ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

MARCEL VIVIER

Sur quelques théorèmes d'algèbre extérieure

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 73, nº 3 (1956), p. 203-281

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1956_3_73_3_203_0>

SUR QUELQUES THÉORÈMES D'ALGÈBRE EXTÉRIEURE

PAR M. MARCEL VIVIER.

INTRODUCTION.

On trouvera dans le présent travail un essai de mise en ordre des principaux théorèmes d'algèbre extérieure, l'exposé de certaines techniques de calculs et leurs applications aux problèmes de structure. J'ai tenu compte, pour ce qui est désormais classique, des idées d'Élie Cartan [1], et, pour une partie des problèmes de structure, des beaux travaux de M. Lepage [2].

Voici un commentaire très succinct des sujets traités et des résultats obtenus.

1° *Les opérations fondamentales.* — Une algèbre extérieure $\mathcal{A}$, de degré n, est un espace vectoriel à 2^n dimensions, somme directe du corps des scalaires (K), d'un espace vectoriel E_n à n dimensions, dit espace fondamental, et de toutes les puissances extérieures $E_n^{\wedge p}$ de E_n. C'est aussi un anneau à opérateurs (K) puisque la multiplication extérieure entre deux éléments de $\mathcal{A}$ est toujours possible. Le groupe g des automorphismes de E_n joue un rôle essentiel. Son extension à $\mathcal{A}$ constitue le groupe $\mathcal{G}$ *des applications linéaires cohérentes de* $\mathcal{A}$ *sur* $\mathcal{A}$. Toute opération définie sur $\mathcal{A}$ et commutable avec tout élément de $\mathcal{G}$ est par définition une opération intrinsèque pour $\mathcal{A}$. Telle est par exemple la multiplication extérieure. Restreignons maintenant g au sous-groupe unimodulaire (conservant le « volume » $E_n^{\wedge n}$) et associons à tout monôme basique u d'une base B le monôme complémentaire u' multiplié par le « volume » de B, nous définissons sur $\mathcal{A}$ une transformation linéaire C_B attachée à la base B et non cohérente que nous nommons corrélation. La transmuée de la multiplication

(1) *cf.* É. CARTAN, *Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques*, Hermann, 1950.

(2) cf. *Colloques internationaux du C. N. R. S.*, t. 24, 1950.

extérieure par une corrélation quelconque devient une opération intrinsèque : c'est la multiplication régressive de Grassmann qui donne son sens véritable à l'opération de *dérivation* par rapport à un monôme de base (u). Déjà utilisée par Élie Cartan ([3]) dans le cas où u est de degré 1 la dérivation s'est révélée un outil maniable et de grande efficacité.

Signalons quelques résultats qui en soulignent la portée :

a. L'espace propre d'une forme F (de degré r) et celui de l'ensemble des $k^{\text{ièmes}}$ dérivées de F $(k < r)$ sont confondus;

b. La recherche des relations linéaires à coefficient dans (K) entre les dérivées $k^{\text{ièmes}}$ de F est liée à celle des annulateurs de la corrélative de F dans la base où ces dérivées sont définies;

c. Une forme F d'un degré supérieur à 2 ne peut être que d'une seule manière somme de multivecteurs disjoints.

Par le biais de la corrélation s'introduisent encore des considérations métriques si l'on fait de C_B une opération intrinsèque en limitant le choix des bases à une certaine classe définie par B. Comme application, après avoir rappelé et démontré la formule de Lagrange généralisée, nous établissons une relation aux modules des mineurs d'un tableau quelconque [formule (19), § 13].

2° *La théorie des annulateurs de formes*. — Dans l'algèbre $\mathfrak{A}$ l'opération inverse de la multiplication (division sans reste) conduit à deux types de recherches :

a. décomposition d'une forme en produits de formes;

b. formation des annulateurs d'une forme donnée.

Les problèmes *a* et *b* conduisent ordinairement à des calculs pénibles. Ils se simplifient quand la forme donnée est simple (ou monôme) car on sait reconnaître qu'une forme Δ de degré p, déterminée par ses composantes dans une base B, est simple et construire ses facteurs primaires P_j : ce sont p dérivées $(p-1)^{\text{ièmes}}$ linéairement indépendantes. Si les P_j sont pris pour éléments d'une base B_1 on constate aussitôt que tout annulateur de Δ est somme d'annulateurs simples (ayant avec Δ un facteur commun).

Dans le cas général je me suis limité à l'analyse du problème *b*. Renonçant à la méthode algébrique usuelle j'ai recherché, Δ étant somme de N monômes basiques ω (disjoints ou non et contenant éventuellement un facteur du corps K), quelle doit être obligatoirement la structure d'un annulateur G de Δ :

Si ω_i et ω_j sont deux monômes ω et si leurs quotients par leur p. g. c. d.

([3]) É. Cartan, *Leçons sur les invariants intégraux*, § 57, Hermann, 1922.

(défini à un coefficient scalaire près) sont m_{ij} et m_{ji}, on a $G = \Sigma m_{ij}\bar{\varphi}_{ij}$, les polynomes $\bar{\varphi}_{ij}$ satisfaisant à des relations de structure qu'on peut déduire des formules du paragraphe 15 [(22), (23), (24)]. Cette méthode m'a permis de trouver tous les annulateurs des formes pour $N=2$ et $N=3$.

Pour $N=4$ je me suis contenté de traiter complètement un exemple. Je signale enfin un résultat important : les annulateurs de binômes ($N=2$) sont toujours des sommes d'annulateurs simples.

(Il va sans dire que pour $N > 2$ on construit facilement des formes dont les annulateurs ne sont pas des sommes d'annulateurs simples.)

3° *La division avec reste dans l'anneau* $\mathfrak{A}$. — Elle a été étudiée par Lepage dans le cas où le diviseur est une forme quadratique de rang 4 au moins. Il en a déduit le principe d'une décomposition canonique remarquable de tout élément de l'algèbre $\mathfrak{A}$, dont l'espace fondamental est l'espace propre de Δ, selon les puissances successives de Δ. Je me suis proposé d'étendre cette théorie au cas plus général où Δ est somme de N multivecteurs disjoints ω_i d'un degré pair quelconque $2d$ et $\mathfrak{A}$ l'algèbre extérieure, dont l'espace fondamental E_{2Nd} est encore l'espace propre de Δ. Pour $H \in \mathfrak{A}$, j'appelle *dérivée totale* $\dfrac{dH}{d\Delta}$ la quantité $\displaystyle\sum_{1}^{N} \frac{\partial H}{\partial \omega_i}\cdot$ Elle est proportionnelle au produit régressif $H \mid \Delta^{n-1}$, ce qui lui confère un caractère intrinsèque. La technique de dérivation totale tire son intérêt du concept de *degré réduit*.

En adoptant pour base de $\mathfrak{A}$ une base B canonique pour Δ (les ω_i devenant des monômes basiques) on aperçoit que tout monôme basique u contient k facteurs ω et r facteurs inclus dans des ω distincts des précédents. La quantité $p = 2k + r$ est le degré réduit de u (si $d=1$, degré vrai et degré réduit coïncident) et $\mathfrak{A}$ se décompose en modules $D(p)$: les éléments d'un module $D(p)$ sont des sommes de monômes ayant le même degré réduit.

Dans le module $D(p)$ on a

$$\frac{d[\Delta H]}{d\Delta} = (N - p)\,H + \Delta \frac{dH}{d\Delta} \tag{c}$$

et il est facile de calculer $\dfrac{d^s}{d\Delta}[\Delta^r H]$ [*cf.* § 17, formule (11)].

La formule (c) en raison même du caractère intrinsèque des dérivées totales permet la séparation effective des modules $D(p)$ dans une base quelconque. Dans chaque module $D(p)$ elle met en relief les formes de la classe zéro (dont la dérivée totale est nulle) et les formes de la classe x, produit de la classe zéro par Δ^x. La généralisation de (c) permet la décomposition de tout élément de $\mathfrak{A}$ dans les différentes classes et conduit à des calculs précis. La condition explicite de divisibilité par Δ s'en déduit sans peine. En un mot la théorie de Lepage complétée sur divers points se transporte sans changement dans $D(p)$.

4° *Structure des formes de la classe zéro.* — Elles sont annulatrices de certaines puissances de Δ. On verra qu'une forme est de la classe zéro, si et seulement si elle est une somme de termes tels que $[\omega_{i_1} - \omega_{j_1}]\ldots[\omega_{i_k} - \omega_{j_k}]\pi$, π étant de degré zéro en les ω et ne s'écrivant avec aucun des éléments simples des ω_i, ω_j d'ailleurs tous distincts les uns des autres.

Du théorème précédent et des propriétés des annulateurs de formes binômes on tire enfin que toute forme Δ de degré pair réductible à une somme de monômes disjoints et toutes les puissances non nulles de Δ ont des annulateurs toujours réductibles à des sommes d'annulateurs simples.

5° Une note en fin du présent mémoire complète l'étude des formes simples F esquissée au paragraphe 10. On retrouvera notamment avec une interprétation nouvelle certains théorèmes connus de la théorie des déterminants.

L'idée directrice en cette étude a été de remplacer les conditions généralement surabondantes entre les composantes d'une forme simple F par un système strict, en d'autres termes d'exprimer toutes les composantes de F à l'aide de $p(n-p)+1$ d'entre elles convenablement choisies (p étant le degré de F dans l'algèbre $\mathcal{A}$ de degré n) et jouant le rôle de paramètres indépendants. L'un d'eux λ est choisi arbitrairement mais non nul. Il affecte un monôme basique que nous représenterons par T. Les $p(n-p)$ autres affectent les monômes basiques qu'on déduit de T par une seule substitution portant sur les vecteurs de base. Divisés par λ ce sont les éléments d'une matrice $\theta_{p\times(n-p)}$, dite caractéristique de F. Une permutation quelconque des vecteurs de la base qui à T fait correspondre le monôme $\mathfrak{T}$ de composante non nulle, transforme θ en θ_1; θ et θ_1 sont dites extérieurement équivalentes. L'équivalence extérieure révèle des décompositions intéressantes de θ, notamment, quand θ est orthogonale ou unitaire. Elles feront dans ce dernier cas l'objet d'une publication ultérieure dans le Bulletin des sciences mathématiques.

Note. — Les principaux résultats obtenus dans cette thèse ont été indiqués aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* :

Sur les matrices extérieurement équivalentes (t. **234**, 9 juin 1952, p. 2327).

Sur la dérivation totale par rapport à une forme quadratique régulière dans l'algèbre extérieure de degré $2n$ (t. **236**, 23 février 1953, p. 879).

Sur la structure des formes à multiplication extérieure (t. **236**, 27 avril 1953, p. 1725).

Sur les annulateurs de formes extérieures (t. **238**, 18 janvier 1954, p. 548).

Sur la structure des matrices unitaires (t. **238**, 2 mai 1954, p. 1957).

Sur les structures unitaires et para-unitaires (t. **240**, 28 février 1955, p. 1039).

Sur les sommes directes de multivecteurs (t. **240**, 13 juin 1955, p. 2285).

CHAPITRE I.

Opérations fondamentales d'algèbre extérieure.

1. Les opérations fondamentales dans la base (X). — Étant donnés :

1° le corps (K) des nombres complexes, dit aussi le corps des scalaires [toute relation établie dans (K) sera nommée relation analytique ou « scalaire »];

2° n symboles $(X_1, \ldots, X_n)$ dont l'ensemble ordonné (X) prend le nom de base (X), tandis que les X_i eux-mêmes sont appelés vecteurs fondamentaux, variables ou indéterminées;

on appelle « *monôme* » *du degré* k $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ l'ensemble $[m]$ d'un scalaire λ, qu'on nomme la composante de $[m]$ ou le coefficient de $[m]$ dans (K), et d'un arrangement quelconque de k éléments X_i savoir $X_{i_1}, \ldots, X_{i_k}$.

On pose

$$[m] = \lambda[X_{i_1}, \ldots, X_{i_k}]. \tag{1}$$

Les monômes de composante nulle ou qui contiennent au moins deux indices i identiques composent la classe des monômes nuls. L'inclusion de $[m]$ dans cette classe se traduit par l'égalité $[m] = 0$. Les monômes d'un degré supérieur à n sont nécessairement nuls.

Si, dans (1), $\lambda = 1$ et si $[m] \neq 0$, on dit que $[m]$ est un monôme basique, ou unitaire. D'ordinaire, on écrit alors simplement

$$[m] = [X_{i_1}, \ldots, X_{i_k}].$$

Dans l'ensemble $\mathcal{B}$ *de tous les monômes non nuls* $\mathcal{B}^k$ représente le sous-ensemble des monômes du degré k et $\mathcal{B}^k_{[a]} \subset \mathcal{B}^k$ le sous-ensemble des monômes qui ont la même structure que $[a]$, c'est-à-dire qui sont composés strictement avec les mêmes éléments X_i que $[a]$, mais placés dans un ordre arbitraire. La relation d'équivalence définie par l'appartenance de deux monômes $[m_1]$ et $[m_2]$ au même $\mathcal{B}^k_{[a]}$ s'exprime en disant que $[m_1]$ et $[m_2]$ sont proportionnels.

Monômes équivalents. — $[a]$ et $[b]$ étant deux monômes basiques de même structure, on dit que les monômes $\lambda[a]$, $\mu[b]$ sont égaux où équivalents et l'on écrit $\lambda[a] = \mu[b]$, si et seulement si $\lambda = \varepsilon\mu$, ε étant égal à $+1$ ou à -1 suivant que les suites d'indices de $[a]$ et de $[b]$ sont des permutations de la même classe ou non. Désormais, deux monômes égaux ne seront plus regardés comme distincts [1].

---

[1] L'équivalence des monômes est invariante vis-à-vis de toute permutation des éléments de la base (X).

Multiplication par un nombre et addition des monômes. — $[a]$ étant un monôme basique λ et $\xi \in K$, multiplier le monôme $\lambda[a]$ par ξ, c'est lui associer le monôme $(\xi\lambda)$ $[a]$. $[a_1]$, ..., $[a_n]$ étant des monômes basiques de $\mathcal{B}^k_{[a]}$ et λ_1, ..., λ_n des scalaires, on appelle somme des monômes $\lambda_1[a_1]$, ..., $\lambda_n[a_n]$ un monôme $[m]$ construit de la façon suivante : l'ensemble des monômes basiques $\mathcal{B}^k_{[a]}$ ne comportant que deux classes d'équivalence on choisit arbitrairement un représentant de l'une d'elles qu'on désigne encore par $[a]$. Il vient $[a_i] = \varepsilon_i[a]$ [5], Le monôme $\Sigma\lambda_i\varepsilon_i[a]$ est par convention la somme des monômes $\lambda_i[a_i]$. Grâce aux définitions précédentes $\mathcal{B}^k_{[a]}$ reçoit une structure de module (ou espace vectoriel) à une dimension dont la base peut être un élément quelconque, basique ou non, de $\mathcal{B}^k_{[a]}$.

On peut considérer l'ensemble des parties de $\mathcal{B}^1$ comme un espace vectoriel à n dimensions E_n *qu'on nommera l'espace fondamental.* On aperçoit qu'en remplaçant dans la base (X) chaque vecteur X_i par $\alpha_i X_i$ ($\alpha_i \in K$, $\alpha_i \neq 0$) on laisse globalement invariant chacun des sous-modules $\mathcal{B}^k$.

Multiplication extérieure des monômes. — $[a]$ et $[b]$ étant deux monômes basiques de degrés p et q, λ et μ deux scalaires, aux deux monômes $\lambda[a]$, $\mu[b]$, on fait correspondre le monôme $\lambda\mu[ab]$ de degré $p+q$ appelé produit extérieur de $\lambda[a]$, $\mu[b]$. On écrit $\lambda[a].\mu[b] = \lambda\mu[ab]$. L'équivalence des monômes est régulière pour la multiplication, c'est-à-dire que pour $[m_1]$, $[m_2]$, $[c] \in \mathcal{B}$ $[m_1] = [m_2]$ entraîne $[m_1 c] = [m_2 c]$. La multiplication est distributive par rapport à l'addition dans les modules $\mathcal{B}^k_{[a]}$ mais elle n'est pas commutative en général. Avec les notations précédentes, on a

$$[ab] = (-1)^{pq}[ba]. \tag{2}$$

Cette relation conserve un sens si $p = 0$. Les « scalaires » $\in K$ considérés comme des monômes de degré zéro sont donc permutables avec un monôme quelconque et $\lambda[a]$ peut déjà être envisagé comme un produit extérieur. Si $[a]$ et $[b]$ ont un élément commun, $[ab]$ est un monôme nul, et le produit $[ab]$ est certainement nul si $p+q > n$. En conséquence de (2) on tire que dans le monôme $X_1 \ldots X_i \ldots X_j \ldots X_k$, par exemble, la transposition de deux vecteurs quelconques X_i, X_j équivaut à la multiplication par -1.

Monômes complémentaires. — Soit $[x]$ un monôme unitaire de $\mathcal{B}^n$. A tout monôme $[a] \in \mathcal{B}^p$ on peut faire correspondre un monôme unique $[a']$ [6] tel que $[aa'] = [x]$; $[a'] \in \mathcal{B}^{n-p}$ est dit le complémentaire de $[a]$ dans la base $[x]$ c'est le seul monôme basique [6] de $\mathcal{B}^{n-p}$ qui ne forme pas un produit nul avec $[a]$.

---

[5] $\varepsilon_i = \pm 1$; choisir pour base $[a]$ c'est « orienter » l'ensemble $\mathcal{B}^k_{[a]}$.

[6] A une équivalence près.

Polynômes. — Soit $\mathfrak{A}(X)$ l'ensemble des parties de $\mathcal{B}$ et Φ un élément de $\mathfrak{A}(X)$ c'est-à-dire une collection quelconque de monômes de degrés également quelconques. En choisissant dans chaque $\mathcal{B}^k_{[a]}$ un monôme unitaire et en additionnant tous les termes de même structure on peut faire correspondre à Φ une suite de monômes ne contenant qu'un représentant par structure distincte. On l'appelle le polynôme Φ et généralement c'est un tel polynôme qu'on conçoit comme élément de $\mathfrak{A}(X)$.

Pour rappeler la structure de Φ, on pose

$$\Phi = \lambda_0 + \sum_i \lambda_i X_i + \ldots + \sum_{(i_1, \ldots, i_k)} \lambda_{i_1, \ldots, i_k}[X_{i_1}, \ldots, X_{i_k}] + \ldots + \lambda_{1, \ldots, n}[x]. \tag{3}$$

Les monômes unitaires peuvent être choisis de telle sorte que les indices des X_i dans chaque $\mathcal{B}^k$ aillent en croissant de la gauche à la droite mais cette convention est tout à fait facultative. Les éléments $\lambda_0, \ldots, \lambda_{i_1 \ldots i_k}, \ldots$ sont appelés composantes ou coefficients $\in K$ du polynôme Φ. On conviendra que les coefficients $\lambda_{i_1, \ldots, i_k}$ sont fonctions antisymétriques des indices de telle sorte que le monôme $\lambda_{i_1, \ldots, i_k}[X_{i_1}, \ldots, X_{i_k}]$ reste invariant pour toute permutation de la suite $(i_1, \ldots, i_k)$. Si Φ ne contient que des termes d'un même degré p on l'appelle forme de degré p. L'ensemble des formes de degré p est noté $\binom{n}{p}$. On dit que Φ est nul, si et seulement si, toutes ses composantes sont nulles; que deux formes sont proportionnelles, quand leurs composantes homologues sont proportionnelles. Les signes $(+)$ qui figurent au second membre de (3) n'ont qu'un sens de réunion. Nous dirons cependant, les $\mathcal{B}^k_{[a]}$ étant des ensembles disjoints, que Φ est somme des termes qui figurent au second membre de (3).

Produits de polynômes. — Soient $\Phi_1 = \Sigma[m_i]$, $\Phi_2 = \Sigma[\mu_j]$ deux polynômes composés respectivement avec les monômes $[m_i]$, $[\mu_j]$. Le polynôme $\Phi = \Sigma[m_i \mu_j]$ est appelé produit de Φ_1 et de Φ_2, on pose $\Phi = [\Phi_1 \Phi_2]$. Cette multiplication « extérieure » est évidemment permutable avec l'addition dans les modules $\mathcal{B}^k$. Étendue à r polynômes la multiplication est évidemment associative. Si Φ_1 et Φ_2 sont des formes de degrés respectifs p_1 et p_2 la règle (2) donne immédiatement $[\Phi_1 \Phi_2] = (-1)^{p_1 p_2}[\Phi_2 \Phi_1]$. On en déduit, en particulier, que le carré d'une forme impaire (c'est-à-dire de degré impair) est toujours nul.

CONCLUSION. — *L'ensemble* $\mathfrak{A}(X)$, *ayant reçu structure d'anneau conformément aux conventions précédentes, sera denommé l'algèbre extérieure* $\mathfrak{A}(X)$ *de degré* n *définie sur le corps* (K) *et dans la base* (X) :

$\mathfrak{A}(X)$ est somme directe des modules

$$\binom{n}{0} = K; \qquad \binom{n}{1} = E_n, \qquad \ldots, \qquad \binom{n}{k} = E_n^{\wedge k}, \qquad \binom{n}{n} = E_n^{\wedge n}.$$

Les monômes « unités » de degré k en $(X_1, \ldots, X_n)$ composent une base du module $(E_n)^{\wedge k}$ et nous les désignerons par $X^{\wedge p}$, $1+X+X^{\wedge 2}+\ldots+X^{\wedge k}+\ldots+X^{\wedge n}$ est une base de $\mathfrak{A}(X)$ considéré comme somme directe des sous-modules : $(K)(E_n), \ldots, (E_n)^{\wedge n}$.

Avertissement concernant les notations. — 1° *Pour rappeler que Φ est élément d'algèbre extérieure et que $\Phi\Phi_1$ est un produit extérieur, nous écrivons $[\Phi]$ et $[\Phi\Phi_1]$. Cependant nous conviendrons de supprimer ces crochets quand la clarté de l'exposé n'aura pas à en souffrir.*

2° *Nous utiliserons quelquefois le symbolisme du calcul matriciel.* Par exemple si F_p et F_q sont deux formes de degrés p et q affectées des composantes $(\lambda_1, \ldots, \lambda_N)$, $(\mu_1, \ldots, \mu_M)$, les monômes unités dans $X^{\wedge p}$ étant $(a_1, \ldots, a_n)$, dans $X^{\wedge q}$ $(b_1, \ldots, b_M)$, nous écrirons

$$\left.\begin{array}{l} F_p = (\lambda_1, \ldots, \lambda_N)\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix} \\ F_q = (\mu_1, \ldots, \mu_M)\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_M \end{pmatrix} \end{array}\right\} [F_pF_q] = (\lambda_1, \ldots, \lambda_N)\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix}(b_1, \ldots, b_M)\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_M \end{pmatrix}$$

Le produit de la colonne $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix}$ par la ligne $(b_1, \ldots, b_M)$ est une $N \times M$ matrice dont l'élément noté (ij) est le produit extérieur $[a_i b_j]$.

