

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

ROGER DESCOMBES

Sur la répartition des sommets d'une ligne polygonale régulière non fermée

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 73, n° 3 (1956), p. 283-355

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1956_3_73_3_283_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1956, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LA
RÉPARTITION DES SOMMETS
D'UNE
LIGNE POLYGONALE RÉGULIÈRE NON FERMÉE

PAR M. ROGER DESCOMBES.

Introduction.

Ce Mémoire est consacré à la démonstration du théorème suivant :

THÉORÈME. — Si ξ est un nombre réel irrationnel et η un nombre réel quelconque, ε étant un nombre strictement positif arbitraire :

a. il existe une infinité de couples d'entiers (u, v) , avec $v > 0$, tels que

$$v | v\xi - u - \eta | < \frac{1}{\sqrt{5}} + \varepsilon,$$

la constante $\frac{1}{\sqrt{5}}$ ne pouvant être diminuée pour les couples (ξ, η) équivalents (en un sens qui sera défini à la fin de l'énoncé du théorème) à

$$\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}, 0 \right);$$

b. si le couple (ξ, η) est différent de ces couples particuliers, il existe une infinité de couples d'entiers (u, v) avec $v > 0$, tels que

$$v | v\xi - u - \eta | < \frac{27}{28\sqrt{7}} + \varepsilon,$$

la constante $\frac{27}{28\sqrt{7}}$ ne pouvant être diminuée pour les couples (ξ, η) équivalents à

$$\left(\frac{7 - \sqrt{7}}{14}, \frac{1}{14} \right);$$

c. si le couple (ξ, η) est différent à la fois des couples particuliers de a et des couples particuliers de b, il existe une infinité de couples d'entiers (u, v) , avec $v > 0$, tels que

$$v | v\xi - u - \eta | < \frac{1}{\sqrt{8}} + \varepsilon,$$

la constante $\frac{1}{\sqrt{8}}$ ne pouvant être diminuée pour les couples (ξ, η) équivalents à

$$(\sqrt{2}, 0);$$

d. si le couple (ξ, η) est différent des couples particuliers de a, b et c, il existe une infinité de couples d'entiers (u, v) avec $v > 0$, tels que

$$v | v\xi - u - \eta | < \frac{359}{45\sqrt{510}} + \varepsilon,$$

la constante $\frac{359}{45\sqrt{510}}$ ne pouvant être diminuée pour les couples (ξ, η) équivalents à

$$\left(\frac{225 - \sqrt{510}}{2 \cdot 340}, \frac{1}{90} \right);$$

e. si le couple (ξ, η) est différent de tous les couples particuliers précédents, il existe une infinité de couples d'entiers (u, v) avec $v > 0$, tels que

$$v | v\xi - u - \eta | < \frac{37}{10\sqrt{110}} + \varepsilon,$$

la constante $\frac{37}{10\sqrt{110}}$ ne pouvant être diminuée pour les couples (ξ, η) équivalents à

$$\left(\frac{15 - \sqrt{110}}{10}, \frac{1}{10} \right);$$

f. à tout entier r au moins égal à 1 on peut associer un couple (ξ_r, η_r) et une constante γ_r (qui seront précisés ci-dessous) tels que, si le couple (ξ, η) n'est équivalent à aucun des couples particuliers de a, b, c, d et e, et en outre, pour $r \geq 2$, à aucun des couples (ξ_k, η_k) (avec $k = 1, 2, \dots, r-1$), alors il existe une infinité de couples d'entiers (u, v) avec $v > 0$, tels que

$$v | v\xi - u - \eta | < \frac{1}{\gamma_r} + \varepsilon,$$

la constante $\frac{1}{\gamma_r}$ ne pouvant être diminuée pour les couples (ξ, η) équivalents à (ξ_r, η_r) ;

g. si le couple (ξ, η) est différent de tous les couples particuliers précédents, il existe une infinité de couples d'entiers (u, v) avec $v > 0$, tels que

$$v | v\xi - u - \eta | < \frac{773\,868 - 28\,547\sqrt{510}}{366\,795} + \varepsilon,$$

la constante $\frac{1}{\gamma} = \frac{773\ 868 - 28\ 547\sqrt{510}}{366\ 795}$, limite des $\frac{1}{\gamma_r}$, ne pouvant être diminuée pour une infinité continue de couples (ξ, η) .

L'énoncé de ce théorème doit être ainsi complété :

DÉFINITION. — Les couples (ξ, η) et (ξ', η') sont dits équivalents, ce qui sera noté

$$(\xi, \eta) \sim (\xi', \eta'),$$

s'il existe six entiers rationnels A, B, C, D, E, F, avec $AD - BC = \pm 1$, tels que

$$\xi' = \frac{A\xi + B}{C\xi + D}, \quad \eta' = \frac{(AD - BC)\eta}{C\xi + D} + \frac{E\xi + F}{C\xi + D}, \quad C\xi + D > 0.$$

On vérifie aisément qu'il s'agit bien là d'une relation d'équivalence.

VALEURS DE ξ_r, η_r, γ_r . — Introduisons la suite récurrente $\{s_n\}$ définie par les formules

$$s_0 = 0, \quad s_1 = 1, \quad s_{n+1} = 54^2 s_n - s_{n-1}$$

et posons, pour r entier au moins égal à 1 :

$$A_r = 14s_{r+1} - 257s_r, \quad B_r = 3s_{r+1} + 398s_r, \quad C_r = 9s_{r+1} - 144s_r, \quad D_r = 2s_{r+1} + 223s_r,$$

et en outre, pour p entier positif :

$$\begin{aligned} M_{2p} &= s_{p+1} + 257s_p, & N_{2p} &= 11s_{p+1} + 75s_p, \\ \Delta_{2p} &= 7s_{p+1} + 263s_p, & \delta_{2p} &= s_{p+1} + 35s_p; \\ M_{2p+1} &= 25s_{p+1} + 8s_p, & N_{2p+1} &= 189s_{p+1} + 2s_p, \\ \Delta_{2p+1} &= 127s_{p+1} + 8s_p, & \delta_{2p+1} &= 34s_{p+1} + 2s_p. \end{aligned}$$

On a alors

$$A_r + D_r - 2 = 2 \Delta_r \delta_r$$

et

$$\xi_r = \frac{\frac{1}{2}(A_r - D_r) + \sqrt{\Delta_r \delta_r (\Delta_r \delta_r + 2)}}{C_r}, \quad \eta_r = \frac{M_r \xi_r + N_r}{2 \Delta_r},$$

$$\gamma_r = \frac{8 \Delta_r^2 \sqrt{\Delta_r \delta_r (\Delta_r \delta_r + 2)}}{C_r N_r^2 + (A_r - D_r) M_r N_r - B_r M_r^2}.$$

En particulier

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{502 + 4\sqrt{32\ 385}}{789}, & \xi_2 &= \frac{1632\ 498 + \sqrt{(2\ 340\ 890)^2 - 1}}{2\ 565\ 819}; \\ \eta_1 &= \frac{25\xi_1 + 189}{254}, & \eta_2 &= \frac{799\xi_2 + 6\ 037}{8\ 114}; \\ \gamma_1 &= \frac{12\ 192\sqrt{32\ 385}}{772\ 841}, & \gamma_2 &= \frac{16\ 228\sqrt{(2\ 340\ 890)^2 - 1}}{13\ 379\ 443\ 561}. \end{aligned}$$

Remarque. — Les valeurs numériques des inverses des constantes figurant dans les seconds membres des inégalités de ce théorème sont

$$\begin{aligned}\sqrt{5} &= 2,236\dots, \\ \frac{28\sqrt{7}}{27} &= 2,743\dots, \\ \sqrt{8} &= 2,8284\dots, \\ \frac{45\sqrt{510}}{359} &= 2,8307\dots, \\ \frac{10\sqrt{110}}{37} &= 2,8346\dots, \\ \gamma_1 &= 2,83894\dots, \\ \gamma_2 &= 2,83927823\dots, \\ &\dots\dots\dots, \\ \gamma &= 2,83927885\dots\end{aligned}$$

D'autre part, on peut remplacer ε par zéro au second membre des inégalités de ce théorème, au moins dans les cas a et c ; ce détail ne sera pas étudié ici.

*
* *

L'énoncé a est dû à Khintchine (*Math. Ann.*, t. 111, 1935, p. 631-637), les nombres exceptionnels correspondants étant connus depuis longtemps, de même que les nombres exceptionnels de c . (Voir les références par exemple dans KOKSMA, *Diophantische Approximationen*, ou dans ma thèse citée plus loin.)

L'énoncé b est dû à J. W. S. Cassels (*Math. Ann.*, t. 127, 1954, p. 288-304) qui ajoute la précision suivante, contenue dans c :

« si le couple (ξ, η) est différent des couples particuliers de a et de b , alors il existe une infinité de couples d'entiers (u, v) avec $v > 0$, tels que

$$v|v\xi - u - \eta| < \frac{4}{11} + \varepsilon.$$

Les nombres exceptionnels de e ont été signalés dès 1952 [R. DESCOMBES et G. PORROU, *Sur certains problèmes d'approximation* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 234, 1952, p. 581-583 et 1522-1524); voir aussi ma thèse : *Étude diophantienne de certaines formes linéaires non homogènes...* (*Bull. Soc. Math. Fr.*, t. 82, 1954, p. 197-299, notamment p. 297)].

L'étude des couples $(\xi, 0)$ a été faite à la fin du siècle dernier (voir KOKSMA), et reste valable pour ceux qui leur sont équivalents, qui sont de la forme $(\xi', M\xi' + N)$ avec M et N entiers. Il est facile de démontrer par exemple (voir p. 303) qu'il existe une infinité de couples d'entiers (u, v) avec $v > 0$, tels que

$$v|v\xi - u| < \frac{7}{20} = \frac{1}{2,85\dots}$$

quel que soit l'irrationnel ξ , non équivalent (au sens habituel) à $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ ni à $\sqrt{2}$. Ainsi, moyennant ce résultat classique de Korkine et Zolotareff, il suffit de s'occuper du cas où η n'est pas fonction linéaire de ξ à coefficients entiers; c'est par exemple ce que fait Cassels.

Il nous sera commode de substituer à l'énoncé initial du théorème un énoncé équivalent sur les *constantes d'approximation* des couples (ξ, η) , définies comme suit.

Désignons la limite inférieure

$$\lim_{u, v} \inf |v\xi - u - \eta|,$$

où u décrit les entiers et v les entiers strictement positifs, par $k(\xi, \eta)$, et son inverse par $c(\xi, \eta)$. *Le théorème précédent donne la plus petite valeur d'accumulation γ des constantes d'approximation $c(\xi, \eta)$ et la liste de celles qui lui sont inférieures.*

La méthode que nous suivrons pour établir ce théorème (pour le cas où η n'est pas fonction linéaire de ξ à coefficients entiers) utilise un ingénieux mode de développement dû à Cassels, qui généralise au cas *non homogène* le développement classique en fraction continue. Ce développement fournit en fait, comme le montrera la proposition 7, les couples (u, v) de *meilleure approximation*. On voudra bien nous excuser d'avoir repris, pour donner un exposé complet, une partie de l'article cité de Cassels, avec des modifications mineures.

Je remercie amicalement M. G. Poitou de l'aide qu'il m'a apportée pendant l'élaboration de ce Mémoire.

I. — Étude de l'algorithme.

1. RAPPEL DE LA THÉORIE DES FRACTIONS CONTINUES. — Soit ξ un nombre réel irrationnel de signe quelconque, et $\frac{p_n}{q_n}$ ($n = -1, 0, 1, 2, \dots$) la suite des réduites du développement de ξ en fraction continue, rangées dans l'ordre des $|q_n \xi - p_n|$ décroissants, en commençant par la *réduite préliminaire* $\frac{p_{-1}}{q_{-1}} = \frac{1}{0}$, suivie de $\frac{p_0}{q_0} = \frac{a_0}{1}$ où $a_0 = [\xi]$ [partie entière ⁽¹⁾ de ξ]. Comme on sait, une propriété fondamentale des réduites s'exprime ainsi :

PROPOSITION 1. — *Si les entiers p et q ne sont pas tous deux nuls,*

$$|q\xi - p| < |q_n \xi - p_n| \quad \text{entraîne} \quad |q| \geq q_{n+1}.$$

(1) Nous entendons par *partie entière* de ξ le plus grand entier au plus égal à ξ , quel que soit le signe de ξ .

Il en résulte que

$$(1.1) \quad \underline{\lim} |q(q\xi - p)| = \underline{\lim} |q_n(q_n\xi - p_n)| \quad (n \rightarrow \infty),$$

la limite inférieure du premier membre étant prise pour tous les couples d'entiers (p, q) avec $q \neq 0$, ou, ce qui revient au même, $q > 0$.

Posant $\varepsilon_n = q_n\xi - p_n$, on a

$$(1.2) \quad (-1)^n \varepsilon_n > 0$$

et

$$\varepsilon_n q_{n-1} - \varepsilon_{n-1} q_n = p_{n-1} q_n - p_n q_{n-1} = (-1)^n;$$

de plus

$$(1.3) \quad p_{n+1} = a_{n+1} p_n + p_{n-1}, \quad q_{n+1} = a_{n+1} q_n + q_{n-1},$$

où les entiers a_n , tous strictement positifs pour $n \geq 1$, sont, avec a_0 , les quotients incomplets de ξ , ce qu'on note

$$(1.4) \quad \xi = (a_0 \ a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n \ \dots).$$

De (1.3) on déduit pour $n \geq 0$, $q_{n+1} \geq q_n + q_{n-1}$. Supposons alors que le couple d'entiers (p, q) soit tel que $q\xi - p$ soit compris entre ε_n et ε_{n-1} avec $q > 0$, donc $q \geq q_n$. En tenant compte de (1.2) on voit qu'on a toujours au moins l'une des deux éventualités suivantes :

— ou bien

$$|q\xi - p| < \varepsilon_n, \quad \text{d'où (prop. 1)} \quad q \geq q_{n+1} \geq q_n + q_{n-1};$$

— ou bien

$$(q - q_{n-1})\xi - (p - p_{n-1}) < \varepsilon_{n-1}, \quad \text{d'où} \quad |q - q_{n-1}| \geq q_n \quad \text{et} \quad q \geq q_n + q_{n-1}.$$

Ainsi la proposition 1 entraîne la

PROPOSITION 1 bis. — *Si le couple d'entiers (p, q) avec $q > 0$, est tel que $q\xi - p$ soit compris entre ε_n et ε_{n-1} , on a*

$$q \geq q_n + q_{n-1}.$$

En introduisant enfin les quantités

$$x_n = -\frac{\varepsilon_{n-2}}{\varepsilon_{n-1}} = -\frac{q_{n-2}\xi - p_{n-2}}{q_{n-1}\xi - p_{n-1}}, \quad y_n = -\frac{q_{n-2}}{q_{n-1}} \quad (n \geq 1),$$

on a

$$(1.5) \quad x_n > 1, \quad -1 < y_n < 0 \quad (\text{sauf } y_1 = 0 \text{ et, peut-être, } y_2 = -1),$$

$$(1.6) \quad x_{n+1} = \frac{1}{x_n - a_n}, \quad y_{n+1} = \frac{1}{y_n - a_n}, \quad a_n = [x_n];$$

d'où, avec la notation (1.4)

$$x_n = (a_n \ a_{n+1} \ \dots) \quad (n \geq 1),$$

$$y_n = -(0 \ a_{n-1} \ a_{n-2} \ \dots \ a_1) \quad (n \geq 2)$$

et

$$\frac{(-1)^n}{q_n \varepsilon_n} = x_{n+1} - y_{n+1}.$$

D'après (1.1), on en déduit

$$(1.7) \quad \lim_{p, q} |q(q\xi - p)| = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n - y_n)}.$$

2. CONSTRUCTION D'UN ALGORITHME. — Ces résultats étant rappelés, nous allons choisir, parmi l'ensemble de tous les couples d'entiers (u, v) ($v > 0$), deux suites récurrentes de couples (u_n, v_n) et (u'_n, v'_n) qui seront telles que

$$k(\xi, \eta) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \min(v_n |v_n \xi - u_n - \eta|, v'_n |v'_n \xi - u'_n - \eta|).$$

Nous supposons d'abord qu'il n'existe aucun couple d'entiers (M, N) tel que $M\xi + N - \eta = 0$. En posant par définition

$$\rho_n = v_n \xi - u_n - \eta,$$

la suite $\{(u_n, v_n)\}$ est caractérisée par la proposition suivante :

PROPOSITION 2. — Pour tout $n \geq 0$, il existe un couple d'entiers (u_n, v_n) et un seul tel que :

ou bien

$$(\mathcal{A}_n) \quad 0 < v_n \leq q_n, \quad \text{avec} \quad 0 < \frac{\rho_n}{\varepsilon_{n-1}} < 1;$$

ou bien

$$(\mathcal{B}_n) \quad q_n < v_n \leq q_n + q_{n-1}, \quad \text{avec} \quad 0 < \frac{\rho_n}{\varepsilon_n} < 1$$

pourvu qu'il n'existe pas d'entiers M, N tels que $M\xi + N - \eta = 0$.

Démontrons par l'absurde l'unicité du couple (u_n, v_n) .

— S'il existait deux couples solutions de \mathcal{A}_n , on en déduirait par différence un couple (u, v) satisfaisant aux conditions

$$0 \leq v < q_n, \quad |v\xi - u| < \varepsilon_{n-1},$$

ce qui, sauf pour $u = v = 0$, contredit la proposition 1.

— S'il existait deux couples solutions de \mathcal{B}_n , on en déduirait par différence un couple (u, v) satisfaisant aux conditions

$$0 \leq v < q_{n-1}, \quad |v\xi - u| < \varepsilon_n,$$

ce qui, sauf pour $u = v = 0$, contredit la proposition 1.

— S'il existait un couple solution de \mathcal{A}_n et un couple solution de \mathcal{B}_n , on en déduirait par différence un couple satisfaisant aux conditions (écrites, pour fixer les idées, en supposant n impair)

$$0 < v < q_n + q_{n-1}, \quad \varepsilon_n < v \frac{z}{\varepsilon_n} - u < \varepsilon_{n-1},$$

ce qui contredit la proposition 1 bis.

Démontrons par récurrence l'existence de (u_n, v_n) .

Pour $n=0$, les conditions imposées à v_0 par \mathcal{B}_0 sont contradictoires. Au contraire, \mathcal{A}_0 admet la solution unique

$$v_0 = 1, \quad u_0 = [\xi - \eta],$$

car $\xi - \eta$ n'est pas un entier.

— Si l'on a \mathcal{A}_n , posons

$$b_{n+1} = \left[x_{n+1} - \frac{\rho_n}{\varepsilon_n} \right].$$

Des inégalités

$$0 < \frac{\rho_n}{\varepsilon_n} < 1,$$

on déduit

$$0 < \frac{\rho_n}{\varepsilon_n} < x_{n+1}, \quad \text{d'où} \quad 0 \leq b_{n+1} \leq a_{n+1}.$$

De plus, $x_{n+1} - \frac{\rho_n}{\varepsilon_n} \neq b_{n+1}$, sinon η serait de la forme $M\xi + N$ avec M et N entiers.

Distinguons alors deux cas :

— si $b_{n+1} \neq a_{n+1}$, on a

$$0 < v_n + b_{n+1}q_n + q_{n-1} \leq v_n + q_{n+1} - q_n \leq q_{n+1}$$

et

$$0 < x_{n+1} - \frac{\rho_n}{\varepsilon_n} - b_{n+1} = \frac{\rho_n + b_{n+1}\varepsilon_n + \varepsilon_{n-1}}{\varepsilon_n} < 1$$

donc le couple (u_{n+1}, v_{n+1}) défini par les formules

$$(2.1) \quad u_{n+1} = u_n + b_{n+1}p_n + p_{n-1}, \quad v_{n+1} = v_n + b_{n+1}q_n + q_{n-1}$$

satisfait aux conditions \mathcal{A}_{n+1} ;

— si $b_{n+1} = a_{n+1}$, le couple précédent devient

$$(2.2) \quad u_{n+1} = u_n + p_{n+1}, \quad v_{n+1} = v_n + q_{n+1};$$

d'où

$$q_{n+1} < v_{n+1} \leq q_{n+1} + q_n$$

et

$$0 < \left\{ a_{n+1} - \left(x_{n+1} - \frac{\varepsilon_n}{\rho_n} \right) \right\} \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{n+1}} = 1 + \frac{\rho_n}{\varepsilon_{n+1}} < 1,$$

donc le couple (u_{n+1}, v_{n+1}) satisfait aux conditions \mathcal{B}_{n+1} .

— Si l'on a \mathcal{B}_n le couple (u_{n+1}, v_{n+1}) défini par les formules

$$(2.3) \quad u_{n+1} = u_n - p_n, \quad v_{n+1} = v_n - q_n$$

est tel que

$$0 < v_{n+1} \leq q_{n-1} < q_{n+1}$$

et

$$0 < \frac{\rho_n - \varepsilon_n}{-\varepsilon_n} = \frac{\rho_{n+1}}{-\varepsilon_n} < 1;$$

il satisfait donc aux conditions \mathcal{A}_{n+1} .

La proposition 2 est donc établie.

Remarque. — Le cas \mathcal{B}_n n'intervient donc qu'encadré par \mathcal{A}_{n-1} et \mathcal{A}_{n+1} , et il implique, d'après (2.2) et (2.3)

$$u_{n+1} = u_n - p_n = u_{n-1}, \quad v_{n+1} = v_n - q_n = v_{n-1};$$

d'où

$$0 < -\frac{\rho_{n+1}}{\varepsilon_n} = -\frac{\rho_{n-1}}{\varepsilon_n} < 1;$$

on ne peut donc pas avoir une alternance indéfinie de cas \mathcal{A} et de cas \mathcal{B} puisque ε_k tend vers zéro avec $\frac{1}{k}$. Comme \mathcal{B}_n implique $v_{n-1} = v_{n+1}$ et que \mathcal{A}_n implique $v_{n+1} > v_n$, il en résulte que

$$(2.4) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty.$$

Formules de récurrence. — En posant

$$(2.5) \quad t_{n+1} = \frac{v_n}{q_n}, \quad z_{n+1} = \frac{\rho_n}{\varepsilon_n} \quad (\text{d'où } 0 < z_{n+1} < x_{n+1}),$$

on peut traduire les résultats précédents par les formules suivantes :

— si \mathcal{A}_{n-1} (c'est-à-dire si $0 < t_n \leq 1$; ou encore si $b_{n-1} < a_{n-1}$, ou b_{n-1} non défini) :

$$(2.6) \quad \frac{z_{n+1}}{x_{n+1}} = x_n - z_n - b_n, \quad \frac{t_{n+1}}{y_{n+1}} = y_n - t_n - b_n, \quad 0 \leq b_n = [x_n - z_n] \leq a_n;$$

— si \mathcal{B}_{n-1} (c'est-à-dire si $1 < t_n \leq 1 - y_n$; ou encore $b_{n-1} = a_{n-1}$; ou encore $0 < z_n < 1$ avec $0 < z_{n-1} < 1$),

$$(2.7) \quad \frac{z_{n+1}}{x_{n+1}} = 1 - z_n, \quad \frac{t_{n+1}}{y_{n+1}} = 1 - t_n.$$

Ces formules permettent de proche en proche le calcul de z_n et t_n , en partant de \mathcal{A}_0 avec

$$z_1 = \frac{\xi - \eta - [\xi - \eta]}{\xi - [\xi]} \quad \text{et} \quad t_1 = 1.$$

Compte tenu du fait que l'algorithme des fractions continues permet le calcul de tous les quotients incomplets de ξ en posant par convention $x_0 = \xi$, on voit qu'on peut encore utiliser celles des formules (2.6) qui ne contiennent pas les lettres y et t , à partir de $n = 0$, en faisant les conventions suivantes :

$$(2.8) \quad x_0 = \xi, \quad z_0 = \eta, \quad b_0 = [\xi - \eta].$$

Les formules (2.6), (2.7) et (2.8) permettent donc, une fois connu le développement en fraction continue de ξ , de calculer les nombres z_n , t_n et b_n , donc d'obtenir le *développement* du couple (ξ, η) selon l'algorithme qui vient d'être défini ⁽²⁾, c'est-à-dire l'ensemble des couples (x_n, z_n) , ou encore l'ensemble des couples d'entiers constitués par les a_n et ceux des b_n qui sont définis et associés aux a_n .

3. CAS où $\eta = M\xi + N$ (M ET N ENTIERS). — Dans ce cas, la démonstration de l'unicité du couple (u_n, v_n) reste valable; la démonstration de son existence peut tomber en défaut, soit parce que le couple (u_0, v_0) n'est pas défini lorsque $\xi - \eta$ est entier, soit parce que $x_{n+1} - \frac{\rho_n}{\varepsilon_n}$ est égal à l'entier b_{n+1} , ceci lorsque

$$(v_n + b_{n+1}q_n + q_{n-1} - M)\xi - (u_n + b_{n+1}p_n + p_{n-1} + N) = 0.$$

Si $M \leq 0$, ces éventualités ne se produisent pas; les formules (2.6) et (2.7) sont donc toujours valables, à partir de $x_0 = \xi$, $z_0 = \eta$, et l'algorithme s'applique sans autre modification que la nullité éventuelle de z_0 . En fait, on vérifie aisément en se reportant à la définition de \mathcal{A}_n que pour les indices n tels que $q_n > -M$, le couple

$$v_n = q_n + M, \quad u_n = p_n - N$$

est une solution de \mathcal{A}_n . D'après l'unicité, on a, pour tout indice n assez grand, le cas \mathcal{A}_n avec

$$\rho_n = \varepsilon_n, \quad z_{n+1} = 1, \quad b_n = a_n - 1,$$

et $t_{n+1} = \frac{q_n + M}{q_n}$ tend vers 1 quand n augmente indéfiniment.

Si $M > 0$, soit n_0 la plus petite valeur (positive ou nulle) de l'indice n telle que les formules (2.6) donnent $z_{n+1} = 0$. Le couple (u_{n_0}, v_{n_0}) ne peut alors être défini par les conditions \mathcal{A}_{n_0} ni \mathcal{B}_{n_0} . Nous poserons par convention

$$u_{n_0} = -N, \quad v_{n_0} = M$$

(²) Cet algorithme est, à très peu près, celui de Cassels (cf. l'Introduction).

et pour $n > n_0$,

$$u_n = -N + p_n, \quad v_n = M + q_n.$$

Les formules (2.6) restent alors valables pour $n \geq n_0$, avec $z_{n_0+1} = 0$, et, pour $n > n_0$,

$$z_{n+1} = 1, \quad b_n = a_n - 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} t_{n+1} = 1.$$

Réciproquement, si, dans le développement d'un couple (ξ, η) quelconque les formules (2.6) entraînent l'égalité $b_n = a_n - 1$ à partir d'un certain rang, on déduit de (1.6), à partir de ce rang

$$z_n - 1 = -\frac{z_{n+1} - 1}{x_{n+1}} = (-1)^k \frac{z_{n+k} - 1}{x_{n+1} \cdot \dots \cdot x_{n+k}},$$

d'où résulte immédiatement $z_n = 1$, donc $\rho_n = \varepsilon_n$, et, par suite, $\eta = M\xi + N$ avec M et N entiers.

