\frac{1}{2} h^2 h_1 h_2 [& (\xi_1 - \xi)(\xi_2 - \xi) + (\eta_1 - \eta)(\eta_2 - \eta) + (\zeta_1 - \zeta)(\zeta_2 - \zeta)]. \end{aligned}$$

En égalant les deux indices, on en déduit

$$\alpha_i\gamma_i-\beta_i^2=-\frac{1}{4}h^2h_i^2[(\xi_i-\xi)^2+(\eta_i-\eta)^2+(\zeta_i-\zeta)^2]=-\frac{1}{4}h^2h_i^2\,\overline{cc}_i^2,$$

donc

$$\left|\frac{R+1}{R-1}\right|=\left|\cos\widehat{c_1cc_2}\right|.$$

14. Il n'est pas sans intérêt de vérifier l'isomorphisme de H avec le groupe des déplacements de l'espace, et celui de G avec le groupe des similitudes, à l'aide des transformations infinitésimales. Les sept transformations infinitésimales du groupe des simililitudes sont

$$(53)\quad\left\{\begin{array}{lll} T_1=\dfrac{\partial f}{\partial x}, & T_2=\dfrac{\partial f}{\partial y}, & T_3=\dfrac{\partial f}{\partial z}, \\ R_1=y\dfrac{\partial f}{\partial z}-z\dfrac{\partial f}{\partial y}, & R_2=z\dfrac{\partial f}{\partial x}-x\dfrac{\partial f}{\partial z}, & R_3=x\dfrac{\partial f}{\partial y}-y\dfrac{\partial f}{\partial x}, \\ & S=x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}+z\dfrac{\partial f}{\partial z}, & \end{array}\right.$$

et sa structure est fournie par le tableau

$$(54)\quad\left\{\begin{array}{ll} (T_i,T_k)=0 & (i,k=1,2,3); \\ (R_i,R_k)=-R_h & \text{si } i,k,h \text{ est toute permutation} \\ & \qquad\text{circulaire de } 1,2,3; \\ (T_i,R_i)=0 & (i=1,2,3); \\ (T_i,R_k)=-(T_k,R_i)=-T_h & \text{si } i,k,h \text{ est toute permutation} \\ & \qquad\text{circulaire de } 1,2,3; \\ (T_i,S)\;=T_i,\qquad (R_i,S)=0 & (i=1,2,3). \end{array}\right.$$

On forme les transformations infinitésimales de H en donnant des valeurs infiniment petites aux coefficients β, γ, e, f, g des équations (16), avec $\delta=1$ et $\alpha=1+\varepsilon$, où ε est un sixième infiniment petit. Dans ces conditions, $\alpha\delta-\beta\gamma=1+\varepsilon$ en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur. Pour le groupe G, on complète avec le coefficient k de l'expression (30) de y_1, infiniment voisin de 1; pour que le rapport de similitude $\dfrac{k}{\alpha\delta-\beta\gamma}$ soit assimilable à $1+\varepsilon'$, où ε' est un infiniment petit, on prendra $k=1+\varepsilon+\varepsilon'$. Avec ces hypothèses, (30) donne les variations

$$\Delta x=\frac{(1+\varepsilon)x+\beta}{1+\gamma x}-x=\beta+\varepsilon x-\gamma x^2+\ldots,$$

$$\Delta y=\frac{(1+\varepsilon+\varepsilon')y+ex^2+2fx+g}{(1+\gamma x)^2}-y=(\varepsilon+\varepsilon')y-2\gamma xy+ex^2+2fx+g+\ldots,$$

où l'on ne conserve que les éléments du premier ordre; en associant les transformations infinitésimales aux paramètres g, $2f$, e, β, ε, $-\gamma$, et ε' dans cet ordre, le groupe G est représenté par le tableau

$$(55)\quad \left\{\begin{array}{lll} H_1=\dfrac{\partial f}{\partial y}, & H_2=x\dfrac{\partial f}{\partial y}, & H_3=x^2\dfrac{\partial f}{\partial y}, \\ K_1=\dfrac{\partial f}{\partial x}, & K_2=x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}, & K_3=x^2\dfrac{\partial f}{\partial x}+2xy\dfrac{\partial f}{\partial y}, \\ & L=y\dfrac{\partial f}{\partial y}. & \end{array}\right.$$

Les deux premières lignes forment le groupe H. Les équations de structure sont

$$(56)\quad \left\{\begin{array}{l} (H_i, H_k)=0 \qquad (i, k=1, 2, 3); \\ (H_i, K_i)=0 \qquad (i=1, 2, 3); \\ (H_1, K_2)=(K_1, H_2)=H_1, \qquad (H_2, K_3)=(K_2, H_3)=H_3, \\ (H_1, K_3)=(K_1, H_3)=2H_2; \\ (K_1, K_2)=K_1, \qquad (K_2, K_3)=K_3, \qquad (K_1, K_3)=2K_2; \\ (H_i, L)=H_i, \qquad (K_i, L)=0 \qquad (i=1, 2, 3). \end{array}\right.$$

Il s'agit de remplacer les transformations du tableau (55) par sept combinaisons linéaires et homogènes X_i, à coefficients constants, de manière que les coefficients dc structure des X_i soient ceux du tableau (54). La déterminatiou de ces combinaisons est facilitée par les équations (44) qui représentent la transformation de l'image de la conique Γ. La translation de cette image y est représentée par le vecteur de composantes $e-g$, $i(e+g)$, $2f$, avec $k=1$, ce qui nous amène à lui faire correspondre le sous-groupe des H_i de G, et à remplacer ces H_i par les combinaisons linéaires

$$(57)\qquad X_1=H_3-H_1, \qquad X_2=i(H_3+H_1), \qquad X_3=2H_2.$$

Comme les (T_i, T_k), les (X_i, X_k) sont nuls.