2. Les formes simples fournissent les éléments d'une nouvelle base fondamentale. — *On dit qu'une forme Φ est simple élémentaire ou monôme si elle résulte du produit de p formes de degré 1 : qu'on nomme les diviseurs primaires de Φ.*

Il est commode d'appeler *vecteur toute forme de degré* 1 *et multivecteur toute forme simple de degré plus élevé* [7]. Par abus de langage nous dirons que vecteurs et multivecteurs appartiennent à l'espace E_n dont $X_1, \ldots, X_n$ sont les éléments d'une base. On notera que le carré extérieur d'un vecteur est toujours nul et que par conséquent tout multivecteur est nul qui contient deux vecteurs proportionnels.

Théorème. — *Pour que le produit extérieur de plusieurs vecteurs soit différent de zéro il faut et il suffit que ces vecteurs soient linéairement indépendants.*

1° Si les vecteurs $V_1, \ldots, V_p$ sont liés, on peut toujours écrire au prix peut-être d'un changement d'indices

$$V_p = \sum_1^{p-1} \alpha_i V_i \qquad (\alpha_i \in K).$$

[7] *Un multivecteur du degré p est un p-vecteur.*

En multipliant extérieurement à gauche par $V_1, \ldots, V_{p-1}$ les deux membres de cette égalité, il vient $[V_1, \ldots, V_p] = 0$.

2° Si les V_i sont linéairement indépendants on peut écrire la suite d'égalités

$$(\mathrm{E}) \qquad V_x = \sum_{i=1}^{i=(x-1)} \alpha_{xi} V_i + \sum_{i=x}^{i=n} \alpha_{xi} X_i \qquad (\text{pour } x = 1, 2, \ldots, p).$$

Dans chacune d'elles il existe au moins un α_{xi} non nul pour $i \geqq x$, sinon les V_i seraient liés linéairement ([8]). On peut donc supposer, après un changement éventuel des indices affectant les X_i

$$\alpha_{xx} \neq 0.$$

En multipliant la première égalité (E) par $[X_2, \ldots, X_n]$ à droite, la seconde par V_1 à gauche, par $[X_3, \ldots, X_n]$ à droite, etc., il vient

$$\begin{aligned}
[V_1 X_2, \ldots, X_n] &= \alpha_{11}[X_1, \ldots, X_n],\\
[V_1 V_2 X_3, \ldots, X_n] &= \alpha_{22}[V_1 X_2, \ldots, X_n],\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
[V_1, \ldots, V_p X_{p+1}, \ldots, X_n] &= \alpha_{pp}[V_1, \ldots, V_{p-1} X_p, \ldots, X_n],
\end{aligned}$$

d'où

$$[V_1, \ldots, V_p][X_{p+1}, \ldots, X_n] = \alpha_{11}\alpha_{22}\ldots\alpha_{pp}[X_1, \ldots, X_n] \neq 0.$$

C. Q. F. D.

COROLLAIRE. — *Tous les k-vecteurs, $k < p$, construits avec les vecteurs* $V_1, \ldots, V_p$ *linéairement indépendants sont linéairement indépendants*

Soient $[a_1], \ldots, [a_N]$ $(N = C_k^p)$ les C_k^p multivecteurs de degré k ([9]) construits avec $V_1, \ldots, V_p$. Soit $[a'_i]$ un produit des $(p-k)$ vecteurs qui ne figurent pas dans a_i, on a

$$[a_i a'_j] = \pm \delta_{ij}[V_1, \ldots, V_p] \qquad (\delta_{ij}, \text{ symbole de Kronecker}).$$

S'il existait une relation $\Sigma \lambda_i a_i = 0$ à coefficients dans (K) on aurait par exemple, $\lambda_1 \neq 0$, et l'on pourrait poser $a_1 = \Sigma'_1 \lambda'_i a_i$. En multipliant à droite par a'_1, il viendrait $[a_1 a'_1] = 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

CONCLUSION. — *Les relations d'équivalence postulées dans la base* (X) *et l'indépendance linéaire des monômes unitaires se retrouvent par voie de conséquence dans une base quelconque de l'espace* E_n *et permettent de comparer les algèbres extérieures associées à des bases arbitraires* (X') *de* E_n.

([8]) C'est d'ailleurs en s'appuyant sur la proposition précédente et en procédant par réccurrence qu'on établit le système E.

([9]) C_k^p représentera toujours la quantité $\dfrac{p!}{k!(p-k)!}$.

Toutes ces algèbres sont équivalentes en un sens que nous préciserons dans le paragraphe suivant. Leur ensemble appelé *l'algèbre extérieure de degré n sera désormais représenté par $\mathcal{A}_n$* (ou plus simplement par $\mathcal{A}$).

3. Transformations linéaires « cohérentes » sur l'algèbre $\mathcal{A}$, induites par un changement de la base fondamentale. — Soit θ la transformation linéaire *régulière* définie sur E_n qui à la base fondamentale (X) fait correspondre la base

$$(X') = (X'_1, \ldots, X'_n) \quad (X'_i = \theta X_i)$$

par la relation

$$\begin{pmatrix} X'_1 \\ \vdots \\ X'_n \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \tag{4}$$

dans laquelle α est une matrice régulière $(n \times n)$ sur le corps des scalaires. A tout vecteur

$$V = (x_1, \ldots, x_n) \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix},$$

θ associe un vecteur V' défini par les égalités

$$V' = \theta(V) = (x_1 \ldots, x_n) \begin{pmatrix} X'_1 \\ \vdots \\ X'_n \end{pmatrix} = (x_1, \ldots, x_n)\, \alpha \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Considérons une première extension π de θ dans l'algèbre $\mathcal{A}$ en convenant qu'à tout multivecteur tel que

$$P = [V_1, \ldots, V_p] \tag{6}$$

corresponde par θ le multivecteur P' noté θP et défini par

$$P' = \theta P = [\theta V_1, \ldots, \theta V_p]. \tag{7}$$

En particulier par π les monômes unitaires $(X)^{\wedge p}$ deviennent les monômes unitaires de $(X')^{\wedge p}$ composant d'après le corollaire du théorème précédent une base de $\binom{n}{p}$.

Considérons maintenant une seconde extension $\mathfrak{T}$ de θ sur l'algèbre $\mathcal{A}$, définie dans chaque module $\binom{n}{p}$ et qui, dans $\binom{n}{p}$ associe à la forme

$$\mathbf{\Phi} = \Sigma \lambda_i [a_i],$$

la forme

$$\mathfrak{T}\mathbf{\Phi} = \Sigma \lambda_i [\theta a_i]$$

les $[a_i]$ étant les monômes unités de $\binom{n}{p}$ dans la base (X).

D'après les conclusions du paragraphe précédent l'application $\mathfrak{T}$ est un automorphisme de l'anneau $\mathfrak{A}$ car

$$\Phi_1 + \ldots + \Phi_p = \Phi'$$

entraîne

$$\mathfrak{T}\Phi_1 + \ldots + \mathfrak{T}\Phi_p = \mathfrak{T}\Phi'$$

et

$$[\Phi_1, \ldots, \Phi_p] = [\Phi] \tag{8}$$

entraîne

$$[\mathfrak{T}\Phi_1, \mathfrak{T}\Phi_2, \ldots, \mathfrak{T}\Phi_p] = \mathfrak{T}\Phi. \tag{9}$$

Pour tirer (9) de (8) il suffit de remarquer que (8) suppose simplement l'existence de certaines relations R entre les composantes, dans la base X, de Φ_1, Φ_2, ..., Φ_p, Φ, et la validité des postulats du paragraphe 1 relatifs aux monômes unitaires en (X).

Les composantes, dans la base X' de $\mathfrak{T}\Phi_1$, $\mathfrak{T}\Phi_2$, ..., $\mathfrak{T}\Phi_p$, $\mathfrak{T}\Phi$ vérifient évidemment les relations R et les monômes unitaires en (X') les postulats du paragraphe 1, (9) est donc une conséquence de 8.

Supposons en particulier que Φ_1, Φ_2, ..., Φ_p, Φ s'identifient aux vecteurs V_1, V_2, ..., V_p et au p-vecteur P de (6) il viendra de (9)

$$[\theta V_1, \ldots, \theta V_p] = \mathfrak{T}[P] \tag{10}$$

[car on a évidemment $\theta V_i = \mathfrak{T}(V_i)$].

En comparant (7) et (10), on trouve

$$\mathfrak{T}[P] = \theta[P]. \tag{11}$$

Les extensions π et $\mathfrak{T}$ de θ sont donc compatibles sans aucune réserve.

Nous appellerons transformation linéaire cohérente dans l'algèbre $\mathfrak{A}$, induite par un changement de base θ dans E_n la transformation θ_g :

$$(X)^{\wedge p} \to (X')^{\wedge p}.$$

La restriction de θ_g au module $\binom{n}{p}$ sera représentée par $\theta^{\wedge p}$.

Enfin on résumera la discussion précédente en énonçant que la multiplication extérieure est permutable avec θ_g ou encore que c'est une opération intrinsèque dans l'algèbre $\mathfrak{A}$.

4. Premières incidences analytiques de la multiplication extérieure : base logique de la théorie des déterminants et images analytiques d'un multivecteur. — Soient

$$V_i = \sum_1^n \alpha_{ik} X_k \qquad (i = 1, 2, \ldots, p) \tag{12}$$

p vecteurs linéairement indépendants ($\alpha_{ik} \in \mathrm{K}$)

$$[\mathrm{V}_1, \ldots, \mathrm{V}_p] = \sum_{(i_1, \ldots, i_p)} [\mathrm{X}_{i_1}, \ldots, \mathrm{X}_{i_p}] \sum (-1)^{\mathrm{N}} \alpha_{1 i'_1} \ldots \alpha_{p i'_p}$$

N est somme des inversions de la suite $i'_1, \ldots, i'_p$.

La première sommation est étendue à toutes les combinaisons $(i_1, \ldots, i_p)$ des nombres $1, 2, \ldots, n$ et la seconde à toutes les permutations $i'_1, \ldots, i'_p$, des éléments d'une combinaison $(i_1, \ldots, i_p)$,

$$\Sigma (-1)^{\mathrm{N}} \alpha_{1 i'_1, \ldots,} \alpha_{p i'_p}$$

est le déterminant formé avec les colonnes $i_1, \ldots, i_p$ extraites *du tableau* M *des composantes des* V_i (M est une matrice $p \times n$).

La théorie des déterminants trouve naturellement sa place ici. Nous la supposerons établie.

Nous dirons que M *est, par lignes, l'image analytique du multivecteur* $[\mathrm{V}_1, \mathrm{V}_2, \ldots, \mathrm{V}_p]$ *dans la base* (X).

Si deux multivecteurs $[\mathrm{V}_1, \ldots, \mathrm{V}_p]$, $[\mathrm{V}'_1, \ldots, \mathrm{V}'_p]$ sont proportionnels, on a

$$[\mathrm{V}_1, \ldots, \mathrm{V}_p] = x[\mathrm{V}'_1, \ldots, \mathrm{V}'_p] \qquad (x \in \mathrm{K}),$$

d'où quel que soit le vecteur S :

$$[\mathrm{V}_1, \ldots, \mathrm{V}_p \mathrm{S}] = x[\mathrm{V}'_1, \ldots, \mathrm{V}'_p \mathrm{S}].$$

Si $\mathrm{S} = \mathrm{V}_i$, le premier membre s'annule, il en est de même du second, et par conséquent, V_i s'exprime avec $\mathrm{V}'_1, \ldots, \mathrm{V}'_p$, puisque ceux-ci sont linéairement indépendants. Il s'ensuit que

$$\begin{pmatrix} \mathrm{V}_1 \\ \vdots \\ \mathrm{V}_p \end{pmatrix} = (m) \begin{pmatrix} \mathrm{V}'_1 \\ \vdots \\ \mathrm{V}'_p \end{pmatrix},$$

$$[\mathrm{V}_1, \ldots, \mathrm{V}_p] = |m| [\mathrm{V}'_1, \ldots, \mathrm{V}'_p] \qquad \text{et} \qquad |m| = x.$$

Nous énoncerons :

Théorème. — *Deux p-vecteurs sont proportionnels si et seulement si p vecteurs non liés de l'un correspondent à p vecteurs non liés de l'autre par une transformation linéaire régulière.*

En langage géométrique les deux multivecteurs sont dans le même sous-espace de E_n.

ζ étant une matrice régulière M et $\mathrm{M}_1 = \zeta \mathrm{M}$ sont images analytiques de deux multivecteurs proportionnels de rapport $|\zeta|$.

Mineurs homologues des matrices M *et* $M_1 = \zeta M$. — Soit δ un mineur quelconque de M, d'un degré arbitraire. Il existe un mineur δ_1 de M_1 construit avec les éléments de M_1 comme δ est construit avec ceux de M. Il est appelé le mineur de M_1 homologue à δ. La correspondance δ, δ_1 est manifestement une relation d'équivalence.

Si δ est du degré p (rappelons que M et M_1 ont p lignes et n colonnes et que $p \leqq n$), on a

$$\delta_1 = |\zeta| \delta.$$

5. Une opération non intrinsèque : la dérivation dans une base donnée. — Dans la base $X = (X_1, \ldots, X_n)$ α étant un monôme de degré p en les $X_1, \ldots, X_n$, *tout élément* Φ *de l'algèbre* $\mathfrak{A}(X)$ *peut se mettre d'une manière unique sous la forme*

$$\boxed{\Phi = \alpha Q + R,} \tag{13}$$

avec la condition que α *ne figure dans aucun monôme de R. D'ailleurs Q ne s'écrit avec aucun des vecteurs* X_i *qui appartiennent à* α.

Le polynome Q est appelé la dérivée de Φ *par rapport à* α dans la base (X)] et l'on pose

$$Q = \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}.$$

Quand α ne figure dans aucun monôme de Φ, $Q = 0$, et l'on pose $\dfrac{\partial \Phi}{\partial \alpha} = 0$. C'est toujours le cas si le degré de α est supérieur à celui de la forme Φ. Si α est nul parce qu'il contient deux X_i de même indice, on écrit encore $\dfrac{\partial \Phi}{\partial \alpha} = 0$. Si α est de degré nul et se réduit au scalaire $k \neq 0$:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} = \frac{1}{k} \Phi.$$

L'opérateur $\dfrac{\partial}{\partial \alpha}$ commute avec ceux de l'addition et de la multiplication par un nombre.

Dérivations successives. — Soient α et β deux monômes de (X) de degrés respectifs p et q.

Règle :

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}\right) = (-1)^{pq} \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \beta}\right) = \frac{\partial \Phi}{\partial [\alpha\beta]}.}$$

Cette règle est évidente si $\alpha\beta = 0$ (les trois membres étant identiquement nuls) ou si l'un au moins des monômes α, β est de degré zéro.

Si $[\alpha\beta] \neq 0$, on peut toujours écrire

$$\Phi = \alpha A + \beta B + \alpha\beta C + R,$$

de telle sorte que

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} = A + \beta C, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} = B + (-1)^{pq} \alpha C$$

et qu'enfin

$$\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}\right) = (-1)^{pq} \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \beta}\right) = \frac{\partial \Phi}{\partial [\alpha\beta]} = C.$$

On voit notamment que $\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}$ est une fonction antisymétrique des éléments de $[\alpha]$.

Dérivés d'un produit extérieur : LEMME. — U, V, A *étant des formes extérieures des degrés respectifs* u, v, 1, *on a*

$$\boxed{\frac{\partial [UV]}{\partial A} = \frac{\partial U}{\partial A} V + (-1)^u U \frac{\partial V}{\partial A}.} \tag{14}$$

En effet avec

$$U = A \frac{\partial U}{\partial A} + N, \qquad V = A \frac{\partial V}{\partial A} + R;$$

Il vient

$$[UV] = A\left[\frac{\partial U}{\partial A} R + (-1)^u N \frac{\partial V}{\partial A}\right] + NR,$$

d'où enfin

$$\frac{\partial [UV]}{\partial A} = \frac{\partial U}{\partial A} R + (-1)^u N \frac{\partial V}{\partial A} = \frac{\partial U}{\partial A} V + (-1)^u U \frac{\partial V}{\partial A}.$$

C. Q. F. D.

THÉORÈME, — $\alpha_{j,1}, \ldots, \alpha_{jN_j}$ *étant tous les monômes de degré* j *en les éléments du monôme* $[\alpha]$ *de degré* x $\left(\alpha_0 = 1, \frac{\partial \alpha}{\partial \alpha_0} = \alpha\right)$, U *et* V *étant des formes en* X_i *de degrés* u *et* v, *on a, avec* $\alpha'_{jt} = \frac{\partial \alpha}{\partial \alpha_{jt}}$;

$$\boxed{\frac{\partial [UV]}{\partial \alpha} = \sum_{j=0}^{j=x} \sum_{t=1}^{t=N_j} (-1)^{(u-j)(x-j)} \left[\frac{\partial U}{\partial \alpha_{jt}} \frac{\partial V}{\partial \alpha'_{jt}}\right].} \tag{15}$$

Le théorème est vrai pour $x = 1$ d'après le lemme.

On l'établit par récurrence en montrant que s'il est vrai quand le degré de α est x il est encore vrai quand ce degré est $x + 1$. En appliquant le lemme à (15), A étant de degré 1, il vient

$$\frac{\partial [UV]}{\partial [\alpha A]} = \sum_{j=0,\, t=1}^{j=x_1,\, t=N_j} (-1)^{(u-j)(x-j)} \left[\frac{\partial U}{\partial [\alpha_{jt} A]} \frac{\partial V}{\partial \alpha'_{jt}}\right] + \sum (-1)^{(u-j)(x-j+1)} \left[\frac{\partial U}{\partial \alpha_{jt}} \frac{\partial V}{\partial [\alpha_{jt} A]}\right].$$

Or

$$\alpha'_{jt} = \frac{\partial \alpha}{\partial \alpha_{jt}} = (-1)^{(x-j)} \frac{\partial [\alpha A]}{\partial [\alpha_{jt} A]}; \qquad \alpha'_{jt} A = \frac{\partial [\alpha A]}{\partial [\alpha_{jt}]};$$

donc

$$\frac{\partial[\mathrm{UV}]}{\partial[\alpha\mathrm{A}]} = \sum (-1)^{(u-j-1)(x-j)} \left[\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial[\alpha_{jt}\mathrm{A}]} \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial\left[\dfrac{\partial[\alpha\mathrm{A}]}{\partial[\alpha_{jt}\mathrm{A}]}\right]} \right]$$
$$+ \sum (-1)^{(u-j)(x-j+1)} \left[\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \alpha_{jt}} \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial\left[\dfrac{\partial[\alpha\mathrm{A}]}{\partial \alpha_{jt}}\right]} \right].$$

Mais le second membre de l'égalité précédente n'est autre que le développement (15) pour le monôme de dérivation αA, développement dans lequel on a distingué les monômes contenus dans αA qui renferment A de ceux qui ne renferment pas cet élément.

Application. — Si dans (15) U se réduit à α, il vient

$$\frac{\partial[\alpha\mathrm{V}]}{\partial\alpha} = \sum_{j=0,\,t=1}^{j=x,\,t=\mathrm{N}_j} (-1)^{(x-j)} \alpha'_{jt} \frac{\partial\mathrm{V}}{\partial\alpha'_{jt}}$$

ou encore plus simplement

$$\frac{\partial[\alpha\mathrm{V}]}{\partial\alpha} = \sum_{j=0,\,t=1}^{j=x,\,t=\mathrm{N}_j} (-1)^{j} \alpha_{jt} \frac{\partial\mathrm{V}}{\partial\alpha_{jt}}, \tag{16}$$

En particulier si $v + x = n + 1$, $[\alpha\mathrm{V}] = 0$ et en posant, par exemple, $\alpha = [\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_{n+1-v}]$, il vient

$$-\mathrm{V} = \sum_{j=1,\,t=1}^{j=v,\,t=\mathrm{N}_j} (-1)^{j} \alpha_{jt} \frac{\partial\mathrm{V}}{\partial\alpha_{jt}}$$

ou en détaillant

$$\mathrm{V} = \sum \mathrm{X}_i \frac{\partial\mathrm{V}}{\partial\mathrm{X}_i} - \sum_{(ij)} \mathrm{X}_i\mathrm{X}_j \frac{\partial\mathrm{V}}{\partial[\mathrm{X}_i\mathrm{X}_j]} + \sum_{(ijk)} \mathrm{X}_i\mathrm{X}_j\mathrm{X}_k \frac{\partial\mathrm{V}}{\partial[\mathrm{X}_i\mathrm{X}_j\mathrm{X}_k]} + \ldots.$$

Relation fondamentale entre une forme F_p *et ses dérivées d'ordre k.* — F_p étant une forme de degré p et $[\alpha_i]$ les monômes unitaires en X_i de degré k, on a

$$\mathrm{C}_k^p \mathrm{V} = \sum_1^{\mathrm{N}} [\alpha_i] \frac{\partial\mathrm{V}}{\partial\alpha_i}, \qquad \text{avec} \quad \mathrm{C}_k^p = \frac{p\,!}{k\,!\,(p-k)\,!}. \tag{17}$$

La sommation étant étendue à tous les α_i possibles composant une base de $(\mathrm{E}_n)^{\wedge p}$, leur nombre est

$$\mathrm{N} = \mathrm{C}_p^n = \frac{n\,!}{p\,!\,(n-p)\,!}.$$

La démonstration de la formule (17) est immédiate :

Soit $\mathrm{T} = \lambda[\mathrm{X}_{i_1}, \ldots, \mathrm{X}_{i_p}]$ un monôme de V, il y a C_k^p combinaisons possibles des $\mathrm{X}_{i_1}, \ldots, \mathrm{X}_{i_p}$ pris k à k. Le terme T se trouve donc répété C_k^p fois dans le second membre de (17).

CHAPITRE II.

Certains aspects de dualité dans une algèbre extérieure $\mathfrak{A}$ de degré n.

6. **Propriétés élémentaires des transformations linéaires cohérentes. Les transformations linéaires cohérentes sont les seules qui commutent avec la multiplication extérieure.** — Soit

$$\Phi = \lambda_0 + \Sigma\lambda_i X_i + \ldots + \Sigma\lambda_{i_1,\ldots,i_p}[X_{i_1}, \ldots, X_{i_p}] \qquad (\lambda_0, \lambda_{i_1,\ldots,i_p} \in K; p = 2, 3, \ldots, n)$$

le polynôme le plus général de l'algèbre $\mathfrak{A}$ de degré n rapportée à la base $X = (X_1, \ldots, X_n)$. Il contient 2^n composantes que nous considérons comme les éléments d'un vecteur ligne $\vec{L}$ (ou colonne $\overset{\uparrow}{L}$). Nous appellerons S une substitution linéaire

$$\overset{\uparrow}{L'} = S\overset{\uparrow}{L} \qquad \text{ou} \qquad \Phi' = S\Phi.$$

Dans le groupe S nous avons déjà reconnu l'existence d'un sous-groupe S_1 dont les opérations sont permutables avec la multiplication extérieure $\mathfrak{T}$: c'est le sous-groupe attaché aux changements de bases. *Ses éléments sont les transformations linéaires cohérentes de l'algèbre* $\mathfrak{A}$.