Donc les développements de ce type sont caractéristiques des couples (ξ, η) où $\eta = M\xi + N$, avec M et N entiers.

4. COUPLES ÉQUIVALENTS. — Rappelons que les deux couples (ξ, η) et (ξ', η') sont dits équivalents s'il existe six entiers rationnels A, B, C, D, E, F tels que

$$AD - BC = \varepsilon = \pm 1, \quad C\xi + D > 0,$$

avec

$$\xi' = \frac{A\xi + B}{C\xi + D}, \quad \eta' = \frac{\varepsilon\eta}{C\xi + D} + \frac{E\xi + F}{C\xi + D}.$$

Il est aisé de vérifier, et ce point sera laissé au lecteur, que cette relation entre couples est bien une relation d'équivalence.

Envisageons alors la correspondance biunivoque entre couples d'entiers (u, v) et (u', v') définie par les formules

$$u' = Au + Bv + \varepsilon(AF + BE), \quad v' = Cu + Dv + \varepsilon(CF + DE).$$

Supposons que le couple (u, v) varie de manière telle que v augmente indéfiniment, et que $v\xi - u - \eta$ tende vers zéro; alors $\frac{u}{v}$ tend vers ξ , et la condition $C\xi + D > 0$ entraîne que v' augmente indéfiniment. De plus, on vérifie que le rapport de $v' |v'\xi' - u' - \eta'|$ à $v |v\xi - u - \eta|$ s'écrit

$$\frac{Cu + Dv + \varepsilon(CF + DE)}{v(C\xi + D)};$$

il tend donc vers 1; il en résulte que

$$\liminf v' |v'\xi' - u' - \eta'| = \liminf v |v\xi - u - \eta|,$$

la première limite inférieure étant prise pour l'ensemble des couples (u', v') avec $v' > 0$, la seconde pour l'ensemble des couples (u, v) avec $v > 0$. Nous avons donc établi :



PROPOSITION 3. — Si les couples (ξ, η) et (ξ', η') sont équivalents, on a

$$k(\xi, \eta) = k(\xi', \eta').$$

Étudions l'influence de l'équivalence des couples sur leurs développements.

Les formules (1.6), (2.6) et (2.7) montrent que, dans un développement quelconque, les couples (x_n, z_n) et (x_{n+1}, z_{n+1}) sont équivalents pour tout $n \geq 0$. D'après (2.8), (x_n, z_n) est donc équivalent à (ξ, η) lui-même (sans qu'il soit nécessaire de distinguer les couples exceptionnels étudiés au paragraphe 3). Si donc un autre couple (ξ', η') admet le développement (x'_n, z'_n) , et s'il existe deux indices n et n' tels que $x_n = x'_{n'}$, $z_n = z'_{n'}$ (c'est-à-dire si les développements des deux couples sont les mêmes à partir d'un certain rang), alors les couples (ξ, η) et (ξ', η') sont équivalents.

Réciproquement, si les couples (ξ, η) et (ξ', η') sont équivalents, alors les nombres ξ et ξ' sont équivalents au sens ordinaire de la théorie des fractions continues, ce qui entraîne, comme on sait, que leurs développements en fraction continue sont identiques à partir d'un certain rang. D'autre part, il est clair que si l'un des couples est du type exceptionnel étudié au paragraphe 3, l'autre aussi; donc deux circonstances seulement peuvent se produire :

— ou bien on a $\eta = M\xi + N$ et $\eta' = M'\xi' + N'$, avec M, N, M' et N' entiers; alors, en affectant d'accents les éléments relatifs au couple (ξ', η') , les égalités $b_n = a_n - 1$ et $b'_n = a'_n - 1$ montrent que, puisque la suite des a_n et celle des a'_n coïncident à partir d'un certain rang (qui n'a d'ailleurs pas nécessairement le même numéro pour les deux suites), il en est de même de la suite des couples (a_n, b_n) et de la suite des couples (a'_n, b'_n) ;

— ou bien η et η' ne sont ni l'un ni l'autre de la forme précédente; alors les développements des deux couples (ξ, η) et (ξ', η') présentent chacun une infinité de fois deux cas \mathfrak{A} consécutifs. Donc il existe deux indices n et p tels que $x_n = x'_p$ (donc aussi $x_{n+k} = x'_{p+k}$ pour tout entier k positif) et qu'on ait à la fois \mathfrak{A}_{n-1} et \mathfrak{A}'_{p-1} .

Or, remarquons que l'hypothèse qu'on a \mathfrak{A}_{n-1} entraîne que les entiers a_k et b_k du développement du couple (x_n, z_n) ne sont autres que les couples (a_m, b_m) du développement de (ξ, η) dont les indices sont au moins égaux à n , d'après les formules (2.6) et (2.8).

Posons donc

$$\Xi = x_n = x'_p, \quad \mathbf{H} = z_n, \quad \mathbf{H}' = z'_p$$

et désignons par (X_k, Z_k) et (X'_k, Z'_k) les couples (x, z) intervenant au rang k du développement des couples (Ξ, \mathbf{H}) et (Ξ, \mathbf{H}') . D'après la remarque précédente, on a

$$X_k = x_{n+k} = x'_{p+k}, \quad Z_k = z_{n+k}, \quad Z'_k = z'_{p+k}.$$

De plus, les couples (Ξ, \mathbf{H}) et (Ξ, \mathbf{H}') , respectivement équivalents à (ξ, η) et à (ξ', η') , sont équivalents, ce qui entraîne

$$\mathbf{H}' = \mathbf{H} + E\Xi + F \quad (E, F \text{ entiers}).$$

Quitte à échanger les rôles, on peut supposer $E \geq 0$.

Soit (U_s, V_s) le $s^{\text{ième}}$ des couples d'entiers, dont l'existence est assurée par la proposition 2, relatifs au couple initial (Ξ, \mathbf{H}) , l'indice s étant choisi de telle sorte que 1° on ait le cas \mathcal{A}_s et que 2° on ait l'inégalité $V_s > E$.

Alors le couple (U'_s, V'_s) défini par les relations

$$V'_s = V_s - E, \quad U'_s = U_s + F$$

satisfait aux conditions \mathcal{A}'_s pour le couple initial (Ξ, \mathbf{H}') , et l'on a

$$V'_s \Xi - U'_s - \mathbf{H}' = V_s \Xi - U_s - \mathbf{H},$$

donc $Z'_{s+1} = Z_{s+1}$, donc les développements de (Ξ, \mathbf{H}) et de (Ξ, \mathbf{H}') sont dès lors identiques, c'est-à-dire que les développements de (ξ, η) , à partir du rang $n + s + 1$, et de (ξ', η') , à partir du rang $p + s + 1$, sont identiques.

Nous avons donc établi la proposition suivante :

PROPOSITION 4. — *Les couples (ξ, η) équivalents sont caractérisés par le fait que leurs développements coïncident à partir d'un certain rang.*

5. DÉVELOPPEMENTS PÉRIODIQUES. — Supposons qu'on ait $\eta = \frac{M\xi + N}{S}$, avec M, N et S entiers; il est loisible de les supposer premiers entre eux dans leur ensemble, et nous le ferons désormais.

Si $S = 1$, on a vu que z_n reste égal à 1 à partir d'un certain rang.

Écartons dorénavant ce cas, et supposons qu'on ait l'égalité

$$z_n = \frac{M_n x_n + N_n}{S_n} \quad (M_n, N_n, S_n \text{ entiers premiers entre eux}).$$

Si la formule (2.6) est valable, on trouve

$$z_{n+1} = x_{n+1} \left\{ \frac{(S_n - M_n)x_n - N_n}{S_n} \right\} - b_n = \left\{ \frac{(S_n - M_n)a_n - N_n}{S_n} - b_n \right\} x_{n+1} + \frac{S_n - M_n}{S_n},$$

c'est-à-dire

$$z_{n+1} = \frac{M_{n+1} x_{n+1} + N_{n+1}}{S_{n+1}},$$

où M_{n+1}, N_{n+1} et S_{n+1} sont des entiers premiers entre eux vérifiant l'égalité $S_{n+1} = S_n$.

Si la formule (2.7) est valable, on trouve

$$z_{n+1} = x_{n+1} \left(1 - \frac{M_n x_n + N_n}{S_n} \right) = \left(1 - \frac{M_n a_n + N_n}{S_n} \right) x_{n+1} - \frac{M_n}{S_n}$$

avec une conclusion analogue.

Les dénominateurs sont donc, en fait, tous égaux à S , puisque $z_0 = \eta$.

Or la relation précédente entre x_n et z_n existe aussi, sous une forme approchée, entre y_n et t_n ; car si l'on pose

$$\frac{M_n y_n + N_n}{S} - t_n = \tau_n,$$

on voit par les mêmes formules que précédemment que $\tau_{n+1} = -y_{n+1} \tau_n$, donc τ_n tend vers zéro quand n augmente indéfiniment.

D'après le paragraphe 2, on a les inégalités

$$0 < \frac{M_n x_n + N_n}{S} < x_n, \quad 0 < \frac{M_n y_n + N_n}{S} < 1 - y_n + \tau_n,$$

qui, lorsque S et x_n sont fixés, y_n restant compris dans un intervalle assez petit, et n étant assez grand pour que τ_n soit négligeable, ne laissent à M_n et N_n , ainsi par suite qu'à z_n , qu'un nombre fini de valeurs possibles.

Si ξ est quadratique, la suite des x_n est périodique à partir d'un certain rang, d'après le résultat bien connu de Lagrange, et les y_n tendent vers un nombre fini de valeurs limites. D'après la remarque précédente, il existe alors une constante R telle que, à chaque valeur de x_n (n assez grand), correspondent au plus R valeurs possibles pour z_n ; donc il existe certainement, parmi les termes dont l'indice diffère de n d'un multiple de la période de la suite des x_k deux termes avec le même z et présentant le même cas \mathcal{A} ou \mathcal{B} au rang précédent; si c'est un cas \mathcal{B} , on décalera d'un rang pour retrouver un cas \mathcal{A} et des (x, z) encore égaux d'après (2.7); comme, dans le cas \mathcal{A}_{k-1} , la donnée de x_k et de z_k détermine entièrement la suite du développement, la suite (x_n, z_n) sera périodique à partir de ce terme, ainsi que la suite des couples (a_n, b_n) (y compris pour les valeurs de n pour lesquelles b_n n'est pas défini).

Réciproquement, si la suite des (x_n, z_n) est périodique à partir d'un certain rang, ξ est quadratique, et, en raison de l'équivalence des couples (x_n, z_n) et $(x_{n'}, z_{n'})$, on aura, en choisissant les indices n et n' de différence un multiple de la période, $x_n = x_{n'}$ et $z_n = z_{n'}$, et les égalités

$$x_n = \frac{A x_n + B}{C x_n + D}, \quad z_n = \frac{\varepsilon z_n}{C x_n + D} + \frac{E x_n + F}{C x_n + D},$$

avec A, B, C, D, E, F entiers et $AD - BC = \varepsilon = \pm 1$.

Donc z_n est dans le corps quadratique engendré par x_n , et, d'après l'équivalence des couples (ξ, η) et (x_n, z_n) , η lui-même est dans le corps de x_n , c'est-à-dire dans le corps de ξ , donc de la forme $\frac{M\xi + N}{S}$, avec M, N, S entiers.

Nous avons donc établi la proposition suivante :

PROPOSITION 5. — *La périodicité à partir d'un certain rang des couples (x_n, z_n) caractérise les couples (ξ, η) de deux nombres d'un même corps quadratique.*

Bien entendu, ξ est, comme toujours, supposé irrationnel.

6. PROPRIÉTÉS D'APPROXIMATION DE L'ALGORITHME. — Dans le cas où $\eta = M\xi + N$ (M, N entiers) le couple (ξ, η) est équivalent à $(\xi, 0)$ et l'on a, d'après (4.1)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi | \varphi \xi - u - \eta | = \lim_{n \rightarrow +\infty} q_n | (q_n + M)\xi - (p_n - N) - M\xi - N |$$

c'est-à-dire, puisque $v_n = q_n + M$ et $u_n = p_n - N$, et que $\frac{v_n}{q_n}$ tend vers 1,

$$(6.1) \quad k(\xi, \eta) = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n | v_n \xi - u_n - \eta |.$$

En supposant désormais que η n'est pas de la forme exceptionnelle précédente, nous allons établir une formule analogue en comparant l'ensemble des couples d'entiers (u, v) avec $v > 0$, à l'ensemble des couples (u_n, v_n) définis à la proposition 2.

Étant donné un couple d'entiers (u, v) et un indice n quelconque ≥ 0 , on peut, puisque $p_{n-1}q_n - p_nq_{n-1} = (-1)^n$, définir des nombres, $\alpha_n, \beta_n, \alpha, \beta$ par les égalités

$$\begin{aligned} u_n + \eta &= \alpha_n p_{n-1} + \beta_n p_n, & u + \eta &= \alpha p_{n-1} + \beta p_n, \\ v_n &= \alpha_n q_{n-1} + \beta_n q_n, & v &= \alpha q_{n-1} + \beta q_n. \end{aligned}$$

En laissant u_n et v_n fixes, on obtient ainsi tous les couples d'entiers (u, v) en donnant à (α, β) tous les couples de valeurs définis par

$$\alpha \equiv \alpha_n, \quad \beta \equiv \beta_n \pmod{1}.$$

Posons

$$\alpha - \alpha_n = r, \quad \beta - \beta_n = s \quad (r, s \text{ entiers})$$

et étudions, pour n fixé, les couples (u, v) satisfaisant à

$$(6.2) \quad q_n < v \leq q_{n+1}.$$

Nous supposons pour commencer que le cas \mathcal{A}_n a lieu. Alors $0 < v_n \leq q_n$; et (6.2) entraîne

$$(6.3) \quad 0 < r q_{n-1} + s q_n = v - v_n < q_{n+1},$$

c'est-à-dire

$$(6.4) \quad 0 < s - r y_{n+1} < a_{n+1} - y_{n+1}.$$

D'autre part, comme v_n et ρ_n ne sont pas nuls, on a, en posant $\rho = v\xi - u - \eta$,

$$\frac{\varphi | \rho |}{v_n | \rho_n |} = \left(1 + \frac{s - r y_{n+1}}{t_{n+1}} \right) \left| \frac{r x_{n+1} - s}{z_{n+1}} - 1 \right|.$$

Le premier terme du second membre, égal à $\frac{v}{v_n}$, est supérieur à 1; examinons le second terme, en tenant compte du fait que r et s ne peuvent, d'après (6.3), être tous les deux négatifs ou nuls. Distinguons trois cas, suivant les valeurs de r .

— Si r est négatif ou nul, et, par suite, s positif, le second terme est supérieur à 1, et l'on a donc

$$v|\rho| > v_n|\rho_n|.$$

— Si r est au moins égal à 2, les inégalités $x_{n+1} > z_{n+1}$ et (6.4) entraînent (dans les lignes qui suivent nous omettons l'indice $n+1$ pour x, y, a, t et z):

$$\frac{rx-s}{z} - 1 > \frac{r(x-y) - (a-y)}{z} - 1 > (r-1)\frac{x-y}{z} - 1 > 0,$$

d'où

$$\frac{v|\rho|}{v_n|\rho_n|} = \left(1 + \frac{s-ry}{t}\right) \left(\frac{rx-s}{z} - 1\right).$$

Le second membre est un trinôme du second degré en s lorsque x, y, t, z et r restent fixes. Les valeurs de s compatibles avec (6.4) sont encadrées par les racines de ce trinôme, donc celui-ci prend pour ces valeurs de s des valeurs positives et au moins égales à la plus petite des deux valeurs qu'il prend pour les valeurs extrêmes permises à s , c'est-à-dire, pour $s = ry$ et $s = a + (r-1)y$.

Or, pour $s = ry$, on a

$$\frac{v|\rho|}{v_n|\rho_n|} = \frac{r(x-y)}{z} - 1 > 2\frac{x-y}{z} - 1 > 1.$$

Pour $s = a + (r-1)y$, on a

$$v = v_n + rq_{n-1} + (a + (r-1)y)q_n = v_n + a_{n+1}q_n + q_{n-1} = v_{n+1} + (a_{n+1} - b_{n+1})q_n,$$

qui est au moins égal à v_{n+1} , tandis que

$$\rho = \rho_n + r\varepsilon_{n-1} + (a + (r-1)y)\varepsilon_n = \rho_n + a_{n+1}\varepsilon_n + \varepsilon_{n-1} + (r-1)(\varepsilon_{n-1} + y\varepsilon_n),$$

d'où

$$\rho = \rho_{n+1} + \{a - b - (r-1)(x-y)\}\varepsilon_n.$$

Dé $r-1 \geq 1$ et $x-y > a-b$, on déduit que le coefficient de ε_n dans cette dernière égalité, est négatif; comme ρ_{n+1} et $-\varepsilon_n$ ont le même signe, il s'ensuit que $|\rho| > |\rho_{n+1}|$. Donc alors $v|\rho|$ est supérieur à $v_{n+1}|\rho_{n+1}|$.

Ainsi, $r \geq 2$ implique

$$v|\rho| > \min(v_n|\rho_n|, v_{n+1}|\rho_{n+1}|).$$

— Si r est égal à 1, les entiers s compatibles avec (6.4) sont ceux tels que

$$0 \leq s < a_{n+1}.$$

Comme la quantité $x-s-z$ (nous omettons encore les indices $n+1$) change de signe quand on passe de $s = b$ à $s = b+1$, l'expression

$$\frac{v|\rho|}{v_n|\rho_n|} = \left(1 + \frac{s-y}{t}\right) \left|\frac{x-s}{z} - 1\right|$$

prend pour chaque entier s compatible avec (6.4) une valeur au moins égale à la plus petite de celles qui correspondent à $s = 0$, $s = b$ et $s = b + 1$.

Or, pour $r = 1$ et $s = b_{n+1}$; on a

$$u = u_n + b_{n+1}p_n + p_{n-1} = u_{n+1} \quad \text{et, de même,} \quad v = v_{n+1}.$$

Pour $r = 1$ et $s = 0$, nous poserons

$$(6.5) \quad u = u_n + p_{n-1} = u'_n, \quad v = v_n + q_{n-1} = v'_n, \quad \rho'_n = v'_n \xi - u'_n - \eta.$$

Pour $r = 1$ et $s = b_{n+1} + 1$, on a donc, d'après (6.5)

$$u = u'_{n+1}, \quad v = v'_{n+1}.$$

Ainsi, $r = 1$ implique

$$v |\rho| \geq \min(v_{n+1} |\rho_{n+1}|, v'_n |\rho'_n|, v'_{n+1} |\rho'_{n+1}|).$$

En résumé, les inégalités

$$0 < v_n \leq q_n \quad (\text{signifiant : cas } \mathcal{A}_n) \quad \text{et} \quad q_n < v \leq q_{n+1}$$

entraînent

$$v |\rho| \geq \min(v_n |\rho_n|, v'_n |\rho'_n|, v_{n+1} |\rho_{n+1}|, v'_{n+1} |\rho'_{n+1}|).$$

Supposons maintenant que c'est le cas \mathcal{B}_n qui a lieu. On a donc, par hypothèse,

$$q_n < v_n \leq q_n + q_{n-1} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = v_{n-1} = v_n - q_n.$$

L'inégalité

$$q_n < v \leq q_{n+1}$$

entraîne

$$-q_{n-1} < r q_{n-1} + s q_n = v - v_n < q_{n+1} - q_n,$$

c'est-à-dire

$$(6.6) \quad y_{n+1} < s - r y_{n+1} < a_{n+1} - y_{n+1} - 1.$$

Par suite, r et s ne peuvent être simultanément négatifs ou nuls sans être tous deux nuls. De plus, on a les inégalités

$$v > q_n > q_{n-1} \geq v_{n-1} = v_{n+1}.$$

Comparons les nombres

$$\rho = \rho_n + r \varepsilon_{n-1} + s \varepsilon_n \quad \text{et} \quad \rho_{n+1} = \rho_n - \varepsilon_n$$

en distinguant trois cas, suivant la valeur de r .

— Si r est négatif, alors $s > 0$, et les trois termes de la somme constituant ρ ont le même signe. On a donc

$$|\rho| > |\rho_n + \varepsilon_n| > |\rho_{n+1}|.$$

— Si r est au moins égal à 1, on a, d'après (6.6)

$$s < a + (r - 1)y - 1,$$

d'où, en supposant par exemple, n impair, donc $\varepsilon_n < 0$ et $\rho_{n+1} > 0$,

$$\rho > \rho_n + r\varepsilon_{n-1} + (a + (r-1)y - 1)\varepsilon_n = \rho_{n+1} + \varepsilon_{n+1} - (r-1)(x-y)\varepsilon_n > \rho_{n+1}$$

et l'inégalité $|\rho| > |\rho_{n+1}|$ reste évidemment valable si n est pair.

— Si enfin r est nul, on a $\rho = \rho_n + s\varepsilon_n$, avec, d'après (6.6)

$$0 \leq s \leq a_{n+1} - 1.$$

Comme ρ_n est de même signe ε_n , l'hypothèse $s \geq 1$ entraîne

$$|\rho| \geq |\rho_n + \varepsilon_n| > |\rho_{n+1}|,$$

tandis que si $s = 0$, on a simplement $u = u_n$ et $v = v_n$.

En résumé, les inégalités

$$q_n < v_n \leq q_n + q_{n-1} \quad (\text{signifiant : cas } \mathcal{B}_n) \quad \text{et} \quad q_n < v \leq q_{n+1}$$

entraînent $v > v_{n+1}$ et $|\rho| > |\rho_{n+1}|$ ou bien $v = v_n$ et $\rho = \rho_n$, donc

$$v|\rho| \geq \min(v_n|\rho_n|, v_{n+1}|\rho_{n+1}|).$$

En rassemblant les résultats relatifs au cas \mathcal{A}_n et ceux relatifs au cas \mathcal{B}_n , on peut donner l'énoncé suivant, analogue à la proposition 4 :

PROPOSITION 6. — *Si η n'est pas de la forme $M\xi + N$ (M, N entiers), à tout couple d'entiers (u, v) avec $v > 0$, on peut associer un indice $n \geq 0$ tel que*

$$v|\rho\xi - u - \eta| \geq \min(v_n|\rho_n|, v'_n|\rho'_n|).$$

Comme on a, d'après (2.4) et (6.5), pour $\eta \neq M\xi + N$,

$$\lim_n v_n = \lim_n v'_n = +\infty,$$

on en déduit, même si $\eta = M\xi + N$, à cause de (6.1) :

PROPOSITION 7 :

$$k(\xi, \eta) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \min(v_n|\rho_n|, v'_n|\rho'_n|).$$

C'est ce qu'on traduit en disant que l'algorithme fournit les couples (u_n, v_n) et (u'_n, v'_n) de meilleure approximation.

D'après les définitions données pour t_{n+1} et z_{n+1} et les formules classiques relatives aux fractions continues (rappelées au paragraphe 4), on a

$$\begin{aligned} v_n|\rho_n| &= t_{n+1}z_{n+1}q_n|\varepsilon_n| = \frac{t_{n+1}z_{n+1}}{x_{n+1} - y_{n+1}}, \\ v'_n|\rho'_n| &= (v_n + q_{n-1})|\rho_n + \varepsilon_{n-1}| = \frac{(t_{n+1} - y_{n+1})(x_{n+1} - z_{n+1})}{x_{n+1} - y_{n+1}}. \end{aligned}$$

La proposition 7 peut donc s'énoncer (avec un changement d'indice) :

PROPOSITION 7 bis :

$$k(\xi, \eta) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \min \left\{ \frac{t_n z_n}{x_n - y_n}, \frac{(t_n - y_n)(x_n - z_n)}{x_n - y_n} \right\}.$$

Dans le cas où $\eta = M\xi + N$, t_n tend vers 1 et, pour n assez grand, z_n est égal à 1. On retrouve donc l'égalité, évidente sur (6.1) :

$$k(\xi, \eta) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{x_n - y_n} = k(\xi, 0).$$

7. EXCLUSION DE \mathcal{B}_n POUR $k(\xi, \eta)$ ASSEZ GRAND. — Supposons que, η n'étant pas de la forme $M\xi + N$ (M et N entiers), on soit au rang n dans le cas \mathcal{B}_n , c'est-à-dire que $1 \leq t_{n+1} < 1 - y_{n+1}$. On a alors $a_n = b_n$, d'où $0 < z_{n+1} < 1$, et, d'après (2.3)

$$v_{n+1} |\rho_{n+1}| = (v_n - q_n) |\rho_n - \varepsilon_n| = (t_{n+1} - 1)(1 - z_{n+1}) q_n |\varepsilon_n| = \frac{(t_{n+1} - 1)(1 - z_{n+1})}{x_{n+1} - y_{n+1}}.$$

Sous-entendons dans le reste de ce paragraphe l'indice $n + 1$ aux lettres x, y, z, t . Considérons les deux fonctions de z ,

$$v_n |\rho_n| = \frac{tz}{x - y} \quad \text{et} \quad v_{n+1} |\rho_{n+1}| = \frac{(t-1)(1-z)}{x - y},$$

qui sont, pour z compris entre 0 et 1, toutes deux positives, et, l'une croissante, et nulle pour $z = 0$, l'autre décroissante, et nulle pour $z = 1$; en un point z quelconque de l'intervalle $(0, 1)$, la plus petite d'entre elles est donc au plus égale à la valeur commune unique qu'elles prennent pour

$$z = \frac{t-1}{2t-1},$$

valeur commune égale à

$$\frac{t(t-1)}{(x-y)(2t-1)}.$$

Cette dernière fonction de t est croissante pour $1 \leq t \leq 1 - y$; donc on a, compte tenu des inégalités $x > 1$ et $y > -1$,

$$\frac{t(t-1)}{(x-y)(2t-1)} \leq \frac{-y(1-y)}{(x-y)(1-2y)} < \frac{-y}{1-2y} < \frac{1}{3}.$$

Ainsi, d'après la proposition 7, le cas \mathcal{B}_n [équivalent aux formules (2.7)] ne peut intervenir une infinité de fois si l'on suppose $k(\xi, \eta) > \frac{1}{3}$.

Pour faire l'étude des grandes valeurs de $k(\xi, \eta)$, nous supposons désormais qu'on a $k(\xi, \eta) > \frac{1}{3}$. Les formules (2.6) interviendront donc seules, à l'exclusion des formules (2.7).

En effet, ceci vient d'être démontré dans le cas où $\eta \neq M\xi + N$ et était déjà établi dans le cas contraire.