Le sous-groupe des K_i correspond de même à celui des R_i et L à S. Remplaçons donc les K_i par les combinaisons

$$(58)\qquad Y_i=\sum_{j=1}^{3}\theta_i^j K_j \qquad (i=1, 2, 3)$$

et L par $Z=\theta L$, où les θ_i^j et θ sont des constantes inconnues, de manière qu'on ait

$$(59)\qquad (X_i, Y_i)=0, \qquad (X_i, Y_k)=-(X_k, Y_i)=-X_h$$

comme dans les troisième et quatrième ligne de (54), et

$$(60)\qquad (X_i, Z)=X_i,$$

analogues aux $(T_i, S)=T_i$ du même tableau.

La comparaison de (60) avec la dernière ligne de (56), compte tenu des expressions (57), donne tout de suite $\theta=1$ et il reste à déterminer les θ_i^j.

A l'aide des mêmes équations (56) et (57), formons d'abord les (X_i, K_j) :

$$(X_1, K_1) = (H_3, K_1) - (H_1, K_1) = -2H_2 = -X_3,$$
$$(X_1, K_2) = (H_3, K_2) - (H_1, K_2) = -(H_3 + H_1) = iX_2,$$
$$(X_1, K_3) = (H_3, K_3) - (H_1, K_3) = -2H_2 = -X_3,$$
$$(X_2, K_1) = -2iH_2 = -iX_3,$$
$$(X_2, K_2) = -i(H_3 - H_1) = -iX_1,$$
$$(X_2, K_3) = iX_3,$$
$$(X_3, K_1) = -2H_1, \qquad (X_3, K_2) = 0, \qquad (X_3, K_3) = 2H_3.$$

Il vient alors

$$(X_1, Y_1) = \sum_{j=1}^{3} \theta_1^j (X_1, K_j) = i\theta_1^2 X_2 - (\theta_1^1 + \theta_1^3) X_3 = 0,$$

d'où résultent d'abord les valeurs $\theta_1^2 = 0$, $\theta_1^1 + \theta_1^3 = 0$. Ensuite

$$(X_2, Y_1) = \sum_{j=1}^{3} \theta_1^j (X_2, K_j) = i(\theta_1^3 - \theta_1^1) X_3 = X_3$$

donne

$$\theta_1^1 - \theta_1^3 = i, \qquad \text{donc} \quad \theta_1^1 = -\theta_1^3 = \frac{i}{2}.$$

L'égalité $(X_3, Y_1) = -X_2$ est alors satisfaite. On doit avoir de même

$$(X_1, Y_2) = \sum_{j=1}^{3} \theta_2^j (X_1, K_j) = i\theta_2^2 X_2 - (\theta_2^1 + \theta_2^3) X_3 = -X_3,$$

donc

$$\theta_2^2 = 0 \qquad \text{et} \qquad \theta_2^1 + \theta_2^3 = 1\,;$$

puis

$$(X_2, Y_2) = i(\theta_2^3 - \theta_2^1) X_3 = 0$$

donne

$$\theta_2^1 = \theta_2^3 = \frac{1}{2},$$

et l'égalité $(X_3, Y_2) = X_1$ s'ensuit. Écrivons enfin que

$$(X_1, Y_3) = \sum_{j=1}^{3} \theta_3^j (X_1, K_j) = i\theta_3^2 X_2 - (\theta_3^1 + \theta_3^3) X_3 = X_2,$$
$$(X_2, Y_3) = \sum_{j=1}^{3} \theta_3^j (X_2, K_j) = i(\theta_3^3 - \theta_3^1) X_3 - i\theta_3^2 X_1 = -X_1\,;$$

on en déduit tout de suite

$$\theta_3^1 = \theta_3^3 = 0 \qquad \text{et} \qquad \theta_3^2 = -i\,;$$

$(X_3, Y_3) = 0$ s'ensuit, et la structure du tableau (54) doit être celle des transformations

$$(61)\quad \left\{\begin{array}{lll} X_1 = H_3 - H_1, & X_2 = i(H_3 + H_1), & X_3 = 2H_2, \\ Y_1 = \dfrac{i}{2}(K_1 - K_3), & Y_2 = \dfrac{1}{2}(K_1 + K_3), & Y_3 = -iK_2, \\ & Z = L. & \end{array}\right.$$

L'égalité des coefficients fournis par les parenthèses (Y_i, Y_j) et (Y_i, Z) avec ceux que donnent (R_i, R_j) et (R_i, S) se vérifie immédiatement.