Je dis que réciproquement toute transformation régulière $\mathfrak{C} \in S$ qui commute avec $\mathfrak{T}$ appartient à S_1. En effet, par $\mathfrak{C}$ ou $\mathfrak{C}^{-1}$ aucun élément non nul de $\mathfrak{A}$ ne doit correspondre à l'élément nul. Dès lors $U_1, \ldots, U_n$ étant une suite libre de n vecteurs, on doit avoir

$$\mathfrak{C}[U_1, \ldots, U_n] = [\mathfrak{C}U_1, \ldots, \mathfrak{C}U_n] \neq 0,$$
$$\mathfrak{C}[U_1, \ldots, U_n U_i] = [\mathfrak{C}U_1, \ldots, \mathfrak{C}U_n \mathfrak{C}U_i] = 0.$$

La somme des degrés $\mathfrak{C}U_1, \ldots, \mathfrak{C}U_n$ est donc au plus égale à n et comme $\mathfrak{C}U_i$ ne peut jamais se réduire à un scalaire en vertu de la dernière des deux égalités précédentes, $\mathfrak{C}U_i$ est un vecteur et par conséquent $\mathfrak{C} \in S_1$.

C. Q. F. D.

Notations. Règles de calculs. — Soient $(B_1, \ldots, B_n)$ les vecteurs d'une nouvelle base B définis par la relation

$$\begin{pmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_n \end{pmatrix} = (\alpha) \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \qquad [\text{ou plus brièvement par } (B) = (\alpha)(X)].$$

La matrice carrée (α) est régulière (son déterminant $|\alpha|$ n'est pas nul).

Soient dans $\binom{n}{p}$ N monômes (x_i) d'ordre p, en (X), composant la base $X^{\wedge p}$.

Posons $X^{\wedge p} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}$ [avec $N = \left[\dfrac{n!}{p!(n-p)!}\right]$. On obient à partir de B une base $B^{\wedge p} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_N \end{pmatrix}$ dont chaque élément b_i se déduit de x_i par la transformation $X_i \to B_i$. On pose

$$B^{\wedge p} = \alpha^{\wedge p} X^{\wedge p}. \tag{1}$$

La matrice $\alpha^{\wedge p}$ est dite la $p^{\text{ième}}$ puissance extérieure de α. Si $b_i = [B_{i_1}, \ldots, B_{i_p}]$, $x_j = [X_{j_1}, \ldots, X_{j_p}]$ l'élément (ij) de $\alpha^{\wedge p}$ est le déterminant $\alpha_{i_1, \ldots, i_p; j_1, \ldots, j_p}$ construit avec les lignes $i_1, \ldots, i_p$ et les colonnes $j_1, \ldots, j_p$ de (α).

Soit T une matrice algébrique de permutation, c'est-à-dire la matrice unité I_N d'ordre N dont les colonnes (resp. les lignes) ont été rangées dans un ordre quelconque et éventuellement multipliées par $+1$ ou -1.

Si à $X^{\wedge p}$ on substitue $TX^{\wedge p}$ on doit substituer à $B^{\wedge p}$, $TB^{\wedge p}$ et $\alpha^{\wedge p}$ est remplacée dans l'équation précédente par $T\alpha^{\wedge p}T^{-1}$, $\alpha^{\wedge p}$ n'est donc déterminée qu'à une transmutation près par T.

La matrice diagonale d'ordre 2^n $(1, \alpha, \alpha^{\wedge 2}, \ldots, \alpha^{\wedge n})$ traduit une application linéaire cohérente dans l'algèbre extérieure $\mathfrak{A}$.

Dans une base quelconque, B (α pouvant se réduire à I_n) on appelle *base complémentaire* de $B^{\wedge p}$ et l'on note $CB^{\wedge p}$ la base $B^{\wedge(n-p)}$ dont les monômes $(b'_1, \ldots, b'_N)$ sont respectivement complémentaires de $(b_1, \ldots, b_N)$ dans B :

$$b'_i = \frac{\partial[B_1, \ldots, B_n]}{\partial b_i}.$$

On note $C\alpha^{\wedge p}$ le tableau des composantes des b'_i dans les x'_i et l'on pose

$$CB^{\wedge p} = C\alpha^{\wedge p} CX^{\wedge p}. \tag{2}$$

$C\alpha^{\wedge p}$ est dite matrice adjointe de $\alpha^{\wedge p}$: Il est immédiat que

$$CCB^{\wedge p} = (-1)^{(n-p)p} B^{\wedge p},$$

donc que $CC\alpha^{\wedge p} = \alpha^{\wedge p}$. Avec $X^{\wedge n} = [x]$, $B^{\wedge n} = [b]$, rappelons que

$$\delta_i^j[b] = [b_i b'_j], \qquad \delta_i^j[x] = [x_i x'_j]$$

et que

$$[b] = |\alpha|[x]. \tag{3}$$

Nous aurons, $(\ )^*$ étant l'indice de transposition des matrices, et $I_{\binom{n}{p}}$ la matrice unité de degré $\binom{n}{p}$.

$$B^{\wedge p}(CB^{\wedge p})^* = B^{\wedge n} I_{\binom{n}{p}} = [b] I_{\binom{n}{p}}. \tag{4}$$

Commutativité de certains opérateurs :

Règle 1 : α_1 et α_2 étant deux matrices α, on a

$$\boxed{(\alpha_1\alpha_2)^{\wedge p} = (\alpha_1)^{\wedge p}(\alpha_2)^{\wedge p} \quad (^{10})}$$

en conséquence de l'associativité des applications linéaires. En particulier

$$\boxed{(\alpha^{-1})^{\wedge p} = (\alpha^{\wedge p})^{-1}.}$$

Les opérateurs « exposants » et $(^{\wedge p})$ et $(^{-1})$ *sont permutables.*

Règle 2 : $\boxed{(\alpha^{\wedge p})^{\star} = (\alpha^{\star})^{\wedge p}}$ car par transposition dans $\binom{n}{p}$ le mineur $\alpha_{i_1,\ldots,i_p,j_1,\ldots,j_p}$ devient $\alpha_{j_1,\ldots,j_p;i_1,\ldots,i_p}$.

On voit en résumé que *les opérateurs « exposants »* $(^{\wedge p})$, $(^{\star})$, $(^{-1})$ *sont deux à deux permutables*, ce qui entraîne en particulier, si α *est orthogonale*, qu'il en est de même *des matrices* $\alpha^{\wedge p}$ *et de la matrice réduites aux matrices principales* $1, \alpha, \alpha^{\wedge 2}, \ldots, \alpha^{\wedge n}$.

Remarque. — En introduisant encore le symbole $(^{-})$ qui change un nombre complexe en le complexe conjugué on verrait de même que $(^{-})$ commute encore avec chacun des opérateurs précédents et qu'en particulier $\alpha^{\wedge p}$ est unitaire en même temps que α.

Théorème. — *L'inverse de la matrice* $\alpha^{\wedge p}$ *est son adjointe transposée et divisée par* $|\alpha|$.

En effet, transposons (2) et tenons compte de (1) pour former le produit $[B^{\wedge p}(CB^{\wedge p})^{\star}]$, il viendra

$$[B^{\wedge p}(CB^{\wedge p})^{\star}] = \alpha^{\wedge p}[X^{\wedge p}(CX^{\wedge p})^{\star}](C\alpha^{\wedge p})^{\star}.$$

Puis, grâce à (4) et à l'équation analogue obtenue en remplaçant B par (X), on tire de la précédente

$$[b]\,I_{\binom{n}{p}} = [x](\alpha^{\wedge p})(C\alpha^{\wedge p})^{\star},$$

et enfin d'après (3)

$$\boxed{|\alpha|\,I_{\binom{n}{p}} = (\alpha^{\wedge p})(C\alpha^{\wedge p})^{\star}.} \tag{5}$$

C. Q. F. D.

Remarques. — On vérifie facilement que (5) équivaut au système

$$\frac{\partial x_t}{\partial b_j}[b] = \frac{\partial b'_j}{\partial x'_t}[x] \qquad (t = t_1, \ldots, t_p; j = j_1, \ldots, j_p). \tag{6}$$

---

(10) D'après la loi de composition des transformations linéaires, on a immédiatement.

$$C(\alpha_1\alpha_2)^{\wedge p} = C\alpha_1^{\wedge p}\,C\alpha_2^{\wedge p}.$$

Or, de la définition même des matrices $\alpha^{\wedge p}$ il vient $\dfrac{\partial b'_j}{\partial x'_t} = \alpha_{j_{p+1},\ldots,j_n;\, t_{p+1},\ldots,t_n}$ et si le mineur de α^{-1} formé avec les rangées t, j est noté $\alpha^{t,j}$, on a

$$\frac{\partial x_t}{\partial b_j} = \alpha^{t_1,\ldots,t_p;\, j_1,\ldots,j_p}$$

(5) entraîne donc

$$\alpha_{j_{p+1},j_n;\, t_{p+1},\ldots,t_n} = |\,\alpha\,|\,\alpha^{t_1,\ldots,t_p;\, j_1,\ldots,j_p}.$$

(Les permutations $t_1, \ldots, t_n, j_1, \ldots, j_n$ étant de la même classe).

Bases normales, orthonormées, supplémentaires, relativement à une base donnée. — La base B définie par (1) (avec $p = 1$) est dite normale dans (X) si $|\,\alpha\,| = 1$. Comme $|\,\alpha^{\wedge p}\,| = |\,\alpha\,|^{C_{p-1}^{n-1}}$ si $|\,\alpha\,| = 1$, les matrices $\alpha^{\wedge p}$ et $(1, \alpha, \alpha^{\wedge 2}, \ldots, \alpha^{\wedge n})$ ont des déterminants égaux à 1. La base B est dite orthonormée dans X si $\alpha\alpha^\star = I_n$. On a vu que dans ce cas, $\alpha^{\wedge p}$ est elle-même orthogonale, on a en outre $C\alpha^{\wedge p} = \alpha^p$.

La matrice α de (1) étant quelconque mais régulière toutes les bases orthonormées dans B forment une classe G_B; θ étant une matrice orthogonale, $G_B = G_{\theta B}$.

Un élément G_B se déduit d'un élément quelconque de G_X à l'aide de l'opérateur matriciel $\alpha_1 = \theta\alpha\tau$ (θ et τ orthogonales) qu'on dira métriquement équivalent à α si l'algèbre $\mathfrak{A}$ est construite sur le corps des réels. Nous étudierons ultérieurement les équivalences métriques (cf. *Bull. Soc. Math.*, 1956) en nous plaçant dans l'espace hermitique mais, en restant pour l'instant dans le domaine réel, on peut facilement montrer qu'il est possible de trouver dans G_B une base $V_1, \ldots, V_n$ et dans G_X une base $U_1, \ldots, U_n$, telles qu'on ait

$$\vec{V}_i = \xi_i \vec{U}_i \qquad \text{(les } \xi_i \text{ étant des scalaires positifs)}.$$

Chaque classe G_B est caractérisée par ses vecteurs principaux (les V_i) et ses valeurs principales (les ξ_i) qui sont les valeurs propres de la matrice $\alpha\alpha^\star$.

Deux bases : $B_1 = \alpha_1 X$, $B_2 = \alpha_2 X$ sont dites supplémentaires dans (X) si $\alpha_1\alpha_2^\star = I_n$. Ici encore on déduit de la relation précédente : $\alpha_1^{\wedge p}(\alpha_2^{\wedge p})^\star = I_{\binom{n}{p}}$. On notera enfin que deux bases supplémentaires par rapport à (X) sont encore supplémentaires par rapport à tout élément de G_X.

7. La Corrélation dans une base donnée. Corrélation normale. — A côté des formes qui composent une algèbre extérieure $\mathfrak{A}_n$, qu'on pourrait appeler des formes de première espèce, on est amené dans certaines applications à concevoir des formes de seconde espèce qui apparaissent comme le produit commutatif d'une forme de première espèce et d'un n-vecteur P. Pour éviter les complications qui résulteraient de cette distinction nous conviendrons :

1° de normer l'espace E_n, c'est-à-dire de choisir arbitrairement dans $E_n^{\wedge n}$ un n-vecteur de base P_0;

2° dans l'expression d'une forme de seconde espèce produit de $\Phi \in \mathfrak{A}$ par le n-vecteur $P = \chi P_0$ de remplacer P par $\chi \in K$.

La forme de seconde espèce ainsi « normalisée » est comme Φ de première espèce.

On aperçoit à cette occasion le rôle privilégié que joueront les bases normales relativement à P_0. C'est toujours d'elles qu'il s'agira quand nous écrirons « bases normales » sans autre spécification.

Voici du reste une application immédiate de ce qui précède.

Définition de la corrélation attachée à une base. — L'espace fondamental E_n étant normé par (X) (c'est-à-dire par $P_0 = [X_1, \ldots, X_n]$) à toute base $B = \alpha X$ de l'algèbre $\mathfrak{A}$ on attache une transformation linéaire définie sur l'hyper-module $\mathfrak{A}$ qui, à tout élément $\Phi \in \mathfrak{A}$, fait correspondre l'élément noté $\mathrm{Cor}_B \Phi$ par les relations [11]

$$(7) \qquad \begin{cases} \Phi = \Sigma \lambda_i [u_i], \\ \mathrm{Cor}_B \Phi = \Sigma \lambda_i |\alpha| [u'_i], \end{cases}$$

dans lesquelles $u_1, \ldots, u_N$ représentent les 2^n monômes basiques de B et $u'_1, \ldots, u'_N$ leurs complémentaires Cu_i dans B. Les λ_i sont les composantes de Φ [$\mathrm{Cor}_B \Phi$ est une forme de seconde espèce normalisée par (X)].

On notera que la transformation $\Phi \to \mathrm{Cor}_B \Phi$ est parfaitement définie par l'application linéaire $u_i \to |\alpha| u'_i$.

Les transformations corrélatives ne sont pas des transformations linéaires cohérentes et n'ont pas un caractère intrinsèque dans leur ensemble car $\mathrm{Cor}_{B_1} \Phi$ est généralement différent de $\mathrm{Cor}_{B_2} \Phi$, cependant nous allons montrer en supposant Φ homogène et de degré p que, tout comme les λ_i, $\mathrm{Cor}_B \Phi$ ne dépend pas du signe du volume $[B_1, \ldots, B_n]$ des vecteurs de la base B (c'est-à-dire de l'orientation de B) :

Il vient de (7_1), $[\Phi u'_i] = \lambda_i [u_i u'_i]$, λ_i reste invariant quand on change le signe de u'_i. Or un tel changement de signe provient de ce que $|\alpha|$ est remplacé par $-|\alpha|$. Dans (7_2) l'invariance de λ_i et des produits $|\alpha|$, u'_i entraîne celle de $\mathrm{Cor}_B \Phi$.

C. Q. F. D.

(La proposition précédente est d'ailleurs une conséquence du théorème énoncé ci-dessous.)

La corrélation attachée à une base normale est dite normale.

Notations matricielles (*cf.* § 1). — Dans (7) les composantes λ_i sont les éléments d'une matrice $\vec{\lambda}$ à une ligne et $\binom{n}{p}$ colonnes. Nous considérons les

(11) Si $|\alpha| = 1$ il est d'usage d'écrire $^*\Phi$ au lieu de $\mathrm{Cor}_B \Phi$. Nous utiliserons cependant la notation $\mathrm{Cor}_B \Phi$ pour prévenir toute confusion.

monômes u_i comme les éléments d'une matrice $B^{\wedge p}$ à $\binom{n}{p}$ lignes et une colonne. De même $CB^{\wedge p}$ représente la colone des u'_i. Avec ces conventions les relations (7) s'écrivent

$$(8)\qquad \begin{cases} \Phi = \vec{\lambda}(B^{\wedge p}), \\ \mathrm{Cor}_B \Phi = |\alpha| \vec{\lambda}(CB^{\wedge p}). \end{cases}$$

Lemme. — *La corrélation dans* B *est permutable avec toute transformation linéaire qui, à* B *fait correspondre une base orthonormée dans* B.

$\mathfrak{T}$ étant l'application linéaire $B \to \tau B$ ($\tau\tau^* = I_n$) il vient de (8)

$$\mathfrak{T}\Phi = \vec{\lambda}\tau^{\wedge p} B^{\wedge p},$$

$$\mathfrak{T}(\mathrm{Cor}_B \Phi) = |\alpha| \vec{\lambda} C(\tau^{\wedge p} B^{\wedge p}) = |\alpha| \vec{\lambda}(C\tau^{\wedge p})(CB^{\wedge p}) = |\alpha| \vec{\lambda}\tau^{\wedge p} CB^{\wedge p},$$

$$\mathrm{Cor}_B(\mathfrak{T}\Phi) = |\alpha| \vec{\lambda}\tau^{\wedge p} CB^{\wedge p} = \mathfrak{T}(\mathrm{Cor}_B \Phi).$$

C. Q. F. D.

Théorème 1. — *Les corrélatifs d'une forme* Φ *par rapport aux bases* B *et* B_1 *se correspondent par une application linéaire cohérente.*

Pour démontrer ce théorème il suffit de l'établir en identifiant B_1 (par exemple) à la base normale (X). Posons donc, comme en (8),

$$(9)\qquad \begin{cases} \Phi = \vec{\mu} X^{\wedge n}, \\ \mathrm{Cor}_X \Phi = \vec{\mu} CX^{\wedge p}. \end{cases}$$

De $B^{\wedge p} = \alpha^{\wedge p} X^{\wedge p}$ et de (8_1), on tire

$$\vec{\lambda}\alpha^{\wedge p} = \vec{\mu}.$$

D'où par substitution dans (8_2) :

$$\mathrm{Cor}_B \Phi = \vec{\mu} |\alpha| (\alpha^{\wedge p})^{-1} C\alpha^{\wedge p} CX^{\wedge p},$$

mais d'après (5)

$$|\alpha|(\alpha^{\wedge p})^{-1} = C(\alpha^*)^{\wedge p} \qquad \text{donc} \qquad \mathrm{Cor}_B \Phi = \vec{\mu} C\alpha^{*\wedge p} C\alpha^{\wedge p} CX^{\wedge p},$$

$$(10)\qquad \mathrm{Cor}_B \Phi = \vec{\mu} C\{(\alpha^*\alpha)^{\wedge p} X^{\wedge p}\},$$

En comparant (10) à (9_2) on voit que $\mathrm{Cor}_B\Phi$ correspond à $\mathrm{Cor}_X\Phi$ dans l'application linéaire $\mathfrak{T}$ qui transforme (X) en la base

$$(11)\qquad Y = (\alpha^*\alpha)X.$$

Il résulte de (11) que $\mathrm{Cor}_B\Phi = \mathrm{Cor}_X\Phi$ si et seulement si $\alpha^*\alpha = I_n$. *La corrélation est donc une opération intrinsèque relativement aux bases d'une classe* G. Il s'ensuit aussitôt que l'application $X \to Y$ pour α donnée reste invariante si l'on remplace B par une base quelconque de G_B et (X) par une base quelconque de G_X.

On vérifie directement ce fait sur (11) car une base quelconque de G_B : θB rapportée à une base quelconque de $G_X(\tau X)$ (θ et τ orthogonales) s'écrit $\theta B = \theta\alpha\tau^{-1}\tau X$. En substituant dans (10) τX à X; $\theta\alpha\tau^{-1}$, à α on trouve que l'application linéaire $\mathrm{Cor}_{\tau X} \rightarrow \mathrm{Cor}_{\theta B}$ transforme τX en τY. C'est donc encore l'application $\mathfrak{C}$.

Corollaire du théorème 1. — *La corrélative d'une forme simple est simple.*

En effet soient $P_1, \ldots, P_r$, r vecteurs, facteurs d'une forme simple Φ de degré r. On sait qu'on peut construire dans $\binom{n}{1}$ une base utilisant $P_1, \ldots, P_r$ et $(n-r)$-vecteurs $Q_1, \ldots, Q_{n-r}$. Dans une telle base $\mathcal{B}_0$, on a $\mathrm{Cor}\Phi = \lambda[Q_1, \ldots, Q_{n-r}]$; $\mathrm{Cor}_{\mathcal{B}_0}\Phi$ étant un multivecteur dans B_0, $\mathrm{Cor}_B\Phi$ est encore un multivecteur quel que soit B.

Remarque. — Puisque la corrélation dans une base normale donnée est involutive relativement aux formes définies au facteur $\pm$ près, il s'ensuit que dans l'algèbre de degré n toutes les formes de degré $(n-1)$ sont simples.

Théorème 2. — *Si* $B_1 = \alpha_1 X$ *et* B_2 *sont des bases supplémentaires relativement à* G_X *et si une forme* Φ *est définie par ses composantes* $\vec{\lambda}$ *dans* $B_1^{\wedge p}$ *la forme* $\mathrm{Cor}_X\Phi$ (*corrélation normale*) *a des composantes* $\vec{\lambda}\,|\alpha_1|$ *dans* $CB^{\wedge p}$.

Posons

$$\Phi = \vec{\lambda}\, B_1^{\wedge p}, \tag{12}$$

et

$$\mathrm{Cor}_X\Phi = \lambda'\,|\alpha_1|\, CB_2^{\wedge p}; \tag{13}$$

d'une part

$$B_1^{\wedge p} = \alpha_1^{\wedge p} X^{\wedge p}, \tag{14$_1$}$$

de l'autre

$$CB_2^{\wedge p} = C(\alpha^{*-1}X)^{\wedge p} = |\alpha_1|^{-1}\alpha_1^{\wedge p}\, CX^{\wedge p} \qquad [\text{de } (5)] \tag{14$_2$}$$

En portant ces valeurs de $B_1^{\wedge p}$; $CB_2^{\wedge p}$ dans (12) et (13) il vient

$$\Phi = \vec{\lambda}\,\alpha_1^{\wedge p} X^{\wedge p},$$

$$\mathrm{Cor}_X\Phi = \vec{\lambda}'\alpha_1^{\wedge p}\, CX^{\wedge p}, \qquad \text{d'où, d'après 9,} \qquad \vec{\lambda} = \vec{\lambda}'.$$

C. Q. F. D.

Remarque. — Si les bases B_1 et B_2 sont normales, les composantes complémentaires de Φ et $\mathrm{Cor}_X\Phi$ exprimées respectivement dans B_1 et B_2 sont égales.