8. CARACTÉRISATION DE $k(\xi, \eta)$ PAR LA SUITE $\{(a_n, b_n)\}$. — On aura donc pour n assez grand et k positif

$$(8.1) \quad z_n = x_n - b_n - \frac{x_{n+1} - b_{n+1}}{x_{n+1}} + \frac{x_{n+2} - b_{n+2}}{x_{n+1}x_{n+2}} - \dots + (-1)^k \frac{x_{n+k} - b_{n+k} - \frac{z_{n+k+1}}{x_{n+k+1}}}{x_{n+1}x_{n+2}\dots x_{n+k}}.$$

De plus, comme $0 \leq b_p < a_p$, on a

$$x_p - b_p > 1 \quad \text{et} \quad \frac{x_{p+1} - b_{p+1}}{x_{p+1}} \leq 1$$

et la série

$$(8.2) \quad (x_n - b_n) - \frac{x_{n+1} - b_{n+1}}{x_{n+1}} + \dots + (-1)^k \frac{x_{n+k} - b_{n+k}}{x_{n+1}\dots x_{n+k}} + \dots$$

est constituée de termes tendant vers zéro, décroissants en valeur absolue, et de signes alternés; donc elle converge; comme on a

$$0 < z_{n+k+1} < x_{n+k+1},$$

z_n est égal à la somme de cette série, de sorte que la donnée, à partir d'un certain rang n , de la suite des couples (a_p, b_p) détermine entièrement x_n et z_n , et par suite $k(\xi, \eta)$ puisque les couples (ξ, η) et (x_n, z_n) sont équivalents.

En fait, si l'on se donne arbitrairement deux suites d'entiers a_k et b_k ($k = 0, 1, 2, \dots$), avec $a_k > 0$ et $0 \leq b_k < a_k$, il existe, comme l'on sait, un irrationnel ξ tel que

$$\xi = (a_0 \ a_1 \ \dots \ a_k \ \dots) = x_0.$$

La série alternée (8.2), écrite avec $n = 0$, est alors convergente; soit η sa somme; le fait que la série soit alternée entraîne $b_0 = [\xi - \eta]$. Plus généralement, si b_0, b_1, \dots, b_k sont les entiers associés à a_0, a_1, \dots, a_k dans le développement du couple (ξ, η) , la formule (8.1) sera valable, avec $n = 0$ et $z_0 = \eta$; on en déduit, par comparaison avec la série (8.2) avec $n = 0$:

$$z_{k+1} = x_{k+1} - b_{k+1} - \frac{x_{k+2} - b_{k+2}}{x_{k+2}} + \dots + (-1)^h \frac{x_{k+h+1} - b_{k+h+1}}{x_{k+2}\dots x_{k+h+1}} + \dots,$$

ce qui entraîne $b_{k+1} = [x_{k+1} - z_{k+1}]$; donc b_{k+1} est associé à a_{k+1} dans le développement du couple (ξ, η) . En résumé, on peut énoncer:

PROPOSITION 8. — Si l'on suppose $k(\xi, \eta) > \frac{1}{3}$, les couples (x_n, z_n) et (a_n, b_n) du développement de (ξ, η) vérifient à partir d'un certain rang les formules

$$(8.3) \quad \frac{1}{x_{n+1}} = x_n - a_n, \quad \frac{z_{n+1}}{x_{n+1}} = x_n - z_n - b_n;$$

$$(8.4) \quad a_n = [x_n], \quad b_n = [x_n - z_n], \quad 0 \leq b_n < a_n.$$

La donnée de la suite des couples (a_n, b_n) à partir d'un certain rang détermine

entièrement $k(\xi, \eta)$ par les formules (8.3), (8.4) associées à

$$(8.5) \quad \frac{1}{y_{n+1}} = y_n - a_n, \quad \frac{t_{n+1}}{y_{n+1}} = y_n - t_n - b_n;$$

$$(8.6) \quad k(\xi, \eta) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \min \left\{ \frac{z_n t_n}{x_n - y_n}, \frac{(x_n - z_n)(t_n - y_n)}{x_n - y_n} \right\}.$$

De plus, si l'on se donne arbitrairement, pour $n \geq 0$, deux suites d'entiers a_n et b_n soumis aux seules conditions ⁽³⁾

$$0 \leq b_n < a_n,$$

alors il existe un couple (ξ, η) pour lequel les a_n sont les quotients incomplets du développement en fraction continue de ξ , et les b_n sont les entiers associés aux a_n dans le développement du couple (ξ, η) selon l'algorithme qui a été défini.

II. — Étude des couples (ξ, η) tels que $c(\xi, \eta) < \frac{20}{7}$.

9. PRÉLIMINAIRES : ÉTUDE DU CAS HOMOGENE. — Dans toute la suite nous nous intéresserons exclusivement aux couples (ξ, η) tels que $c(\xi, \eta)$, qui est l'inverse de $k(\xi, \eta)$, soit inférieur à $\frac{20}{7}$. Comme ce nombre est plus petit que 3, on peut appliquer à ces couples la proposition 8. Nous supposerons une fois pour toutes que les indices que nous envisagerons pour les lettres a, b, x, y, \dots sont assez grands pour que les formules de la proposition 8 soient applicables.

Nous poserons encore

$$c_n = a_n - b_n;$$

on a donc $c_n \geq 1$, d'après la proposition 8.

D'après le paragraphe 3, l'éventualité $\lim_n c_n = 1$ est caractéristique des couples (ξ', η') équivalents à un couple $(\xi, 0)$, donc aussi à $(\xi', 0)$. Rappelons que l'hypothèse $c(\xi, 0) < \frac{20}{7}$ entraîne

$$\lim_n a_n = 1 \quad \text{ou} \quad \lim_n a_n = 2.$$

En effet, de

$$c(\xi, 0) = \overline{\lim}_n (x_n - y_n) < \frac{20}{7} < 3,$$

on déduit que cette hypothèse entraîne $\overline{\lim}_n a_n \leq 2$. Si l'on avait une infinité de fois, dans le développement de ξ , $a_n = 2$ avec $a_{n+1} = 1$, de $a_{n+2} \geq 1$ et $a_{n+3} \leq 2$

⁽³⁾ On n'a pas alors nécessairement $k(\xi, \eta) > \frac{1}{3}$.

on déduirait $x_n > \frac{18}{7}$, et de $a_{n-1} \leq 2$, $-y_n > \frac{1}{3}$, d'où

$$x_n - y_n \geq \frac{18}{7} + \frac{1}{3} > \frac{20}{7}$$

et par suite

$$c(\xi, 0) > \frac{20}{7}.$$

Au contraire

$$\lim_n a_n = 1 \quad \text{entraîne} \quad (\xi, 0) \sim \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}, 0 \right) \quad \text{et} \quad c(\xi, 0) = \sqrt{5} < \frac{20}{7};$$

$$\lim_n a_n = 2 \quad \text{entraîne} \quad (\xi, 0) \sim (\sqrt{2}, 0) \quad \text{et} \quad c(\xi, 0) = \sqrt{8} < \frac{20}{7};$$

ces deux cas correspondent aux nombres exceptionnels des cas a et c du théorème initial.

10. INÉGALITÉS UTILISÉES. — L'éventualité $\lim_n c_n = 1$ étant ainsi étudiée, nous supposons désormais que (ξ, η) n'est pas équivalent à $(\xi, 0)$ c'est-à-dire, que

$$\overline{\lim}_n c_n \geq 2,$$

et que le cas α_n de l'algorithme est toujours valable, ce qui entraîne $0 < t_n \leq 1$. De façon plus précise, on ne peut avoir une infinité de fois $v_n = q_n$ sans que $\overline{\lim}_n |\varphi_n| > 0$, puisque η n'est pas entier; donc, à partir d'un certain rang, on a

$$0 < t_n < 1.$$

Des formules (8.4) on tire alors

$$-\frac{t_{n+1}}{y_{n+1}} < b_n - y_{n+1} = 1 + b_n - a_n - \frac{1}{y_{n+1}}$$

et

$$-\frac{t_{n+1}}{y_{n+1}} > b_n - y_n = b_n - a_n - \frac{1}{y_{n+1}},$$

d'où le lemme suivant :

LEMME 1 :

$$1 + c_n y_{n+1} < t_{n+1} < 1 + (c_n - 1) y_{n+1}.$$

D'autre part, l'inégalité $k(\xi, \eta) < \frac{7}{20}$ entraîne, pour n assez grand, les inégalités

$$v_{n-1} |\rho_{n-1}| < \frac{7}{20}, \quad v_n |\rho_n| < \frac{7}{20}, \quad v'_n |\rho'_n| < \frac{7}{20}$$

qui s'écrivent respectivement, en sous-entendant l'indice n à chaque lettre :

$$(10.1) \quad zt > \frac{7}{20}(x-y) \quad \text{ou} \quad \frac{1}{t} < \frac{20z}{7(x-y)};$$

$$(10.2) \quad (t+b-y)(x-b-z) > \frac{7}{20}(x-y) \quad \text{ou} \quad \frac{1}{t+b-y} < \frac{20(x-b-z)}{7(x-y)};$$

$$(10.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} (t+b+1-y)(z+1+b-x) > \frac{7}{20}(x-y) \\ \text{ou} \quad \frac{1}{t+b+1-y} < \frac{20(z+1+b-x)}{7(x-y)}. \end{array} \right.$$

En éliminant z entre (10.1) et (10.2), on trouve

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{t+b-y} < \frac{20}{7} \frac{x-b}{x-y}.$$

En posant $u_n = b_n - y_n$, cette inégalité est équivalente à

$$(I_n) \quad x > b + \frac{u}{\frac{20}{7} \frac{t(t+u)}{2t+u} - 1} \quad (\text{avec l'indice } n \text{ à chaque lettre}).$$

En éliminant z entre (10.2) et (10.3), on trouve

$$\frac{1}{t+b-y} + \frac{1}{t+b+1-y} < \frac{20}{7} \frac{1}{x-y}$$

qui s'écrit aussi

$$(J_n) \quad x < b - u + \frac{20}{7} \frac{(t+u)(t+u+1)}{2t+2u+1} \quad (\text{avec l'indice } n \text{ à chaque lettre}).$$

En éliminant x entre I_n et J_n , on trouve

$$(K_n) \quad \frac{1}{t} + \frac{u+1}{t+u} + \frac{u}{t+u+1} < \frac{20}{7} \quad (\text{avec l'indice } n \text{ à chaque lettre}).$$

Le premier membre de K_n étant une fonction décroissante de t , K_n entraîne l'inégalité plus faible obtenue en remplaçant t par 1 :

$$\frac{u}{u+2} < \frac{20}{7} - 2 = \frac{6}{7},$$

c'est-à-dire

$$u < 12;$$

comme $y < 0$, on en déduit

$$b \leq 11,$$

et aussi, en utilisant J_n , compte tenu de ce que $\frac{(t+u)(t+u+1)}{2t+2u+1}$, étant l'inverse de $\frac{1}{t+u} + \frac{1}{t+u+1}$, croît avec $t+u$,

$$x < \frac{20}{7} \cdot \frac{13 \cdot 14}{27} < 20,$$

d'où

$$a_n \leq 19 \quad \text{et} \quad u_{n+1} > \frac{1}{20},$$

quel que soit n .

Désignons alors le premier membre de K_n par $F(t, u)$. Pour t et u positifs, on a évidemment $F'_t < 0$, tandis que

$$F'_u = \frac{1+t}{(t+u+1)^2} - \frac{1-t}{(t+u)^2}$$

a le même signe, pour $t < 1$, que

$$\frac{1+t}{1-t} - \left(\frac{t+u+1}{t+u} \right)^2.$$

Or, pour $u > \frac{1}{20}$ et $t > \frac{7}{10}$, cette dernière quantité est supérieure à $\frac{17}{3} - \left(\frac{7}{3}\right)^2 > 0$.

De plus, on vérifie que

$$F\left(\frac{7}{10}, \frac{1}{20}\right) = \frac{20}{7}.$$

Il existe donc une fonction $U = f(t)$, définie par l'équation (du second degré en U)

$$F(t, U) = \frac{20}{7},$$

avec $f' = -\frac{F'_t}{F'_u} > 0$ pour $\frac{7}{10} \leq t < 1$, ce qui entraîne $\frac{1}{20} \leq U < 12$, et la croissance simultanée de t et U dans ces intervalles.

En outre, on vérifie que $F(t, u)$ est strictement supérieur à $\frac{20}{7}$ pour les couples de valeurs t et u du tableau K suivant :

TABLEAU K.

$t =$	$\frac{19}{27}$	$\frac{67}{95}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{20}{27}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{10}{13}$	$\frac{7}{9}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{6}{7}$
$u =$	$\frac{7}{27}$	$\frac{26}{95}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{9}{8}$	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{21}{10}$	$\frac{11}{3}$

En tenant compte de l'inégalité $u_n > \frac{1}{20}$, qui entraîne $t_n > \frac{7}{10}$, on peut donc énoncer le lemme suivant :

LEMME 2. — *Le système d'inégalités*

$$t_n \leq t, \quad u_n \geq u$$

est incompatible pour chaque couple de valeurs (t, u) du tableau K. En outre, on a

$$\frac{7}{10} < t_n < 1 \quad \text{et} \quad \frac{1}{20} < u_n < 12.$$

D'autre part, comme $\frac{t(t+u)}{2t+u}$, étant l'inverse de $\frac{1}{t} + \frac{1}{t+u}$, croît avec t , et que $\frac{u}{\frac{20}{7} \frac{t(t+u)}{2t+u} - 1}$ a pour inverse $\frac{1}{7} \left(\frac{10t}{t+u} + \frac{10t-7}{u} \right)$ qui est une fonction décroissante de u pour $t > \frac{7}{10}$, on peut énoncer :

LEMME 3. — *Le second membre de l'inégalité I_n est une fonction décroissante de t , b et y étant fixes; c'est une fonction croissante de $-y$, t et b étant fixes, et aussi de b , t et y étant fixes.*

En particulier, I_n entraîne les inégalités plus faibles, obtenues en remplaçant t par 1, puis y par 0,

$$(I'_n) \quad x > y + \frac{20u(1+u)}{6+13u} > \frac{20b(1+b)}{6+13b}.$$

Comme $-u + \frac{20}{7} \frac{(t+u)(t+u+1)}{2t+2u+1} = \frac{1}{7} \left(3u + 10t + 5 - \frac{5}{2u+2t+1} \right)$ est une fonction croissante de u , t restant fixe, et aussi, lorsque u reste fixe, une fonction croissante de $t+u$, donc de t , on peut énoncer :

LEMME 4. — *Le second membre de l'inégalité J_n croît avec chacune des variables t , u , b , les deux autres restant fixes, et aussi avec $t+u$ lorsque $b-u=y$ reste fixe.*

En particulier, J_n entraîne les inégalités plus faibles, obtenues en remplaçant t par 1, puis y par 0,

$$(J'_n) \quad x < y + \frac{20}{7} \frac{(u+1)(u+2)}{2u+3} < \frac{20}{7} \frac{(b+1)(b+2)}{2b+3}.$$

Enfin, de $0 < -y < 1$ et $\frac{7}{10} < t < 1$, on déduit les inégalités

$$(L_n) \quad t_{n+1} = \frac{b+t-y}{a-y} < \frac{b+2}{a+1} \quad (\text{avec l'indice } n \text{ sous-entendu}),$$

ce qui entraîne $\frac{b+2}{a+1} > \frac{7}{10}$, c'est-à-dire

$$(L'_n) \quad a < \frac{10b+13}{7}.$$

11. Après avoir ainsi dressé la liste des inégalités utiles, nous allons prouver que, pour les couples (ξ, η) tels que $c(\xi, \eta) < \frac{20}{7}$, on a, à partir d'un certain rang, les trois propriétés suivantes :

- (i) le couple (a_n, b_n) est déterminé par la donnée de a_n ou de b_n (à quelques ambiguïtés près);
- (ii) il ne peut pas être constitué de nombres très grands;
- (iii) de deux couples consécutifs, il y en a toujours un constitué de petits nombres.

Les démonstrations de ces propriétés étant liées, nous procéderons par étapes, où le sens et la force des énoncés précédents s'affirment progressivement. La première étape fait l'objet du paragraphe 12 et est concrétisée par les lemmes 5 et 6, la deuxième étape fait l'objet du paragraphe 13 et est concrétisée par les lemmes 7, 8 et 9; ensuite la ligne de la démonstration s'infléchit pour réduire davantage le nombre des couples possibles et préciser la façon dont ils se succèdent.

Il est entendu, une fois pour toutes, que tous les énoncés ultérieurs sur le développement de (ξ, η) sont valables à partir d'un certain rang, et, sauf mention contraire, pour les couples tels que $c(\xi, \eta) < \frac{20}{7}$.

12. PREMIÈRE ÉTAPE. — D'après le lemme 2, b_n ne peut prendre que les valeurs entières comprises entre 0 et 11. A chacune d'elles ne peuvent correspondre qu'un nombre fini de valeurs de a_n : celles qui satisfont à la fois aux inégalités L'_n et I'_n . Cela donne le tableau suivant :

$b_n =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$a_n <$	$\frac{13}{7}$	$\frac{23}{7}$	$\frac{33}{7}$	$\frac{43}{7}$	$\frac{53}{7}$	$\frac{63}{7}$	$\frac{73}{7}$	$\frac{83}{7}$	$\frac{93}{7}$	$\frac{103}{7}$	$\frac{113}{7}$	$\frac{123}{7}$
$x_n >$	-	$\frac{40}{19}$	$\frac{15}{4}$	$\frac{16}{3}$	$\frac{200}{29}$	$\frac{600}{71}$	10	$\frac{1120}{97}$	$\frac{144}{11}$	$\frac{600}{41}$	$\frac{275}{17}$	$\frac{2640}{149}$

et entraîne le lemme suivant, en tenant compte de $a_n > x_n - 1$:

LEMME 5. — Les seuls couples (a_n, b_n) possibles sont donnés par le tableau suivant (où l'on a fait figurer, outre les valeurs de a_n et b_n , celles de $c_n = a_n - b_n$, la minoration de x_n fournie par I'_n lorsqu'elle est meilleure que $x_n > 1$, et la majoration de t_{n+1} fournie par L_n) :

TABLEAU T.

$a_n =$	1	2	3	3	4	5	6	6	7	8	10	11	13	14	16	17
$b_n =$	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5	6	7	8	9	10	11
$c_n =$	1	1	2	1	2	2	3	2	3	3	4	4	5	5	6	6
$x_n >$	1	$\frac{40}{19}$	$\frac{40}{19}$	$\frac{15}{4}$	$\frac{15}{4}$	$\frac{16}{3}$	$\frac{16}{3}$	$\frac{200}{29}$	$\frac{200}{29}$	$\frac{600}{71}$	10	$\frac{1120}{97}$	$\frac{144}{11}$	$\frac{600}{41}$	$\frac{275}{17}$	$\frac{2640}{149}$
$t_{n+1} <$	1	1	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{9}$	$\frac{8}{11}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{11}{15}$	$\frac{12}{17}$	$\frac{13}{18}$

Intéressons-nous maintenant à la propriété (iii).

Supposons que $b_{n+1} \geq 2$; on a alors $u_{n+1} > 2$, donc d'après le lemme 2, $t_{n+1} > \frac{7}{9}$, ce qui, d'après le tableau T, implique

$$(a_n, b_n) = (1, 0), (2, 1), (3, 2), (4, 2), (5, 3) \text{ ou } (6, 4).$$

Comme $a_n \leq 6$, on a $-y_{n+1} > \frac{1}{7}$, donc $u_{n+1} > \frac{21}{10}$, et, d'après le lemme 2, $t_{n+1} > \frac{4}{5}$, ce qui exclut $(a_n, b_n) = (4, 2)$.

D'autre part,

$$(a_n, b_n) = (3, 2), (5, 3) \text{ ou } (6, 4)$$

entraînent respectivement d'après l'inégalité I'_n rappelée dans le tableau T,

$$x_n > \frac{15}{4}, \frac{16}{3} \text{ ou } \frac{200}{29},$$

et, par suite,

$$x_{n+1} < \frac{4}{3}, 3 \text{ ou } \frac{29}{26}$$

respectivement, ce qui est dans les trois cas contradictoire avec $b_{n+1} \geq 2$, puisque $x_{n+1} > a_{n+1} \geq b_{n+1} + 1$. Nous avons donc établi le lemme suivant :

LEMME 6 : $b_{n+1} \geq 2$ entraîne $a_n \leq 2$.

COROLLAIRE : $b_{n+1} \geq 2$ implique $-y_{n+1} > \frac{1}{3}$.

13. DEUXIÈME ÉTAPE. — Revenant aux propriétés (i) et (ii) ci-dessus, nous allons prouver l'exclusion des couples (a_n, b_n) du tableau suivant :

$$\begin{array}{cccccccc} a_n = & 3 & 6 & 10 & 11 & 13 & 14 & 16 & 17 \\ b_n = & 2 & 4 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \end{array}$$

c'est-à-dire montrer qu'ils ne peuvent plus intervenir, à partir d'un certain rang, dans le développement de (ξ, η) , si $c(\xi, \eta) < \frac{20}{7}$.

Remarquons d'abord que le corollaire du lemme 6, entraînant $-y_n > \frac{1}{3}$, permet d'écrire l'inégalité I'_n sous la forme

$$x_n > -\frac{1}{3} + \frac{20\left(b_n + \frac{1}{3}\right)\left(b_n + \frac{4}{3}\right)}{6 + 13\left(b_n + \frac{1}{3}\right)} = \frac{180b_n^2 + 261b_n + 49}{3(39b_n + 31)}.$$

Appliquons cette inégalité aux cas $b_n = 4, 2$ et 7 ; on trouve

— pour $b_n = 4$:

$$x_n > \frac{180 \cdot 16 + 261 \cdot 4 + 49}{3(39 \cdot 4 + 31)} = \frac{2880 + 1044 + 49}{3(156 + 31)} = \frac{3973}{561} > 7;$$

— pour $b_n = 2$:

$$x_n > \frac{180 \cdot 4 + 261 \cdot 2 + 49}{3(39 \cdot 2 + 31)} = \frac{720 + 522 + 49}{3(78 + 31)} = \frac{1291}{327} = 3 + \frac{310}{327};$$

— pour $b_n = 7$:

$$x_n > \frac{180 \cdot 49 + 261 \cdot 7 + 49}{3(39 \cdot 7 + 31)} = \frac{7}{3} \cdot \frac{1260 + 261 + 7}{273 + 31} = \frac{1337}{114} = 11 + \frac{83}{114}.$$

L'inégalité $x_n > 7$ est évidemment contradictoire avec $a_n = 6$, donc *le couple (6, 4) est exclu*.

L'inégalité $x_n > 3 + \frac{310}{327}$ implique, si $a_n = 3$, $x_{n+1} < \frac{327}{310}$ donc $x_{n+2} > \frac{310}{17} > 18$, ce qui contredit le lemme 5, donc *le couple (3, 2) est exclu*.

L'inégalité $x_n > 11 + \frac{83}{114}$ implique, si $a_n = 11$, $x_{n+1} < \frac{114}{83} < \frac{3}{2}$, donc $a_{n+1} = 1$ et $b_{n+1} = 0$. Retenons pour quelques temps ces derniers résultats.

La conclusion $a_{n+1} = 1$, $b_{n+1} = 0$ est aussi valable dans les cas suivants (lemme 5) :

$$\begin{array}{cccccc} a_n = & 10 & 13 & 14 & 16 & 17 \\ t_{n+1} < & \frac{8}{11} & \frac{5}{7} & \frac{11}{15} & \frac{12}{17} & \frac{13}{18} \end{array}$$

car ils assurent tous $t_{n+1} < \frac{20}{27}$, ce qui entraîne, d'après le lemme 2, $u_{n+1} < 1$, donc $b_{n+1} = 0$ et $a_{n+1} = 1$.

Pour tous les couples (a_n, b_n) énumérés au début de ce paragraphe et non encore exclus, nous avons donc $a_{n+1} = 1$, $b_{n+1} = 0$, d'où

$$t_{n+2} = \frac{t_{n+1} + y_{n+1}}{1 - y_{n+1}} < \frac{1 + (c_n - 2)y_{n+1}}{1 - y_{n+1}} < \frac{1 - \frac{c_n - 2}{a_n + 1}}{1 + \frac{1}{a_n + 1}} = \frac{b_n + 3}{a_n + 2},$$

le premier signe d'inégalité résultant du lemme 4. Ceci nous donne, pour les six valeurs en question de a_n , les inégalités respectives suivantes pour t_{n+2} :

$$\begin{array}{cccccc} a_n = & 10 & 11 & 13 & 14 & 16 & 17 \\ t_{n+2} < & \frac{3}{4} & \frac{10}{13} & \frac{11}{15} & \frac{3}{4} & \frac{13}{18} & \frac{14}{19} \end{array}$$

donc, dans les six cas, $t_{n+2} < \frac{10}{13}$, ce qui entraîne, d'après le lemme 2, $u_{n+2} < \frac{3}{2}$; mais comme $a_{n+1} = 1$ entraîne $-y_{n+2} > \frac{1}{2}$, on a donc $b_{n+2} = 0$, donc on a $a_{n+2} = 1$, en particulier $x_{n+1} > \frac{3}{2}$.

Ceci contredit le résultat obtenu pour $(a_n, b_n) = (11, 7)$ qui est donc *exclu* (on pourra oublier maintenant les résultats partiels obtenus à son sujet).

Dans les autres cas on a

$$t_{n+1} + u_{n+1} = t_{n+1} - y_{n+1} < 1 + (c_n - 2)y_{n+1} < 1 - \frac{c_n - 2}{a_n + 1} = \frac{b_n + 3}{a_n + 1},$$

d'où, grâce à l'inégalité J_{n+1} et au lemme 4 (on pose $R = \frac{b_n + 3}{a_n + 1}$)

$$x_{n+1} < -\frac{1}{a_n + 1} + \frac{20}{7} \frac{R(R+1)}{2R+1} = -\frac{1}{a_n + 1} + \frac{20}{7} \frac{(b_n + 3)(a_n + b_n + 4)}{(a_n + 1)(a_n + 2b_n + 7)},$$

ce qui donne respectivement pour les cinq valeurs restantes de a_n :

$$\begin{array}{cccccc} a_n = & 10 & 13 & 14 & 16 & 17 \\ x_{n+1} < & \frac{3\ 397}{2\ 233} & \frac{656}{441} & \frac{6\ 207}{4\ 195} & \frac{7\ 499}{5\ 117} & \frac{617}{414} \end{array}$$

Comme ceci, sauf dans le cas $a_n = 10$, contredit $x_{n+1} \geq \frac{3}{2}$, il en résulte que les couples (13, 8), (14, 9), (16, 10) et (17, 11) sont exclus.

En particulier, on a démontré l'inégalité $a_n \leq 10$, pour tout n .

Dans le cas $a_n = 10$, $x_{n+1} < \frac{3\ 397}{2\ 233}$ et $a_{n+2} = 1$ entraînent

$$x_{n+2} > \frac{2\ 233}{1\ 164}, \quad x_{n+3} < \frac{1\ 164}{1\ 069}, \quad x_{n+4} > \frac{1\ 069}{95} > 11,$$

ce qui contredit l'inégalité $a_{n+4} \leq 10$ que nous venons d'établir; donc le couple (10, 6) est, lui aussi, exclu. Les exclusions que nous avons en vue étant établies, on peut énoncer :

LEMME 7. — Les seuls couples (a_n, b_n) possibles sont donnés par le tableau T' suivant :

TABLEAU T'.

$a_n =$	1	2	3	4	5	6	7	8
$b_n =$	0	1	1	2	3	3	4	5
$t_{n+1} <$	1	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{9}$

COROLLAIRE. — On a $\overline{\lim}_n a_n \geq 3$.

En effet on a vu (§ 10) que $\overline{\lim}_n c_n \geq 2$.

Revenons maintenant à la propriété (iii).

D'après le lemme 6, $b_{n+1} \geq 2$, donc $a_{n+1} \geq 4$, entraînent $a_n \leq 2$; montrons que $(a_{n+1}, b_{n+1}) = (3, 1)$ entraîne aussi la même conclusion.

En effet, si $a_n \geq 3$, donc $c_n \geq 2$ (lemme 7) et $t_{n+1} - y_{n+1} < 1$ (lemme 1), et si de plus $(a_{n+1}, b_{n+1}) = (3, 1)$, on a

$$t_{n+2} = \frac{t_{n+1} + 1 - y_{n+1}}{3 - y_{n+1}} < \frac{2}{3 - y_{n+1}} < \frac{2}{3} < \frac{7}{10},$$

ce qui contredit le lemme 2; ainsi $a_{n+1} > 3$ entraîne $a_n = 1$ ou 2.

Supposons maintenant $a_n = 2$, donc $b_n = 1$, et $a_{n+1} \geq 3$, donc $x_n < 2 + \frac{1}{2}$;

l'inégalité I_n entraîne alors, avec $b_n = 1$ et $x_n > \frac{7}{3}$,

$$\frac{20}{7} \frac{t_n(t_n + u_n)}{2t_n + u_n} > 1 + \frac{3u_n}{4}.$$

Or cette inégalité est contredite (grâce au lemme 3) :

1° par $u_n > \frac{4}{3}$, $t_n < 1$, ce qui écarte les cas où $-y_n > \frac{1}{3}$, donc les couples (a_{n-1}, b_{n-1}) tels que $a_{n-1} \leq 2$.

2° par $u_n > \frac{10}{9}$, $t_n < \frac{5}{6}$, inégalités vérifiées par tous les couples (a_{n-1}, b_{n-1}) du tableau T' tels que $a_{n-1} \geq 3$; ces couples sont donc à écarter aussi, et par suite $a_{n+1} \geq 3$ contredit $a_n = 2$; on peut donc énoncer :

LEMME 8 : $a_{n+1} \geq 3$ entraîne $a_n = 1$.

COROLLAIRE : $a_{n+1} \geq 3$ implique donc $-y_{n+1} \geq \frac{1}{2}$.

Le lemme 8 signifie qu'un quotient incomplet au moins égal à 3 ne peut être précédé que d'un quotient incomplet égal à 1; nous allons montrer maintenant qu'il ne peut également être suivi que d'un quotient incomplet égal à 1. En fait, si $a_n \geq 3$, on a certainement $a_{n+1} \leq 2$, sans quoi le lemme 8 serait contredit; pour prouver que $a_{n+1} = 1$, il suffit donc d'exclure le cas $a_n \geq 3$, $a_{n+1} = 2$, ce que nous allons faire maintenant.

Si $a_n = 3$ ou 7, on a (tableau T') $t_{n+1} < \frac{3}{4}$, et, si $b_{n+1} = 1$, comme $-y_{n+1} > \frac{1}{8}$, $u_{n+1} > \frac{9}{8}$, ce qui contredit le lemme 2.

Si $a_n = 6$, on a (tableau T') $t_{n+1} < \frac{5}{7} < \frac{20}{27}$ et $u_{n+1} > 1$, ce qui contredit le lemme 2.

Si $a_n = 5$ ou 8, l'inégalité I'_n , avec $-y_n > \frac{1}{2}$ (corollaire du lemme 8) donne respectivement

$$x_n > -\frac{1}{2} + \frac{20 \cdot 7 \cdot 9}{2(7 \cdot 13 + 12)} = \frac{1157}{206}, \quad \text{d'où} \quad x_{n+1} < \frac{206}{127}$$

ou

$$x_n > -\frac{1}{2} + \frac{20 \cdot 11 \cdot 13}{2(11 \cdot 13 + 12)} = \frac{541}{62}, \quad \text{d'où} \quad x_{n+1} < \frac{62}{45}$$

donc dans les deux cas $x_{n+1} < 2$, ce qui contredit $a_{n+1} = 2$.

D'après le lemme 7, il reste à examiner seulement le cas où $a_n = 4$, $a_{n+1} = 2$. Remarquons que, d'après les lemmes 7 et 8, on a $a_{n-1} = 1$ et $a_{n-2} \leq 8$, ce qui entraîne $-y_{n-1} > \frac{1}{9}$, $-y_n < \frac{9}{10}$, d'où $-y_{n+1} > \frac{10}{49}$, et, puisque $t_{n+1} - y_{n+1} < 1$

d'après le lemme 1, $t_{n+1} < \frac{39}{49}$, d'où l'on tire, dans l'inégalité I_{n+1} :

$$x_{n+1} > 1 + \frac{\frac{59}{49}}{\frac{20}{7} \frac{39 \cdot 2}{137} - 1} = 1 + \frac{59 \cdot 137}{140 \cdot 78 - 49 \cdot 137} = 1 + \frac{8\ 083}{4\ 207} = 2 + \frac{3\ 876}{4\ 207},$$

d'où

$$x_{n+2} < \frac{4\ 207}{3\ 876} \quad \text{et} \quad x_{n+3} > \frac{3\ 876}{331} > 9,$$

ce qui contredit le lemme 7.

On peut donc énoncer :

LEMME 9 : $a_n \geq 3$ entraîne $a_{n+1} = 1$.

14. EXCLUSION DES COUPLES (6, 3), (8, 5) ET (5, 3). — Dans ce paragraphe, on réduit encore le nombre des couples (a_n, b_n) qui interviennent et leurs possibilités de combinaisons, selon le schéma suivant :

- (iv) on prouve que si $a_n \geq 3$ (d'où $a_{n+1} = 1$) alors $a_{n+2} = 1$;
- (v) on prouve que si $a_n = 6$ ou 8 , x_{n+2} est assez grand pour entraîner une contradiction; d'où l'exclusion des couples (6, 3) et (8, 5);
- (vi) on peut alors prouver que dans les hypothèses de (iv), on a en plus $a_{n+3} = 1$, ce qui permet l'exclusion de (5, 3).

La démonstration de (iv) consiste à examiner, dans l'hypothèse $a_n \geq 3$ et $a_{n+1} = 1$, les diverses valeurs possibles de a_{n+2} . Dans cette hypothèse, remarquons d'abord que $t_{n+2} = \frac{t_{n+1} - y_{n+1}}{1 - y_{n+1}}$, expression qui est inférieure, d'après le lemme 1 :

- si $a_n = 3, 4, 5$, à $\frac{1}{1 - y_{n+1}}$ donc respectivement à $\frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}$;
- si $a_n = 6, 7, 8$, à $\frac{1 + y_{n+1}}{1 - y_{n+1}}$, donc respectivement à $\frac{3}{4}, \frac{7}{9}, \frac{4}{5}$.

On a donc dans tous les cas $t_{n+2} < \frac{6}{7}$; distinguons alors quatre cas :

1° si $a_{n+2} \geq 5$, on a $b_{n+2} \geq 3$ donc

$$u_{n+2} \geq 3 - y_{n+2} = 3 + \frac{1}{1 - y_{n+1}} \geq 3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}} > \frac{11}{3},$$

ce qui, d'après le lemme 2, contredit $t_{n+2} < \frac{6}{7}$, et écarte donc l'éventualité $a_{n+2} \geq 5$;

2° si $a_{n+2} = 4$, on a $b_{n+2} = 2$ donc $u_{n+2} > \frac{21}{10}$ donc, d'après le lemme 2, $t_{n+2} < \frac{4}{5}$,

ce qui entraîne d'après les calculs précédents $a_n = 4$ ou 5 ; d'autre part, dans ce cas, on a certainement $a_{n+3} = 1$ d'après le lemme 9, et $a_{n+4} \leq 4$, car $a_{n+4} \geq 5$ contredirait le 1°. Or l'inégalité I_{n+2} avec $b_{n+2} = 2$, $-y_{n+2} > \frac{4}{5}$ et $t_{n+2} < \frac{6}{7}$ donne

$$x_{n+2} > -\frac{4}{5} + \frac{20 \cdot 84 \cdot 128}{5(420 \cdot 14 + 11 \cdot 158)} = \frac{92 \ 284}{19 \ 045},$$

d'où

$$x_{n+3} < \frac{19 \ 045}{16 \ 104} \quad \text{et} \quad x_{n+4} > \frac{16 \ 104}{2 \ 941} > 5,$$

ce qui contredit $a_{n+4} \leq 4$, et écarte donc l'éventualité $a_{n+2} = 4$;

3° si $a_{n+2} = 3$, alors $t_{n+3} = \frac{t_{n+1} + 2 - 2y_{n+1}}{4 - 3y_{n+1}}$, expression qui est inférieure, d'après le lemme 4 :

— si $a_n = 6, 7, 8$, à $\frac{3}{4 - 3y_{n+1}}$ donc à $\frac{9}{13} < \frac{7}{10}$, en contradiction avec le lemme 2;

— si $a_n = 3, 4, 5$, à $\frac{3 - y_{n+1}}{4 - 3y_{n+1}}$, donc à $\frac{19}{27}$, tandis que $-y_{n+3} = \frac{1 - y_{n+1}}{4 - 3y_{n+1}}$ est supérieur à $\frac{7}{27}$, ce qui contredit le lemme 2; l'éventualité $a_{n+2} = 3$ est donc écartée dans les deux cas;

4° enfin, si $a_{n+2} = 2$, l'inégalité I_{n+2} donne, avec $b_{n+2} = 1$, $-y_{n+2} > \frac{3}{4}$, $t_{n+2} < \frac{6}{7}$:

$$x_{n+2} < -\frac{3}{4} + \frac{20 \cdot 42 \cdot 73}{4(420 \cdot 7 + 11 \cdot 97)} = \frac{49 \ 299}{16 \ 028} > 3 \quad \text{contredisant} \quad a_{n+2} = 2.$$

Nous pouvons donc énoncer pour clore la partie (iv) de notre programme :

LEMME 10 : $a_n \geq 3$ entraîne $a_{n+1} = 1$ et $a_{n+2} = 1$.

COROLLAIRE : $a_n \geq 3$ entraîne $a_{n-1} = 1$ et $a_{n-2} \leq 2$, d'où $\frac{1}{2} < -y_n < \frac{3}{4}$.

Envisageons maintenant l'hypothèse $a_n = 6$. Du corollaire du lemme 10 on déduit $-y_{n+1} > \frac{4}{27}$, d'où, en tenant compte du lemme 1 :

$$t_{n+1} + u_{n+1} = t_{n+1} - y_{n+1} < 1 + y_{n+1} < \frac{23}{27}$$

et l'inégalité J_{n+1} entraîne

$$x_{n+1} < -\frac{4}{27} + \frac{20 \cdot 23 \cdot 50}{7 \cdot 27 \cdot 73} = \frac{20 \ 956}{13 \ 797},$$

d'où, en tenant compte du lemme 10,

$$x_{n+2} > \frac{13 \ 797}{7 \ 159}, \quad x_{n+3} < \frac{7 \ 159}{6 \ 638} \quad \text{et} \quad x_{n+4} > \frac{6 \ 638}{521} > 9,$$

ce qui contredit le lemme 7. *Le couple (6, 3) est donc exclu.*

Envisageons à présent le cas $a_n = 8$; l'inégalité I'_n donne, avec $-y_n > \frac{1}{2}$,

$$x_n > -\frac{1}{2} + \frac{20 \cdot 11 \cdot 13}{2(11 \cdot 13 + 12)} = \frac{541}{62}, \quad \text{d'où} \quad x_{n+1} < \frac{62}{45} \quad \text{et} \quad x_{n+2} > \frac{45}{17} > 2,$$

ce qui contredit le lemme 10. *Le couple (8, 5) est donc exclu.*

On peut donc énoncer :

LEMME 11. — *Les seuls couples (a_n, b_n) possibles sont $(1, 0), (2, 1), (3, 1), (4, 2), (5, 3)$ et $(7, 4)$.*

Ceci achève la partie (v) de ce paragraphe. Passons à la partie (vi).

Si $a_n = 5$, l'inégalité I'_n donne, avec $-y_n > \frac{1}{2}$,

$$x_n > -\frac{1}{2} + \frac{20 \cdot 7 \cdot 9}{2(7 \cdot 13 + 12)} = \frac{1157}{206}, \quad \text{d'où} \quad x_{n+1} < \frac{206}{127} \quad \text{et} \quad x_{n+2} > \frac{127}{79},$$

d'où, compte tenu du lemme 10, $x_{n+3} < \frac{79}{48}$ qui entraîne $a_{n+3} = 1$.

Si $a_n = 3, 4$ ou 7 , on a $-y_{n+1} > \frac{1}{a_n + \frac{1}{4}}$, c'est-à-dire, respectivement, $-y_{n+1} > \frac{4}{15}, \frac{4}{19}$ ou $\frac{4}{31}$. Dans les deux premiers cas, le lemme 1 donne $t_{n+1} - y_{n+1} < 1$ et, dans le troisième, $t_{n+1} - y_{n+1} < 1 + y_{n+1} < \frac{27}{31}$. L'inégalité J_{n+1} entraîne que x_{n+1} est alors respectivement inférieur à

$$-\frac{4}{15} + \frac{20}{7} \cdot \frac{2}{3} = \frac{172}{105}, \quad -\frac{4}{19} + \frac{20}{7} \cdot \frac{2}{3} = \frac{676}{399}, \quad -\frac{4}{31} + \frac{20}{7} \cdot \frac{27 \cdot 58}{31 \cdot 85} = \frac{5788}{3689},$$

d'où respectivement :

$$x_{n+2} > \frac{105}{67}, \quad \frac{399}{277}, \quad \frac{3689}{2099},$$

donc, puisque $a_{n+2} = 1$ d'après le lemme 10, respectivement

$$x_{n+3} < \frac{67}{38}, \quad \frac{277}{122}, \quad \frac{2099}{1590},$$

ce qui entraîne $a_{n+3} = 1$ sauf, *a priori*, dans le second cas où l'on trouve seulement $a_{n+3} \leq 2$; mais $a_{n+3} = 2$ entraînerait dans ce cas $x_{n+4} > \frac{122}{33} > 3$, en contradiction avec le lemme 8. En outre, dans le troisième cas, on a $x_{n+4} > \frac{1590}{509} > 3$. On peut donc énoncer :

LEMME 12. — *Si $a_n = 3, 4, 5$ ou 7 , on a $a_{n+1} = a_{n+2} = a_{n+3} = 1$, avec $a_{n+4} \leq 3$ si $a_n = 7$.*

COROLLAIRE. — Si $a_n = 3, 4, 5$ ou 7 , on a $a_{n-1} = a_{n-2} = 1$ et $a_{n-3} \leq 2$, ou bien $a_{n-1} = 1$ et $a_{n-2} = 2$; dans les deux cas, on a $\frac{4}{7} < -y_n < \frac{3}{4}$.

Appliquant alors l'inégalité I'_n avec $a_n = 5$ et $-y_n > \frac{4}{7}$, on trouve

$$x_n > -\frac{4}{7} + \frac{20 \cdot 25 \cdot 32}{7(25 \cdot 13 + 42)} = \frac{2076}{367},$$

d'où

$$x_{n+1} < \frac{367}{241}, \quad x_{n+2} > \frac{241}{126}, \quad x_{n+3} < \frac{126}{115} \quad \text{et} \quad x_{n+4} > \frac{115}{11} > 9$$

en contradiction avec le lemme 7; le cas $a_n = 5$ est donc exclu. Par suite, on peut énoncer :

LEMME 13. — Les seuls couples (a_n, b_n) possibles sont les couples $(1, 0), (2, 1), (3, 1), (4, 2)$ et $(7, 4)$, ces trois derniers impliquant en outre $a_{n-1} = a_{n+1} = a_{n+2} = a_{n+3} = 1$, et $\frac{4}{7} < -y_n < \frac{3}{4}$, avec

$$a_{n-2} = 2, \quad \text{ou} \quad a_{n-2} = 1 \quad \text{avec} \quad a_{n-3} \leq 2;$$

de plus, si $a_n = 7$, on a nécessairement $a_{n+4} = 3, 4$ ou 7 .

15. La suite de la démonstration consiste à montrer que dans le cas où $a_n = 7$, chacune des hypothèses $a_{n+4} = 3, 4$ ou 7 est contradictoire, d'où l'exclusion du couple $(7, 4)$; ensuite on montre que $a_n = 3$ ou 4 entraîne, soit $a_{n+1} = a_{n+2} = a_{n+3} = a_{n+4} = a_{n+5} = 1$ et $a_{n+6} = 3$ ou 4 , soit $a_{n+1} = a_{n+2} = a_{n+3} = 1$ et $a_{n+4} = 3$ ou 4 (et même, en fait, un résultat plus précis); compte tenu de l'inégalité $\overline{\lim}_n a_n \geq 3$ (corollaire du lemme 7), ceci entraîne l'exclusion du couple $(2, 1)$.

Au point de vue technique, on notera que les lemmes 2, 3, 4 trop grossiers maintenant, sont le plus souvent abandonnés pour les inégalités originales :

$$(15.1) \quad z_n t_n > \frac{7}{20}(x_n - y_n), \quad (x_n - z_n)(t_n - y_n) > \frac{7}{20}(x_n - y_n)$$

écrites pour diverses valeurs de n , voisines les unes des autres.

16. EXCLUSION DE $a_n = 7$. — $a_n = 7$ entraîne $c_n = 3$ et (lemme 13) $-y_n < \frac{3}{4}$, d'où $-y_{n+1} > \frac{4}{31} > \frac{1}{8}$. Étudions successivement les cas $a_{n+4} = 3, 4$ et 7 .

Si $a_{n+4} = 3$, d'après le lemme 12, les formules (2.6) et le lemme 4, on a, en utilisant $-y_{n+1} > \frac{1}{8}$:

$$t_{n+5} = \frac{t_{n+1} + 7 - 5y_{n+1}}{11 - 7y_{n+1}} < \frac{8 - 3y_{n+1}}{11 - 7y_{n+1}} < \frac{67}{95}, \quad -y_{n+5} = \frac{3 - 2y_{n+1}}{11 - 7y_{n+1}} > \frac{26}{95},$$

ce qui contredit le lemme 2, et écarte donc le cas $a_{n+4} = 3$.

D'autre part, l'inégalité $z_{n+2} t_{n+2} > \frac{7}{20} (x_{n+2} - y_{n+2})$ s'écrit, d'après le lemme 1 et l'inégalité $-y_{n+1} > \frac{4}{31}$:

$$\frac{20}{7} z_{n+2} > \frac{x_{n+2}(1 - y_{n+1}) + 1}{t_{n+1} - y_{n+1}} > \frac{x_{n+2}(1 - y_{n+1}) + 1}{1 + y_{n+1}} > \frac{35x_{n+2} + 31}{27},$$

c'est-à-dire

$$(16.1) \quad 540 z_{n+2} > 245 x_{n+2} + 217.$$

Or, si $a_{n+4} = 4$, les formules (2.6) donnent

$$z_{n+2} = \frac{6x_{n+5} + 2 - z_{n+5}}{5x_{n+5} + 1}, \quad x_{n+2} = \frac{9x_{n+5} + 2}{5x_{n+5} + 1}$$

et (16.1) entraîne

$$(16.2) \quad 540 z_{n+5} < 373 - 50 x_{n+5}.$$

Si $a_{n+4} = 7$, les formules (2.6) donnent

$$z_{n+2} = \frac{10x_{n+5} + 2 - z_{n+5}}{8x_{n+5} + 1}, \quad x_{n+2} = \frac{15x_{n+5} + 2}{8x_{n+5} + 1}$$

et (16.1) entraîne

$$(16.3) \quad 540 z_{n+5} < 373 - 11 x_{n+5}$$

qui est entraînée aussi par (16.2).

Or, que $a_{n+4} = 4$ ou 7 , on a dans les deux cas $t_{n+5} < \frac{3}{4}$ et $-y_{n+5} > \frac{1}{8}$ de sorte que l'inégalité $z_{n+5} t_{n+5} > \frac{7}{20} (x_{n+5} - y_{n+5})$ entraîne

$$(16.4) \quad 120 z_{n+5} > 56 x_{n+5} + 7.$$

En comparant (16.3) et (16.4) on tire $x_{n+5} < \frac{683}{526}$, d'où $a_{n+5} = 1$, et $x_{n+6} > \frac{526}{157} > 3$, ce qui contredit le lemme 13. Donc les deux cas $a_{n+4} = 4$ ou 7 sont aussi à écarter, et l'on peut énoncer :

LEMME 14 :

$$a_n \leq 4.$$

17. ÉTUDE DE $a_n = 3$. — $a_n = 3$ entraîne $c_n = 2$, et (lemme 13) $-y_n < \frac{3}{4}$, d'où $-y_{n+1} > \frac{4}{15}$, avec $a_{n+1} = a_{n+2} = a_{n+3} = 1$. D'après le lemme 14, on a $a_{n+4} = 1, 2, 3$ ou 4 . Étudions successivement ces différents cas.

L'inégalité $z_{n+2} t_{n+2} > \frac{7}{20} (x_{n+2} - y_{n+2})$ entraîne, en tenant compte du lemme 1,

$$\frac{20}{7} z_{n+2} > \frac{x_{n+2}(1 - y_{n+1}) + 1}{t_{n+1} - y_{n+1}} > x_{n+2}(1 - y_{n+1}) + 1 > \frac{19x_{n+2} + 15}{15},$$

c'est-à-dire

$$(17.1) \quad 300 z_{n+2} > 133 x_{n+2} + 105.$$

Si $a_{n+4} = 1$, les formules (2.6) donnent

$$z_{n+2} = \frac{2x_{n+5} + 2 - z_{n+5}}{2x_{n+5} + 1}, \quad x_{n+2} = \frac{3x_{n+5} + 2}{2x_{n+5} + 1}$$

et (17.1) entraîne

$$(17.2) \quad 229 > 300 z_{n+5} + 9 x_{n+5}.$$

D'autre part, on a

$$-y_{n+5} = \frac{2 - y_{n+2}}{3 - 2y_{n+2}} > \frac{3}{5};$$

d'où

$$z_{n+5} > z_{n+5} t_{n+5} > \frac{7}{20} (x_{n+5} - y_{n+5}) > \frac{7}{20} \left(x_{n+5} + \frac{3}{5} \right),$$

c'est-à-dire

$$(17.3) \quad 100 z_{n+5} > 35 x_{n+5} + 21.$$

En comparant (17.2) et (17.3), on tire

$$x_{n+5} < \frac{83}{57}, \quad \text{d'où } a_{n+5} = 1 \quad \text{et} \quad x_{n+6} > \frac{57}{26} > 2, \quad \text{d'où } a_{n+6} = 2, 3 \text{ ou } 4;$$

— si $a_{n+6} = 2$, on a

$$z_{n+5} = \frac{z_{n+7} + 2x_{n+7}}{2x_{n+7} + 1}, \quad x_{n+5} = \frac{3x_{n+7} + 1}{2x_{n+7} + 1}$$

et (17.2) entraîne

$$(17.4) \quad 220 > 300 z_{n+7} + 169 x_{n+7};$$

— si $a_{n+6} = 4$, on a

$$z_{n+5} = \frac{3x_{n+7} + z_{n+7}}{4x_{n+7} + 1}, \quad x_{n+5} = \frac{5x_{n+7} + 1}{4x_{n+7} + 1}$$

et (17.2) entraîne

$$(17.5) \quad 220 > 300 z_{n+7} + 29 x_{n+7}.$$

De plus, dans les deux cas, les inégalités $-y_{n+7} > \frac{1}{5}$ et $z_{n+7} t_{n+7} > \frac{7}{20} (x_{n+7} - y_{n+7})$ donnent

$$(17.6) \quad 100 z_{n+7} > 35 x_{n+7} + 7,$$

d'où, en comparant avec (17.4) :

$$x_{n+7} < \frac{199}{274} < 1, \quad \text{ce qui est contradictoire.}$$

et en comparant avec (17.5) :

$$x_{n+7} < \frac{199}{134}, \quad \text{d'où } a_{n+7} = 1 \quad \text{et} \quad x_{n+8} > \frac{134}{65} > 2,$$

ce qui contredit le lemme 13.

Donc, si $a_{n+4} = 1$, on a $a_{n+5} = 1$ et $a_{n+6} = 3$.

Si $a_{n+4} = 2$, les formules (2.6) donnent

$$z_{n+2} = \frac{3x_{n+5} + 2 - z_{n+5}}{3x_{n+5} + 1}, \quad x_{n+2} = \frac{5x_{n+5} + 2}{3x_{n+5} + 1}$$

et (17.1) entraîne

$$(17.7) \quad 229 > 300z_{n+5} + 80x_{n+5}.$$

D'autre part, les inégalités $-y_{n+5} > \frac{1}{3}$ et $z_{n+5}t_{n+5} > \frac{7}{20}(x_{n+5} - y_{n+5})$ entraînent

$$(17.8) \quad 60z_{n+5} > 21x_{n+5} + 7,$$

d'où en comparant (17.7) et (17.8) :

$$x_{n+5} < \frac{194}{185}, \quad \text{d'où } x_{n+6} > \frac{185}{9} > 20,$$

ce qui contredit le lemme 5 et exclut ce cas.

Si $a_{n+4} = 3$, on a, en tenant compte de $-y_{n+1} > \frac{4}{15}$ et du lemme 1,

$$t_{n+5} = \frac{t_{n+1} + 7 - 5y_{n+1}}{11 - 7y_{n+1}} < \frac{8 - 3y_{n+1}}{11 - 7y_{n+1}} < \frac{136}{193} < \frac{67}{95} \quad \text{et} \quad -y_{n+5} = \frac{3 - 2y_{n+1}}{11 - 7y_{n+1}} > \frac{53}{193} > \frac{26}{95},$$

ce qui contredit le lemme 2, et exclut ce cas.

En résumé :

LEMME 15 : *$a_n = 3$ ne peut intervenir qu'immédiatement suivi de l'une des séquences 1 1 1 4 ou 1 1 1 1 3.*

18. ÉTUDE DE $a_n = 4$. — $a_n = 4$ entraîne $c_n = 2$, et (lemme 13) $-y_n < \frac{3}{4}$, d'où $-y_{n+1} > \frac{4}{19}$, avec $a_{n+1} = a_{n+2} = a_{n+3} = 1$. D'après le lemme 14, on a $a_{n+4} = 1, 2, 3$ ou 4 . Laisant provisoirement de côté les éventualités $a_{n+4} = 3$ ou 4 , étudions les deux autres.