8. STRUCTURE MÉTRIQUE D'UNE ALGÈBRE EXTÉRIEURE. — *On dit que l'algèbre $\mathfrak{A}$ reçoit une structure métrique quand on convient de restreindre les corrélations à la seule classe de bases* G_X.

L'opération de corrélation devient alors une opération intrinsèque, $[x]$ désignant comme ci-dessus le produit extérieur $[X_1, \ldots, X_n]$ des vecteurs fondamentaux de la base X, soient deux formes F_1 et F_2 de même degré p dont les composantes dans X sont notées $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ pour F_1; $\mu_1, \ldots, \mu_N$ pour F_2.

On appelle produit scalaire $(F_1.F_2)$ la quantité numérique définie par la relation

$$(15) \qquad (F_1.F_2)[x] = [F_1 \operatorname{Cor}_X F_2] = [F_2 \operatorname{Cor}_X F_1] = \Sigma\lambda_i\mu_i[x],$$

il vient

$$(16) \qquad (F_1.F_2) = \Sigma\lambda_i\mu_i,$$

$(F_1.F_2) = F_1^2$ est la norme euclidienne de F_1, sa valeur est $\Sigma\lambda_i^2$. Quand elle est nulle, on dit que F_1 considérée comme élément de l'espace vectoriel $\binom{n}{p}$ est isotrope.

Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ sont les composantes de F_1 dans une base quelconque et $\mu_1, \ldots, \mu_N$ celle de F_2 *dans la base supplémentaire, on a encore* ([12])

$$(17) \qquad (F_1.F_2) = \Sigma\lambda_i\mu_i = \vec{\lambda}.\overset{\uparrow}{\mu}, \qquad \text{avec} \begin{cases} \vec{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_N), \\ \vec{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_N), \\ \overset{\uparrow}{\mu} = (\vec{\mu})^*. \end{cases}$$

Le module $\binom{n}{1}$ constituant l'espace fondamental E_n, p éléments non liés de $\binom{n}{1}$ déterminent un sous-espace N de E_n.

Deux sous-espaces N et N_1 de E_n sont dits *orthogonaux* si quel que soit le vecteur U de N et le vecteur V de N_1 on a toujours $(U.V) = 0$. N et N_1 sont *orthogonaux associés* dans E_n si tout vecteur perpendiculaire (ou orthogonal) à N est dans N_1 et réciproquement.

([12]) Si l'on pose $F_1 = \vec{\lambda} B_1^{\wedge p}$, on a d'après le théorème 2 :

$$\operatorname{Cor}_X F_1 = \vec{\lambda}\,|\alpha_1|\,CB_2^{\wedge p}$$

Par ailleurs, $F_2 = \vec{\mu} B_2^{\wedge p}$. Il vient donc

$$[F_2 \operatorname{Cor} F_1] = (\vec{\mu}.\overset{\uparrow}{\lambda})|\alpha_1|\,[B_2^{\wedge n}].$$

Mais

$$[B_2^{\wedge n}] = |\alpha|^{-1}[x],$$

d'où

$$(F_1.F_2) = (\vec{\mu}.\overset{\uparrow}{\lambda}) = (\vec{\lambda}.\overset{\uparrow}{\mu}).$$

$U_1, \ldots, U_p$ étant éléments d'une base quelconque dans N, $U_1, \ldots, U_p; B_1, \ldots, B_q$ ceux d'une base $\mathcal{B}$ de E_n, considérons la base $\mathcal{B}' = (D_1, \ldots, D_p; V_1, \ldots, V_q)$ supplémentaire de $\mathcal{B}$, on trouve en appliquant les définitions précédentes que $(U_1, \ldots, U_p)$, $(V_1, \ldots, V_q)$ sont deux sous-espaces orthogonaux associés. Par ailleurs d'après le théorème 2 du paragraphe 7 $[V_1, \ldots, V_q]$ est le corrélatif de $[U_1, \ldots, U_p]$. On peut donc conclure en énonçant :

THÉORÈME. — *La corrélation restreinte au groupe* G_X *détermine une polarité symétrique par laquelle tout sous-espace* $N \in E_n$ *correspond au sous-espace* N' *orthogonal associé.*

Formule de Lagrange généralisée. — Soient $U_{p\times n}$, $Z_{p\times n}$ deux tableaux à p lignes et n colonnes ; $\delta_x \in U$, $\delta'_x \in Z$ deux mineurs homologues de degré x (*cf.* paragraphe 4).

Supposons que U et Z soient de rang p $(n \geqq p)$. Dans l'espace numérique complexe E_n rapporté à la base canonique (X), $\{\vec{X}_1 = (10, \ldots, 0), \ldots, \vec{X}_n = (0, \ldots, 01\}$, les vecteurs lignes $\vec{U}_1, \ldots, \vec{U}_p$ de U_p ont pour produit extérieur un multivecteur F. De même les vecteurs lignes $\vec{Z}_1, \ldots, \vec{Z}_p$ de Z ont pour produit extérieur un multivecteur G et dans (X) le produit scalaire (F.G) est égal à la somme $\Sigma\, \delta_p \delta'_p$ étendue à tous les mineurs de degré p de U (et de Z).

THÉORÈME. — *La quantité* $\Sigma\, \delta_p \delta'_p$ *est égale au terminant de la matrice* $(UZ^\star)$.

Démonstration. — Nous déterminerons les composantes de F dans une certaine base $\mathcal{B}$, celles de G dans la base supplémentaire $\mathcal{B}_1$ et nous calculerons de nouveau (F.G) en appliquant la relation (17).

Posons

$$\mathcal{B} = (U_1, \ldots, U_p; C_1, \ldots, C_q), \qquad \mathcal{B}_1 = (D_1, \ldots, D_p; V_1, \ldots, V_q),$$

F se réduit dans $\mathcal{B}$ au monôme de base $[U_1, \ldots, U_p]$ et ne possède qu'une composante non nulle. C'est le facteur 1 qui affecte ce monôme. Il s'ensuit d'après (17) que $(F.G) = \varphi$; φ étant la composante de G qui affecte $[D_1, \ldots, D_p]$ dans $\mathcal{B}$.

Pour calculer φ posons $\left[\text{avec } \hat{Z}_i = \left(\vec{Z}_i\right)^\star\right]$

$$Z^\star = \left(\hat{Z}_1, \ldots, \hat{Z}_p\right) = \left(\hat{D}_1, \ldots, \hat{D}_p; \hat{V}_1, \ldots, \hat{V}_q\right) \begin{pmatrix} t_{11} & \ldots & t_{p1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ t_{1p} & \ldots & t_{pp} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ t_{1n} & \ldots & t_{pn} \end{pmatrix}.$$

Il vient

$$\varphi = \begin{vmatrix} t_{11} & \ldots & t_{p1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ t_{1p} & \ldots & t_{pp} \end{vmatrix}.$$

On a par ailleurs

$$(UZ^*) = \begin{pmatrix} \vec{U}_1 \\ \vdots \\ \vec{U}_p \end{pmatrix} (\hat{D}_1, \ldots, \hat{D}_p ; \hat{V}_1, \ldots, \hat{V}_p) \begin{pmatrix} t_{11} & \ldots & t_{p1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ t_{1n} & \ldots & t_{pn} \end{pmatrix}$$

$$= (I_p \quad 0) \begin{pmatrix} t_{11} & \ldots & t_{p1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ t_{1n} & \ldots & t_{pn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & \ldots & t_{p1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ t_{1p} & \ldots & t_{pp} \end{pmatrix}$$

et

$$|UZ^*| = \varphi,$$

d'où

$$\text{(18)} \qquad F.G = |UZ^*|,$$

Remarque. — De (18) on tire en particulier

$$F^2 = |UU^*| = (F \operatorname{Cor}_X F],$$

on en déduit aussitôt le théorème :

Pour qu'un sous-espace N *de degré p soit dans* E_n *complémentaire de l'espace associé perpendiculaire il faut et il suffit qu'un multivecteur ayant* N *pour support soit élément non isotrope de l'espace vectoriel* $E_n^{\wedge p}$.

Relation aux modules des mineurs d'un tableau. — λ étant un scalaire, supposons que U s'écrive : $U = (\lambda I_p, \Phi_{p\times q})$. La matrice absolument quelconque $\Phi_{p\times q}$ est composée d'éléments notés φ_{ij} et s représente le plus petit des deux nombres p et q (si $p = q$, $s = p = q$); I_p étant la matrice unité d'ordre p.

En utilisant la même base (X) que ci-dessus et en posant $X_{p+j} = Y_j$ ($j = 1, \ldots, q$), on aura

$$F = \prod_{i=1,\ldots,p} \left[\lambda X_i + \sum_{j=1}^{j=q} \varphi_{ij} Y_j \right].$$

Un terme partiel du produit précédent s'écrira, au signe près

$$\lambda^r [X_{i_1}, \ldots, X_{i_r}] \,|\, \varphi_{i_{r+1}, j_1}, \ldots, \varphi_{i_p, j_{p-r}} \,|\, [Y_{j_1}, \ldots, Y_{j_{p-r}}],$$

de sorte qu'il existe entre toute composante δ de F dans la base (X) (à l'exclusion de la composante λ^p) et tout mineur m_y de degré y de Φ ($y = 1, \ldots, s$) une correspondance biunivoque déterminée par la relation $\delta = \varepsilon \lambda^x m_y$ ($x + y = p$, $\varepsilon = \pm 1$).

Posons encore $Z = (I_p, \overline{\Phi}_{p\times q})$ ($\overline{\Phi}$ est la matrice conjuguée de Φ sur le corps des complexes). La composante δ' de Z homologue à δ s'écrit $\delta' = \varepsilon \overline{m}_y$.

Ainsi le produit scalaire (F.G) a pour expression

$$(F.G) = \lambda^p + \sum_{x,m} \lambda^x m_y \overline{m}_y.$$

Si l'on désigne par S_x la somme des carrés des modules de tous les mineurs de degré x de φ, on a donc

$$(F.G) = \lambda^p + \sum_1^s \lambda^{p-x} S_x.$$

Or, d'après la formule (18), on a aussi

$$(F.G) = \left| (\lambda I_p \Phi) \begin{pmatrix} I_p \\ \Phi^\star \end{pmatrix} \right| = | \lambda I_p + \Phi \overline{\Phi}^\star |.$$

Il vient donc

$$(19) \qquad \boxed{| \lambda I_p + \Phi \overline{\Phi}^\star | = \lambda^p + \sum_1^s \lambda^{p-x} S_x.}$$

Telle est la relation que nous nommons « relation aux modules des mineurs d'un tableau ».

Remarque. — Avec $\lambda = 1$ on aperçoit immédiatement que (19) entraîne

$$\boxed{| I_p + \Phi \overline{\Phi}^\star | = | I_q + \overline{\Phi}^\star \Phi | = 1 + \sum_1^s S_x.}$$

Application. — Désignons par χ une valeur propre de la matrice $\varphi\overline{\varphi}^\star$ et par $\overset{\curlywedge}{V}$ un vecteur propre associé à χ. Supposons de plus $q \geqq p$ pour fixer les idées. Il viendra

$$\Phi \overline{\Phi}^\star \overset{\curlywedge}{V} = \chi \overset{\curlywedge}{V}, \qquad \text{d'où} \qquad \vec{V} \Phi \left(\overline{\vec{V} \Phi} \right)^\star = \chi \vec{V} . \overset{\curlywedge}{V},$$

ce qui prouve que χ ne peut être que positif ou nul. En conséquence l'équation caractéristique

$$(20) \qquad \chi^p - \chi^{p-1} S_1 + \ldots + (-1)^p S^p = 0$$

[déduite de (19) en remplaçant λ par $-\chi$ et en annulant le premier membre], n'a que des racines positives ou nulles.

9. La multiplication régressive :

Théorème. — *Étant donné dans l'espace normé* E_n k *formes* $F_1, \ldots, F_k$, *il existe une forme* F *définie par la relation*

$$(21) \qquad \operatorname{Cor} F = [\operatorname{Cor} F_1, \ldots, \operatorname{Cor} F_k]$$

indépendante de la base à laquelle est rattachée la corrélation.

Démonstration. — Soient (X) et (Y) deux bases quelconques. Posons

$$(22) \qquad \operatorname{Cor}_X F_X = [\operatorname{Cor}_X F_1, \ldots, \operatorname{Cor}_X F_k],$$

$$(23) \qquad \operatorname{Cor}_Y F_Y = [\operatorname{Cor}_Y F_1, \ldots, \operatorname{Cor}_Y F_k],$$

soit θ la transformation cohérente dans $\mathcal{A}$ telle que, quel que soit l'élément Φ de l'algèbre $\mathcal{A}$, on ait

$$\mathrm{Cor}_{\mathrm{Y}}\Phi = \theta\,\mathrm{Cor}_{\mathrm{X}}\Phi. \tag{24}$$

De (24) on tire notamment

$$\mathrm{Cor}_{\mathrm{Y}}\mathrm{F}_{\mathrm{Y}} = \theta\,\mathrm{Cor}_{\mathrm{X}}\mathrm{F}_{\mathrm{Y}}; \qquad \mathrm{Cor}_{\mathrm{Y}}\mathrm{F}_i = \theta\,\mathrm{Cor}_{\mathrm{X}}\mathrm{F}_i.$$

Par substitution de ces seconds membres dans (23), il vient (la multiplication extérieure étant permutable avec θ)

$$\theta\,\mathrm{Cor}_{\mathrm{X}}\mathrm{F}_{\mathrm{Y}} = [\theta\,\mathrm{Cor}_{\mathrm{X}}\mathrm{F}_1, \ldots, \theta\,\mathrm{Cor}_{\mathrm{X}}\mathrm{F}_k] = \theta[\mathrm{Cor}_{\mathrm{X}}\mathrm{F}_1, \ldots, \mathrm{Cor}_{\mathrm{X}}\mathrm{F}_k].$$

D'où en tenant compte de (22) :

$$\theta\,\mathrm{Cor}_{\mathrm{X}}\mathrm{F}_{\mathrm{Y}} = \theta\,\mathrm{Cor}_{\mathrm{X}}\mathrm{F}_{\mathrm{X}}, \qquad \text{c'est-à-dire} \quad \mathrm{F}_{\mathrm{Y}} = \mathrm{F}_{\mathrm{X}}.$$

C. Q. F. D.

Notons que si p_i désigne le degré de F_i, r celui de F, on a

$$r = (\Sigma_{p_i}) - n(k-1). \tag{25}$$

Définition. — *La forme* F *définie à l'aide de* $\mathrm{F}_1, \ldots, \mathrm{F}_k$ *par* (18) *est appelée le produit régressif de* $\mathrm{F}_1, \ldots, \mathrm{F}_k$ *et notée* :

$$\mathrm{F} = \mathrm{F}_1 \,|\, \mathrm{F}_2 \,|\, \ldots \,|\, \mathrm{F}_k. \tag{26}$$

On interprète (21) en énonçant :

La multiplication régressive est transmuée de la multiplication extérieure par une corrélation. Elle est évidemment permutable avec l'addition et la multiplication par un nombre.

Remarque. — En faisant $k = 2$ dans (18), $\mathrm{F}_1 = \mathrm{A}$, $\mathrm{F}_2 = \mathrm{B}$, il vient de (26)

$$\boxed{\mathrm{Cor}(\mathrm{A} \,|\, \mathrm{B}) = [\mathrm{Cor}\,\mathrm{A}\;\mathrm{Cor}\,\mathrm{B}].} \tag{27}$$

Si la corrélation est normale on a pour $\mathrm{H} \in \binom{n}{p}$,

$$\mathrm{Cor}\,\mathrm{Cor}\,\mathrm{H} = (-1)^{n(n-p)}\mathrm{H}.$$

Donc dans ce cas, en posant $\mathrm{A}' = \mathrm{Cor}\,\mathrm{A}$, $\mathrm{B}' = \mathrm{Cor}\,\mathrm{B}$, on tire de (27) :

$$\boxed{\mathrm{Cor}[\mathrm{A}'\mathrm{B}'] = \mathrm{Cor}\,\mathrm{A}' \,|\, \mathrm{Cor}\,\mathrm{B}'.} \tag{28}$$

Détermination du produit régressif de deux formes dans une base donnée. La dérivée d'une forme par rapport à un monôme est un produit régressif.

Lemme. — α, u, β *étant trois monômes unitaires* ($[\alpha u \beta] \neq 0$), *on a dans* E_n *support du n-vecteur* $[\alpha u \beta]$:

$$\boxed{\alpha u \,|\, u\beta = u[\alpha u \beta].} \tag{29}$$

Dans (29) le facteur $[\alpha u \beta]$ est identifié à la composante du n-vecteur dans une base de E_n qu'on laisse indéterminée (*cf.* début du paragraphe 7).

Démonstration. — Les facteurs de degré 1 de α, u, β fournissent une base dans laquelle la corrélation sera notée Cor_a. r, s, t sont les degrés respectifs de α, u, β et l'on pose $[\alpha u \beta] = [a]$. Il vient

$$\mathrm{Cor}_a[\alpha u] = \beta[a],$$
$$\mathrm{Cor}_a[u\beta] = (-1)^{s(t+r)}\alpha[a],$$

d'où

$$\mathrm{Cor}_a[\alpha u]\,\mathrm{Cor}_a[u\beta] = (-1)^{s(t+r)}\beta\alpha[a]^2.$$

Mais par ailleurs,

$$(-1)^{s(t+r)}\beta\alpha[a] = \mathrm{Cor}_a u,$$

donc

$$\mathrm{Cor}_a[\alpha u]\,\mathrm{Cor}_a[u\beta] = \mathrm{Cor}_a(u[a]),$$

c'est-à-dire d'après (27)

$$\alpha u \mid u\beta = u[\alpha u \beta].$$

C. Q. F. D.

Remarque. — Le produit régressif de deux formes est indépendant de la base choisie dans l'espace fondamental mais non pas de cet espace fondamental lui-même.

Si ces deux formes sont simples et figurées comme ci-dessus par les notations αu, $u\beta$, (29) exprime que dans l'espace du multivecteur $[\alpha u \beta]$, le produit $\alpha u \mid u\beta$ est proportionnel au p. g. c. d. de ses facteurs ou qu'il recouvre leur intersection. Dans tout espace contenant $[\alpha u \beta]$ tel que celui du multivecteur $[\alpha u \beta \gamma]$ (degré de $\gamma > 0$), on aperçoit immédiatement que $\alpha u \mid u\beta = 0$. Pour conclure nous énoncerons :

Le produit régressif dans E_n *de deux multivecteurs est différent de zéro si et seulement si son degré* [donné par (22)] *est égal à celui de leur intersection.*

Calcul du produit régressif, dans l'espace E_n *rapporté à une base* (a), *des formes* F *et* G *de degrés* p *et* q. — Pour qu'on n'ait pas identiquement $F \mid G = 0$, nous supposerons $p+q \geqq n$ et même d'une façon plus restrictive : $p+q = n+r$ avec $r > 0$; p et $q < n$. Dans ces conditions, si nous désignons par α_i, u_j, β_k les monômes unitaires de degrés $p-r$, r, $q-r$; par $\lambda_{\alpha_i u_j}$ et $\mu_{u_j\beta_k}$ les composantes de F et G il viendra en application du lemme

$$\boxed{F \mid G = \sum_{\alpha_i} \sum_{u_j} \lambda_{\alpha_i u_j}\,\mu_{\alpha'_i}[u_j]\,[a],} \tag{30}$$

$\alpha'_i = u_j\beta_k$ étant complémentaire de α_i dans E_n.

Examen de deux cas particuliers. — 1° (29) garde un sens quand *u est de degré zéro* : avec $u = 1$, il vient $\alpha \mid \beta = [\alpha\beta]$. Nous postulerons donc sans crainte de contradiction que le produit régressif $F \mid G$ se confond avec la mesure du produit extérieur $[F.G]$ quand $p + q = n$.

2° (29) garde encore un sens *quand* $\alpha = 1$, ce qui nous permet de définir d'une façon abstraite le produit (commutable) d'une forme F par un n-vecteur G de E_n. a_i étant un monôme unitaire de degré p dans la base $[a]$ et a'_i le complémentaire de a_i, on a

$$F[a] = \sum_{a'_i} [F a'_i][a_i]. \tag{31}$$

Théorème. — *La dérivée d'une forme* F *par rapport au monôme* α *dans une base donnée s'exprime intrinsèquement à l'aide du monôme* α' *complémentaire de* α *et du produit* $[a] = [\alpha\alpha']$. On a

$$\boxed{[a]\frac{\partial F}{\partial \alpha} = F \mid \alpha',} \tag{32}$$

car : 1° de (30)

$$F \mid \alpha' = \sum_{u_j} \lambda_{\alpha u_j}[u_j][a];$$

2° $\sum\limits_{u_j} \lambda_{\alpha u_j}[u_j]$ est la dérivée $\dfrac{\partial F}{\partial \alpha}$.

Corollaire. — $F \in \mathfrak{A}_n$ *étant une forme de degré* p_1 *développée dans les bases* (X) *et* ($\mathfrak{B}$) *dont les monômes « unités » du degré* $p \leq p_1$ *sont notés* x_i, b_j (*leurs complémentaires*, x'_i, b'_j ; *les monômes unités du degré* n, $[x]$ *et* $[b]$), *on a*

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial b_i} = \sum_j \frac{\partial F}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial b_i}.} \tag{33}$$

En effet d'après (32)

$$\frac{\partial F}{\partial b_i} = \frac{1}{[b]} F \mid b'_i$$

et l'on peut écrire

$$b'_i = \sum_j \frac{\partial b'_i}{\partial x'_j} x'_j.$$

Il vient donc

$$\frac{\partial F}{\partial b_i} = \sum_j F \mid x'_j \frac{1}{[b]} \frac{\partial b'_i}{\partial x'_j}.$$

D'après (6) on peut remplacer dans cette dernière expression : $\dfrac{1}{[b]}\dfrac{\partial b'_i}{\partial x'_j}$ par $\dfrac{1}{[x]}\dfrac{\partial x_j}{\partial b_i}$. On obtient alors

$$\frac{\partial F}{\partial b_i} = \sum_j F \mid x'_j \frac{1}{[x]}\frac{\partial x_j}{\partial b_i}, \qquad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{\partial F}{\partial b_i} = \sum_j \frac{\partial F}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial b_i}.$$

C. Q. F. D.

Conclusions. — 1° La matrice $\frac{\partial x_j}{\partial b_i}$ étant régulière, il s'ensuit que : *Dans l'espace vectoriel* $E_n^{\wedge(p_1-p)}$ *le rang de la suite des dérivées de* F *est un invariant indépendant de la base de dérivation.*

2° Il résulte encore de (33) que si α représente maintenant, comme au paragraphe 12 (2°) la matrice du changement de base $X \to \mathcal{B} = (\alpha)X$, $\alpha^{\wedge p}$ ayant même sens qu'à la page 219 et γ étant définie par la relation

$$(34)\qquad \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial b_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial b_N} \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial x_N} \end{pmatrix} \qquad \text{on a} \quad \boxed{\gamma = (\alpha^{\wedge p})^{\star-1}.}$$

En particulier pour $p = 1$, γ peut être choisie arbitrairement sous la seule condition d'être régulière.