L'inégalité $z_{n+2}t_{n+2} > \frac{7}{20}(x_{n+2} - y_{n+2})$ entraîne, en tenant compte du lemme 1 :

$$\frac{20}{7}z_{n+2} > \frac{x_{n+2}(1 - y_{n+1}) + 1}{t_{n+1} - y_{n+1}} > x_{n+2}(1 - y_{n+1}) + 1 > \frac{23x_{n+2} + 19}{19},$$

c'est-à-dire

$$(18.1) \quad 380z_{n+2} > 161x_{n+2} + 133.$$

Si $a_{n+4} = 2$, les formules (2.6) donnent

$$z_{n+2} = \frac{3x_{n+5} + 2 - z_{n+5}}{3x_{n+5} + 1}, \quad x_{n+2} = \frac{5x_{n+5} + 2}{3x_{n+5} + 1},$$

et (18.1) entraîne

$$(18.2) \quad 305 > 380 z_{n+5} + 64 x_{n+5}.$$

D'autre part, les inégalités $-y_{n+5} > \frac{1}{3}$ et $z_{n+5} t_{n+5} > \frac{7}{20} (x_{n+5} - y_{n+5})$ entraînent encore (17.8), d'où, en comparant avec (18.2) :

$$x_{n+5} < \frac{782}{591}, \quad \text{d'où} \quad a_{n+5} = 1 \quad \text{et} \quad x_{n+6} > \frac{591}{191} > 3,$$

donc $a_{n+6} = 3$ ou 4 ;

— si $a_{n+6} = 3$, les formules (2.6) donnent

$$z_{n+5} = \frac{2x_{n+7} + z_{n+7}}{3x_{n+7} + 1}, \quad x_{n+5} = \frac{4x_{n+7} + 1}{3x_{n+7} + 1}$$

et (18.2) entraîne

$$(18.3) \quad 241 > 380 z_{n+7} + 101 x_{n+7};$$

— si $a_{n+6} = 4$, les formules (2.6) donnent

$$z_{n+5} = \frac{3x_{n+7} + z_{n+7}}{4x_{n+7} + 1}, \quad x_{n+5} = \frac{5x_{n+7} + 1}{4x_{n+7} + 1}$$

et (18.2) entraîne

$$(18.4) \quad 241 > 380 z_{n+7} + 240 x_{n+7}.$$

Or (18.4) implique (18.3); de plus, dans les deux cas, les inégalités $-y_{n+7} > \frac{1}{5}$ et $z_{n+7} t_{n+7} > \frac{7}{20} (x_{n+7} - y_{n+7})$ impliquent (17.6) d'où, en comparant avec (18.3)

$$x_{n+7} < \frac{536}{585} < 1, \quad \text{ce qui est contradictoire.}$$

Donc a_{n+4} ne peut être égal à 2.

Si $a_{n+4} = 1$, les formules (2.6) donnent

$$z_{n+2} = \frac{2x_{n+5} + 2 - z_{n+5}}{2x_{n+5} + 1}, \quad x_{n+2} = \frac{3x_{n+5} + 2}{2x_{n+5} + 1}$$

et (18.1) entraîne

$$(18.5) \quad 305 > 380 z_{n+5} - 11 x_{n+5}.$$

D'autre part les inégalités $-y_{n+5} > \frac{1}{2}$ et $z_{n+5} t_{n+5} > \frac{7}{20} (x_{n+5} - y_{n+5})$ entraînent

$$(18.6) \quad 40 z_{n+5} > 14 z_{n+5} + 7;$$

d'où, en comparant avec (18.5)

$$x_{n+5} < \frac{477}{244} < 2, \quad \text{donc } a_{n+5} = 1.$$

Quatre cas sont alors possibles : $a_{n+6} = 4, 3, 2$ ou 1 . Laisant provisoirement de côté les deux premiers, étudions les deux autres.

— Si $a_{n+6} = 2$, on a

$$z_{n+5} = \frac{2x_{n+7} + z_{n+7}}{2x_{n+7} + 1}, \quad x_{n+5} = \frac{3x_{n+7} + 1}{2x_{n+7} + 1}$$

et (18.5) entraîne

$$(18.7) \quad 316 > 380z_{n+1} + 117x_{n+7}.$$

De plus les inégalités $-y_{n+7} > \frac{1}{3}$ et $z_{n+7}t_{n+7} > \frac{7}{20}(x_{n+7} - y_{n+7})$ entraînent

$$(18.8) \quad 60z_{n+7} > 21x_{n+7} + 7,$$

d'où, en comparant avec (18.7)

$$x_{n+6} < \frac{163}{150}, \quad \text{d'où } x_{n+7} > \frac{150}{13} > 11,$$

ce qui est exclu et écarte le cas $a_{n+6} = 2$.

— Si $a_{n+6} = 1$, on a

$$z_{n+5} = \frac{x_{n+7} + z_{n+7}}{x_{n+7} + 1}, \quad x_{n+5} = \frac{2x_{n+7} + 1}{x_{n+7} + 1},$$

et (18.5) entraîne

$$(18.9) \quad 316 > 380z_{n+7} + 53x_{n+7}.$$

D'autre part, (18.6) est valable ici après remplacement de l'indice $n+5$ par l'indice $n+7$, d'où, en comparant avec (18.9)

$$x_{n+7} < \frac{499}{372}, \quad \text{d'où } a_{n+7} = 1 \quad \text{et} \quad x_{n+8} > \frac{372}{127} > 2, \quad \text{d'où } a_{n+8} = 2, 3 \text{ ou } 4.$$

Distinguons donc encore trois cas :

— si $a_{n+8} = 2$, on a

$$z_{n+7} = \frac{2x_{n+9} + z_{n+9}}{2x_{n+9} + 1}, \quad x_{n+7} = \frac{3x_{n+9} + 1}{2x_{n+9} + 1},$$

et (18.9) entraîne

$$263 > 380z_{n+9} + 287x_{n+9},$$

ce qui contredit $x_{n+9} > 1$ (car $z_{n+9} > 0$) et est donc contradictoire;

— si $a_{n+8} = 3$, on a

$$z_{n+7} = \frac{2x_{n+9} + z_{n+9}}{3x_{n+9} + 1}, \quad x_{n+7} = \frac{4x_{n+9} + 1}{3x_{n+9} + 1}$$

et (18.9) entraîne

$$(18.10) \quad 263 > 380z_{n+9} + 24x_{n+9};$$

d'autre part les inégalités $-y_{n+9} > \frac{1}{4}$ et $z_{n+9}t_{n+9} > \frac{7}{20}(x_{n+9} - y_{n+9})$ entraînent

$$80z_{n+9} > 28x_{n+9} + 7,$$

d'où, en comparant avec (18.10)

$$x_{n+9} < \frac{919}{628}, \quad \text{d'où} \quad x_{n+10} > \frac{628}{291} > 2,$$

ce qui contredit le lemme 13 et est donc exclu;

— si $a_{n+8} = 4$, on a

$$z_{n+7} = \frac{3x_{n+9} + z_{n+9}}{4x_{n+9} + 1}, \quad x_{n+7} = \frac{5x_{n+9} + 1}{4x_{n+9} + 1},$$

et (18.9) entraîne

$$263 > 380z_{n+9} + 141x_{n+9};$$

mais comme l'inégalité $z_{n+9}t_{n+9} > \frac{7}{20}(x_{n+9} - y_{n+9})$ entraîne $z_{n+9} > \frac{7}{20}x_{n+9}$, on en déduit

$$x_{n+9} < \frac{263}{274} < 1$$

ce qui est contradictoire.

Donc, en rassemblant ces résultats, on voit que le cas $a_{n+6} = 1$ est lui aussi à écarter, et l'on peut énoncer :

LEMME 16 : $a_n = 4$ ne peut intervenir qu'immédiatement suivi de l'une des séquences

$$\text{I I I } 4, \quad \text{I I I } 3, \quad \text{I I I I I } 4 \quad \text{ou} \quad \text{I I I I I } 3.$$

En rapprochant ce lemme du lemme 15, on voit que (pour n assez grand) l'hypothèse $a_n = 3$ ou 4 entraîne pour tout $n' \geq n$, $a_{n'} = 1, 3$ ou 4 , donc en particulier $a_{n'} \neq 2$. Or le lemme 14, joint au corollaire du lemme 7, entraîne $\overline{\lim}_n a_n = 3$ ou 4 . Par suite, on a bien $a_n \neq 2$ pour tout n assez grand, et l'on peut énoncer :

LEMME 17. — Pour tout n assez grand, on a $a_n = 1, 3$ ou 4 , l'éventualité $a_n = 3$ ou 4 intervenant une infinité de fois.

19. EXCLUSION DES SÉQUENCES 4 1 1 1 3 ET 3 1 1 1 1 3. — Il résulte des lemmes 15 et 16 que la séquence 4 1 1 1 3 ne peut intervenir que comme partie de l'une ou de l'autre des deux séquences

$$1\ 1\ 1\ 4\ 1\ 1\ 1\ 3\ 1\ 1\ 1\ 4 \quad \text{ou} \quad 1\ 1\ 1\ 4\ 1\ 1\ 1\ 3\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 3.$$

Soit n le rang du cinquième terme de chacune de ces séquences. Dans les deux cas, on a $-y_n > \frac{3}{14}$ et (lemme 4) $t_n - y_n < 1$. Par suite

$$t_{n+4} = \frac{t_n + 7 - 5y_n}{11 - 7y_n} < \frac{124}{175}, \quad -y_{n+4} = \frac{3 - 2y_n}{11 - 7y_n} > \frac{48}{175},$$

$$t_{n+4} - y_{n+4} = \frac{t_n + 10 - 7y_n}{11 - 7y_n} < \frac{172}{175}.$$

L'inégalité I_{n+4} entraîne donc

$$x_{n+4} > -\frac{48}{175} + \frac{20 \cdot 124 \cdot 48 \cdot 172}{175(1240 \cdot 48 + 15 \cdot 296)} = \frac{29\ 008}{18\ 655},$$

d'où

$$x_{n+5} < \frac{18\ 655}{10\ 353}, \quad x_{n+6} > \frac{10\ 353}{8\ 302} \quad \text{et} \quad x_{n+7} < \frac{8\ 302}{2\ 051}.$$

Si $a_{n+7} = 4$, on en déduit $x_{n+8} > \frac{2\ 051}{98} > 20$ ce qui est exclu, ainsi, par suite, que la première des deux séquences en question.

L'inégalité J_{n+4} entraîne de son côté

$$x_{n+4} > -\frac{48}{175} + \frac{20 \cdot 172 \cdot 347}{7 \cdot 175 \cdot 519} = \frac{1\ 019\ 296}{635\ 775},$$

d'où

$$x_{n+5} > \frac{635\ 775}{383\ 521}, \quad x_{n+6} < \frac{383\ 521}{252\ 254} \quad \text{et} \quad x_{n+7} > \frac{252\ 254}{131\ 267}.$$

Si $a_{n+7} = 1$ on en déduit

$$x_{n+8} < \frac{131\ 267}{120\ 987} \quad \text{et} \quad x_{n+9} > \frac{120\ 987}{10\ 280} > 11$$

ce qui est exclu, ainsi, par suite, que la seconde des séquences en question.

D'où

LEMME 18. — *La séquence 4 1 1 1 3 est exclue.*

D'après les lemmes 15 à 18, la séquence 3 1 1 1 1 1 3 ne peut intervenir que comme partie de l'une ou l'autre des séquences

$$3\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 3\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 3 \quad \text{ou} \quad 4\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 3\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 3.$$

Désignons par $n-7$ le rang du premier terme de chacune de ces deux séquences. On a, dans les deux cas :

$$-y_{n-6} > \frac{1}{5}, \quad t_{n-6} - y_{n-6} < 1$$

et

$$t_{n+1} = \frac{t_{n-6} + 28 - 18y_{n-6}}{37 - 23y_{n-6}}, \quad -y_{n+1} = \frac{29 - 18y_{n-6}}{37 - 23y_{n-6}}.$$

L'inégalité

$$z_{n+1}t_{n+1} > \frac{7}{20}(x_{n+1} - y_{n+1})$$

s'écrit donc

$$\frac{20}{7}z_{n+1} > \frac{(37 - 23y_{n-6})x_{n+1} + 29 - 18y_{n-6}}{t_{n-6} + 28 - 18y_{n-6}} > \frac{(37 - 23y_{n-6})x_{n+1} + 29 - 18y_{n-6}}{29 - 17y_{n-6}}.$$

Cette dernière fonction homographique de $-y_{n-6}$ est croissante, car son déterminant est $38x_{n+1} + 29 > 0$; elle est donc supérieure à l'expression obtenue en remplaçant $-y_{n-6}$ par $\frac{1}{5}$; d'où l'inégalité

$$(19.1) \quad 3240z_{n+1} > 1456x_{n+1} + 1141.$$

Or les formules 2.6 donnent

$$z_{n+1} = \frac{12x_{n+6} + 4 - z_{n+6}}{11x_{n+6} + 3}, \quad x_{n+1} = \frac{18x_{n+6} + 5}{11x_{n+6} + 3}.$$

Donc (19.1) entraîne

$$(19.2) \quad 2257 > 3240z_{n+6} - 121x_{n+6}.$$

Or les inégalités $t_{n+6} < \frac{3}{4}$ et $-y_{n+6} > \frac{1}{4}$, entraînées par $a_{n+3} = 3$, donnent, avec $z_{n+6}t_{n+6} > \frac{7}{20}(x_{n+6} - y_{n+6})$:

$$(19.3) \quad 60z_{n+6} > 28x_{n+6} + 7,$$

d'où, en comparant (19.2) et (19.3):

$$x_{n+6} < \frac{1879}{1391}, \quad \text{d'où} \quad x_{n+7} > \frac{1391}{488} > 2,$$

ce qui contredit le lemme 13.

Donc

LEMME 19. — *La séquence 3 1 1 1 1 1 3 est exclue.*

Désignons par A, B, C, les séquences respectives :

	A.	B.	C.
a.....	4 1 1 1	4 1 1 1 1 1	3 1 1 1
b.....	2 0 0 0	2 0 0 0 0 0	1 0 0 0

Les lemmes 15 à 19 permettent d'énoncer :

PROPOSITION 9. — *Les seuls couples (ξ, η) pour lesquels on puisse avoir $c(\xi, \eta) < \frac{20}{7}$ sont ceux dont le développement est exclusivement constitué, à partir d'un certain rang, par les séquences A, B, C la séquence C devant être, en outre, immédiatement précédée de B.*

20. PREMIÈRE ÉTUDE DES COMBINAISONS DES SÉQUENCES A, B, C. — Nous n'essaierons pas d'obtenir des résultats plus détaillés relatifs au développement des couples (ξ, η) astreints à la seule condition $c(\xi, \eta) < \frac{20}{7}$. Pour poursuivre l'étude des petites valeurs de $c(\xi, \eta)$, nous compléterons d'abord la proposition 9 par une autre relative aux couples (ξ, η) soumis à la condition plus restrictive (car $\frac{71}{25} < \frac{20}{7}$)

$$(20.1) \quad c(\xi, \eta) < \frac{71}{25}$$

qui permet de substituer aux inégalités (15.1) les inégalités plus fortes

$$(20.2) \quad z_n t_n > \frac{25}{71} (x_n - y_n), \quad (x_n - z_n) (t_n - y_n) > \frac{25}{71} (x_n - y_n)$$

valables, elles aussi, à partir d'un certain rang, ce qui sera de nouveau sous-entendu.

Montrons que la condition (20.1) impose aux développements correspondants, outre bien entendu les conditions formulées dans la proposition 9, de ne plus contenir les séquences ABA, ABB, CBA et CBB.

D'après la proposition 9, ces séquences ne peuvent intervenir que comme partie de la séquence

$$I I I a I I I 4 I I I I I 4 I I I, \quad \text{où } a = 3 \text{ ou } 4.$$

Désignons par $n - 5$ le rang de l'entier a en question; on a, dans les deux cas

$$-y_{n-4} > \frac{3}{14}, \quad t_{n-4} - y_{n-4} < 1$$

et, d'après les formules (2.6)

$$t_{n+1} = \frac{t_{n-4} + 13 - 9y_{n-4}}{17 - 11y_{n-4}}, \quad -y_{n+1} = \frac{14 - 9y_{n-4}}{17 - 11y_{n-4}}.$$

L'inégalité

$$z_{n+1} t_{n+1} > \frac{25}{71} (x_{n+1} - y_{n+1})$$

entraîne donc

$$\frac{71}{25} z_{n+1} > \frac{(17 - 11y_{n-4})x_{n+1} + 14 - 9y_{n-4}}{t_{n-4} + 13 - 9y_{n-4}} > \frac{(17 - 11y_{n-4})x_{n+1} + 14 - 9y_{n-4}}{14 - 8y_{n-4}}$$



Cette dernière fonction homographique de $-y_{n-4}$, de discriminant

$$18x_{n+1} + 14 > 0,$$

est supérieure à l'expression obtenue en remplaçant $-y_{n-4}$ par $\frac{3}{14}$, d'où l'inégalité

$$(20.3) \quad 3124z_{n+1} > 1355x_{n+1} + 1115.$$

Or

$$z_{n+1} = \frac{33x_{n+8} + 19 - z_{n+8}}{31x_{n+8} + 17}, \quad x_{n+1} = \frac{51x_{n+8} + 28}{31x_{n+8} + 17};$$

donc (20.3) entraîne

$$(20.4) \quad 2461 > 3124z_{n+8} + 578x_{n+8}.$$

Or $-y_{n+8} > \frac{1}{2}$; donc l'inégalité $z_{n+8}t_{n+8} > \frac{25}{71}(x_{n+8} - y_{n+8})$ donne

$$(20.5) \quad 142z_{n+8} > 50x_{n+8} + 25.$$

En comparant (20.5) et (20.4) on obtient

$$x_{n+8} < \frac{1911}{1678}, \quad \text{d'où} \quad x_{n+8} > \frac{1678}{233} > 7$$

ce qui est exclu.

Pour les couples (ξ, η) satisfaisant à (20.1), les séquences ABA, ABB, CBA et CBB sont donc exclues; c'est dire que les séquences AB et CB ne peuvent intervenir dans le développement de ces couples qu'immédiatement suivies de C. En tenant compte de la proposition 9, on obtient donc :

PROPOSITION 10. — *Les seuls couples (ξ, η) pour lesquels on puisse avoir $c(\xi, \eta) < \frac{71}{25}$ sont ceux dont le développement est exclusivement constitué à partir d'un certain rang, par la répétition indéfinie de la séquence A, ou la répétition indéfinie de la séquence B, ou la répétition indéfinie de la séquence BC, ou enfin la combinaison des séquences A et BC.*

III. — Détermination des valeurs de $c(\xi, \eta)$ inférieures à γ .

21. Avant d'aborder l'étude des couples (ξ, η) concernés par la proposition 10, établissons quelques formules, conséquences des formules (2.6). Remarquons d'abord que, d'après (2.6), on a

$$(21.1) \quad z_n = x_n - b_n - \frac{z_{n+1}}{x_{n+1}} = a_n - b_n - \frac{z_{n+1} - 1}{x_{n+1}} = c_n - \frac{z_{n+1} - 1}{x_{n+1}}.$$

Supposons maintenant qu'on ait $c_n = c_{n+1} = \dots = c_{n+k} = 1$; on en déduit

$$z_n - 1 = -\frac{z_{n+1} - 1}{x_{n+1}}, \quad \text{d'où} \quad z_n - 1 = (-1)^{k+1} \frac{z_{n+k+1} - 1}{x_{n+1} \dots x_{n+k+1}}.$$

D'autre part, en posant $x_n = \frac{P_k x_{n+k+1} + P_{k-1}}{Q_k x_{n+k+1} + Q_{k-1}}$, où $\frac{P_k}{Q_k}$ et $\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}$ sont les $k^{\text{ième}}$ et $(k-1)^{\text{ième}}$ réduites du développement de x_n en fraction continue, on a

$$x_{n+1} \dots x_{n+k+1} = Q_k x_{n+k+1} + Q_{k-1},$$

d'où

$$(21.2) \quad z_n - 1 = (-1)^{k+1} \frac{z_{n+k+1} - 1}{Q_k x_{n+k+1} + Q_{k-1}}.$$

Dans les développements que nous envisageons désormais, qui sont exclusivement constitués du couple $(a_n, b_n) = (1, 0)$ répété trois ou cinq fois consécutives, et des couples $(3, 1)$ et $(4, 2)$, l'égalité $c_n = 2$ caractérise ces deux derniers, tandis que $c_n = 1$ caractérise le premier. D'après (21.1) et (21.2), on aura donc :

— si $c_n = 2$, avec $c_{n+1} = c_{n+2} = c_{n+3} = 1$:

$$(21.3) \quad z_n - 1 = 1 + \frac{z_{n+4} - 1}{3x_{n+4} + 2};$$

— si en outre $c_{n+4} = c_{n+5} = 1$:

$$(21.4) \quad z_n - 1 = 1 + \frac{z_{n+6} - 1}{8x_{n+6} + 5}.$$

22. ÉTUDE DES DÉVELOPPEMENTS DE PÉRIODE A. — Soit (x_0, z_0) le couple dont le développement admet, dès son premier terme, la période A. On a, d'après les formules classiques du développement en fraction continue et (21.3)

$$x_0 = (4 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad x_4) = \frac{14x_4 + 9}{3x_4 + 2}, \quad z_0 = 2 + \frac{z_4 - 1}{3x_4 + 2}.$$

De $x_4 = x_0$ et $z_4 = z_0$, avec $x_0 > 1$, on en déduit

$$x_0 = 2 + \sqrt{7}, \quad z_0 = \frac{21 + 3\sqrt{7}}{14},$$

qui permettent aisément le calcul de x_1, x_2, x_3 et z_1, z_2, z_3 .

Les nombres x_n et z_n appartiennent tous au corps de $\sqrt{7}$; ils ne prennent respectivement que quatre valeurs distinctes, correspondant à $n = 0, 1, 2$ et 3 , en raison de leur périodicité. Les nombres y_n tendent respectivement, selon leur indice, vers les conjugués y'_n des x_n ; et, par suite, les t_n tendent vers les conjugués t'_n des z_n . Donc $c(x_0, z_0)$ est égal à la plus grande des huit valeurs que prennent $\frac{x_n - y'_n}{z_n t'_n}$ (quatre valeurs) et $\frac{x_n - y'_n}{(x_n - z_n)(t'_n - y'_n)}$ (quatre valeurs). Or,

parmi ces huit valeurs, deux seulement sont distinctes, et égales respectivement à $\frac{28\sqrt{7}}{27}$ et $\frac{28\sqrt{7}}{29}$. Donc

$$c(x_0, z_0) = \frac{28\sqrt{7}}{27} = 2,743\dots$$

On constate que cette valeur est effectivement inférieure à $\frac{71}{25}$.

Pour représenter la classe des nombres équivalents à (x_0, z_0) nous remarquons que $(x_0, z_0) \sim \left(\sqrt{7}, \frac{3\sqrt{7}+7}{14}\right)$ et que ces deux couples sont encore équivalents à (ξ, η) avec

$$\xi = \frac{\sqrt{7}+2}{3\sqrt{7}+7} = \frac{7-\sqrt{7}}{14}, \quad \eta = \frac{3\sqrt{7}+7}{14} \cdot \frac{1}{3\sqrt{7}+7} = \frac{1}{14},$$

où η a la forme la plus simple compatible avec cette équivalence. D'où

PROPOSITION 11. — *Les couples (ξ, η) dont le développement admet, à partir d'un certain rang, la période A, sont tels que*

$$(\xi, \eta) \sim \left(\frac{7-\sqrt{7}}{14}, \frac{1}{14}\right), \quad \text{avec } c(\xi, \eta) = \frac{28\sqrt{7}}{27} \quad (*).$$

23. ÉTUDE DES DÉVELOPPEMENTS DE PÉRIODE B. — Soit (x_0, z_0) le couple dont le développement admet la période B, d'où

$$x_0 = (1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ x_6) = \frac{37x_6 + 23}{8x_6 + 5},$$

$$z_0 = 2 + \frac{z_6 - 1}{8x_6 + 5} \quad [\text{formule (21.4)}],$$

c'est-à-dire, puisque $x_0 = x_6$ et $z_0 = z_6$:

$$x_0 = 2 + \frac{\sqrt{110}}{4}, \quad z_0 = \frac{30 + \sqrt{110}}{20}.$$

Un raisonnement analogue à celui du paragraphe précédent montre que $c(x_0, z_0)$ est égal à la plus grande des douze valeurs que prennent les nombres (du corps de $\sqrt{110}$) $\frac{x_n - y'_n}{z_n t'_n}$ (six valeurs) et $\frac{x_n - y'_n}{(x_n - z_n)(t'_n - y'_n)}$ (six valeurs). Ces douze valeurs se réduisent à six valeurs distinctes dont les inverses, divisés par

(*) Ces couples (ξ, η) sont ceux envisagés par Cassels (*loc. cit.*), qui prouve que cette valeur de $c(\xi, \eta)$ est la seule qui soit inférieure à $\frac{4}{11}$, pourvu que η ne soit pas de la forme $M\xi + N$, avec M, N entiers.

100√110, valent respectivement 370, 395, 405, 416, 430 et 470. On a donc

$$c(x_0, z_0) = \frac{10\sqrt{110}}{37} = 2,834\dots,$$

ce qui est encore inférieur à $\frac{71}{25}$.

Pour représenter la classe des nombres équivalents à (x_0, z_0) nous remarquerons que $(x_0, z_0) \sim \left(\frac{\sqrt{110}}{4}, \frac{10 + \sqrt{110}}{20}\right) \sim (\xi, \eta)$ avec

$$\xi = \frac{\frac{1}{4}\sqrt{110} + 2}{\frac{1}{2}\sqrt{110} + 5} = \frac{15 - \sqrt{110}}{10}, \quad \eta = \frac{10 + \sqrt{110}}{20} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{110} + 5} = \frac{1}{10},$$

où η a la forme la plus simple compatible avec cette équivalence. D'où :

PROPOSITION 12. — *Les couples (ξ, η) dont le développement admet, à partir d'un certain rang, la période B, sont tels que*

$$(\xi, \eta) \sim \left(\frac{15 - \sqrt{110}}{10}, \frac{1}{10}\right), \quad \text{avec } c(\xi, \eta) = \frac{10\sqrt{110}}{37} \quad (^5).$$

24. ÉTUDE DES DÉVELOPPEMENTS DE PÉRIODE BC. — Soit (x_0, z_0) le couple dont le développement admet la période BC, d'où

$$(24.1) \quad x_0 = (4 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 3 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad x_0) = \frac{476x_0 + 305}{103x_0 + 66},$$

$$z_0 = 2 + \frac{1}{8x_0 + 5} + \frac{z_0 - 1}{(8x_0 + 5)(3x_0 + 2)} \quad [\text{formules (21.3) et (21.4)}],$$

d'où

$$(24.2) \quad z_0 = 2 + \frac{3x_0 + 2 + z_0 - 1}{103x_0 + 66}.$$

De (24.1) et (24.2) on tire

$$x_0 = \frac{205 + 12\sqrt{510}}{103}, \quad z_0 = \frac{19x_0 + 95}{90}.$$

$c(x_0, z_0)$ est égal à la plus grande des vingt valeurs que prennent $\frac{x_n - y'_n}{z_n t'_n}$ et $\frac{x_n - y'_n}{(x_n - z_n)(t'_n - y'_n)}$. Ces vingt valeurs se réduisent à dix valeurs distinctes, dont les inverses, divisés par $360\sqrt{510}$, sont 2 872, 2 873, 2 888, 2 932, 3 007, 3 112,

(⁵) Ces couples et cette constante sont ceux signalés par G. Poitou et moi-même en 1952, puis dans ma thèse (*loc. cit.*), où il est établi que la valeur en question de $c(\xi, \eta)$ est la plus petite de celles pour lesquelles η est rationnel, non entier, avec un dénominateur au plus égal à 10.

3 247, 3 833, 4 807, 6 247. On a donc

$$c(x_0, z_0) = \frac{360\sqrt{510}}{2\,872} = \frac{45\sqrt{510}}{359} = 2,830\dots,$$

ce qui est aussi inférieur à $\frac{71}{25}$.

Pour représenter la classe des nombres équivalents à (x_0, z_0) nous remarquons que $(x_0, z_0) \sim (x_1, z_1)$, avec

$$x_1 = \frac{69 + 4\sqrt{510}}{99}, \quad z_1 = \frac{9x_1 + 71}{90};$$

on obtient encore un couple équivalent (x, z) en diminuant x_1 et z_1 d'une unité, ce qui donne

$$x = \frac{4\sqrt{510} - 30}{99}, \quad z = \frac{9x - 10}{90}.$$

Enfin, en remarquant que $10 - 9x > 0$, on obtient un couple équivalent (ξ, η) par

$$\xi = \frac{1-x}{10-9x} = \frac{225 - \sqrt{510}}{2\,340}, \quad \eta = \frac{-z}{10-9x} = \frac{1}{90},$$

où η a la forme la plus simple compatible avec cette équivalence. D'où :

PROPOSITION 13. — *Les couples (ξ, η) dont le développement admet, à partir d'un certain rang, la période BC, sont tels que*

$$(\xi, \eta) \sim \left(\frac{225 - \sqrt{510}}{2\,340}, \frac{1}{90} \right), \quad \text{avec } c(\xi, \eta) = \frac{45\sqrt{510}}{359}.$$

25. D'après la proposition 10, tous les couples (ξ, η) tels que $c(\xi, \eta) < \frac{71}{25}$ différents de ceux qui sont concernés par les propositions 11, 12, 13, et où η n'est pas de la forme $M\xi + N$ (M, N entiers), ont un développement exclusivement constitué des séquences A et BC, où chacune de ces deux séquences, ainsi par suite que la séquence BCA, intervient une infinité de fois. Ce sont ces couples que nous allons désormais étudier exclusivement. Nous désignerons par D leur développement et nous montrerons d'abord que pour eux

$$c(\xi, \eta) = \overline{\lim}_n \frac{x_n - y_n}{z_n t_n},$$

où l'indice n parcourt seulement les valeurs pour lesquelles on a $a_{n-1} = 3$ (deuxième rang de chaque séquence C).

Pour faire cette démonstration, nous allons d'abord donner des encadrements, valables pour n assez grand, pour les valeurs de x_n, y_n, z_n, t_n aux rangs n tels que $a_n \neq 1$.

26. ENCADREMENTS POUR x_n AVEC $a_n = 3$ OU 4. — Soient $x(A)$, $x(B)$, $x(C)$ les valeurs respectives de x_n au rang n du premier terme d'une séquence A, B ou C d'un développement D.

Comme, dans un développement D, la séquence A est suivie de A ou de B, on a

$$x(A) = (4 \text{ I I I } 4 \text{ I I I } x') = 4 + \frac{31x' + 20}{48x' + 31} \quad \text{avec } 1 < x' < 5,$$

d'où

$$4,645 < x(A) < 4,646.$$

Comme une séquence B est suivie de CA ou CB, on a

$$x(B) = (4 \text{ I I I I I } 3 \text{ I I I } x') = 4 + \frac{64x' + 41}{103x' + 66}, \quad \text{avec } 4 < x' < 5,$$

d'où

$$4,621 < x(B) < 4,622.$$

Comme une séquence C est suivie de A ou de B, on a

$$x(C) = (3 \text{ I I I } 4 \text{ I I I } x') = 3 + \frac{31x' + 20}{48x' + 31}, \quad \text{avec } 1 < x' < 5,$$

d'où

$$3,645 < x(C) < 3,646.$$

27. ENCADREMENTS POUR y_n AVEC $a_n = 3$ OU 4. — Soient $y(A)$, $y(B)$, $y(C)$ les valeurs respectives de y_n au rang n suivant immédiatement l'une des séquences A, B, ou C d'un développement D.

Comme la séquence A est précédée de A ou C, on a

$$-y(A) = (0 \text{ I I I } 4 \text{ I I I } x') = \frac{31x' + 20}{48x' + 31}, \quad \text{avec } 3 < x' < 5.$$

d'où

$$0,645 < -y(A) < 0,646.$$

Comme la séquence B est précédée de A ou C, on a

$$-y(B) = (0 \text{ I I I I I } 4 \text{ I I I } x') = \frac{79x' + 51}{127x' + 82}, \quad \text{avec } 3 < x' < 5,$$

d'où

$$0,622 < -y(B) < 0,623.$$

Comme la séquence C est précédée de B, on a

$$-y(C) = (0 \text{ I I I } 3 \text{ I I I I I } x') = \frac{66x' + 41}{103x' + 64}, \quad \text{avec } 4 < x' < 5,$$

d'où

$$0,640 < -y(C) < 0,641.$$

Rassemblons ces résultats :

LEMME 20. — *Dans un développement D, on a*

$$4,645 < x(A) < 4,646, \quad 0,645 < -y(A) < 0,646;$$

$$4,621 < x(B) < 4,622, \quad 0,622 < -y(B) < 0,623;$$

$$3,645 < x(C) < 3,646, \quad 0,640 < -y(C) < 0,641.$$

28. ENCADREMENTS POUR z_n AVEC $a_n = 3$ OU 4. — Soient $z(A)$, $z(B)$, $z(C)$ les valeurs respectives de z_n au rang n du *premier terme* d'une séquence A, B ou C d'un développement D. Les encadrements recherchés seront obtenus en deux étapes.

Première étape. — Les séquences A et C sont suivies de A ou B; d'après la formule (21.3) on a donc

$$z(A) = 2 + \frac{z' - 1}{3x' + 2}, \quad \text{avec } 2 < x' - z' < 3 \quad \text{et} \quad 4 < x' < 5,$$

d'où

$$2 < 2 + \frac{x' - 4}{3x' + 2} < z(A) < 2 + \frac{x' - 3}{3x' + 2} < 2 + \frac{2}{17}.$$

Les mêmes inégalités sont valables pour $z(C)$, d'après (21.3).

La séquence B est suivie de C; d'après la formule (21.4), on a donc

$$z(B) = 2 + \frac{z' - 1}{8x' + 5}, \quad \text{avec } 1 < x' - z' < 2 \quad \text{et} \quad 3 < x' < 4,$$

d'où

$$2 < 2 + \frac{x' - 3}{8x' + 5} < z(B) < 2 + \frac{x' - 2}{8x' + 5} < 2 + \frac{2}{37}.$$

Nous retiendrons seulement le résultat suivant :

LEMME 21 : $z(A)$, $z(B)$ et $z(C)$ sont compris entre 2 et $2 + \frac{2}{17}$.

Deuxième étape. — Si la séquence A est suivie de B, donc de BC, on a, d'après (21.3) et (21.4)

$$z(A) = 2 + \frac{8x' + 5}{127x' + 79} + \frac{z' - 1}{127x' + 79}, \quad \text{avec } 3 < x' < 4 \quad \text{et} \quad 2 < z' < 2 + \frac{2}{17}$$

d'après le lemme 21, d'où

$$\frac{8x' + 6}{127x' + 79} < z(A) - 2 < \frac{8x' + 6 + \frac{2}{17}}{127x' + 79},$$

c'est-à-dire, en tenant compte de la décroissance de ces fonctions homographiques de x' :

$$2,064 < z(A) < 2,066.$$

Si la séquence A est suivie de A, donc de AA ou de AB, on a

$$z(A) = 2 + \frac{3x' + 2 + z' - 1}{48x' + 31}, \quad \text{avec } 4 < x' < 5 \quad \text{et} \quad 2 < z' < 2 + \frac{2}{17} \quad (\text{lemme 21}),$$

d'où

$$\frac{3x' + 3}{48x' + 31} < z(A) - 2 < \frac{3x' + 3 + \frac{2}{17}}{48x' + 31},$$

et par suite

$$2,066 < z(A) < 2,068.$$

A cause de (21.3), $z(C)$ donne lieu aux mêmes inégalités.

La séquence B étant suivie de C, donc de CA ou de CB, on a

$$z(B) = 2 + \frac{3x' + 2 + z' - 1}{103x' + 66}, \quad \text{avec } 4 < x' < 5 \quad \text{et} \quad 2 < z' < 2 + \frac{2}{17} \quad (\text{lemme 21})$$

et par suite

$$2,030 < z(B) < 2,032.$$

Rassemblons ces résultats :

LEMME 22. — *Dans un développement D, on a*

$$2,064 < z(A) < 2,068, \quad 2,030 < z(B) < 2,032, \quad 2,064 < z(C) < 2,068.$$

29. ENCADREMENTS POUR t_n AVEC $a_n = 3$ OU 4 . — Soient $t(A)$, $t(B)$, $t(C)$ les valeurs respectives de t_n au rang n suivant immédiatement l'une des séquences A, B ou C d'un développement D. Les encadrements cherchés seront obtenus en deux étapes, et en utilisant les formules suivantes, analogues à (21.3) et (21.4) :

— Si $c_n = 2$, avec $c_{n+1} = c_{n+2} = c_{n+3} = 1$:

$$t_n - 1 = 1 + \frac{t_{n+4} - 1}{3y_{n+4} + 2},$$

d'où, si $a_n = 4$:

$$(29.1) \quad t_{n+6} = 1 - \frac{2 - t_n}{14 - 3y_n},$$

et si $a_n = 3$:

$$(29.2) \quad t_{n+6} = 1 - \frac{2 - t_n}{11 - 3y_n}.$$

— Si $c_n = 2$, avec $c_{n+1} = c_{n+2} = c_{n+3} = c_{n+4} = c_{n+5} = 1$:

$$t_n - 1 = 1 + \frac{t_{n+6} - 1}{8y_{n+6} + 5},$$

d'où, si $a_n = 4$

$$(29.3) \quad t_{n+6} = 1 - \frac{2 - t_n}{37 - 8y_n}.$$

Première étape. — Les formules (29.1), (29.3) et (29.2) donnent respectivement :

$$t(A) = 1 - \frac{2-t'}{14-3y'}, \quad t(B) = 1 - \frac{2-t'}{37-8y'}, \quad t(C) = 1 - \frac{2-t'}{11-3y'},$$

avec, dans les trois cas, $0 < t' < 1$ et $0 < -y' < 1$, d'où

$$\frac{6}{7} < t(A) < \frac{16}{17}, \quad \frac{35}{37} < t(B) < \frac{44}{45}, \quad \frac{9}{11} < t(C) < \frac{13}{14}.$$

Nous retiendrons seulement le résultat suivant :

LEMME 23 : $t(A)$, $t(B)$, $t(C)$ sont compris entre $\frac{9}{11}$ et 1 (donc entre 0,8 et 1).

Deuxième étape. — Si la séquence A est précédée de A, on a, d'après (29.1)

$$t(A) = 1 - \frac{16-3y'-t'}{223-48y'}, \quad \text{avec } 0,5 < -y' < 1 \quad \text{et} \quad 0,8 < t' < 1 \quad (\text{lemme 23}),$$

d'où

$$0,932 < t(A) < 0,934.$$

Si la séquence A est précédée de C, on a, d'après (29.1) et (29.2)

$$t(A) = 1 - \frac{13-3y'-t'}{175-48y'}, \quad \text{avec } 0,5 < -y' < 1 \quad \text{et} \quad 0,8 < t' < 1,$$

d'où

$$0,931 < t(A) < 0,933.$$

Si la séquence B est précédée de A, on a, d'après (29.1) et (29.3)

$$t(B) = 1 - \frac{16-3y'-t'}{590-127y'}, \quad \text{avec } 0,5 < -y' < 1 \quad \text{et} \quad 0,8 < t' < 1,$$

d'où

$$0,974 < t(B) < 0,975.$$

Si la séquence B est précédée de C, on a, d'après (29.2) et (29.3)

$$t(B) = 1 - \frac{13-3y'-t'}{463-127y'}, \quad \text{avec } 0,5 < -y' < 1 \quad \text{et} \quad \frac{9}{11} < t' < 1,$$

d'où

$$0,974 < t(B) < 0,975.$$

Enfin, la séquence C étant nécessairement précédée de B, on a

$$t(C) = 1 - \frac{39-8y'-t'}{476-103y'}, \quad \text{avec } 0,5 < -y' < 1 \quad \text{et} \quad 0,8 < t' < 1,$$

d'où

$$0,920 < t(C) < 0,921.$$

Rassemblons ces résultats.

LEMME 24. — Dans un développement D, on a

$$0,931 < t(A) < 0,934, \quad 0,974 < t(B) < 0,975, \quad 0,920 < t(C) < 0,921.$$

30. Pour faire la démonstration annoncée au paragraphe 25, nous allons maintenant, à l'aide des lemmes 20, 22 et 24, donner des majorations ou des minorations, selon le cas, des quantités

$$\frac{x_n - y_n}{z_n t_n} \quad \text{et} \quad \frac{x_n - y_n}{(x_n - y_n)(t_n - y_n)}$$

pour les différents rangs d'un développement D.

On abrège les calculs en remarquant d'abord que $a_n = 1$, d'où $b_n = 0$, entraînent

$$(30.1) \quad \frac{x_n - y_n}{(x_n - z_n)(t_n - y_n)} = \frac{x_{n+1} - y_{n+1}}{z_{n+1} t_{n+1}},$$

de sorte qu'il suffit d'étudier $\frac{x_n - y_n}{z_n t_n}$ à tous les rangs n , et $\frac{x_n - y_n}{(x_n - z_n)(t_n - y_n)}$ seulement aux rangs n tels que $a_n \neq 1$.

Étudions séparément les séquences A, B et C d'un développement D. Pour abréger, nous désignerons, dans ce paragraphe et les trois suivants, les quantités x_n, y_n, z_n, t_n respectivement par :

- x, y, z, t pour le premier rang de la séquence envisagée;
- x_k, y_k, z_k, t_k pour le $(k + 1^{\text{ième}})$ rang de cette séquence ($1 \leq k \leq 3$ ou 5);
- x', y', z', t' pour le rang qui suit immédiatement le dernier rang de cette séquence.

31. ÉTUDE DE LA SÉQUENCE A. — La séquence A étant suivie de A ou B et précédée de A ou C, on a

$$\begin{aligned} x &= x(A), & z &= z(A), & y' &= y'(A), & t' &= t(A); \\ x' &= x(A) \text{ ou } x(B), & z' &= z(A) \text{ ou } z(B), & y &= y(A) \text{ ou } y(C), \\ & & t &= t(A) \text{ ou } t(C); \end{aligned}$$

donc, d'après les lemmes 20, 22 et 24 :

$$\begin{aligned} 4,645 < x < 4,646, & \quad 0,640 < y < 0,646, & \quad 2,064 < z < 2,068, & \quad 0,920 < t < 0,934; \\ 4,621 < x' < 4,646, & \quad 0,645 < y' < 0,646, & \quad 2,030 < z' < 2,068, & \quad 0,931 < t' < 0,934. \end{aligned}$$

De ces inégalités on déduit :

$$\begin{aligned} \frac{x - y}{z t} &< \frac{4,65 + 0,65}{2,06 \cdot 0,92} < 2,8, & \quad \frac{x - y}{(x - z)(t - y)} &< \frac{4,65 + 0,65}{2,6 \cdot 1,5} < 2, \\ x_1 &= \frac{3x' + 2}{2x' + 1} < \frac{3 \cdot 4,6 + 2}{2 \cdot 4,6 + 1} < 1,55, & \quad -y_1 &= \frac{1}{4 - y} < \frac{1}{4,6} < 0,22, \\ z_1 &= 1 - \frac{z' - 1}{2x' + 1} > 1 - \frac{1,1}{2 \cdot 4,6 + 1} > 0,89, & \quad t_1 &= \frac{t + 2 - y}{4 - y} > \frac{0,9 + 2 + 0,6}{4,6} > 0,76; \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{x_1 - y_1}{z_1 t_1} < \frac{1,55 + 0,22}{0,89 \cdot 0,76} < 2,62.$$

$$x_2 = \frac{2x' + 1}{x' + 1} < \frac{2,4,65 + 1}{4,65 + 1} < 1,824, \quad -y_2 = \frac{4 - y}{5 - y} < \frac{4,65}{5,65} < 0,824,$$

$$z_2 = 1 + \frac{z' - 1}{x' + 1} > 1 + \frac{1,03}{5,65} > 1,18, \quad t_2 = \frac{t + 3 - y}{5 - y} > \frac{0,92 + 3 + 0,64}{5,64} > 0,808;$$

d'où

$$\frac{x_2 - y_2}{z_2 t_2} < \frac{1,824 + 0,824}{1,18 \cdot 0,808} < 2,8.$$

$$x_3 = 1 + \frac{1}{x'} < 1 + \frac{1}{4,6} < 1,22, \quad -y_3 = \frac{5 - y}{9 - 2y} < \frac{5,6}{10,2} < 0,55,$$

$$z_3 = 1 - \frac{z' - 1}{x'} > 1 - \frac{1,1}{4,6} > 0,76, \quad t_3 = \frac{t + 7 - 2y}{9 - 2y} > \frac{0,9 + 7 + 1,2}{9 + 1,2} > 0,89;$$

d'où

$$\frac{x_3 - y_3}{z_3 t_3} < \frac{1,22 + 0,55}{0,76 \cdot 0,89} < 2,62.$$

En résumé, on peut énoncer :

LEMME 25. — Si n est l'indice d'un terme de la séquence A dans un développement D, on a

$$\frac{x_n - y_n}{z_n t_n} < 2,8 \quad \text{avec, si } a_n = 4, \quad \frac{x_n - y_n}{(x_n - z_n)(t_n - y_n)} < 2.$$

32. ÉTUDE DE LA SÉQUENCE B. — La séquence B étant suivie de C et précédée de A ou C, on a, d'après les lemmes 20, 22 et 24 :

$$\begin{aligned} 4,621 < x < 4,622, & \quad 0,640 < -y < 0,646, \\ 2,030 < z < 2,032, & \quad 0,920 < t < 0,934, \\ 3,645 < x' < 3,646, & \quad 0,622 < -y' < 0,623, \\ 2,064 < z' < 2,068, & \quad 0,974 < t' < 0,975. \end{aligned}$$

De ces inégalités on déduit :

$$\frac{x - y}{zt} < \frac{4,63 + 0,65}{2,03 \cdot 0,92} < 2,83, \quad \frac{x - y}{(x - z)(t - y)} < \frac{4,63 + 0,65}{2,5 \cdot 1,5} < 2.$$

$$x_1 = \frac{8x' + 5}{5x' + 3} < \frac{8,3,6 + 5}{5,3,6 + 3} < 1,61, \quad -y_1 = \frac{1}{4 - y} < \frac{1}{4,6} < 0,22,$$

$$z_1 = 1 - \frac{z' - 1}{5x' + 3} > 1 - \frac{1,1}{5,3,6 + 5} > 0,94, \quad t_1 = \frac{t + 2 - y}{4 - y} > \frac{0,9 + 2 + 0,6}{4,6} > 0,76;$$

d'où

$$\frac{x_1 - y_1}{z_1 t_1} < \frac{1,61 + 0,22}{0,94 \cdot 0,76} < 2,6,$$

$$x_2 = \frac{5x' + 3}{3x' + 2} < \frac{5,3,65 + 3}{3,3,65 + 2} < 1,641, \quad -y_2 = \frac{4 - y}{5 - y} < \frac{4,65}{5,65} < 0,824,$$

$$z_2 = 1 + \frac{z' - 1}{3x' + 2} > 1 + \frac{1,064}{3,3,646 + 2} > 1,082, \quad t_2 = \frac{t + 3 - y}{5 - y} > \frac{0,92 + 3 + 0,64}{5,64} > 0,808,$$

d'où

$$\frac{x_2 - y_2}{z_2 t_2} < \frac{1,641 + 0,824}{1,082 \cdot 0,808} < 2,83.$$

$$x_3 = \frac{3x' + 2}{2x' + 1} < \frac{3 \cdot 3,6 + 2}{2 \cdot 3,6 + 1} < 1,57, \quad -y_3 = \frac{5 - y}{9 - 2y} < \frac{5,6}{10,2} < 0,55,$$

$$z_3 = 1 - \frac{z' - 1}{2x' + 1} > 1 - \frac{1,1}{2 \cdot 3,6 + 1} > 0,86, \quad t_3 = \frac{t + 7 - 2y}{9 - 2y} > \frac{0,9 + 7 + 1,2}{9 + 1,2} > 0,89;$$

d'où

$$\frac{x_3 - y_3}{z_3 t_3} < \frac{1,57 + 0,55}{0,86 \cdot 0,89} < 2,8.$$

$$x_4 = \frac{2x' + 1}{x' + 1} < \frac{2 \cdot 4 + 1}{4 + 1} = 1,8, \quad -y_4 = \frac{9 - 2y}{14 - 3y} < \frac{9 + 2}{14 + 3} < 0,7,$$

$$z_4 = 1 + \frac{z' - 1}{x' + 1} > 1 + \frac{1}{6} > 1,1, \quad t_4 = \frac{t + 12 - 3y}{14 - 3y} > \frac{12,9}{14} > 0,9;$$

d'où

$$\frac{x_4 - y_4}{z_4 t_4} < \frac{1,8 + 0,7}{1,1 \cdot 0,9} < 2,6.$$

$$x_5 = 1 + \frac{1}{x'} < 1 + \frac{1}{3,64} < 1,275, \quad -y_5 = \frac{14 - 3y}{23 - 5y} < \frac{14 + 3 \cdot 0,6}{23 + 5 \cdot 0,6} < 0,608,$$

$$z_5 = 1 - \frac{z' - 1}{x'} > 1 - \frac{1,07}{3,64} > 0,706, \quad t_5 = \frac{t + 21 - 5y}{23 - 5y} > \frac{0,9 + 21 + 3}{23 + 3} > 0,957;$$

d'où

$$\frac{x_5 - y_5}{z_5 t_5} < \frac{1,275 + 0,608}{0,706 \cdot 0,957} < 2,8.$$

En résumé, on peut énoncer :

LEMME 26. — Si n est l'indice d'un terme de la séquence B dans un développement D, on a

$$\frac{x_n - y_n}{z_n t_n} < 2,83, \quad \text{avec, si } a_n = 4, \quad \frac{x_n - y_n}{(x_n - z_n)(t_n - y_n)} < 2.$$

33. ÉTUDE DE LA SÉQUENCE C. — La séquence C est précédée de B et suivie de A ou de B. D'après les lemmes 20, 22 et 24, on a donc :

$$3,645 < x < 3,646, \quad 2,064 < z < 2,068,$$

$$0,622 < -y < 0,623, \quad 0,974 < t < 0,975,$$

$$0,640 < -y' < 0,641, \quad 0,920 < t' < 0,921;$$

avec, si C est suivie de A :

$$4,645 < x' < 4,646, \quad 2,064 < z' < 2,068;$$

et, si C est suivie de B :

$$4,621 < x' < 4,622, \quad 2,030 < z' < 2,032.$$

De ces inégalités on déduit :

— si C est suivie de A :

$$x_1 = \frac{3x' + 2}{2x' + 1} > \frac{3,4,65 + 2}{2,4,65 + 1} > 1,5485, \quad -y_1 = \frac{1}{3-y} > \frac{1}{3,623} > 0,2760,$$

$$z_1 = 1 - \frac{z' - 1}{2x' + 1} < 1 - \frac{1,064}{2,4,646 + 1} < 0,8967,$$

$$t_1 = \frac{t + 1 - y}{3 - y} < \frac{0,975 + 1 + 0,623}{3,623} < 0,7171;$$

d'où

$$\frac{x_1 - y_1}{z_1 t_1} > \frac{1,5485 + 0,2760}{0,8967 \cdot 0,7171} > 2,837;$$

— si C est suivie de B :

$$x_1 = \frac{3x' + 2}{2x' + 1} < \frac{3,4,62 + 2}{2,4,62 + 1} < 1,5489, \quad -y_1 = \frac{1}{3-y} < \frac{1}{3,622} < 0,2761,$$

$$z_1 = 1 - \frac{z' - 1}{2x' + 1} > 1 - \frac{1,032}{2,4,62 + 1} > 0,8992,$$

$$t_1 = \frac{t + 1 - y}{3 - y} > \frac{0,974 + 1 + 0,622}{3,622} > 0,7167;$$

d'où

$$\frac{x_1 - y_1}{z_1 t_1} < \frac{1,5489 + 0,2761}{0,8992 \cdot 0,7167} < 2,833;$$

— dans les deux cas (C suivie de A ou de B) :

$$\frac{x - y}{zt} < \frac{3,7 + 0,7}{2,0,9} < 2,5 \quad \frac{x - y}{(x - z)(t - y)} < \frac{3,7 + 0,7}{1,5,1,6} < 2,$$

$$x_2 = \frac{2x' + 1}{x' + 1} < \frac{2,4,65 + 1}{4,65 + 1} < 1,8231, \quad -y_2 = \frac{3 - y}{4 - y} < \frac{3,623}{4,623} < 0,7841,$$

$$z_2 = 1 + \frac{z' - 1}{x' + 1} > 1 + \frac{1,03}{5,65} > 1,1823, \quad t_2 = \frac{t + 2 - y}{4 - y} > \frac{0,974 + 2 + 0,622}{4,622} > 0,778;$$

d'où

$$\frac{x_2 - y_2}{z_2 t_2} < \frac{1,8231 + 0,7841}{1,1823 \cdot 0,778} < 2,835.$$

$$x_3 = 1 + \frac{1}{x'} < 1 + \frac{1}{3,6} < 1,28, \quad -y_3 = \frac{4 - y}{7 - 2y} < \frac{4,6}{8,2} < 0,57,$$

$$z_3 = 1 - \frac{z' - 1}{x'} > 1 - \frac{1,1}{4,6} > 0,76, \quad t_3 = \frac{t + 5 - 2y}{7 - 2y} > \frac{0,97 + 5 + 1,2}{7 + 1,2} > 0,87;$$

d'où

$$\frac{x_3 - y_3}{z_3 t_3} < \frac{1,28 + 0,57}{0,76 \cdot 0,87} < 2,8.$$

En résumé, on peut énoncer :

LEMME 27. — Si n est l'indice d'un terme de la séquence C dans un développement D, on a

$$\frac{x_n - y_n}{z_n t_n} < 2,835, \quad \text{avec, si } a_n = 3, \quad \frac{x_n - y_n}{(x_n - z_n)(t_n - y_n)} < 2,$$

sauf si C est immédiatement suivie de A, n étant en outre tel que $a_{n-1} = 3$, auquel cas on a

$$\frac{x_n - y_n}{z_n t_n} > 2,837.$$

En rapprochant les lemmes 25, 26, 27, on voit que le programme proposé au début du paragraphe 25 est rempli avec une précision supplémentaire, et l'on peut énoncer, en tenant compte de (30.1) :

PROPOSITION 14. — Pour les couples (ξ, η) dont le développement est du type D, on a

$$c(\xi, \eta) = \lim_n \frac{x_n - y_n}{z_n t_n} \geq 2,837,$$

où l'indice n parcourt seulement les valeurs pour lesquelles on a $a_{n-1} = 3$, la séquence C commençant au rang $n - 1$ étant en outre immédiatement suivie de la séquence A.