Pour $p = p_1$ (34) exprime comment se transforment les composantes de F.

3° D'après (33) la forme $\sum_j x_j \frac{\partial F}{\partial x_j}$ reste invariante lors d'un changement de base :

$$\sum_i b_i \frac{\partial F}{\partial b_i} = \sum_{i,j} b_i \frac{\partial x_j}{\partial b_i} \frac{\partial F}{\partial x_j} = \sum_j x_j \frac{\partial F}{\partial x_j}.$$

Ce fait est d'ailleurs une conséquence immédiate de la relation 17 du paragraphe.

10. Espace propre et rang d'une forme extérieure. — *a. Degré minimum d'une forme* Φ *dans un sous-espace de* E_n *où* Φ *est définie.* — Étant donné une forme simple $\omega = [X_1, \ldots, X_r]$ dont les éléments sont une partie de la base complète (X) de E_n dans laquelle Φ est exprimée, nous dirons que Φ est de DEGRÉ MINIMUM k DANS ω si chaque terme de Φ contient au moins k des $X_i \in \omega$ et s'il existe au moins un terme de Φ qui renferme strictement k éléments $X_i \in \omega$. Pour qu'il en soit ainsi il faut et il suffit, a_x étant un monôme en $X_i \in \omega$ du degré x qu'on ait

$$(35)\quad [\Phi a_{r-k+1}] = 0 \quad \text{pour tout } a_{r-k+1} \qquad \text{et} \qquad [\Phi a_{r-k}] \neq 0 \quad \text{pour au moins un } a_{r-k}.$$

Il s'ensuit que le degré minimum k dans ω *est invariant pour tout changement de base qui conserve les éléments* $X_i \in \omega$.

Si Φ (de degré k au moins dans ω) est un multivecteur, les sous-espaces Φ et ω ont une intersection de degré k, car $V_1, \ldots, V_p$ étant les p-vecteurs dont Φ est le produit, les égalités (35) expriment que la suite $V_1, \ldots, V_p; X_1, \ldots, X_r$ est de rang $p + r - k$. Les degrés de Φ et ω étant p et r, leur p. g. c. d. est de degré $p + r - (p + r - k) = k$. C. Q. F. D.

b. Espace propre et rang d'une forme extérieure. — Il peut arriver que le degré minimum de Φ dans ω soit égal au degré p de Φ. On dit alors que Φ est définie sur ou dans ω. Si Φ est définie dans deux multivecteurs, elle est définie dans leur intersection. *On appelle* ESPACE PROPRE *de* Φ *le plus petit sous-espace* $\mathcal{E} \leq E_n$ *sur lequel elle est définie.* D'après *a*. la notion d'espace propre est bien intrinsèque. *Le rang de* Φ *est le degré de son espace propre.* Il est égal au degré de Φ si et seulement si Φ est simple. Le rang d'une forme irréductible à un multivecteur est donc plus grand que son degré.

Étant donné un ensemble de formes, on appelle espace propre de l'ensemble le plus petit sous-espace qui contient à la fois les espaces propres de tous ses éléments.

LEMME A. — *Deux systèmes de* N *formes* F_i, Φ_i $(i=1, \ldots, N)$ *qui se correspondent dans une substitution linéaire régulière ont le même espace propre.*

On a, par hypothèse

$$\Phi_i = \sum_k x_{ik} F_k \qquad (x_{ik} \in K), \tag{36$_1$}$$

$$F_i = \sum_i y_{ki} \Phi_i \qquad (y_{ki} \in K). \tag{36$_2$}$$

Supposons les F_i donnés dans leur espace propre $\mathcal{E}$ (d'ordre r). D'après (36$_1$) on voit que les Φ_i sont définis dans $\mathcal{E}$ et que le rang de leur ensemble est au plus égal à r. Inversement d'après (36$_2$) l'espace $\mathcal{E}_1$ des Φ_i contient $\mathcal{E}$.

En conclusion $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}_1$ sont confondus. C. Q. F. D.

COROLLAIRE. — *Quelle que soit la base de référence, toutes les dérivées premières d'une forme* F *ont dans leur ensemble un même espace propre.* [C'est une conséquence directe du lemme précédent et de (33)].

THÉORÈME 1. — *L'espace propre* $\mathcal{E}_1$, *de l'ensemble des dérivées premières d'une forme* F *est confondu avec l'espace propre,* $\mathcal{E}$, *de* F.

D'après (35) si une base (ω) de l'espace propre d'un ensemble S de formes est une partie de la base complète de E_n, S ne s'écrit avec aucun vecteur basique étranger à (ω). Comme $\mathcal{E}_1 \subseteq \mathcal{E}$ formons une base de $\mathcal{E}$ à l'aide des vecteurs $A_1, \ldots, A_s$ composant une base de $\mathcal{E}_1$ et des vecteurs $B_1, \ldots, B_k$ de $\mathcal{E}$. Nous pourrons écrire ($p > 1$ étant le degré de F) [*cf.* § 5, relation (17)]

$$pF = \sum A_i \frac{\partial F}{\partial A_i} + \sum B_j \frac{\partial F}{\partial B_j}, \tag{37}$$

on a, par hypothèse

$$\frac{\partial^2 F}{\partial [A_i B_j]} = \frac{\partial^2 F}{\partial [B_i B_j]} = 0. \tag{38}$$

Mais

$$(p-1)\frac{\partial F}{\partial B_i} = \sum_i A_i \frac{\partial^2 F}{\partial [B_i A_i]} + \sum B_j \frac{\partial^2 F}{\partial [B_i B_j]}. \tag{39}$$

D'après (38) et (39) $\frac{\partial F}{\partial B_t} = 0$. Quel que soit $t = 1, \ldots, k$ d'où il résulte d'après (37), que l'espace propre de F est inclus dans $\mathcal{E}_1$. On en conclut : $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1$. C. Q. F. D.

Corollaire. — *L'espace propre de* $F \in \binom{n}{p}$ *se confond avec le plus petit sous-espace de* E_n *qui contient toutes les dérivées partielles dont le monôme de dérivation est de degré* $(p-1)$.

C'est une conséquence immédiate du théorème précédent par lequel on établit sans peine que l'ensemble des dérivées d'ordre k a encore $\mathcal{E}$ pour espace propre.

Opérateurs de dérivations et annulateurs de formes. — L'expression « annulateur » de polynôme désigne un polynôme ayant un produit extérieur nul avec un autre polynôme.

Dans une base $X = (X_1, \ldots, X_n)$ de E_n un opérateur de dérivation du degré k est défini par la relation $D_k = \Sigma\lambda_i \frac{\partial}{\partial x_i}$; $\lambda_i \in K$ et les x_i sont tous les monômes basiques de degré k en (X_i). *La forme* $G_k = \Sigma\lambda_i[x_i]$ *sera nommée la k-forme associée à* D_k. L'ensemble $\mathcal{D}_k$ des D_k est évidemment un espace vectoriel à $\binom{n}{p}$ dimensions isomorphe à l'espace $\overline{\mathcal{D}}_k$ des k-formes associées. On dit que D_k annule F si $D_k F = 0$ ($F \in \mathcal{C}_n$ est une forme de degré $p \geqq k$).

Pour F donnée, l'ensemble des formes $D_k F$ est un espace vectoriel $\mathcal{D}_k(F)$ dont la dimension a un sens intrinsèque (d'après le lemme A). Elle est égale au nombre maximum de dérivées $k^{\text{ièmes}}$ de F qui sont linéairement indépendantes.

Théorème 2. — *Soient dans la base* (X) *un opérateur de dérivation* D_k *et la forme associée* G_k, *les relations*

$$D_k F = 0 \quad \text{et} \quad [\mathrm{Cor}_X F . G_k] = 0 \quad \textit{sont équivalentes.}$$

En effet, l'espace E_n étant normé par (X) pour simplifier l'exposé, on a, de (32)

$$D_k F = F \mid \mathrm{Cor}_X G_k.$$

Si $D_k F = 0$, $F \mid \mathrm{Cor}_X G_k = 0$, d'où comme [par (28)]

$$\mathrm{Cor}_X [F \mid \mathrm{Cor}_X G_k] = (-1)^{r(n-k)} [\mathrm{Cor}_X F . G_k], \qquad [\mathrm{Cor}_X F . G_k] = 0$$

et réciproquement. C. Q. F. D.

Le théorème que nous venons d'établir peut s'appliquer à la recherche de l'espace propre d'une forme F. Il nécessite alors le lemme préliminaire suivant :

Lemme B. — $A_1, \ldots, A_r$ *étant r vecteurs linéairement indépendants et* F *une forme quelconque le système de relations* $[FA_i] = 0$ *est équivalent à l'égalité*

$$F = [A_1, \ldots, A_r] \frac{\partial F}{\partial [A_1, \ldots, A_r]}.$$

En effet de $A_1 F = 0$, on tire par dérivation, $F - A_1 \dfrac{\partial F}{\partial A_1} = 0$, ce qui établit le lemme pour $r = 1$.

Il s'étend par induction à r quelconque car si $FA_1 = \ldots = FA_r = 0$ entraînent $F = [A_1, \ldots, A_r] \dfrac{\partial F}{\partial [A_1, \ldots, A_r]}$, en posant encore $FA_{r+1} = 0$, on a immédiatement, sachant que $[A_1, \ldots, A_{r+1}] \neq 0$:

$$A_{r+1} \frac{\partial F}{\partial [A_1, \ldots, A_r]} = 0,$$

d'où comme ci-dessus

$$\frac{\partial F}{\partial [A_1, \ldots, A_r]} = A_{r+1} \frac{\partial F}{\partial [A_1, \ldots, A_{r+1}]} \qquad \text{et} \qquad F = [A_1, \ldots, A_{r+1}] \frac{\partial F}{\partial [A_1, \ldots, A_{r+1}]}.$$

D'ailleurs cette dernière égalité entraîne

$$FA_i = 0 \qquad (\text{pour } i = 1, \ldots, r+1).$$

C. Q. F. D.

THÉORÈME 3. — *Dans la base* (X) *si* h *opérateurs de dérivation du premier degré* $D_1^1, \ldots, D_1^h$ *associés aux vecteurs* $A_1, \ldots, A_h$ *de produit extérieur* P *non nul annulent séparément la p-forme* F, *l'espace propre de* F *est contenu dans* $\mathrm{Cor}_X P$.

En effet, d'après le théorème précédent, $D_1^s F = 0$ entraîne $[\mathrm{Cor}_X F . A_s] = 0$ et d'après le lemme, $\mathrm{Cor}_X F$ admettant les annulateurs monômes $A_1, \ldots, A_h$, on peut écrire

$$\mathrm{Cor}_X F = \Phi[[A_1, \ldots, A_h]] \qquad \text{avec} \quad \Phi \in \binom{n}{p-h}$$

d'où, la base X étant supposée normale

$$(-1)^{n(n-p)} F = \mathrm{Cor}_X \Phi \mid \mathrm{Cor}_X [A_1, \ldots, A_h].$$

Mais $[A_1, \ldots, A_h]$ étant un multivecteur, $\mathrm{Cor}_X [A_1, \ldots, A_h]$ est également un multivecteur, de degré $r = n - h$, décomposable en un produit de vecteurs, tel que $[B_1, \ldots, B_r]$.

Soient $C_1, \ldots, C_h$, h vecteurs formant avec $B_1, \ldots, B_r$ une base normale $\mathcal{B}$ de E_n, la relation précédente s'écrit

$$F = \Phi_1 \mid \mathrm{Cor}_B [C_1, \ldots, C_h],$$

d'où d'après (32)

$$F = \frac{\partial \Phi_1}{\partial [C_1, \ldots, C_r]},$$

ce qui exprime que la forme F, dans la base $\mathcal{B}$, s'écrit uniquement avec $B_1, \ldots, B_r$. C. Q. F. D.

CONCLUSION. — *Le rang de la p-forme* F *est égal au nombre maximum de ses dérivées premières linéairement indépendantes.*

En effet soit r le rang de F et s la dimension de l'espace vectoriel $\mathcal{D}_1(F)$:

1° D'après le théorème qu'on vient de démontrer $s \geqq r$;

2° Soient $B_1, \ldots, B_r$, r éléments non liés de degré 1 de l'espace propre de F constituant avec $C_1, \ldots, C_h$ une base complète de E_n. Dans une telle base on a évidemment

$$\frac{\partial F}{\partial C_1} = \ldots = \frac{\partial F}{\partial C_h} = 0 \qquad \text{d'où} \qquad s \leqq r.$$

En comparant 1° et 2°, on trouve $s = r$. C. Q. F. D.

Remarque. — Considérons une p-forme F et deux termes quelconques à composantes non nulles, si leur p. g. c. d. est au plus de degré $p-2$, les dérivées partielles du premier ordre ont toutes des structures distinctes. On en déduit le théorème suivant :

Théorème. — *Si les termes à composantes non nulles de* F *ont deux à deux un p. g. c. d. de degré $\leqq p-2$, le rang de* F *est strictement égal au nombre des variables avec lesquelles elle est écrite.*

c. *Relations entre un « p-vecteur » de* E_n *et ses dérivées dans une base* $(\mathcal{B})$ *quelconque de* E_n. — D'après la formule (32) (p. 231), toute dérivée de F étant le produit régressif de deux formes simples est aussi un « k-vecteur ». Son espace propre est inclus dans celui de F. Donc toute dérivée de F divise F. En particulier et en vertu du dernier corollaire, p dérivées d'ordre $(p-1)$, linéairement indépendantes, ont un produit proportionnel à F.

Avec précision, soit $\alpha = [A_1, \ldots, A_p]$ un monôme unitaire en $(\mathcal{B})$ (de degré p). Soit $\beta = [B_1, \ldots, B_q]$ $(p+q=n)$ le complémentaire de α dans $(\mathcal{B})$. Désignons encore par α'_i le monôme unitaire dont le complémentaire dans $[\alpha]$ est A_i et posons

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} = \lambda, \qquad \varphi_i = \frac{\partial F}{\partial \alpha'_i} = \lambda A_i + \Sigma \lambda_i^j B_j \qquad (\lambda, \lambda_i^j \in K).$$

Si $\lambda \neq 0$ les φ_i sont linéairement indépendants et

$$[\varphi_1, \ldots, \varphi_p] = \lambda^{p-1} F. \tag{40}$$

En dérivant (40) successivement par rapport à $A_1, \ldots, A_k$ il vient

$$[\varphi_{k+1}, \ldots, \varphi_p] = \lambda^{p-k-1} \frac{\partial F}{\partial [A_1, \ldots, A_k]}.$$

On aurait de même

$$[\varphi_1, \ldots, \varphi_k] = (-1)^{k(p-k)} \lambda^{k-1} \frac{\partial F}{\partial [A_{k+1}, \ldots, A_p]},$$

d'où

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial [A_1, \ldots, A_k]} \, \frac{\partial F}{\partial [A_{k+1}, \ldots, A_p]} = F \, \frac{\partial F}{\partial [A_1, \ldots, A_p]}.} \tag{41}$$

Cette formule est générale : elle est encore vérifiée quand

$$\frac{\partial F}{\partial[A_1, \ldots, A_p]} = \lambda = 0.$$

En effet : si $\lambda = 0$; F, $\dfrac{\partial F}{\partial[A_1, \ldots, A_k]}$, $\dfrac{\partial F}{\partial[A_{k+1}, \ldots, A_p]}$ sont au moins de degré 1 dans le multivecteur β. Leur degré minimum dans β est d'ailleurs le même et ces trois formes possèdent le même h-vecteur commun en $(B_1, \ldots, B_q)$. Il en résulte que le premier membre de (41) s'annule en même temps que le second.

Remarque. — En écrivant que les deux membres de (41) ont même composante relativement à un monôme unitaire quelconque de (X) on exprime à quelles conditions scalaires doivent satisfaire les composantes d'une forme F pour être simple. Dans la note annexée à ce Mémoire, nous apprendrons à former un système strict de telles conditions. Ceux qui découlent des équations (41) sont en général surabondants, nous en détaillerons cependant un à titre d'exemple.

Faisons dans (41) $k = 1$. Désignons par $\overline{\alpha}$ un monome basique quelconque, de degré p et par $\overline{A}_i$ un vecteur quelconque de $\mathcal{B}$, Comme pour α, nous écrirons

$$\overline{\alpha} = [\overline{\alpha}'_i \, \overline{A}_i] \qquad (\overline{A}_i \in X).$$

Il viendra

$$\sum_j \frac{\partial F}{\partial[A_i \overline{\alpha}'_j]} \, \frac{\partial F}{\partial[\alpha_i \overline{A}_j]} = (-1)^{p-1} \frac{\partial F}{\partial[\alpha]} \, \frac{\partial F}{\partial[\overline{\alpha}]}. \tag{42}$$

A chaque couple de monômes unitaires $(\alpha, \overline{\alpha})$ correspond une équation (42).

11. Les sommes directes de multivecteurs. — Soient $[\omega_1], \ldots, [\omega_n]$ n « p-vecteurs » disjoints deux à deux $([\omega_i \omega_j] \neq 0)$ et le polynôme

$$F = \sum_1^n \omega_i. \tag{43}$$

L'espace propre de F est $[\omega_1, \ldots, \omega_n]$ et son rang est np. Si $p > 2$, F est appelée une somme directe de multivecteurs. *Toute base composée de p vecteurs dans chaque ω_i est dite canonique pour* F.

Théorème. — *Si $p > 2$ la décomposition (43) est unique dans l'espace $[\omega_1, \ldots, \omega_n]$. En d'autres termes il est impossible que* F *soit somme de n « p-vecteurs » disjoints autres que $\omega_1, \ldots, \omega_n$.*

$X_i^1, \ldots, X_i^p$ étant une base (X_i) de ω_i et $X = \Sigma(X_i^j)$ la base complète correspondante dans $\Omega = [\omega_1, \ldots, \omega_n]$, nous observons que dans (X) toutes les dérivées $\dfrac{\partial F}{\partial X_i^j}$ sont élémentaires. Si F peut se décomposer comme en (43) dans une base $Y = (Y_1, \ldots, Y_N)$ $(np = N)$ il faut encore que $\dfrac{\partial F}{\partial Y_k}$ soit simple (quel que soit k).

Or

$$\frac{\partial F}{\partial Y_k} = \sum_j \frac{\partial [X_1^1, \ldots, X_1^p]}{\partial X_1^j} \frac{\partial X_1^j}{\partial Y_k} + \ldots + \sum_j \frac{\partial [X_n^1, \ldots, X_n^p]}{\partial X_n^j} \frac{\partial X_n^j}{\partial Y_k}. \tag{44}$$

Chaque Σ au second membre de (44) est de degré $p-1$ dans un espace d'ordre p. Chaque Σ est donc une forme simple et sauf quand $p = 2$, $\dfrac{\partial F}{\partial Y_k}$ est, comme F, *somme de n multivecteurs disjoints*. Son rang ne peut s'abaisser à $p-1$ que si $\dfrac{\partial X_i^j}{\partial Y_k} = 0$ pour toutes les valeurs de i sauf une [13]. Les seuls changements de base permis sont les transformations $(X_i^j) \rightarrow (X_i^j)'$ dans chaque ω_i.

C. Q. F. D.

Soient $\overline{X}_i^1, \ldots, \overline{X}_i^p$ les éléments d'une base duale dans $\omega_i \left(\overline{X}_i^j = \dfrac{\partial \omega_i}{\partial X_i^j}\right)$. Si F est définie dans une base *quelconque* (Y) de son espace propre, le tableau des composantes des dérivées $\dfrac{\partial F}{\partial Y_i}$ (toutes linéairement indépendantes) dans la base $(\overline{X}_i^j)$ est une matrice régulière β, de sorte qu'inversement il est possible d'exprimer les $\overline{X}_i^j$ à l'aide des $\dfrac{\partial F}{\partial Y_i}$.

Posons

$$\Phi = \Sigma x_k \frac{\partial F}{\partial Y_k}. \tag{45}$$

La forme Φ est élémentaire, pour une suite convenable des x_k, si, et seulement si elle peut s'identifier à un $(p-1)$-vecteur contenu dans l'un des p-vecteurs ω_i [13]. Soient donc, satisfaisant (45) pour deux suites distinctes (x_i), deux formes simples Φ_1, Φ_2 non proportionnelles. Si $[\Phi_1 \Phi_2] = 0$, Φ_1 et Φ_2 sont diviseurs du même ω_i et leurs facteurs primaires fournissent les éléments d'une base de ω_i. Ils permettent de calculer un p-vecteur Ω_i proportionnel à ω_i. Posant $\omega_i = \xi \Omega_i$, on pourra déterminer ξ en exprimant, par exemple, que $F - z\Omega_i$ est de rang $(p-1)n$ quand $z = \xi_i$. En raisonnant sur $F - \omega_i$ comme on vient de le faire sur F on déterminera de proche en proche tous les ω_i.

Théorème. — *Pour qu'une forme* F *définie dans une base* (Y) *(de $\mathcal{E}$) soit somme directe de n « p-vecteurs » il faut et il suffit que ses dérivées premières soient sommes directes de n « $(p-1)$-vecteurs » au plus inclus respectivement dans n « p-vecteurs » ω_i disjoints* $\left[\right.$*a priori* elles sont linéairement indépendantes dans le module $\left(\begin{matrix} N = np \\ p-1 \end{matrix}\right)$; *cf.* § 8 (1°), premier théorème$\left.\right]$.