En tenant compte de la proposition 14, il résulte des propositions 11, 12 et 13, qui concernent des valeurs de $c(\xi, \eta)$ toutes inférieures à 2,837, et de la proposition 10, que les valeurs de $c(\xi, \eta)$ correspondant aux développements de périodes A, BC, ou B respectivement, sont isolées et sont les trois plus petites valeurs de $c(\xi, \eta)$, pourvu que η ne soit pas de la forme $\eta = M\xi + N$ (M, N entiers). En rapprochant ce résultat de ceux du paragraphe 9, relatifs au cas où $\eta = M\xi + N$, on voit que les parties a, b, c, d et e du théorème initial sont établies, avec la précision supplémentaire suivante, qui sera plus loin incluse dans la partie f du théorème :

PROPOSITION 15. — Les valeurs de $c(\xi, \eta)$ supérieures à $\frac{10\sqrt{110}}{37} = 2,834 \dots$ sont supérieures à 2,837. Si de plus $c(\xi, \eta) < \frac{71}{25} = 2,84$, le développement du couple (ξ, η) est du type D.

34. FORMULES RELATIVES AUX RANGS PRIVILÉGIÉS. — Nous allons maintenant comparer entre eux les couples (ξ, η) de développement D en nous fondant sur le nombre des séquences BC répétées consécutivement entre deux séquences A dans le développement D. Nous appellerons *privilégiés* les rangs n du développement visés par la proposition 14. Pour le calcul de $c(\xi, \eta)$, on peut se borner à considérer ces rangs privilégiés, ce que nous ferons désormais.

Soit n_0 un tel rang privilégié. Nous supposons que dans le développement D auquel il appartient, la séquence A qui commence au rang $n_0 + 3$ est suivie d'au moins i séquences BC consécutives, et précédée d'au moins j séquences BC consécutives (i et j entiers, $i \geq 0$, $j \geq 1$). Nous désignerons par X, Y, Z, T les valeurs de x_{n_0} , y_{n_0} , z_{n_0} , t_{n_0} .

Désignons par a_i , x_i et z_i les valeurs de a_n , x_n et z_n au rang $n_0 + 11 + 10i$, qui est le cinquième rang après le dernier rang de la $i^{\text{ème}}$ séquence BC qui suit A, puisque la séquence BC contient 10 termes. S'il y a, après la séquence A, exactement i séquences BC consécutives, donc suivies de AA ou de AB, on a $a_i = 4$, et s'il y a au moins $i + 1$ séquences BC consécutives, on a $a_i = 1$.

Désignons par a_j , y_j et t_j les valeurs de a_n , y_n et t_n au rang $n_0 - 10j$, qui est le troisième rang avant le premier rang de la $j^{\text{ème}}$ séquence BC précédant A. On a $a_j = 1$, mais, s'il y a, avant la séquence A, exactement j séquences BC consécutives, donc elles-mêmes précédées de A, le quotient incomplet précédant a_j vaut 4, tandis que s'il y a au moins $j + 1$ séquences BC consécutives avant A, ce quotient incomplet vaut 3.

Nous allons exprimer X et Z en fonction de x_i et z_i , et Y et T en fonction de y_j et t_j . Pour cela, il est commode d'introduire la suite $\{s_k\}$ définie par la formule de récurrence

$$(34.1) \quad s_{k+1} = 542s_k - s_{k-1} \quad (k \text{ entier quelconque}),$$

avec

$$s_0 = 0, \quad s_1 = 1, \quad \text{d'où} \quad s_{-k} = -s_k.$$

Calcul de X et Z en fonction de x_i et z_i . — D'après les définitions qu'on vient de donner, on a

$$X = (1 \ 1 \ 1 \ 4 \ 1 \ 1 \ 1 \ 4 \ 1 \ 1 \ 1 \ x_0) = \frac{765x_0 + 494}{494x_0 + 319}$$

et

$$x_0 = (1 \ 1 \ 3 \ 1 \ 1 \ 1 \ 4 \ 1 \ 1 \ 1 \ x_1) = \varphi_1(x_1) = \varphi_i(x_i),$$

où φ_i désigne la $(i - 1)^{\text{ème}}$ itérée de φ_1 [on pose $\varphi_0(x) = x$], avec

$$\varphi_i(x) = \frac{e_i x + f_i}{g_i x + h_i},$$

où e_i , f_i , g_i , h_i satisfont à la même récurrence que s_i (34.1), avec

$$\begin{aligned} e_0 &= 1, & f_0 &= 0, & g_0 &= 0, & h_0 &= 1; \\ e_1 &= 398, & f_1 &= 257, & g_1 &= 223, & h_1 &= 144; \\ & & & & e_i h_i - f_i g_i &= 1. \end{aligned}$$

On en déduit

$$(34.2) \quad X = \frac{E_i x_i + F_i}{G_i x_i + H_i},$$

où

$$E_i = 765e_i + 494g_i, \quad F_i = 765f_i + 494h_i, \quad G_i = 494e_i + 319g_i, \quad H_i = 494f_i + 319h_i.$$

E_i, F_i, G_i, H_i satisfont donc à la même récurrence que s_i , avec

$$(34.3) \quad \begin{aligned} E_{-1} &= -2, & F_{-1} &= 7, & G_{-1} &= -1, & H_{-1} &= 4; \\ E_0 &= 765, & F_0 &= 494, & G_0 &= 494, & H_0 &= 319; \\ E_i H_i - F_i G_i &= -1. \end{aligned}$$

Des valeurs prises pour $i = 0$ et $i = 1$ par e_i, f_i, g_i, h_i , on déduit

$$(34.4) \quad e_i = 398s_i - s_{i-1}, \quad f_i = 257s_i, \quad g_i = 223s_i, \quad h_i = 144s_i - s_{i-1};$$

des valeurs prises pour $i = -1$ et $i = 0$ par E_i, F_i, G_i, H_i , on déduit

$$(34.5) \quad \begin{cases} E_i = 765s_{i+1} + 2s_i, & F_i = 494s_{i+1} - 7s_i, \\ G_i = 494s_{i+1} + s_i, & H_i = 319s_{i+1} - 4s_i. \end{cases}$$

D'autre part, l'application répétée des formules (21.1) et (21.2) donne

$$\begin{aligned} Z_{-1} &= -\frac{51x_0 + 33 + z_{0-1}}{G_0x_0 + H_0}, \\ z_{k-1} - 1 &= \frac{51x_k + 33 + z_{k-1}}{g_1x_k + h_1} \quad (1 \leq k \leq i); \end{aligned}$$

d'où, en regroupant par un calcul par récurrence facile :

$$\begin{aligned} z_{0-1} &= \frac{51\{(e_0 + e_1 + \dots + e_{i-1})x_i + f_0 + \dots + f_{i-1}\} + 33\{(g_0 + \dots + g_{i-1})x_i + h_0 + \dots + h_{i-1}\} + z_{i-1}}{g_i x_i + h_i}, \\ Z_{-1} &= -\frac{51\{(e_0 + e_1 + \dots + e_{i-1})x_i + f_0 + \dots + f_{i-1}\} + 33\{(g_0 + \dots + g_{i-1})x_i + h_0 + \dots + h_{i-1}\} + z_{i-1}}{G_i x_i + H_i}. \end{aligned}$$

Or, en désignant par θ et θ' les racines de l'équation

$$\theta^2 = 542\theta - 1, \quad \text{d'où} \quad \theta\theta' = 1,$$

on a

$$s_i = \frac{\theta^i - \theta'^i}{\theta - \theta'};$$

d'où

$$s_0 + s_1 + \dots + s_i = \frac{1}{\theta - \theta'} \left(\frac{\theta^{i+1} - 1}{\theta - 1} - \frac{\theta'^{i+1} - 1}{\theta' - 1} \right) = \frac{s_{i+1} - s_{i-1}}{\theta + \theta' - \theta\theta' - 1} = \frac{s_{i+1} - s_{i-1}}{540}.$$

Des formules (34.4) on tire donc, en tenant compte de (34.1) :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^i e_k &= \frac{1}{540} (397s_{i+1} + 143s_i + 143), & \sum_{k=0}^i f_k &= \frac{257}{540} (s_{i+1} - s_{i-1}), \\ \sum_{k=0}^i g_k &= \frac{223}{540} (s_{i+1} - s_{i-1}), & \sum_{k=0}^i h_k &= \frac{1}{540} (143s_{i+1} + 397s_i + 397). \end{aligned}$$

En substituant ces valeurs, on trouve pour Z :

$$Z = \frac{G_i x_i + H_i - \frac{1}{90}(4601s_{i+1} - 11s_i - 11)x_i - \frac{1}{90}(2971s_{i+1} - s_i - 1) - (z_i - 1)}{G_i x_i + H_i},$$

d'où

$$(34.6) \quad Z = \frac{(G_i - 51s_{i+1})x_i + H_i - 33s_{i+1} - \frac{1}{90}(s_{i+1} - s_i - 1)(11x_i + 1) - (z_i - 1)}{G_i x_i + H_i}.$$

Calcul de Y et T en fonction de y_j et t_j . — En posant $Y = y_0$ et $T = t_0$, on a

$$Y = y_0 = - \left(\begin{matrix} 0 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 4 & 1 & 1 & 1 & -\frac{1}{y_1} \end{matrix} \right) = -\psi_1(-y_1) = -\psi_j(-y_j),$$

où ψ_j désigne la $(j-1)$ ème itérée de ψ_1 [on pose $\psi_0(x) = x$], avec

$$(34.7) \quad \psi_j(x) = \frac{E'_j x + F'_j}{G'_j x + H'_j}, \quad \text{d'où} \quad -Y = \frac{-E'_j y_j + F'_j}{-G'_j y_j + H'_j},$$

où E'_j, F'_j, G'_j, H'_j satisfont à la même récurrence que s_j (34.1); avec

$$(34.8) \quad E'_j H'_j - G'_j F'_j = 1$$

et

$$\begin{aligned} E'_0 &= 1, & F'_0 &= 0, & G'_0 &= 0, & H'_0 &= 1, \\ E'_1 &= 82, & F'_1 &= 127, & G'_1 &= 297, & H'_1 &= 460; \end{aligned}$$

d'où

$$(34.9) \quad E'_j = 82s_j - s_{j-1}, \quad F'_j = 127s_j, \quad G'_j = 297s_j, \quad H'_j = 460s_j - s_{j-1}.$$

D'autre part, en procédant comme au paragraphe 29 pour l'établissement de (29.1), (29.2) et (29.3), on trouve

$$t_{k-1} - 1 = - \frac{-84y_k + 130 - (t_k - 1)}{-G'_1 y_k + H'_1} \quad (1 \leq k \leq j),$$

d'où, en regroupant par un calcul par récurrence facile

$$T - 1 = - \frac{\left\{ \begin{aligned} &84 \{ - (E'_0 + E'_1 + \dots + E'_{j-1}) y_j + F'_0 + \dots + F'_{j-1} \} \\ &+ 130 \{ - (G'_0 + \dots + G'_{j-1}) y_j + H'_0 + \dots + H'_{j-1} \} - (t_j - 1) \end{aligned} \right\}}{-G'_j y_j + H'_j}.$$

Or, de (34.9) on tire, en tenant compte de (34.1)

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{j-1} E'_k &= \frac{1}{540} (81s_j + 459s_{j-1} + 459), & \sum_{k=0}^{j-1} F'_k &= \frac{127}{540} (s_j - s_{j-1} - 1), \\ \sum_{k=0}^{j-1} G'_k &= \frac{297}{540} (s_j - s_{j-1} - 1), & \sum_{k=0}^{j-1} H'_k &= \frac{1}{540} (459s_j + 81s_{j-1} + 81); \end{aligned}$$

d'où

$$(34.10) \quad T = \frac{-(G'_j - 84s_j)y_j + H'_j - 130s_j - \frac{1}{90}(s_j - s_{j-1} - 1)(-9y_j + 23) + t_j - 1}{-G'_j y_j + H'_j}.$$

35. Ces formules étant établies, envisageons les deux séquences suivantes :

$$\left. \begin{array}{l} S : \underbrace{ABC \dots BC}_{j \text{ fois BC}} \underbrace{A BC \dots BC A}_{i \text{ fois BC}} \\ S' : \underbrace{ABC \dots BC A}_{j' \text{ fois BC}} \underbrace{BC \dots BC A}_{i' \text{ fois BC}} \end{array} \right\} \text{ avec } 0 \leq i < i', \quad 1 \leq j < j'.$$

Désignons respectivement par X, Y, Z, T et X', Y', Z', T' les valeurs, pour S et S', de x_n, y_n, z_n, t_n au rang privilégié qui précède immédiatement la séquence centrale A dans S et dans S', et posons

$$\begin{array}{llll} x_i = x, & z_i = z, & y_j = y, & t_j = t \quad \text{pour la séquence S;} \\ x_i = x', & z_i = z', & y_j = y', & t_j = t' \quad \text{pour la séquence S'.} \end{array}$$

Les nombres X, Y, Z, T; X', Y', Z', T'; $x, y, z, t; x', y', z', t'$ sont susceptibles des encadrements suivants, déduits des formules de récurrence de l'algorithme et des lemmes 20, 22 et 24.

On a

$$X = \frac{3x(A) + 2}{2x(A) + 1}, \quad \text{d'où} \quad \frac{3.4,65 + 2}{2.4,65 + 1} < X < \frac{3.4,64 + 2}{2.4,64 + 1};$$

le même encadrement vaut pour X', d'où

$$(35.1) \quad 1,548 < X < 1,549, \quad 1,548 < X' < 1,549.$$

On a

$$Z = 1 - \frac{z(A) - 1}{2x(A) + 1}, \quad \text{d'où} \quad 1 - \frac{1,068}{2.4,645 + 1} < Z < 1 - \frac{1,064}{2.4,646 + 1};$$

le même encadrement vaut pour Z', d'où

$$(35.2) \quad 0,896 < Z < 0,897, \quad 0,896 < Z' < 0,897.$$

On a

$$-Y = \frac{1}{3 - y(B)}, \quad \text{d'où} \quad \frac{1}{3,623} < -Y < \frac{1}{3,622};$$

le même encadrement vaut pour -Y' et -y', d'où

$$(35.3) \quad 0,276 < -Y < 0,277, \quad 0,276 < -Y' < 0,277, \quad 0,276 < -y' < 0,277.$$

On a

$$T = \frac{t(B) + 1 - y(B)}{3 - y(B)}, \quad \text{d'où} \quad \frac{0,974 + 1 + 0,622}{3,622} < T < \frac{0,975 + 1 + 0,623}{3,623};$$

le même encadrement vaut pour T' et t' , d'où

$$(35.4) \quad 0,716 < T < 0,718, \quad 0,716 < T' < 0,718, \quad 0,716 < t' < 0,718.$$

On a

$$x' = \frac{2x(C) + 1}{x(C) + 1}, \quad \text{d'où} \quad \frac{2 \cdot 3,65 + 1}{3,65 + 1} < x' < \frac{2 \cdot 3,64 + 1}{3,64 + 1};$$

donc

$$(35.5) \quad 1,784 < x' < 1,785.$$

On a

$$z' = 1 + \frac{z(C) - 1}{x(C) + 1}, \quad \text{d'où} \quad 1 + \frac{1,064}{4,646} < z' < 1 + \frac{1,068}{4,645};$$

donc

$$(35.6) \quad 1,229 < z' < 1,230.$$

On a

$$x = x(A) \quad \text{ou} \quad x(B) \quad \text{et} \quad z = z(A) \quad \text{ou} \quad z(B),$$

d'où

$$(35.7) \quad 4,621 < x < 4,646, \quad 2,030 < z < 2,068.$$

Enfin on a

$$-y = \frac{1}{4 - \bar{y}} \quad \text{et} \quad t = \frac{\bar{t} + 2 - \bar{y}}{4 - \bar{y}},$$

avec

$$\bar{y} = y(A) \quad \text{et} \quad \bar{t} = t(A),$$

ou

$$\bar{y} = y(C) \quad \text{et} \quad \bar{t} = t(C);$$

d'où

$$\frac{1}{4,646} < -y < \frac{1}{4,64} \quad \text{et} \quad \frac{0,920 + 2 + 0,640}{4,64} < t < \frac{0,934 + 2 + 0,646}{4,646},$$

c'est-à-dire

$$(35.8) \quad 0,215 < -y < 0,216, \quad 0,767 < t < 0,771.$$

36. En utilisant les inégalités (35.1) à (35.8) et les formules (34.1) à (34.10), nous allons maintenant évaluer la différence

$$\frac{X - Y}{ZT} - \frac{X' - Y'}{Z'T'} = \left(\frac{X - Y}{ZT} - \frac{X' - Y'}{Z'T} \right) - \left(\frac{X' - Y'}{Z'T'} - \frac{X' - Y'}{Z'T} \right)$$

en évaluant séparément chacune des deux parenthèses.

Calcul de $\frac{X-Y}{ZT} - \frac{X'-Y'}{Z'T'}$. — D'après (34.2) et (34.6), on a ⁽⁶⁾

$$\begin{aligned}
 (36.1) \quad \Delta &= [(X-Y)Z' - (X'-Y)Z](G_i x + H_i)(G_i x' + H_i) \\
 &= [(E_i - G_i Y)x + F_i - H_i Y] \\
 &\quad \times \left\{ \left[G_i - 51s_{i+1} - \frac{11}{90}(s_{i+1} - s_i - 1) \right] x' \right. \\
 &\quad \left. + H_i - 33s_{i+1} - \frac{1}{90}(s_{i+1} - s_i - 1) - (z' - 1) \right\} \\
 &\quad - [(E_i - G_i Y)x' + F_i - H_i Y] \\
 &\quad \times \left\{ \left[G_i - 51s_{i+1} - \frac{11}{90}(s_{i+1} - s_i - 1) \right] x \right. \\
 &\quad \left. + H_i - 33s_{i+1} - \frac{1}{90}(s_{i+1} - s_i - 1) - (z - 1) \right\}.
 \end{aligned}$$

En développant Δ , on trouve

$$(36.2) \quad \Delta = \mathfrak{X}(x - x') + \mathfrak{Y}(z - z') + \mathfrak{U}(x'z - xz'),$$

avec

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{X} &= E_i - G_i Y + (E_i - G_i Y) \left[H_i - 33s_{i+1} - \frac{1}{90}(s_{i+1} - s_i - 1) \right] \\
 &\quad - (F_i - H_i Y) \left[G_i - 51s_{i+1} - \frac{11}{90}(s_{i+1} - s_i - 1) \right], \\
 \mathfrak{Y} &= F_i - H_i Y, \quad \mathfrak{U} = E_i - G_i Y.
 \end{aligned}$$

Développons \mathfrak{X} en tenant compte de (34.3) et (34.5). Il vient

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{X} - (E_i - G_i Y) &= E_i H_i - F_i G_i + s_{i+1} [51F_i - 33E_i - Y(51H_i - 33G_i)] \\
 &\quad + \frac{s_{i+1} - s_i - 1}{90} [11F_i - E_i - Y(11H_i - G_i)] \\
 &= -1 - \frac{1}{90} [11F_i - E_i - Y(11H_i - G_i)] \\
 &\quad + \left(\frac{79}{90} - \frac{Y}{2} \right) (s_{i+1}^2 - 542s_i s_{i+1} + s_i^2).
 \end{aligned}$$

Or, d'après (34.1), on a

$$s_{i+1}^2 - 542s_i s_{i+1} + s_i^2 = s_i^2 - s_{i+1} s_{i-1} = s_1^2 - s_2 s_0 = 1.$$

Par suite, en regroupant :

$$\mathfrak{X} = \frac{1}{90} [91E_i - 11F_i - 11 - Y(91G_i - 11H_i + 45)].$$

⁽⁶⁾ Désormais, dans tous les calculs qui suivront, les crochets auront la signification associative habituelle, et ne désigneront plus la partie entière de la quantité qu'ils encadrent.

D'après (34.5), on a donc

$$\begin{aligned}\mathcal{X} &= \frac{1}{90} [91(765s_{i+1} + 2s_i) - 11(494s_{i+1} - 7s_i) - 11 \\ &\quad - Y\{91(494s_{i+1} + s_i) - 11(319s_{i+1} - 4s_i) + 45\}] \\ &= \frac{1}{90} [64181s_{i+1} + 259s_i - 11 - Y(41445s_{i+1} + 135s_i + 45)], \\ \mathcal{Y} &= 494s_{i+1} - 7s_i - Y(319s_{i+1} - 4s_i), \\ \mathcal{U} &= 765s_{i+1} + 2s_i - Y(494s_{i+1} + s_i).\end{aligned}$$

En utilisant les inégalités (35.3) pour $-Y$, on déduit donc de (36.2)

$$\begin{aligned}75\,619,82s_{i+1} + 296,26s_i + 1,42 &< 90\mathcal{X} < 75\,661,265s_{i+1} + 296,395s_i + 1,465, \\ 582,044s_{i+1} - 8,104s_i &< \mathcal{Y} < 582,363s_{i+1} - 8,108s_i, \\ 901,344s_{i+1} + 2,276s_i &< \mathcal{U} < 901,838s_{i+1} + 2,277s_i.\end{aligned}$$

De (34.1) on tire

$$(36.3) \quad s_{i+1} \geq 1 \quad \text{et} \quad 0 \leq 541s_i \leq s_{i+1} \quad (i \geq 0),$$

d'où

$$840s_{i+1} < \mathcal{X} < 841s_{i+1}, \quad 582s_{i+1} < \mathcal{Y} < 583s_{i+1}, \quad 901s_{i+1} < \mathcal{U} < 902s_{i+1}.$$

Or, de (35.5), (35.6) et (35.7), on déduit

$$2,836 < x - x' < 2,862, \quad 0,8 < z - z' < 0,839, \quad 1,987 < xz' - x'z < 2,094;$$

d'où

$$840 \cdot 2,836 + 582 \cdot 0,8 - 902 \cdot 2,094 < \frac{\Delta}{s_{i+1}} < 841 \cdot 2,862 + 583 \cdot 0,839 - 901 \cdot 1,987,$$

c'est-à-dire

$$(36.4) \quad 959s_{i+1} < \Delta < 1106s_{i+1}.$$

D'autre part, en utilisant encore les formules (34.5) et les inégalités (35.5) et (35.7), on trouve

$$\begin{aligned}(1200,296s_{i+1} - 2,216s_i)(2601,774s_{i+1} + 0,621s_i) \\ < (G_i x + H_i)(G_i x' + H_i) < (1200,79s_{i+1} - 2,215s_i)(2614,124s_{i+1} + 0,646s_i),\end{aligned}$$

d'où, d'après (36.3)

$$(36.5) \quad 3120000s_{i+1}^2 < (G_i x + H_i)(G_i x' + H_i) < 3140000s_{i+1}^2.$$

Des inégalités (35.2) et (35.4) on déduit encore

$$(36.6) \quad 0,574 < (0,896)^2 \cdot 0,716 < ZZ'T < (0,897)^2 \cdot 0,718 < 0,578.$$

De (36.1), (36.4), (36.5) et (36.6) on déduit finalement

$$\frac{959}{0,578 \cdot 3140000s_{i+1}} < \frac{X - Y}{ZT} - \frac{X' - Y}{Z'T} < \frac{1106}{0,574 \cdot 3120000s_{i+1}},$$

d'où

$$(36.7) \quad \frac{1}{1900s_{i+1}} < \frac{X-Y}{ZT} - \frac{X'-Y'}{Z'T'} < \frac{1}{1600s_{i+1}}.$$

37. Calcul de $\frac{X'-Y'}{Z'T'} - \frac{X-Y}{ZT}$. Conséquences. — D'après (34.7) et (34.10), on a

$$(37.1) \quad \begin{aligned} \Delta' &= [(X'-Y')T - (X-Y)T'](-G_j y' + H_j)(-G_j y' + H_j) \\ &= [F_j + X'H_j - y'(E_j + X'G_j)] \\ &\quad \times \left[H_j - 130s_j - \frac{23}{90}(s_j - s_{j-1} - 1) \right. \\ &\quad \left. - y \left\{ G_j - 84s_j - \frac{1}{10}(s_j - s_{j-1} - 1) \right\} + t - 1 \right] \\ &= [F_j + X'H_j - y(E_j + X'G_j)] \\ &\quad \times \left[H_j - 130s_j - \frac{23}{90}(s_j - s_{j-1} - 1) \right. \\ &\quad \left. - y' \left\{ G_j - 84s_j - \frac{1}{10}(s_j - s_{j-1} - 1) \right\} + t' - 1 \right], \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$(37.2) \quad \Delta' = \mathfrak{Y}(y' - y) + \mathfrak{E}(t - t') + \mathfrak{V}(t'y - ty').$$

avec

$$\begin{aligned} \mathfrak{Y} &= E_j + X'G_j + (F_j + X'H_j) \left[G_j - 84s_j - \frac{1}{10}(s_j - s_{j-1} - 1) \right] \\ &\quad - (E_j + X'G_j) \left[H_j - 130s_j - \frac{23}{90}(s_j - s_{j-1} - 1) \right], \\ \mathfrak{E} &= F_j + X'H_j, \quad \mathfrak{V} = E_j + X'G_j. \end{aligned}$$

Développons \mathfrak{Y} en tenant compte de (34.8) et (34.9). Il vient

$$\begin{aligned} \mathfrak{Y} - (E_j + X'G_j) &= F_j G_j - E_j H_j + s_j [130E_j - 84F_j + X'(130G_j - 84H_j)] \\ &\quad + \frac{s_j - s_{j-1} - 1}{90} [23E_j - 9F_j + X'(23G_j - 9H_j)] \\ &= -1 - \frac{1}{90} [23E_j - 9F_j + X'(23G_j - 9H_j)] \\ &\quad + \frac{23 - 9X'}{90} (s_{j-1}^2 - 542s_j s_{j-1} + s_j^2) \\ &= -\frac{1}{90} [23E_j - 9F_j + 67 + X'(23G_j - 9H_j + 9)]. \end{aligned}$$