---

(13) D'une manière générale la forme $\sum_{i,j} \dfrac{\partial [\omega_i]}{\partial X_i^j} \alpha_i^j$, avec $\alpha_i^j \in K$, est élémentaire si et seulement si les scalaires α_i^j sont nuls pour toutes les valeurs de i, *sauf une*

Démonstration. — Que les conditions énumérées ci-dessus soient nécessaires cela résulte des discussions précédentes. Établissons qu'elles sont suffisantes. Elles permettent déjà de trouver np solutions simples, en Φ, de (45) qu'on peut classer dans les différents ω_i puisque toutes celles qui sont incluses dans ω_1, par exemple, sont deux à deux annulatrices les unes des autres et disjointes des $(n-1)p$ solutions restantes. En bref on a pu reconstituer une égalité du type

$$\begin{pmatrix} \bar{X}_1^1 \\ \vdots \\ \bar{X}_n^p \end{pmatrix} = \beta^{-1} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial Y_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial F}{\partial Y_N} \end{pmatrix} \tag{46}$$

et poser

$$\begin{pmatrix} \bar{X}_1^1 \\ \vdots \\ \bar{X}_n^p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial U_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial F}{\partial U_N} \end{pmatrix}, \tag{47}$$

les U_i d'après (34), satisfaisant à l'égalité :

$$(U_1, \ldots, U_N) = (Y_1, \ldots, Y_N)\beta. \tag{48}$$

Il reste à trouver que $F = \Sigma k_i \omega_i$ ($k_i \in K$). Sans restreindre la généralité du raisonnement et à seule fin d'alléger les notations nous supposerons $n = 2$. Nous poserons $X_1^i = A_i$; $X_2^i = B_i$; $U_{p+i} = V_i$ pour $i = 1, \ldots, p$. Il vient de (47) :

$$\frac{\partial F}{\partial U_i} = \frac{\partial[A_1, \ldots, A_p]}{\partial A_i} = \frac{\partial \omega_1}{\partial A_i}, \tag{49}$$

$$\frac{\partial F}{\partial V_i} = \frac{\partial[B_1, \ldots, B_p]}{\partial B_i} = \frac{\partial \omega_2}{\partial B_i}. \tag{50}$$

Je dis qu'on tire de (49) *et* (50) : $U_i = kA_i$, $V_i = hB_i$, k et h étant deux scalaires. En effet :

1° En dérivant (49) par rapport à U_i il vient

$$\sum \frac{\partial \omega_1}{\partial A_i A_k} \frac{\partial A_k}{\partial U_i} = 0, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{\partial A_k}{\partial U_i} = 0 \qquad \text{pour} \quad k \neq i.$$

On aurait de même

$$\frac{\partial B_k}{\partial V_i} = 0 \qquad \text{pour} \quad k \neq i.$$

2° De (49) en écrivant

$$\frac{\partial}{\partial U_j}\left(\frac{\partial F}{\partial U_i}\right) + \frac{\partial}{\partial U_i}\left(\frac{\partial F}{\partial U_j}\right) = 0,$$

on tire

$$\frac{\partial A_i}{\partial U_i} = \frac{\partial A_j}{\partial U_j} \qquad \left(\text{resp. } \frac{\partial B_i}{\partial V_i} = \frac{\partial B_j}{\partial V_j}\right).$$

3° De

$$\frac{\partial}{\partial V_j}\left(\frac{\partial F}{\partial U_i}\right)+\frac{\partial}{\partial U_i}\left(\frac{\partial F}{\partial V_j}\right)=0,$$

on tire

$$\frac{\partial A_i}{\partial V_k}=\frac{\partial B_i}{\partial V_k}=0 \qquad \text{quels que soient } i \text{ et } k.$$

En rassemblant tous ces résultats on voit bien qu'on peut poser

$$U_i = k A_i; \qquad V_i = h B_i.$$

On a d'ailleurs identiquement [*cf.* § 5 (17), p. 217]

$$pF=\sum_1^p U_i\frac{\partial F}{\partial U_i}+\sum_1^p V_i\frac{\partial F}{\partial V_i}=k\sum A_i\frac{\partial \omega_1}{\partial A_i}+h\sum B_i\frac{\partial \omega_2}{\partial B_i},$$

$$F=k[\omega_1]+h[\omega_2].$$

C. Q. F. D.

Le résultat est général.

Exemple d'application. — Étude de la forme cubique

$$\boxed{F=A_1A_2A_3+A_1B_2B_3+B_1A_2B_3+B_1B_2A_3} \tag{51}$$

$$\Phi=\Sigma x_i\frac{\partial F}{\partial A_i}+y_i\frac{\partial F}{\partial B_i}; \qquad \frac{\partial F}{\partial A_i}=A_jA_k+B_jB_k; \qquad \frac{\partial F}{\partial B_i}=A_jB_k+B_jA_k$$

[la permutation (ijk) etant de classe paire;]

$$\frac{\partial \Phi}{\partial A_1}=x_3A_2-x_2A_3+y_3B_2-y_2B_3. \tag{52}$$

Supposons $\frac{\partial \Phi}{\partial A_1}\neq 0$. Pour que Φ soit élémentaire, il faut et il suffit que $\frac{\partial \Phi}{\partial A_1}$ divise Φ, ce qui a lieu si et seulement si

$$R_1\frac{\partial \Phi}{\partial A_1}=0, \tag{53}$$

avec

$$\Phi=R_1+A_1\frac{\partial \Phi}{\partial A_1}. \tag{54}$$

En dérivant (53) par rapport à A_2, on a

$$x_3R_1=\frac{\partial \Phi}{\partial A_1}\frac{\partial R_1}{\partial A_2}. \tag{55}$$

Une nouvelle dérivation par rapport à A_3 donne

$$x_3\frac{\partial R_1}{\partial A_3}=\frac{\partial^2 \Phi}{\partial A_1 A_3}\frac{\partial R_1}{\partial A_2}-\frac{\partial \Phi}{\partial A_1}\frac{\partial R_1}{\partial A_2 A_3}. \tag{56}$$

En développant R_1 dans la base (A_i, B_j) à l'aide de 51, 52, 54 on tire de 56 les conditions nécessaires :

$$x_i y_j = x_j y_i \qquad \text{et l'on pose} \qquad y_i = k x_i.$$

En dérivant (55) par rapport à B_1 on trouve encore

$$x_3^2 = y_3^2, \qquad \text{d'où} \qquad k = \pm 1.$$

Avec $k = 1$ et $U_i = A_i + B_i$, il vient

$$\Phi = \sum_{(ijk)} x_i [U_j U_k].$$

Avec $k = -1$ et $V_i = A_i - B_i$, il vient

$$\Phi = \sum_{(ijk)} x_i [V_j V_k].$$

On a d'ailleurs

$$\frac{\partial F}{\partial U_i} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial A_i} + \frac{\partial F}{\partial B_i}\right) = \frac{1}{2} U_j U_k,$$

de même

$$\frac{\partial F}{\partial V_i} = \frac{1}{2} V_j V_k \qquad \text{et} \qquad F = \frac{1}{2}\{U_1 U_2 U_3 + V_1 V_2 V_3\}.$$

CHAPITRE III.

Structure des diviseurs de zéro.

12. Résidus d'un polynôme relativement aux monômes unitaires de la base (X). — *Conditions de structure.* — Nous supposerons que dans l'algèbre extérieure $\mathfrak{A}$, il est fait usage d'une base (X) bien déterminée et nous appellerons *champ d'un élément de* $\mathfrak{A}$ *l'ensemble des vecteurs unitaires de* (X) *avec lesquels il s'écrit.* $\mathfrak{B}$ désignera comme au chapitre I l'ensemble des monômes unitaires (de degré 1, ..., n) éventuellement affectés de composantes. Étant donné l'ensemble (S) de N éléments quelconques (ω_i) de $\mathfrak{B}$ et $\Phi \in \mathfrak{A}$ on pose

$$\boxed{\Phi = \psi_i(\Phi) + R_i(\Phi),} \tag{1}$$

$\psi_i(\Phi)$ *représente la somme des termes de* Φ *écrits avec au moins un vecteur de* ω_i. $R_i(\Phi)$ *n'en contient aucun;* $R_i(\Phi)$ *sera nommé le résidu ou le reste de* Φ *relativement à* ω_i *dans la base* (X). On a d'ailleurs

$$\boxed{R_i(\Phi) = \frac{\partial}{\partial \omega_i}[\omega_i \Phi].} \tag{2}$$

L'opération ψ_i est évidemment commutable avec l'addition dans $\mathfrak{A}$ et la multiplication par un nombre, de même encore avec $\dfrac{\partial}{\partial \omega}$ si $\psi_i(\omega) = 0$.

$\psi_j(\psi_i(\Phi))$ est l'ensemble des termes de Φ qui contiennent au moins un élément de ω_i et un élément de ω_j (éventuellement, au moins un élément commun à ω_i et ω_j). On a donc

$$\psi_j(\psi_i(\Phi)) = \psi_i(\psi_j(\Phi))$$

et nous posons

$$\psi_j(\psi_i(\Phi)) = \psi_i(\psi_j(\Phi)) = \psi_{ij}\Phi.$$

On définit de même $\psi_{i_1,\ldots,i_k}(\Phi)$: somme des éléments de Φ contenant au moins un élément de $\omega_{i_1}, \ldots,$ un élément de ω_{i_k}.

L'opérateur $\psi_{i_1,\ldots,i_k}$ est invariant pour toute permutation des indices $i_{i_1,\ldots,i_k}$.

Théorème 1. — *Relativement à* S, Φ *et ses résidus sont liés par la relation*

$$\boxed{\Phi = R_1 + \psi_1(R_2) + \ldots + \psi_{1,\ldots,(k-1)}(R_k) + \psi_{1,\ldots,k}(\Phi)} \tag{3}$$

qui reste invariante pour une permutation quelconque des indices [14].

Le théorème est vrai pour $k = 1$, montrons que s'il est vrai pour $k = r$ il l'est encore pour $k = r + 1$. Choisissons dans la suite $[1, 2, 3, \ldots, (r+1)]$, r indices que nous nommerons encore pour simplifier l'exposé, $1, 2, \ldots, r$.

Par hypothèse

$$\Phi = R_1 + \psi_1(R_2) + \ldots + \psi_{1,\ldots,(r-1)}(R_r) + \psi_{1,\ldots,r}(\Phi). \tag{4}$$

D'autre part

$$\Phi = \psi_{r+1}(\Phi) + R_{r+1} \tag{5}$$

et l'on tire de (5)

$$\psi_{1,\ldots,r}(\Phi) = \psi_{1,\ldots,r}(R_{r+1}) + \psi_{1,\ldots,r(r+1)}\Phi. \tag{6}$$

Ajoutons (4) et (6) membre à membre il viendra

$$\Phi = R_1 + \psi_1(R_2) + \ldots + \psi_{1,\ldots,r}(R_{r+1}) + \psi_{1,\ldots,(r+1)}(\Phi)$$

(l'ordre dans lequel on a classé les indices est évidemment arbitraire).

C. Q. F. D.

Théorème 2. — *Pour que les polynômes* $R_1, \ldots, R_k$ *soient les résidus d'un même polynôme* Φ *il faut et il suffit qu'ils statisfassent aux relations*

$$\psi_i(R_i) = 0, \tag{7}$$

$$\boxed{R_i - \psi_j(R_i) = R_j - \psi_i(R_j),} \tag{8}$$

dites « équations de structure ».

---

(14) R_i tient lieu de $R_i(\Phi)$ quand aucune confusion n'est à craindre.

1° *Les conditions* (8) *sont nécessaires :* En effet du théorème précédent on tire

$$\Phi = R_i + \psi_i(R_j) + \psi_{ij}(\Phi),$$
$$\Phi = R_j + \psi_j(R_i) + \psi_{ij}(\Phi);$$

d'où

$$R_i - \psi_j(R_i) = R_j - \psi_i(R_j).$$

Les équations (7) sont évidemment nécessaires puisqu'elles résultent de la définition même des résidus.

2° *Les conditions* (7) *et* (8) *sont suffisantes :* Les relations (8) impliquent que la somme

$$R_1 + \psi_1(R_2) + \psi_{12}(R_3) + \ldots + \psi_{1,\ldots,(k-1)}(R_k) = \Phi \tag{9}$$

est indépendante d'une permutation quelconque des indices. En effet la somme de deux termes consécutifs peut toujours s'écrire d'après (8)

$$\psi_{1,\ldots,(s-1)}[R_s + \psi_s(R_{s+1})] = \psi_{1,\ldots,(s-1)}[R_{s+1} + \psi_{s+1}(R_s)].$$

On peut donc permuter deux indices consécutifs, ce qui permet de ranger les indices dans un ordre quelconque. Ceci posé dans (9), il vient

$$\psi_1(\Phi) = \psi_1(R_2) + \psi_{12}(R_3) + \ldots,$$

puisque $\psi_1(R_1) = 0$ d'après (7).

Donc

$$\Phi = \psi_1(\Phi) + R_1$$

et

$$\boxed{R_1 = R_1(\Phi).}$$

Ce résultat reste valable quand on substitue à l'indice 1, l'un quelconque de la suite 2, 3, ..., k. C. Q. F. D.

Remarque. — De la formule (8) on tire aisément

$$\frac{\partial[\omega_i R_j]}{\partial\omega_i} = \frac{\partial[\omega_j R_i]}{\partial\omega_j},$$

c'est-à-dire :

Le résidu de R_i *par rapport à* ω_j *est égal au résidu de* R_j *par rapport à* ω_i.

13. Sur certains idéaux de polynômes. Structure des éléments nuls de l'idéal $(\omega_1, \ldots, \omega_k)$. — 1° Tout polynôme tel que $\Phi = \lambda_1\omega_1 + \ldots + \lambda_N\omega_N$ où $\lambda_i \in \mathfrak{A}$; $\psi_i(\lambda_i) = 0$ est dit appartenir à l'idéal $(\omega_1, \omega_1, \ldots, \omega_N)$.

On pose

$$\Phi \subset (\omega_1, \ldots, \omega_N).$$

2° Si dans l'équation (1), $R_i(\Phi) = 0$, on a $\Phi = \psi_i(\Phi)$, nous dirons que Φ

appartient à l'idéal $\mathcal{I}_{\omega_1}$. On aperçoit immédiatement que $\Phi \in \mathcal{I}_{\omega_i}$ *si et seulement si*

$$[\omega_i \Phi] = 0, \tag{10}$$

Φ *est de degré minimum au moins égal à* 1 *dans* ω_i, c'est-à-dire

$$\Phi \subset (X_{\alpha_1}, \ldots, X_{\alpha_r}), \qquad \text{avec} \quad \omega_i = [X_{\alpha_1}, \ldots, X_{\alpha_r}].$$

Nous dirons d'après (10) que $\mathcal{I}_{\omega_i}$ *est l'annulateur de* ω_i.

On peut écrire $\Phi = \psi_{i_1,\ldots,i_k}(\Phi)$ si et seulement si :

$$[\omega_{i_x} \Phi] = 0 \qquad (\text{pour } x = 1, 2, \ldots, k)$$

et dans ces conditions Φ est un élément de $\mathcal{C}$ commun aux annulateurs $\mathcal{I}_{\omega_1}, \ldots, \mathcal{I}_{\omega_k}$. Il appartient à leur intersection.

3° *Nous nous proposons maintenant de rechercher à quelles conditions une forme* Φ *de l'idéal* $(\omega_1, \ldots, \omega_N)$ *peut être nulle, c'est-à-dire quelles relations doivent vérifier les formes (ou coefficients)* λ_i *pour qu'on ait*

$$\Sigma \omega_i \lambda_i = 0 \qquad \text{et} \qquad \psi_i(\lambda_i) = 0. \tag{11}$$

Pour comparer entre eux deux monômes ω_i et ω_j, nous poserons

$$\omega_i = [u_{ij} m_{ji}], \qquad \omega_j = [u_{ji} m_{ij}].$$

$u_{ij} = u_{ji} \in \mathcal{B}$ est le p. g. c. d. de ω_i et ω_j, m_{ji} et m_{ij} ont un produit non nul. ε_{ij} désigne le degré du monôme m_{ij}. On n'a pas en général $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ car ω_i, ω_j n'ont pas nécessairement le même degré.

En dérivant (11) par rapport à ω_k, il vient

$$\boxed{-\lambda_k = \sum_i (-1)^{\varepsilon_{ki}\varepsilon_{ik}} m_{ki} \frac{\partial \lambda_i}{\partial m_{ik}},} \tag{12}$$

d'où il résulte que

$$\boxed{\lambda_k \textit{ appartient à l'idéal } (m_{k1}, m_{k2}, \ldots, m_{kN}).}$$

Examen du cas particulier $N = 2$. — On tire de (12)

$$-\lambda_1 = (-1)^{\varepsilon_{12}\varepsilon_{21}} m_{12} \frac{\partial \lambda_2}{\partial m_{21}}, \tag{13}$$

$$-\lambda_2 = (-1)^{\varepsilon_{12}\varepsilon_{21}} m_{21} \frac{\partial \lambda_1}{\partial m_{12}}. \tag{14}$$

Comme λ_1 ne contient aucun des éléments de m_{21}, on tire d'ailleurs de (14), par exemple

$$-\frac{\partial \lambda_2}{\partial m_{21}} = (-1)^{\varepsilon_{12}\varepsilon_{21}} \frac{\partial \lambda_1}{\partial m_{12}},$$

d'où en posant

$$(-1)^{\varepsilon_{12}\varepsilon_{21}} \frac{\partial \lambda_1}{\partial m_{12}} = -\alpha,$$

$$\lambda_2 = m_{21}\alpha \qquad \text{et} \qquad \lambda_1 = -(-1)^{\varepsilon_{12}\varepsilon_{21}} m_{12}\alpha.$$

Réciproquement avec α quelconque,

$$\omega_1\lambda_1+\omega_2\lambda_2=[-um_{21}m_{12}+um_{21}m_{12}]\alpha=0.$$

On aperçoit donc que $\omega_1\lambda_1+\omega_2\lambda_2$ [15] s'annule si et seulement si λ_1 et λ_2 s'écrivent

$$\boxed{\lambda_i=m_{ij}\varphi_{ij},}$$

avec la seule condition

$$\boxed{-\varphi_{12}=(-1)^{\varepsilon_{12}\varepsilon_{21}}\varphi_{21}.}$$

THÉORÈME GÉNÉRAL. — *On a* $\Sigma\omega_i\lambda_i=0$ [avec $\psi_i(\lambda_i)=0$] *si et seulement si les « coefficients »* λ_i *admettent une décomposition :*

$$\lambda_i=\sum_k m_{ik}\varphi_{ik} \tag{15}$$

dans laquelle les polynômes φ_{ik} *satisfont aux conditions suivantes :*

$$\psi_i(\varphi_{ik})=\psi_k(\varphi_{ik})=0, \tag{16}$$

$$-\varphi_{ik}=(-1)^{\varepsilon_{ik}\varepsilon_{ki}}\varphi_{ki}. \tag{17}$$

Les conditions (15), (16) et (17) sont manifestement suffisantes puisque si elles sont vérifiées, on a, de (15)

$$\sum\omega_i\lambda_i=\sum_{i,k}u_{ik}\{m_{ki}m_{ik}\varphi_{ik}+m_{ik}m_{ki}\varphi_{ki}\}$$

tandis que (17) assure identiquement la nullité de chaque polynôme figurant entre accolades. Si nous appelons forme régulièrement nulle de l'idéal $(\omega_1, \ldots, \omega_N)$ une forme construite comme ci-dessus, il suffira donc de montrer que toute forme nulle dans $(\omega_1, \ldots, \omega_N)$ est régulièrement nulle.

Nous noterons d'abord que l'ensemble des formes régulièrement nulles est un espace vectoriel $\mathfrak{T}$ et nous considérerons la forme nulle, $\Phi=\Sigma\omega_i\lambda_i$. D'après (12) il est possible de trouver dans $\mathfrak{T}$ une forme Φ_0 ayant λ_N pour « coefficient » de ω_N. $\Big($Par exemple en posant $\Phi_0=\Sigma\omega_i\overline{\lambda}_i$ il suffira de faire $\overline{\lambda}_N=\lambda_N$ et $\overline{\lambda}_k=m_{kN}\dfrac{\partial\lambda_k}{\partial m_{kN}}$ pour $\overline{\lambda}\neq N.\Big)$ $\Phi-\Phi_0$ sera nulle dans $(\omega_1, \ldots, \omega_{N-1})$. Il s'ensuit que si le théorème est vrai dans cet idéal, il est vrai dans $(\omega_1, \ldots, \omega_N)$. Le théorème s'établit donc par récurrence pour N quelconque puisqu'il est démontré quand $N=2$.

CONCLUSION. — *Entre les monômes* $\omega_1, \ldots, \omega_N$ *il ne peut exister d'autres identités que des combinaisons linéaires* (à coefficients dans $\mathfrak{A}$) *des identités banales :*

$$m_{ij}\omega_i\pm m_{ji}\omega_j=0.$$

---

[15] Comme convenu ci-dessus :

$$\psi_1(\lambda_1)=\psi_2(\lambda_2)=0.$$

14. Exposé d'une méthode de recherche des annulateurs d'une forme extérieure :

$$\boxed{\Delta = \sum_1^N \omega_i}$$

Les ω_i ayant la même signification que ci-dessus sont supposés de même degré p. *Les éléments* G *de* $\mathfrak{A}$ tels que

$$[G\Delta] = 0 \tag{18}$$

dits annulateurs de Δ engendrent un idéal $\mathcal{J}_\Delta$ (dit l'idéal annulateur de Δ). Dans ce qui suit, G sera considéré, sauf avis contraire, comme une *forme*.

Si $N = 1$, $\Delta = \omega_1$; $G\omega_1 = 0$ entraîne $G = \psi_1(G)$ et $\mathcal{J}_\Delta$ se confond avec $\mathcal{J}_{\omega_1}$.

Plus généralement pour $N > 1$, *si* $R_1, R_2, \ldots, R_N$ *sont les résidus de* G *relativement à* Δ on tire de (18)

$$\Sigma[R_i\,\omega_i] = 0, \tag{19}$$

d'où il résulte que les quantités R_i satisfont aux équations (15), (16) et (17) avec $R_i = \lambda_i$. Ceci veut dire qu'on peut poser

$$\boxed{R_i = \sum_k m_{ik}\,\varphi_{ik}} \tag{20}$$

avec

$$\boxed{-\varphi_{ik} = (-1)^{\varepsilon_{ik}}\varphi_{ki}} \qquad (\psi_i\varphi_{ij} = \psi_j\varphi_{ij} = 0) \tag{21}$$

Pour que

$$\boxed{G = R_1 + \psi_1(R_2) + \ldots + \psi_{1,\ldots,(N-1)}R_N + \psi_{1,\ldots,N}(G)} \tag{22}$$

appartienne à $\mathcal{J}_\Delta$ il faut et il suffit que les φ_{ij} satisfassent aux équations de structure :

$$\boxed{R_i - \psi_k R_i = R_k - \psi_i R_k,} \tag{23}$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\sum_j m_{ij}(\varphi_{ij} - \psi_k\varphi_{ij}) = \sum_{j'} m_{kj'}(\varphi_{kj'} - \psi_i\varphi_{kj'})} \tag{24}$$

(j et j' différents de i et k).

La sommation au premier membre s'étendant à tous les j tels que $\omega_k m_{ij} \neq 0$ et la sommation au second membre à tous les j' tels que $\omega_i m_{kj'} \neq 0$. *Déterminer* G *reviendra donc à construire des* φ_{ij} *satisfaisant à* (21) *et* (24).