D'après (34.9) on a donc

$$\begin{aligned} \mathfrak{Y} &= \frac{1}{90} [67(82s_j - s_{j-1}) + 9.127s_j - 67 + X' \{ 67.297s_j + 9(460s_j - s_{j-1}) - 9 \}] \\ &= \frac{1}{90} [6637s_j - 67s_{j-1} - 67 + X'(24039s_j - 9s_{j-1} - 9)], \\ \mathfrak{E} &= 127s_j + X'(460s_j - s_{j-1}), \quad \mathfrak{V} = 82s_j - s_{j-1} + 297X's_j. \end{aligned}$$

En utilisant les inégalités (35.1) pour X' , on en déduit

$$\begin{aligned} 43\,849,372s_j - 80,932s_{j-1} - 80,932 < 90\mathfrak{Y} < 43\,873,411s_j - 80,941s_{j-1} - 80,941, \\ 839,080s_j - 1,548s_{j-1} < \mathfrak{C} < 839,540s_j - 1,549s_{j-1}, \\ 541,756s_j - s_{j-1} < \mathfrak{V} < 542,053s_j - s_{j-1}. \end{aligned}$$

De

$$(37.3) \quad s_j \geq 1, \quad 0 \leq 541s_{j-1} \leq s_j,$$

on déduit alors

$$486s_j < \mathfrak{Y} < 488s_j, \quad 839s_j < \mathfrak{C} < 840s_j, \quad 541s_j < \mathfrak{V} < 543s_j.$$

Or, de (35.3), (35.4) et (35.8), on tire

$$0,06 < y - y' < 0,062, \quad 0,049 < t - t' < 0,055, \quad 0,056 < yt' - y't < 0,06$$

et (37.2) entraîne donc

$$-488 \cdot 0,062 + 839 \cdot 0,049 + 541 \cdot 0,056 < \frac{\Delta'}{s_j} < -486 \cdot 0,06 + 840 \cdot 0,055 + 543 \cdot 0,06,$$

c'est-à-dire

$$(37.4) \quad 41s_j < \Delta' < 50s_j.$$

D'autre part, en utilisant encore les formules (34.9) et les inégalités (35.3) et (35.8), on trouve

$$\begin{aligned} (541,972s_j - s_{j-1})(523,855s_j - s_{j-1}) \\ < (H'_j - G'_j y)(H'_j - G'_j y') < (542,269s_j - s_{j-1})(524,071s_j - s_{j-1}), \end{aligned}$$

d'où

$$(37.5) \quad 283\,000s_j^2 < (H'_j - G'_j y)(H'_j - G'_j y') < 285\,000s_j^2.$$

Des inégalités (35.2) et (35.4) on déduit encore

$$(37.6) \quad 0,458 < (0,716)^2 \cdot 0,896 < TT'Z < (0,718)^2 \cdot 0,897 < 0,463.$$

De (37.1), (37.4), (37.5) et (37.6), on déduit finalement

$$\frac{41}{0,463 \cdot 285\,000s_j} < \frac{X' - Y'}{Z'T'} - \frac{X' - Y}{Z'T} < \frac{50}{0,458 \cdot 283\,000s_j},$$

d'où

$$(37.7) \quad \frac{1}{3\,300s_j} < \frac{X' - Y'}{Z'T'} - \frac{X' - Y}{Z'T} < \frac{1}{2\,500s_j}.$$

En rapprochant les inégalités (36.7) et (37.7) on obtient donc

$$(37.8) \quad \frac{1}{1\,900s_{l+1}} - \frac{1}{2\,500s_j} < \frac{X - Y}{ZT} - \frac{X' - Y'}{Z'T'} < \frac{1}{1\,600s_{l+1}} - \frac{1}{3\,300s_j}.$$

En posant $\lambda = \frac{X - Y}{ZT}$ et $\lambda' = \frac{X' - Y'}{Z'T'}$, et en tenant compte des inégalités

$1 \leq s_k \leq \frac{1}{541} s_{k+1}$, où k est, comme j et $i+1$, un entier au moins égal à 1, et aussi de $\lim_{k \rightarrow +\infty} s_k = +\infty$, on voit que (37.8) permet d'énoncer, en conservant les notations du paragraphe 35 pour les séquences S et S' :

LEMME 28. — *Les inégalités $0 \leq i < i'$ et $1 \leq j < j'$ entraînent, pour les séquences S et S' :*

a.
$$|\lambda - \lambda'| < \varepsilon \quad \text{dès que } i, j \geq K(\varepsilon),$$

où ε est un nombre positif arbitraire et où $K(\varepsilon)$ ne dépend que de ε ;

b.
$$\lambda - \lambda' > \sigma(K') > 0 \quad \text{si } i < j \text{ avec } i \leq K',$$

où K' est un entier positif et où $\sigma(K')$ ne dépend que de K' ;

c.
$$\lambda' - \lambda > \tau(K'') > 0 \quad \text{si } j \leq i \text{ avec } j \leq K'',$$

où K'' est un entier positif et où $\tau(K'')$ ne dépend que de K'' .

38. LES DÉVELOPPEMENTS \mathcal{O}_z . — Considérons un couple (ξ, η) de développement D. A chacun des rangs privilégiés n_k de D, on peut associer une séquence S_k de type S, avec $i = i_k \geq 0$, $j = j_k \geq 1$ et $\lambda_k = \frac{x_{n_k} - y_{n_k}}{z_{n_k} t_{n_k}}$, d'où $c(\xi, \eta) = \overline{\lim}_k \lambda_k$. Si, à partir d'un certain rang, on ne rencontre plus dans D deux séquences A consécutives, on a, pour k assez grand, $i_k \geq 1$ et $j_k = i_{k-1}$; nous désignerons par \mathcal{O} un tel développement D particulier, entièrement défini, à partir d'un certain rang, par la suite des entiers i_k , avec $i_k \geq 1$.

Envisageons d'abord les développements \mathcal{O} , notés \mathcal{O}_z , pour lesquels i_k tend vers l'infini avec k . Étant données deux valeurs quelconques k_1 et k_2 de k dans un tel développement, on peut toujours trouver une séquence S' définie par des entiers i' et j' ou i' est supérieur à la fois à i_{k_1} et i_{k_2} et j' supérieur à la fois à $j_{k_1} = i_{k_1-1}$ et $j_{k_2} = i_{k_2-1}$. Du lemme 28a, on déduit donc :

$$(38.1) \quad |\lambda_{k_1} - \lambda_{k_2}| \leq |\lambda_{k_1} - \lambda'| + |\lambda_{k_2} - \lambda'| < 2\varepsilon$$

pourvu que $i_{k_1-1}, i_{k_1}, i_{k_2-1}, i_{k_2}$ soient supérieurs à $K(\varepsilon)$, ce qui a lieu dès que k_1 et k_2 sont assez grands. De (38.1) on déduit que λ_k tend vers une limite unique, soit γ , lorsque k tend vers l'infini, quel que soit \mathcal{O}_z . Il existe donc une infinité continue de couples (ξ, η) , correspondant aux développements \mathcal{O}_z , tels que $c(\xi, \eta) = \gamma$.

Pour calculer γ , désignons par (x^*, z^*) le couple dont le développement admet, dès son premier rang, la période CB, et par y^* et t^* les conjugués des nombres quadratiques x^* et z^* . Puisque la séquence A ne se distingue de la séquence C que par la substitution du couple (4, 2) au couple (3, 1) au premier rang, sans changer la valeur de $a - b = c$ à ce rang, lorsque k tend vers l'infini

dans \mathcal{O}_z , $x_{n_{k+3}}$ tend vers $x^* + 1$ et $z_{n_{k+3}}$ vers z^* . Donc

$$x_{n_k} \rightarrow \frac{3(x^* + 1) + 2}{2(x^* + 1) + 1} = X^* \quad \text{et} \quad z_{n_k} \rightarrow 1 - \frac{z^* - 1}{2(x^* + 1) + 1} = Z^*.$$

D'autre part, $y_{n_{k-1}}$ et $t_{n_{k-1}}$ tendent respectivement vers y^* et t^* , donc

$$y_{n_k} \rightarrow \frac{1}{y^* - 3} = Y^* \quad \text{et} \quad t_{n_k} \rightarrow \frac{y^* - 1 - t^*}{y^* - 3} = T^*.$$

De

$$x^* = (3 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 4 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad x^*) = \frac{463x^* + 288}{127x^* + 79}$$

et

$$z^* = 2 + \frac{8x^* + 5 + z^* - 1}{127x^* + 79},$$

on tire

$$x^* = \frac{192 + 12\sqrt{510}}{127}, \quad y^* = \frac{192 - 12\sqrt{510}}{127}, \quad z^* = \frac{23x^* + 102}{90}, \quad t^* = \frac{23y^* + 102}{90},$$

d'où

$$X^* = \frac{1275 - 4\sqrt{510}}{765}, \quad Y^* = \frac{63 - 4\sqrt{510}}{99}, \quad Z^* = \frac{731 - 2\sqrt{510}}{765}, \quad T^* = \frac{400 - 2\sqrt{510}}{495},$$

et par suite

$$\gamma = \frac{X^* - Y^*}{Z^* T^*} = \frac{366 \, 795}{773 \, 868 - 28 \, 547 \sqrt{510}}.$$

On vérifie d'ailleurs que $\gamma < \frac{71}{25}$. On peut donc énoncer :

PROPOSITION 16. — *Pour l'infinité continue des couples (ξ, η) qui admettent un développement \mathcal{O}_z , on a*

$$c(\xi, \eta) = \gamma = \frac{366 \, 795}{773 \, 868 - 28 \, 547 \sqrt{510}} = 2,839 \, 278 \, 85 \dots < \frac{71}{25}.$$

39. LES DÉVELOPPEMENTS \mathcal{O}_r . — Reprenons un couple (ξ, η) de développement D quelconque, auquel sont associées les deux suites d'entiers $\{i_k\}$ et $\{j_k\}$ avec $c(\xi, \eta) = \overline{\lim}_k \lambda_k$ et comparons-le à un couple (ξ', η') dont le développement est caractérisé par exemple par la suite $\{i'_k\}$ où

$$i'_k = k + \max(j_1, j_2, \dots, j_{k+1}),$$

avec $c(\xi', \eta') = \overline{\lim}_k \lambda'_k$. On a $\lim_k i'_k = +\infty$; le développement de (ξ', η') est donc du type \mathcal{O}_z , et l'on a $c(\xi', \eta') = \gamma$. D'autre part, pour tout $k \geq 1$, on a

$$0 \leq i_k < i'_k, \quad 1 \leq j_k < i'_{k-1}$$

et le lemme 28b s'applique. Par suite, si l'on a une infinité de fois $i_k = 0$

dans D, on a une infinité de fois

$$\lambda_k > \lambda'_k + \sigma(0),$$

d'où

$$c(\xi, \eta) > c(\xi', \eta') = \gamma.$$

Donc l'hypothèse $c(\xi, \eta) \leq \gamma$ implique que D est du type \mathcal{O} , c'est-à-dire que $j_k = i_{k-1}$. En appliquant une nouvelle fois le lemme 28b, on voit que si, pour une infinité de valeurs de k , on a $i_k < i_{k-1}$, on a $c(\xi, \eta) \geq \gamma$, et même $c(\xi, \eta) > \gamma$ si $\lim_k i_k$ est finie.

Par contre, si, à partir d'un certain rang, on a $i_k = i_{k-1} = r \geq 1$, ce qui implique la périodicité de \mathcal{O} , le lemme 28c montre que $c(\xi, \eta) < \gamma$. Nous dirons alors que le développement de (ξ, η) est du type \mathcal{O}_r . Enfin, si i_k tend vers l'infini sans décroître, on a évidemment $c(\xi, \eta) = \gamma$. En tenant compte des propositions 15 et 16, on peut donc énoncer :

PROPOSITION 17. — *Les seuls couples (ξ, η) tels que*

$$\frac{10\sqrt{110}}{37} < c(\xi, \eta) < \gamma$$

sont ceux dont le développement est du type \mathcal{O}_r (r entier ≥ 1).

Enfin, si (ξ, η) a un développement \mathcal{O}_r et (ξ', η') un développement $\mathcal{O}_{r'}$ avec $r < r'$, le lemme 28c entraîne $c(\xi, \eta) < c(\xi', \eta')$. D'autre part, le lemme 28a entraîne que $c(\xi, \eta)$ est arbitrairement proche de γ dès que r est assez grand. Donc :

PROPOSITION 17 bis. — *Les valeurs γ_r de $c(\xi, \eta)$ telles que*

$$\frac{10\sqrt{110}}{37} < c(\xi, \eta) < \gamma$$

sont isolées. Elles correspondent aux développements périodiques \mathcal{O}_r , croissent avec l'entier $r \geq 1$, et admettent γ pour valeur d'accumulation.

En rapprochant ces résultats de ceux de la fin du paragraphe 33, on voit que pour achever la démonstration du théorème initial, il ne reste qu'à déterminer les valeurs γ_r , et des couples (ξ_r, η_r) convenables de développement \mathcal{O}_r .

40. CALCUL DE γ_r . — Les développements \mathcal{O}_r sont caractérisés par leur période

$$ABC \dots BC \quad (r \text{ fois } BC).$$

Envisageons le couple (ξ_r, η_r) dont le développement \mathcal{O}_r est constitué exclusivement par la répétition indéfinie de cette période, précédée de $a_0 = a_1 = a_2 = 1$, avec $b_0 = b_1 = b_2 = 0$. ξ_r et η_r sont donc respectivement égaux aux valeurs de x_n

et z_n aux rangs privilégiés n du développement \mathcal{D}_r ; les valeurs de y_n et t_n à ces mêmes rangs privilégiés tendent respectivement lorsque $n \rightarrow +\infty$ vers les nombres ξ_r et η_r conjugués des nombres quadratiques ξ_r , η_r , et l'on a

$$(40.1) \quad \gamma_r = c(\xi_r, \eta_r) = \frac{\xi_r - \xi_r'}{\eta_r \eta_r'}.$$

Pour calculer ξ_r et η_r , remarquons, en reprenant les notations du paragraphe 34, qu'on peut poser d'une part

$$\xi_r = X, \quad \text{avec} \quad x_{r-1} = (1 \quad 1 \quad 3 \quad \xi_r) = \frac{7\xi_r + 2}{4\xi_r + 1},$$

d'où

$$(40.2) \quad \xi_r = \frac{A_r \xi_r + B_r}{C_r \xi_r + D_r} \quad \text{et} \quad A_r D_r - B_r C_r = 1,$$

et, par suite,

$$(40.3) \quad \xi_r = \frac{A_r - D_r + \sqrt{(A_r + D_r)^2 - 4}}{2C_r},$$

avec, d'après (34.2)

$$A_r = 7E_{r-1} + 4F_{r-1}, \quad B_r = 2E_{r-1} + F_{r-1}, \quad C_r = 7G_{r-1} + 4H_{r-1}, \quad D_r = 2G_{r-1} + H_{r-1},$$

c'est-à-dire, en utilisant (34.5)

$$\begin{aligned} A_r &= 7331s_r - 14s_{r-1}, & B_r &= 2024s_r - 3s_{r-1}, \\ C_r &= 4734s_r - 9s_{r-1}, & D_r &= 1307s_{r-1} - 2s_{r-1}, \end{aligned}$$

ou encore

$$(40.4) \quad \begin{cases} A_r = 14s_{r+1} - 257s_r, & B_r = 3s_{r+1} + 398s_r, \\ C_r = 9s_{r+1} - 144s_r, & D_r = 2s_{r+1} + 223s_r. \end{cases}$$

On peut poser d'autre part :

$$\eta_r = Z, \quad \text{avec} \quad z_{r-1} = 1 + \frac{\xi_r - (\eta_r - 1)}{4\xi_r + 1},$$

d'où, d'après (34.6) :

$$\begin{aligned} \eta_r &= \frac{\left\{ \begin{aligned} &((G_{r-1} - 51s_r)(7\xi_r + 2) + (H_{r-1} - 33s_r)(4\xi_r + 1)) \\ &- \frac{1}{90}(s_r - s_{r-1} - 1)(81\xi_r + 23) - \xi_r + \eta_{r-1} \end{aligned} \right\}}{G_{r-1}(7\xi_r + 2) + H_{r-1}(4\xi_r + 1)} \\ &= 1 - \frac{489s_r \xi_r + 135s_r + \frac{1}{90}(s_r - s_{r-1} - 1)(81\xi_r + 23) + \xi_r - (\eta_{r-1} - 1)}{C_r \xi_r + D_r}. \end{aligned}$$

En tenant compte de $s_{r+1} = 542s_r - s_{r-1}$, on en déduit

$$(40.5) \quad \eta_{r-1} = - \frac{\frac{1}{10}(9s_{r+1} + 21s_r + 1)\xi_r + \frac{1}{90}(23s_{r+1} - 293s_r - 23)}{C_r \xi_r + D_r - 1}.$$

Or (40.2) entraîne

$$\frac{\xi_r}{C_r \xi_r + D_r - 1} = \frac{(1 - D_r) \xi_r + B_r}{A_r + D_r - 2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{C_r \xi_r + D_r - 1} = \frac{C_r \xi_r + 1 - A_r}{A_r + D_r - 2}.$$

Il en résulte que (40.5) entraîne

$$\eta_{r-1} = - \frac{\frac{1}{10}(9s_{r+1} + 21s_r + 1)(1 - D_r)\xi_r + B_r + \frac{1}{90}(23s_{r+1} - 293s_r - 23)(C_r \xi_r + 1 - A_r)}{A_r + D_r - 2},$$

c'est-à-dire, en utilisant (40.4) :

$$\begin{aligned} \eta_{r-1} = & \frac{\frac{1}{10}(16s_{r+1} - 166s_r - 1)\xi_r - \frac{1}{15}\left(62s_{r+1} - 437s_r - \frac{23}{6}\right)}{A_r + D_r - 2} \\ & - \left(\frac{1}{2}\xi_r - \frac{79}{90}\right) \frac{s_{r+1}^2 - 542s_r s_{r+1} + s_r^2}{A_r + D_r - 2}. \end{aligned}$$

Comme $s_{r+1}^2 - 542s_r s_{r+1} + s_r^2 = s_r^2 - s_{r+1} s_{r-1} = 1$, on a finalement

$$(40.6) \quad \eta_r = \frac{M'_r \xi_r + N'_r}{\Delta'_r},$$

avec, d'après (40.4) :

$$(40.7) \quad \begin{cases} M'_r = \frac{1}{10}(16s_{r+1} - 166s_r - 6), & N'_r = \frac{1}{15}(178s_{r+1} - 73s_r - 13); \\ \Delta'_r = A_r + D_r - 2 = 16s_{r+1} - 34s_r - 2. \end{cases}$$

On peut simplifier l'expression (40.6) de η_r en utilisant la formule

$$s_{p+q} = s_p s_{q+1} - s_{p-1} s_q$$

qu'on établit aisément en partant de l'égalité $s_n = \frac{\theta^n - \theta'^n}{\theta - \theta'}$ (cf. p. 341). Distinguons deux cas, suivant la parité de r .

Si $r = 2p$ (p entier ≥ 1), on a

$$s_{r+1} = s_{p+1}^2 - s_p^2, \quad s_r = s_p(s_{p+1} - s_{p-1}) = s_p(2s_{p+1} - 542s_p),$$

et aussi

$$s_{p+1}^2 - 542s_p s_{p+1} + s_p^2 = 1;$$

d'où

$$\begin{aligned} M'_{2p} &= \frac{1}{10}[16(s_{p+1}^2 - s_p^2) - 166s_p(2s_{p+1} - 542s_p) - 6(s_{p+1}^2 - 542s_p s_{p+1} + s_p^2)] \\ &= (s_{p+1} + 257s_p)(s_{p+1} + 35s_p), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N'_{2p} &= \frac{1}{15}[178(s_{p+1}^2 - s_p^2) - 73s_p(2s_{p+1} - 542s_p) - 13(s_{p+1}^2 - 542s_p s_{p+1} + s_p^2)] \\ &= (11s_{p+1} + 75s_p)(s_{p+1} + 35s_p), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta'_{2p} &= 2[8(s_{p+1}^2 - s_p^2) - 17s_p(2s_{p+1} - 542s_p) - (s_{p+1}^2 - 542s_p s_{p+1} + s_p^2)] \\ &= 2(7s_{p+1} + 263s_p)(s_{p+1} + 35s_p). \end{aligned}$$

Si $r = 2p + 1$ (p entier ≥ 0), on a

$$s_{r+1} = s_{p+1}(s_{p+2} - s_p) = s_{p+1}(542s_{p+1} - 2s_p), \quad s_r = s_{p+1}^2 - s_p^2,$$

et aussi

$$s_{p+1}^2 - 542s_p s_{p+1} + s_p^2 = 1;$$

d'où

$$\begin{aligned} M'_{2p+1} &= \frac{1}{10} [16s_{p+1}(542s_{p+1} - 2s_p) - 166(s_{p+1}^2 - s_p^2) - 6(s_{p+1}^2 - 542s_p s_{p+1} + s_p^2)] \\ &= (25s_{p+1} + 8s_p)(34s_{p+1} + 2s_p), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N'_{2p+1} &= \frac{1}{15} [178s_{p+1}(542s_{p+1} - 2s_p) - 73(s_{p+1}^2 - s_p^2) - 13(s_{p+1}^2 - 542s_p s_{p+1} + s_p^2)] \\ &= (189s_{p+1} + 2s_p)(34s_{p+1} + 2s_p), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta'_{2p+1} &= 2[8s_{p+1}(542s_{p+1} - 2s_p) - 17(s_{p+1}^2 - s_p^2) - (s_{p+1}^2 - 542s_p s_{p+1} + s_p^2)] \\ &= 2(127s_{p+1} + 8s_p)(34s_{p+1} + 2s_p). \end{aligned}$$

Les trois nombres M'_{2p} , N'_{2p} , Δ'_{2p} ont donc en commun le facteur

$$(40.8) \quad \delta_{2p} = s_{p+1} + 35s_p,$$

et les nombres M'_{2p+1} , N'_{2p+1} , Δ'_{2p+1} , le facteur

$$(40.9) \quad \delta_{2p+1} = 34s_{p+1} + 2s_p.$$

On a

$$(40.10) \quad \xi_r = \frac{\frac{1}{2}(A_r - D_r) + \sqrt{\Delta_r \delta_r (\Delta_r \delta_r + 2)}}{C_r}, \quad \eta_r = \frac{M_r \xi_r + N_r}{2\Delta_r},$$

$$(40.11) \quad \gamma_r = \frac{8\Delta_r^2 \sqrt{\Delta_r \delta_r (\Delta_r \delta_r + 2)}}{C_r (M_r \xi_r + N_r) (M_r \xi_r' + N_r)} = \frac{8\Delta_r^2 \sqrt{\Delta_r \delta_r (\Delta_r \delta_r + 2)}}{C_r N_r^2 + (A_r - D_r) M_r N_r - B_r M_r^2} \quad (7),$$

avec, si $r = 2p$:

$$(40.12) \quad M_{2p} = s_{p+1} + 257s_p, \quad N_{2p} = 111s_{p+1} + 75s_p, \quad \Delta_{2p} = 7s_{p+1} + 263s_p$$

et, si $r = 2p + 1$:

$$(40.13) \quad M_{2p+1} = 25s_{p+1} + 8s_p, \quad N_{2p+1} = 189s_{p+1} + 2s_p, \quad \Delta_{2p+1} = 127s_{p+1} + 6s_p.$$

Les formules (40.8) à (40.13) achèvent d'établir le théorème initial, comme il avait été annoncé au début de ce paragraphe. Elles donnent en particulier

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{502 + 4\sqrt{32385}}{789}, & \xi_2 &= \frac{1632498 + \sqrt{(2340890)^2 - 1}}{2565819}; \\ \eta_1 &= \frac{25\xi_1 + 189}{254}, & \eta_2 &= \frac{709\xi_2 + 6037}{8114}; \\ \gamma_1 &= \frac{12192\sqrt{32385}}{772841}; & \gamma_2 &= \frac{16228\sqrt{(2340890)^2 - 1}}{13379443561}. \end{aligned}$$

(7) On peut établir que le dénominateur de cette expression est divisible par $2\Delta_r$.

Remarque. — La formule de récurrence $s_{p+1} = 542s_p - s_{p-1}$, avec $s_0 = 0$ et $s_1 = 1$ montre que s_p et s_{p+1} sont premiers entre eux et que s_p a la parité de p . On en déduit les résultats suivants :

Tout facteur premier commun à M_{2p} , N_{2p} et $2\Delta_{2p}$ est impair, car M_{2p} et N_{2p} sont impairs puisque s_{p+1} et s_p sont de parité différente. Un tel facteur premier commun doit donc diviser M_{2p} , N_{2p} et Δ_{2p} , et aussi $11M_{2p} - N_{2p} = 2^5 \cdot 43s_p$ et $7M_{2p} - \Delta_{2p} = 2^9 \cdot 3s_p$, ce qui entraîne qu'il doit diviser s_p et par suite $M_{2p} - 257s_p = s_{p+1}$, donc qu'il doit se réduire à l'unité. Donc M_{2p} , N_{2p} et Δ_{2p} sont des entiers premiers entre eux dans leur ensemble.

Tout facteur premier impair commun à M_{2p+1} , N_{2p+1} et $2\Delta_{2p+1}$ doit diviser M_{2p+1} , N_{2p+1} et Δ_{2p+1} , donc aussi $\Delta_{2p+1} - M_{2p+1} = 6 \cdot 17s_{p+1}$ et $4N_{2p+1} - \Delta_{2p+1} = 17 \cdot 37s_{p+1}$; donc il est égal à 17, ou bien il divise s_{p+1} . Or, on vérifie aisément par la formule de récurrence qu'on a $M_{2p+1} \equiv \pm 8 \pmod{17}$; donc le facteur commun cherché ne peut être égal à 17. D'autre part, s'il divise s_{p+1} , il doit diviser $N_{2p+1} - 189s_{p+1} = 2s_p$, donc aussi s_p , puisqu'on l'a supposé impair; il doit donc se réduire à l'unité. Le seul facteur premier commun possible pour M_{2p+1} , N_{2p+1} et Δ_{2p+1} est donc 2 si l'on néglige 1.

En fait, si p est pair, M_{2p+1} et N_{2p+1} sont impairs; donc M_{2p+1} , N_{2p+1} et $2\Delta_{2p+1}$ sont premiers entre eux. Si p est impair, M_{2p+1} et N_{2p+1} sont pairs mais non tous deux divisibles par 4, sans quoi 4 diviserait $4N_{2p+1} - M_{2p+1} = 731s_{p+1}$, donc diviserait s_{p+1} et $N_{2p+1} - 189s_{p+1} = 2s_p$, ce qui est impossible puisqu'alors s est impair. Donc, si p est impair, le p. g. c. d. de M_{2p+1} , N_{2p+1} et $2\Delta_{2p+1}$ est 2.

Ces résultats impliquent, grâce à l'identité de Bezout, qu'on peut trouver un couple (ξ'_r, η'_r) équivalent au couple (ξ_r, η_r) avec

$$\eta'_r = \frac{1}{2\Delta_r} \quad \text{si } r \not\equiv 3 \pmod{4} \quad \text{et} \quad \eta'_r = \frac{1}{\Delta_r} \quad \text{si } r \equiv 3 \pmod{4}.$$