Théorème. — *Les quantités* $\omega_k m_{ij}$ *et* $\omega_j m_{ik}$ *sont en même temps nulles ou non nulles.*

En effet considérons trois termes de Δ notés ω_1, ω_2, ω_3. On peut toujours poser [u, x_{ij}, y_i, ayant des degrés quelconques (zéro compris) sous réserve que ω_1, ω_2, ω_3 aient le même degré p (x_{ij} étant égal à x_{ji})] :

$$(25) \qquad \begin{cases} \omega_1 = u x_{13} x_{12} y_1, \\ \omega_2 = u x_{21} x_{23} y_2, \\ \omega_3 = u x_{32} x_{31} y_3 ; \end{cases}$$

d'où

$$(26) \qquad \begin{cases} m_{21} = \pm y_1 x_{13}, & m_{23} = \pm x_{31} y_3, & m_{31} = \pm x_{12} y_1 ; \\ m_{12} = \pm x_{23} y_2, & m_{32} = \pm y_2 x_{21}, & m_{13} = \pm y_3 x_{32}. \end{cases}$$

Il viendra par exemple :

$$\omega_3 m_{12} = \pm u x_{23} x_{31} x_{23} y_2 y_3,$$
$$\omega_2 m_{13} = \pm u x_{12} x_{23} x_{23} y_2, y_3.$$

Si le degré de x_{23} est zéro :

$$\omega_3 m_{12} \neq 0, \qquad \omega_2 m_{13} \neq 0.$$

Si le degré de $x_{23} \neq 0$:

$$\omega_3 m_{12} = \omega_2 m_{13} = 0.$$

C. Q. F. D.

Remarques. — 1° On notera de (20) que le degré de G est au moins égal au plus petit des degrés des m_{ij}.

2° Si le champ de G est somme du champ de Δ (C_Δ) et d'un champ complémentaire C'_Δ, G est somme directe de produits comprenant un élément N en C_Δ et un élément N' en C'_Δ.

Les conditions $\Sigma NN' \Delta = 0$ entraînent $N' \Sigma N \Delta = 0$ pour tout N' distinct. Nous pourrons donc nous borner à rechercher les annulateurs de Δ définis dans son propre champ.

15. Quelques applications de la méthode précédente. — 1° *Formes binômes.* — On pose

$$\Delta = \omega_1 + \omega_2 = u(m_{12} + m_{21}) ;$$

$R_1 = \varphi_{12} m_{12}$; $R_2 = \varphi_{21} m_{21}$ les équations de structure sont identiquement satisfaites.

Dans le champ de Δ on a donc

$$G = A[m_{12} - (-1)^{\varepsilon_{12}} m_{21}] + \psi_{12}(B) ;$$

$A \in K$ et B est quelconque. $\psi_{12} B$ *est une somme de formes simples qui annulent séparément* Δ. *Nous allons montrer qu'il en est de même de* $m_{12} - (-1)^{\varepsilon_{12}} m_{21}$ *annulateur de* $m_{12} + m_{21}$.

Nous commencerons par écrire P au lieu de m_{12} et Q au lieu de m_{21}. Faisant apparaître les éléments du degré 1 ($X_i, \ldots, Y_i, \ldots$) qui composent P et Q, nous posons (n étant le degré de m_{12} et de m_{21})

$$P = [X_1, \ldots, X_n]; \qquad Q = [Y_1, \ldots, Y_n]$$

et nous considérons n formes simples A_i, B_i linéairement indépendantes, de degré 1 ainsi définies

$$2A_i = X_i + Y_i, \qquad 2B_i = X_i - Y_i.$$

Nous poserons enfin

$$\frac{\partial P}{\partial [X_1, \ldots, X_i]} = P_i, \qquad \frac{\partial Q}{\partial [Y_1, \ldots, Y_i]} = Q_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

on vérifie sans peine que

$$P + Q = A_1(P_1 + Q_1) + B_1(P_1 - Q_1),$$
$$P - Q = B_1(P_1 + Q_1) + A_1(P_1 - Q_1)$$

et plus généralement

$$\text{(I)} \qquad \begin{aligned} P_{i-1} + Q_{i-1} &= A_i(P_i + Q_i) + B_i(P_i - Q_i), \\ P_{i-1} - Q_{i-1} &= B_i(P_i + Q_i) + A_i(P_i - Q_i). \end{aligned}$$

Faisons apparaître un symbole J vérifiant les égalités $J^2 = 1$ $1J = J1 = J$ et commutable avec lettres $A_iB_iP_iQ_i$. [On pose par exemple

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et on met les égalités (I) sous forme matricielle]. Il vient :

$$\text{(II)} \qquad (P + Q) + (P - Q)J = (A_1 + JB_1)(A_2 + JB_2)\ldots(A_n + JB_n),$$

$P + Q$ est la somme S de tous les produits partiels π du second membre de (II) qui contiennent un nombre pair (zéro compris) d'éléments B_i et $(P - Q)$ la somme S' de tous les produits partiels π' formés avec un nombre impair d'éléments B_i. Chacun de ces produits partiels est d'ailleurs une combinaison $\binom{2n}{n}$.

Discussion. — Si n est pair, tout produit $\pi \in S$ a son complémentaire contenu dans S. Donc tout $\pi \in S$ annule tout $\pi \in S'$ et (*vice versa*) *il s'ensuit que tout* $\pi \in S$ *annule* $P - Q$ (tout $\pi' \in S'$ annule $P + Q$).

Si n est impair le complémentaire de $\pi \in S$ contenant un nombre impair de B_i est dans S', donc deux éléments π_1 et $\pi_2 \in S$ ont toujours un produit nul, chaque $\pi \in S$ annule $P + Q$ (chaque $\pi' \in S'$ annule $P - Q$).

Il est ainsi bien établi que tout annulateur d'une forme binôme est somme d'annulateurs simples

2° *Formes trinômes :*

$$\Delta = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3.$$

Le champ de G étant celui de Δ si les φ_{ij} ne sont pas des scalaires ($\in$ K), on a nécessairement $\varphi_{ij} = \psi_k \varphi_{ij}$ et les équations de structure sont identiquement satisfaites.

Discussion. — On utilise encore les notations des équations (25) et (26) :

Premier cas. — x_{12}, x_{23}, x_{31} sont au moins de degré 1, les équations de structure sont identiquement satisfaites car tous les produits $\omega_i m_{jk}$ sont nuls.

Deuxième cas. — x_{12} est de degré zéro; x_{23}, x_{31} sont au moins de degré 1. Les quantités $\omega_i m_{kj}$ sont nulles à l'exception de $\omega_2 m_{31}$; $\omega_1 m_{32}$. Les équations de structure non identiquement satisfaites se réduisent aux suivantes :

$$(\varphi_{31} - \psi_2 \varphi_{31}) = (\varphi_{32} - \psi_1 \varphi_{32}) = 0,$$

φ_{31}, φ_{32} ne peuvent se réduire à des constantes qu'en étant nuls.

Troisième cas. — $x_{12} = x_{23} = 1 \in$ K; x_{13} est d'un degré au moins égal à 1. Dans ces conditions : $\omega_1 = u x_{13} y_1$; $\omega_2 = u y_2$; $\omega_3 = u x_{13} y_3$

$$\begin{array}{lllll} m_{21} = x_{13} y_1, & m_{23} = x_{13} y_3, & m_{31} = y_1, & \omega_1 m_{32} \neq 0, & \omega_2 m_{31} \neq 0, \\ m_{12} = \quad y_2, & m_{32} = \quad y_2, & m_{13} = y_3, & \omega_2 m_{13} \neq 0, & \omega_3 m_{12} \neq 0. \end{array}$$

Les φ_{ij} doivent satisfaire au système

$$\varphi_{13} = \psi_2 \varphi_{13},$$
$$y_2(\varphi_{32} - \psi_1 \varphi_{32}) = y_2(\varphi_{12} - \psi_3 \varphi_{12}).$$

φ_{12} et φ_{32} peuvent appartenir au corps (K), on a alors $\varphi_{12} = \varphi_{32}$. Si $\psi_2 \varphi_{13} = 0$, $\varphi_{13} = 0$. On a d'ailleurs avec $\varphi_{13} = 0$:

$$R_1 = y_2 \varphi_{12},$$
$$R_2 = x_{13} y_1 \varphi_{21} + x_{13} y_3 \varphi_{23},$$
$$R_3 = y_2 \varphi_{32};$$

d'où

$$G = y_2 \varphi_{12} + x_{13} y_1 \varphi_{21} + x_{13} y_3 \varphi_{23}.$$

Si Δ est de degré impair on retrouve avec $\varphi_{12} = \varphi_{21} = \varphi_{32}$ que $\Delta^2 = 0$.
Si Δ est de degré pair,

$$G = y_2 - x_{13}[y_1 + y_3].$$

Remarque. — Toute forme $G \in \mathcal{I}_\Delta$ d'un degré égal à celui de Δ est une combinaison linéaire à coefficients dans le corps (K) des formes

$$F_1 = (y_3 \pm y_1) \psi_2 \varphi_{13}; \qquad F_2 = \psi_{123}(G); \qquad F_3 = y_2 \pm x_{13} [y_1 + y_3];$$

F_1 *et* F_2 *se résolvent en sommes d'éléments simples* $\in \mathcal{I}_\Delta$. *Je dis qu'il n'en est pas de même de* F_3 (en général). Si nous posons en effet

$$H = \alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2 + \alpha_3 F_3 \qquad (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in K),$$

on a

$$y_2 H = \alpha_3 y_2 x_{13}[y_1 + y_3]$$

et il est alors impossible que H soit une forme simple ou nulle si $\alpha_3 \neq 0$ (degré $y_1, y_2 > 1$). C. Q. F. D.

Quatrième cas. — $x_{12} = x_{13} = x_{23} = 1 \in K$:

$$\left.\begin{aligned} R_2 - \psi_1 R_2 &= y_3(\varphi_{23} - \psi_1\varphi_{23}) \\ R_1 - \psi_2 R_1 &= y_3(\varphi_{13} - \psi_2\varphi_{13}) \end{aligned}\right\} \quad \varphi_{23} - \psi_1\varphi_{23} = \varphi_{13} - \psi_2\varphi_{13},$$

$$\left.\begin{aligned} R_3 - \psi_2 R_3 &= y_1(\varphi_{31} - \psi_2\varphi_{31}) \\ R_2 - \psi_3 R_2 &= y_1(\varphi_{21} - \psi_3\varphi_{21}) \end{aligned}\right\} \quad \varphi_{31} - \psi_2\varphi_{31} = \varphi_{21} - \psi_3\varphi_{21},$$

$$\left.\begin{aligned} R_1 - \psi_3 R_1 &= y_2(\varphi_{12} - \psi_3\varphi_{12}) \\ R_3 - \psi_1 R_3 &= y_2(\varphi_{32} - \psi_1\varphi_{32}) \end{aligned}\right\} \quad \varphi_{12} - \psi_3\varphi_{12} = \varphi_{32} - \psi_1\varphi_{32}.$$

Si l'une des quantités $\varphi_{ik} - \psi_j\varphi_{ik}$ est nulle, toutes les autres sont également nulles, et si l'un de φ_{ik} est un scalaire, il en est de même pour tous les autres. Il vient alors

$$\varphi_{23} = \varphi_{13},$$
$$\varphi_{31} = \varphi_{21},$$
$$\varphi_{12} = \varphi_{32}.$$

Si Δ est de degré impair, $\varphi_{ij} \in K$ a une valeur indépendante des indices et l'on retrouve que Δ est son propre annulateur.

Si Δ est de degré pair, $\varphi_{ij} \,\overline{\overline{/}}\, - \varphi_{ji}$ et le système précédent donne

$$\varphi_{ij} = 0.$$

Les seuls annulateurs de Δ sont des combinaisons linéaires de formes suivantes :

$$(\omega_1 - \omega_2)\psi_3\varphi_{12} + (\omega_2 - \omega_3)\psi_1\varphi_{23} + (\omega_3 - \omega_2)\psi_2\varphi_{31}.$$

Ils sont toujours réductibles à des sommes d'annulateurs simples. Nous obtiendrons ultérieurement une généralisation remarquable de cette propriété.

3° *Recherche des annulateurs de la forme*

$$\boxed{\Delta = [x_{12}x_{13}y_1] + u[x_{12}y_2 + x_{13}y_3 + vr],} \tag{27}$$

avec

$$\left.\begin{aligned} \omega_1 &= x_{12}x_{13}y_1 \\ \omega_2 &= u\ \ x_{12}y_2 \\ \omega_3 &= u\ \ x_{13}y_3 \\ \omega_4 &= u\ \ v\ \ r \end{aligned}\right\} \quad \text{et} \qquad \Delta = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4.$$

Pour fixer les idées les éléments x_{1i}, y_i, u, v, r *sont tous de degrés impairs.*

Tableau des m_{ij}. — *Champs des φ_{ij}.*

Indices (ij).	m_{ij}.	Indices (ij).	m_{ij}.	(Indices ij).	Champs.
12.......	$y_2 u$	21.......	$x_{13} y_1$	12......	$y_3 v r$
13.......	$y_3 u$	31.......	$y_1 x_{12}$	13......	$y_2 v r$
14.......	$u v r$	41.......	$x_{12} x_{13} y_1$	14......	$y_2 y_3$
23.......	$x_{13} y_3$	32.......	$x_{12} y_1$	23......	$y_1 v r$
24.......	$v r$	42.......	$x_{12} y_2$	24......	$x_{13} y_1 y_3$
34.......	$v r$	43.......	$x_{13} y_3$	34......	$x_{12} y_1 y_2$

Résidus.

$$\boxed{\begin{aligned} R_1 &= y_2 u \varphi_{12} + y_3 u \varphi_{13} + u v r \varphi_{14}, \\ R_2 &= x_{13} y_1 \varphi_{21} + x_{13} y_3 \varphi_{23} + v r \varphi_{24}, \\ R_3 &= y_1 x_{12} \varphi_{31} + x_{12} y_2 \varphi_{32} + v r \varphi_{34}, \\ R_4 &= x_{12} x_{13} y_1 \varphi_{41} + x_{12} y_2 \varphi_{42} + x_{13} y_3 \varphi_{43}. \end{aligned}} \tag{28}$$

Conditions imposées aux φ_{ij} par les équations (17) :

$$\left\{ \begin{array}{lll} \varphi_{12} + \varphi_{21} = 0, & \varphi_{14} = \varphi_{41}, & \varphi_{23} + \varphi_{32} = 0, \\ \varphi_{13} + \varphi_{31} = 0, & \varphi_{34} + \varphi_{43} = 0, & \varphi_{24} + \varphi_{42} = 0. \end{array} \right. \tag{29}$$

Conditions imposées aux φ_{ij} par les équations de structure (23) *ou* (24).

Indices (ij) figurant dans l'équation (23).	Énoncés des conditions.
12..................	$\varphi_{24} = \psi_1 \varphi_{24}$
13..................	$\varphi_{34} = \psi_1 \varphi_{34}$
14..................	néant ($m_{41} + m_{14}$ annule Δ)
34..................	$\varphi_{31} = \psi_4 \varphi_{31} + k^2_{31} y_2$ $\varphi_{32} = \psi_4 \varphi_{32} + k^1_{32} y_1$ $\varphi_{42} = \psi_3 \varphi_{42} + k^1_{42} y_1$ (30) $\boxed{\text{avec } k^2_{31} + k^1_{32} = k^1_{42}}$
24..................	$\varphi_{43} = \psi_2 \varphi_{43} + k^1_{43} y_1$ $\varphi_{21} = \psi_4 \varphi_{21} + k^3_{21} y_3$ $\varphi_{23} = \psi_4 \varphi_{23} + k^1_{23} y_1$ (31) $\boxed{\text{avec } k^1_{43} + k^3_{21} = k^1_{23}}$
23..................	$\varphi_{24} = \psi_3 \varphi_{24} + k^1_{24} y_1$ $\varphi_{34} = \psi_2 \varphi_{34} + k^1_{34} y_1$ (32) $\boxed{\text{avec } k^1_{24} = k^1_{34}}$

Note. — Les quantités $k^{\cdot}_{\cdot\cdot}$ sont des scalaires.

Génération de l'idéal $\mathcal{J}_\Delta$. — En appliquant la formule (22) il vient de (28) :

$$(33)\qquad \begin{aligned} G = {} & (y_2 u - x_{13}y_1)\varphi_{12} + (y_3 u - y_1 x_{12})\varphi_{13} + (uvr + x_{12}x_{13}y_1)\varphi_{14} \\ & + (x_{13}y_3 - x_{12}y_2)\varphi_{23} + vr\psi_1\varphi_{24} - x_{12}y_2\psi_3\varphi_{24} \\ & + vr\psi_{12}\varphi_{34} - x_{13}y_3\psi_2\varphi_{43} + \psi_{1234}G. \end{aligned}$$

On peut poser $G = G_1 + G_2$; G_1 étant ce que devient le second membre de (33) quand on remplace φ_{ij} par la valeur qu'on en tire du tableau précédent avec des scalaires $k^{:}_{..}$ nuls. G_2 s'obtient, en faisant

$$\varphi_{ij} = k^s_{ij}y_s \qquad [(ij) = (12), (13), (34), (42), (23)];$$

$$\begin{aligned} G_1 = {} & (m_{12} - m_{21})\psi_4(A) + (m_{13} - m_{31})\psi_4(B) + (m_{14} + m_{41})(C) + (m_{34} - m_{43})\psi_{12}(D) \\ & + (m_{42} - m_{24})\psi_{13}(E) + (m_{23} - m_{32})\psi_4(F) + \psi_{1,2,3,4}(H); \end{aligned}$$

A, B, C, D, E, F, sont quelconques ([16]) et G_1 se réduit à une somme d'annulateurs simples.

Les équations (30), (31) et (32) auxquelles satisfont les $k^{:}_{..}$ s'écrivent

$$\begin{aligned} 2k^1_{23} &= k^2_{31} + k^3_{21}, \\ 2k^1_{42} = 2k^1_{43} &= k^2_{31} - k^3_{21}. \end{aligned}$$

En discutant ce système ($k^3_{21} = 0$ ou $k^2_{31} = 0$), on trouve une seule valeur de G_2, savoir

$$(34)\qquad \boxed{G_2 = \lambda[2uy_2y_3 - (x_{12}y_2 + x_{13}y_3 - vr)y_1]} \qquad (\lambda \in K).$$

THÉORÈME 1. — *Pour que* G *soit annulateur simple du même degré que* Δ *il faut que* $G_2 = 0$, *c'est-à-dire que* $\lambda = 0$.

En effet si G est simple il en est de même de $\mathcal{R}_4(G)$ qui s'écrit

$$\mathcal{R}_4(G) = x_{12}x_{13}(a_1y_1 + a_2y_2 + a_3y_3) - \lambda(x_{12}y_2 + x_{13}y_3)y_1 \qquad (a_1, a_2, a_3, \lambda \in K).$$

Or, λ et l'un des a_i au moins n'étant pas nuls, on a

$$\left[\frac{\partial\mathcal{R}_4}{\partial[x_{12}x_{13}]}\cdot\frac{\partial\mathcal{R}_4}{\partial[y_2y_1]}\cdot\frac{\partial\mathcal{R}_4}{\partial[y_3y_1]}\right] \neq 0.$$

Donc χ étant un scalaire, il viendrait, si $\mathcal{R}_4$ était simple :

$$\chi\mathcal{R}_4 = \left[\frac{\partial\mathcal{R}_4}{\partial[x_{12}x_{13}]}\cdot\frac{\partial\mathcal{R}_4}{\partial[y_2y_1]}\cdot\frac{\partial\mathcal{R}_4}{\partial[y_3y_1]}\right]$$

ce qui est manifestement impossible. Si tous les a_i sont nuls et $\lambda \neq 0$, $\mathcal{R}_4$ n'est certainement pas élémentaire. Il ne peut donc le devenir qu'avec $\lambda = 0$.

C. Q. F. D.

THÉORÈME 2. — G *supposé du même degré que* Δ *ne peut s'annuler que si* $\lambda = 0$, car $\mathcal{R}_4(G) = 0$ entraîne notamment $\lambda = 0$.

([16]) Les champs de ces éléments sont (vr) pour A, B, F; (y_2, y_3) pour C; $[x_{12}, (y_1, y_2)]$ pour D et $[x_{13}, (y_1, y_3)]$ pour E.

THÉORÈME 3. — G_2 *n'est pas réductible à une somme d'annulateurs simples*, car d'après le théorème 1 une telle somme est un polynôme G_1 et d'après le théorème 2 aucun polynôme G_1 ne peut être égal à G_2.

Note. — En remplaçant F par CorF dans l'énoncé du théorème 2 du paragraphe 8 on obtient l'énoncé suivant :

F *admet un annulateur* G *si et seulement si* $DF = 0$, D *étant dans la base considérée l'opérateur de dérivation associé à* G_q.

A titre d'application et en nous inspirant de (34) cherchons un annulateur G'_2 de Δ défini par (27). Les x_{ij}, u, v, r étant supposés de degrés pairs :

$$\operatorname{Cor}\Delta = [y_2 y_3 uvr] + [x_{13} y_1 y_3 vr] + [x_{12} y_1 y_2 vr] + [x_{12} x_{13} y_1 y_2 y_3];$$

$$\frac{\partial \operatorname{Cor}\Delta}{\partial u\, y_2 y_3} = vr; \qquad \frac{\partial \operatorname{Cor}\Delta}{\partial x_{12}\, y_2 y_1} = vr + x_{13} y_3; \qquad \frac{\partial \operatorname{Cor}\Delta}{\partial x_{13}\, y_3 y_1} = vr + x_{12} y_2;$$

$$\frac{\partial \operatorname{Cor}\Delta}{\partial vry_1} = x_{13} y_3 + x_{12} y_2.$$

Il vient aussitôt

$$G'_2 = 2uy_2y_3 + vry_1 - x_{12}y_2y_1 - x_{13}y_3y_1 = 2uy_2y_3 - [x_{12}y_2 + x_{13}y_3 - vr[y_1.$$

CHAPITRE IV.

STRUCTURE D'ALGÈBRE EXTÉRIEURE DE DEGRÉ PAIR $2nd$.

16. PREMIÈRE ESQUISSE DE STRUCTURE D'ALGÈBRE EXTÉRIEURE DE DEGRÉ $2dn$ RELATIVEMENT A LA SOMME Δ DE n MULTIVECTEURS ω_i DISJOINTS ET DU MÊME DEGRÉ PAIR : $2d(d \geqq 1)$ (*cf.* § 11).

Définitions. — Nous posons

$$\Delta = \sum_1^n [\omega_i], \tag{1}$$

(X) désigne une base *normale* de $\mathfrak{A}$ *canonique pour* Δ (*cf.* § 11. — Dans une telle base la mesure de Δ^n est $n!$) Un monôme q de la base (X) de degré inférieur à $2d$ dont tous les éléments appartiennent au même monôme ω_i sera dit *inclus* dans ω_i et nous poserons

$$q \in \omega_i. \tag{2}$$

Tout monôme basique $[m]$ de (X) peut être considéré sans équivoque, comme le produit de k facteurs ω_i : $[\omega_{i_1}, \ldots, \omega_{i_k}]$ et de r monômes $q_{\alpha_1}, \ldots q_{\alpha_r}$ respectivement inclus dans $\omega_{\alpha_1}, \ldots, \omega_{\alpha_r}$ tous distincts les uns des autres ainsi que de $\omega_{i_1}, \ldots, \omega_{i_k}$, k *est appelé degré de* $[m]$ *en les* ω_i.

La quantité $p = 2k + r$ *est appelée le degré réduit de* m. Si $d = 1$, c'est-à-dire si Δ est une forme quadratique, degré réduit et degré vrai coïncident.

L'ensemble de tous les éléments de $\mathfrak{A}$ *construits avec des monômes du même degré réduit* p *est un module* $\mathrm{D}(p)$. *Dans* $\mathrm{D}(p)$ *l'ensemble des éléments construits avec des monômes ayant même degré* k *en les* ω_i *est un sous-module* $\Omega_{k,r}$. $\mathfrak{A}$ est somme directe des $\mathrm{D}(p)$ et chaque $\mathrm{D}(p)$ est somme directe de ses $\Omega_{k,r}$.

On appelle indice critique de $\mathrm{D}(p)$ *la quantité* $\beta = n - p + 1$.

Pour un élément H quelconque de $\mathfrak{A}$, $\psi_i(\mathrm{H})$ ayant la même signification qu'au paragraphe 12 [égalité (1)] nous écrirons

$$\psi_i(\mathrm{H}) = \theta_i(\mathrm{H}) + \omega_i \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \omega_i}, \tag{3}$$

$\theta_i(\mathrm{H})$ est somme des termes de H, qui contiennent dans tous leurs termes des éléments de ω_i à l'exclusion de ω_i lui-même. Plus généralement on définit

$$\theta_{i_1,\ldots,i_h}(\mathrm{H}) = \theta_h \ldots \theta_2 \theta_1(\mathrm{H}).$$

Relations de structure : Identités fondamentales dans le module $\Omega_{k,r}$:

THÉORÈME. — *Si* $\mathrm{H} \in \Omega_{k,r}$:

$$\boxed{r\mathrm{H} = \sum_1^n \theta_i(\mathrm{H})} \quad \text{et} \quad \boxed{k\mathrm{H} = \sum_1^n \omega_i \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \omega_i}.}$$

Démonstration. — Un terme monôme de H dans la base (X) peut s'écrire $\lambda_{\alpha_1,\ldots,\alpha_r}\, \omega_{i_1}, \ldots, \omega_{i_k}$, avec $\lambda_{\alpha_1,\ldots,\alpha_r} \in \Omega_{0,r}$. Il figure exclusivement dans $\theta_{\alpha_1}, \theta_{\alpha_2}, \ldots, \theta_{\alpha_r}$, donc r fois dans $\Sigma\theta_i(\mathrm{H})$ et

$$\Sigma\theta_i(\mathrm{H}) = r\mathrm{H}. \tag{4}$$

Il figure exclusivement dans $\omega_{i_1}\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \omega_{i_1}}, \ldots, \omega_{i_k}\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \omega_{i_k}}$, donc k fois dans $\Sigma\omega_i \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \omega_i}$ et

$$\Sigma\omega_i \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \omega_i} = k\mathrm{H}. \tag{5}$$

C. Q. F. D.

COROLLAIRE :

$$\boxed{(n - k - r)\mathrm{H} = \sum_1^n \mathcal{R}_i(\mathrm{H}).} \tag{6}$$

En effet si nous posons

$$\mathrm{H} = \theta_i(\mathrm{H}) + \omega_i \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \omega_i} + \mathcal{R}_i(\mathrm{H}) \qquad (\mathcal{R}_i, \text{ résidu relatif à } \omega_i)$$

et si nous ajoutons membre à membre toutes ces égalités (pour $i = 1, \ldots, n$), il vient de (4) et (5)

$$(4) \text{ et } (5) \qquad n\mathrm{H} = r\mathrm{H} + k\mathrm{H} + \sum_{1}^{n} \mathcal{R}_i(\mathrm{H}).$$

C. Q. F. D.

17. Notion de dérivée totale d'une forme F relativement a Δ. — *Définition.* — F étant définie dans la base (X) j'appelle dérivée totale de F par rapport à Δ, la quantité

$$\frac{d\mathrm{F}}{d\Delta} = \sum_{1}^{n} \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \omega_i}. \tag{7}$$

Je pose

$$\frac{d}{d\Delta}\left(\frac{d\mathrm{F}}{d\Delta}\right) = \frac{d^2\mathrm{F}}{d\Delta^2} \quad (^{17}), \qquad \ldots;$$

d'où

$$\frac{d^x\mathrm{F}}{d\Delta^x} = \sum_{i_1,\ldots,i_x} \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial[\omega_{i_1}, \ldots, \omega_{i_x}]} = x!\sum_{(i_1,\ldots,i_x)} \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial[\omega_{i_1}, \ldots, \omega_{i_x}]}.$$

On a dans (X)

$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial[\omega_{i_1}, \ldots, \omega_{i_x}]} = \mathrm{F} \mid [\omega_{i_{x+1}}, \ldots, \omega_{i_n}],$$

d'où

$$\sum_{i_1,\ldots,i_x} \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial[\omega_{i_1}, \ldots, \omega_{i_x}]} = \mathrm{F} \,\Big|\, \sum [\omega_{i_{x+1}}, \ldots, \omega_{x_n}] = \mathrm{F} \,\Big|\, \frac{\Delta^{n-x}}{(n-x)!},$$

et par conséquent

$$\boxed{\frac{1}{x!}\frac{d^x\mathrm{F}}{d\Delta^x} = \mathrm{F} \,\Big|\, \frac{\Delta^{(n-x)}}{(n-x)!}.} \tag{8}$$

Cette dernière formule, qui met en évidence le caractère intrinsèque des dérivées totales, permettra de les calculer dans toute base normale canonique ou non pour Δ.

Théorème 1. — *Pour tout élément* H *du module* D(p), *on a*

$$\boxed{\frac{d[\Delta\mathrm{H}]}{d\Delta} = (n-p)\mathrm{H} + \Delta\frac{d\mathrm{H}}{d\Delta}.} \tag{9}$$

Pour établir (9), il suffit évidemment de supposer $\mathrm{H} \in \Omega_{k,r}$. Or de (5) et (6), on tire

$$(n-p)\mathrm{H} = -\sum_{1}^{n} \omega_i \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \omega_i} + \sum_{1}^{n} \frac{\partial[\omega_i \mathrm{H}]}{\partial \omega_i} \qquad \text{car} \quad \mathcal{R}_i(\mathrm{H}) = \frac{\partial[\omega_i\mathrm{H}]}{\partial \omega_i}.$$

---

(17) Nous écrirons aussi $\frac{d}{d\Delta}\left(\frac{d\mathrm{H}}{d\Delta}\right) = \frac{d^2}{d\Delta}\mathrm{H}$ et plus généralement $\frac{d^x}{d\Delta} = \left(\frac{d}{d\Delta}\right)^x$.

Par ailleurs pour $j \neq i$:

$$-\omega_j \frac{\partial H}{\partial \omega_i} + \frac{\partial[\omega_j H]}{\partial \omega_i} = 0.$$

Donc

$$(n-p)H = -\sum_{i,j} \omega_j \frac{\partial H}{\partial \omega_i} + \sum_{i,j} \frac{\partial[\omega_j H]}{\partial \omega_i}.$$

La sommation par rapport à i et à j s'effectuant de 1 à n, il vient

$$\sum_{i,j} \omega_j \frac{\partial H}{\partial \omega_i} = \Delta \frac{dH}{d\Delta}, \quad \text{et} \quad \sum_{i,j} \frac{\partial[\omega_j H]}{\partial \omega_i} = \frac{d[\Delta H]}{d\Delta}.$$

C. Q. F. D.

Corollaire. — *β étant l'indice critique de* $D(p)$ $(\beta = n-p+1)$, *on a pour* $H \in D(p)$:

$$\boxed{\frac{d}{d\Delta}\left[\frac{\Delta^x}{x!} H\right] = (\beta - x)\frac{\Delta^{x-1}}{(x-1)!} H + \frac{\Delta^x}{x!}\frac{dH}{d\Delta}.} \tag{10}$$

Pour $x = 1$, (10) se réduit à (9). Supposons (10) vérifiée et calculons $\frac{\Delta}{d\Delta}\left\{\frac{\Delta}{x+1}\left[\frac{\Delta^x}{x!}H\right]\right\}$, en appliquant (9) et (10), il vient

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\Delta}\left\{\frac{\Delta}{x+1}\left[\frac{\Delta^x}{x!}H\right]\right\} &= (n-p-2x)\frac{\Delta^x}{(x+1)!}H + \frac{\Delta}{x+1}\frac{d}{d\Delta}\left[\frac{\Delta^x}{x!}H\right] \\
&= (n-p-2x)\frac{\Delta^x}{(x+1)!}H + x\frac{\Delta^x}{(x+1)!}H(\beta - x) + \frac{\Delta^{x+1}}{(x+1)!}\frac{dH}{d\Delta} \\
&= (\beta - x - 1)\frac{\Delta^x}{x!}H + \frac{\Delta^{x+1}}{(x+1)!}\frac{dH}{d\Delta}.
\end{aligned}$$

Le théorème est donc établi par récurrence.

Règle générale de dérivation du produit $\Delta^x H$ $[H \in D(p)]$:

Théorème 2. — *Quelle que soit la valeur de s on a*

$$\boxed{\frac{1}{s!}\frac{d^s}{d\Delta}\left[\frac{\Delta^x}{x!}H\right] = \sum_{i=i_0}^{i=s} C_{s-i}^{n-p-x+s}\frac{\Delta^{x-s+i}}{(x-s+i)!}\frac{1}{i!}\frac{d^i}{d\Delta}H,} \tag{11}$$

i_0 est l'un des entiers zéro, $s-x$, qui n'est pas inférieur à l'autre; $\frac{d^0}{d\Delta}H = H$; $\frac{\Delta^0}{0!} = 1$; $C_0^{n-p-x+s} = 1$, même pour $n-p-x+s = 0$. Pour $i < s$ on a

$$C_{s-i}^{n-p-x+s} = \frac{(n-p-x+i+1)(n-p-x+i+2)\dots(n-p-x+s)}{(s-i)!}.$$

Premier cas : $s \leq x$, $i_0 = 0$; (11) *se réduit à* (10) *pour* $s = 1$. — Supposons (11) vérifiée et dérivons encore une fois. A cet effet il suffira [d'après (10)] de remplacer au second membre de (11) $\frac{\Delta^{x-s+i}}{(x-s+i)!}\frac{d^i}{d\Delta}\mathrm{H}$ par

$$(n-p-x+s+i+1)\frac{\Delta^{x-s+i-1}}{(x-s+i-1)!}\frac{d^i}{d\Delta}\mathrm{H}+\frac{\Delta^{x-s+i}}{(x-s+i)!}\frac{d^{i+1}}{d\Delta}\mathrm{H}.$$

Le terme du plus bas degré en Δ pour $(i=0)$, divisé par $(s+1)$ s'écrit

$$(12_1)\qquad \mathrm{C}_{s+1}^{n-p+x+(s+1)}\frac{\Delta^{x-(s+1)}}{[x-(s+1)]!}\mathrm{H}.$$

Le terme du plus haut « degré » en $\frac{d}{d\Delta}$, divisé par $(s+1)$ s'écrit (en faisant $i=s$)

$$(12_2)\qquad \frac{\Delta^x}{x!}\frac{1}{(s+1)!}\frac{d^{s+1}}{d\Delta}\mathrm{H}.$$

A l'exclusion des termes déjà calculés le facteur de $\frac{d^i}{d\Delta}$ dans le développement de la dérivée de (11) divisée par $(s+1)$ a pour expression

$$(13)\quad \frac{1}{s+1}\left\{\frac{1}{i!}[n-p-x+(s+1)+i]\mathrm{C}_{s-i}^{n-p-x+s}+\frac{1}{(i-1)!}\mathrm{C}_{s-i+1}^{n-p-x+s}\right\}\frac{\Delta^{x-+1+i)}}{[x-(s+1)+i]!}.$$

Dans (13) le nombre contenu entre accolades a pour valeur $\frac{1}{i!}\mathrm{C}_{(s+1)-i}^{n-p-x+s}$. Or les termes figurés en (12_1), (12_2) et (13) peuvent être directement tirés de (11) en y remplaçant s par $s+1$. La formule est donc établie par récurrence pour $s\leqq x$. Si $s=x$, on a

$$(14)\qquad \frac{1}{x!}\frac{d^x}{d\Delta}\left[\frac{\Delta^x}{x!}\mathrm{H}\right]=\mathrm{C}_x^{n-p}\mathrm{H}+\mathrm{C}_{x-1}^{n-p}\Delta\frac{d\mathrm{H}}{d\Delta}+\dots$$
$$+\mathrm{C}_{x-i}^{n-p}\frac{\Delta^i}{(i!)^2}\frac{d^i}{d\Delta}[\mathrm{H}]+\dots+\frac{\Delta^x}{(x!)^2}\frac{d^x}{d\Delta}[\mathrm{H}].$$

Second cas : $s\geqq x$; $i_0=s-x$. — En posant $i_0=t$ la formule (11) s'écrit

$$(11\ bis)\quad \frac{1}{(x+t)!}\frac{d^{x+t}}{d\Delta}\left[\frac{\Delta^x}{x!}\mathrm{H}\right]=\frac{1}{t!}\mathrm{C}_x^{n-p+t}\frac{d^t}{d\Delta}\mathrm{H}+\mathrm{C}_{x-1}^{n-p+t}\Delta\frac{1}{(t+1)!}\frac{d^{t+1}}{d\Delta}\mathrm{H}+\dots$$
$$+\frac{\Delta^x}{x!}\frac{1}{(t+x)!}\frac{d^{t+x}}{d\Delta}\mathrm{H}.$$

Elle est déjà vérifiée pour $t=0$ et elle se démontre encore par récurrence. Il suffit d'ailleurs de montrer qu'en dérivant (11 *bis*) le terme indépendant de Δ a pour valeur $\frac{x+t+1}{(t+1)!}\mathrm{C}_x^{n-p+t+1}\frac{d^{t+1}}{d\Delta}\mathrm{H}$. On applique (9) et l'on trouve

$$\left\{\frac{1}{t!}\mathrm{C}_x^{n-p+t}+\frac{n-p+2t+2}{(t+1)!}\mathrm{C}_{x-1}^{n-p+t}\right\}$$

pour coefficient de $\frac{d^{t+1}}{d\Delta}\mathrm{H}$. On établit aisément qu'il est équivalent à $\frac{x+t+1}{(t+1)!}\mathrm{C}_x^{n-p+t+1}$. Quelle que soit la valeur de s le dernier terme du second membre de (11) est $\frac{\Delta^x}{x!}\frac{1}{s!}\frac{d^s}{d\Delta}\mathrm{H}$, c'est pourquoi on peut toujours écrire $\mathrm{C}_0^{n-p-x+s}=1$.

C. Q. F. D.

Remarque. — Les scalaires $C_{s-i}^{n-p+s-x}$ de la formule générale (11) sont toujours bien définis : Ils ne s'annulent pour aucune valeur de $i \leqq s$ si $(n-p-x) \geqq 0$ (cas I) ou si $(n-p-n+s) < 0$ (cas II).

Ils s'annulent pour les valeurs de i, telles $n-p-x+i < 0 < n-p-x+s$.

Si $n-p-x+s=0$ tous les $C_{s-i}^{n-p+s-x}$ sont nuls, sauf pour $i=s$ et l'on peut écrire

$$\boxed{\frac{d^s}{d\Delta}\Delta^x \mathrm{H} = \Delta^x \frac{d^s}{d\Delta}\mathrm{H}} \qquad \textit{si et seulement si} \qquad \boxed{n+s=p+x.} \tag{15}$$

Forme intrinsèque de (11) *et forme corrélative.* — De (8) et de (11) avec $y=n-s$, $j=n-i$, j_0 étant l'un des entiers n et $(x+y)$ qui n'est pas supérieur à l'autre, on tire

$$\left[\frac{\Delta^x}{x!}\mathrm{H}\right]\left|\frac{\Delta^y}{y!}\right. = \sum_{j=y}^{j=j_0} C_{j-y}^{2n-p-x-y}\left[\frac{\Delta^{x+y-j}}{(x+y-j)!}\left[\mathrm{H}\left|\frac{\Delta^j}{j!}\right.\right]\right]. \tag{16}$$

Si l'on transforme (16) par corrélation dans la base (X) on obtient, en remplaçant CorH par H et p par $2n-p$ [car le module corrélatif de D(p) est D($2n-p$)]

$$\left[\frac{\Delta^s}{s!}\,\frac{1}{x!}\,\frac{d^x}{d\Delta}\mathrm{H}\right] = \sum_{i=i_0}^{i=s} C_{s-i}^{-n+p-x+s}\,\frac{1}{(x-s+i)!}\,\frac{d^{x-s+i}}{d\Delta}\left[\mathrm{H}\,\frac{\Delta^i}{i!}\right]. \tag{17}$$

18. Quelques applications du calcul des dérivées totales. — *a. Décomposition effective d'un élément* F *de l'algèbre* $\mathfrak{A}_{2nd}$ *selon les modules* D(p). — Si le degré réduit de Δ est 1, c'est-à-dire si Δ est quadratique, la décomposition envisagée se confond avec la séparation dans F des formes homogènes des différents degrés (vrais). Si Δ est de degré 4 au moins ($d \geqq 2$), nous poserons

$$\mathrm{F} = \Sigma \mathrm{H}_i, \qquad \text{avec} \qquad \mathrm{H}_i \in \mathrm{D}(p_i)$$

et F étant définie dans une base normale quelconque, nous nous proposerons de calculer les H_i.

Considérons l'opérateur

$$\mathrm{Z} = n + \Delta\frac{d}{d\Delta} - \frac{d}{d\Delta}\Delta.$$

D'après la relation (9), nous avons

$$\mathrm{ZH}_i = p_i \mathrm{H}_i, \qquad \text{d'où} \qquad \mathrm{ZF} = \Sigma p_i \mathrm{H}_i$$

et par itération

$$\mathrm{Z}^x(\mathrm{F}) = \Sigma (p_i)^x \mathrm{H}_i. \tag{18}$$

Le nombre total des entiers tous distincts, p_i, étant désigné par $\mathrm{N}+1$, on voit que le système (18) avec $\mathrm{Z}^0(\mathrm{F}) = \mathrm{F}$ et $x = 1, \ldots, \mathrm{N}$ est un système de Cramer où les H_i sont les inconnues et où le déterminant principal est un déterminant de Vandermonde certainement non nul. Il découle d'ailleurs de (8) que l'opérateur Z a un sens intrinsèque qu'il confère aux modules $D(p)$. La décomposition de H_i en les $\Omega_{k,r}$ peut s'effectuer (comme ci-dessus) à l'aide de (5) (*cf.* § 22, p. 272). C'est encore une opération intrinsèque si $d \geqq 2$ en raison de l'unicité du développement :

$$\Delta = \sum_1^n \omega_i.$$

b. Relations fondamentales dans le module $D(p)$:

THÉORÈME 1. — Premier énoncé : Δ^x *n'a pas d'annulateur d'un degré réduit égal ou inférieur à* $n - x$. — Deuxième énoncé : $\Delta^x H = 0$ *et* $H = 0$ *sont des relations équivalentes pour* $H \in D(p)$ *si et seulement si* $n \geqq p + x$. *On dit alors que* $\Delta^x H = 0$ *est simplifiable* [par $\Delta^h (h \leqq x)$].

Démonstration. — Soit N le nombre des dérivées successives non identiquement nulles de H. On a de (11) (après multiplication par Δ^u) :

$$\frac{\Delta^u}{(x+u)!}\frac{d^{x+u}}{d\Delta}\left[\frac{\Delta^x}{x!}H\right] = C_x^{n-p+u}\left[\Delta^u \frac{1}{u!}\frac{d^u H}{d\Delta^u}\right] + \ldots,$$

et quel que soit u nous sommes dans le cas I du paragraphe précédent : les C_x^{n-p+u} ne s'annulent jamais. Considérons les $N+1$ équations obtenues pour $u = 0, 1, \ldots, N$ où les inconnues sont les $\Delta^u \dfrac{d^u H}{d\Delta^u}$ $(u = 0, 1, \ldots, N)$. Si $H\Delta^x = 0$, elles forment un système homogène à matrice triangulaire régulière. Il s'ensuit que H et tous les $\Delta^u \dfrac{d^u H}{d\Delta^u}$ sont nuls. C. Q. F. D.

THÉORÈME 1 *bis* (corrélatif du précédent) :

$$\boxed{\frac{d^x H}{d\Delta^x} = 0 \qquad \textit{entraîne} \quad H = 0 \qquad \text{si} \quad p \geqq n + x.}$$

En effet d'après (8), $\dfrac{d^x H}{d\Delta^x} = 0$ équivaut à l'égalité $[\mathrm{Cor}_X H]\Delta^x = 0$ qui entraîne $\mathrm{Cor}_X H = 0$ donc $H = 0$ si $n \geqq 2n - p + x$, c'est-à-dire si $n \geqq p - x$ [car $\mathrm{Cor}\, H \in D(2n - p)$; *cf.* théorème 1]. C. Q. F. D.

L'égalité $\dfrac{d^x}{d\Delta}H = 0$ *est dite simplifiable* $\left[\text{par } \dfrac{d^h}{d\Delta}, (h \leqq x)\right]$ *si elle implique* $H = 0$.

Note concernant le théorème 1. — Si Δ est une forme quadratique ($d = 1$) on retrouve l'un des théorèmes fondamentaux de Lepage qu'on peut encore généraliser comme il suit :

THÉORÈME 1 *ter*. — *Si la forme* P *de degré pair est telle que* $P^n \neq 0$, P^x *n'a pas d'annulateur d'un degré (vrai)* p' *inférieur ou égal à* $(n - x)$.

P n'est pas nécessairement une somme de multivecteurs disjoints. Soit $\overline{X} = (\overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_N)$ une base quelconque de l'algèbre $\mathfrak{A}$ et F un annulateur éventuel de P^x de degré p'. De la relation

$$P^x F = 0, \tag{19}$$

on tire, par dérivation,

$$x P^{x-1} \frac{\partial P}{\partial \overline{X}_{i_1}} F + P^x \frac{\partial F}{\partial \overline{X}_i} = 0. \tag{20}$$

En multipliant (20) par P et en tenant compte de (19), il vient

$$P^{x+1} \frac{\partial F}{d X_{i_1}} = 0.$$

En itérant l'opération précédente, il vient encore :

$$P^{x+p'} \frac{\partial F}{\partial[\overline{X}_{i_1}, \ldots, \overline{X}_{i_{p'}}]} = 0, \tag{21}$$

$\dfrac{\partial F}{\partial[\overline{X}_{i_1}, \ldots, \overline{X}_{i_{p'}}]}$ est une composante scalaire *quelconque* de F. Elle s'annule par (21), si $x + p' \leqq n$. C. Q. F. D.

Note concernant l'indice critique. — Pour $H \in D(p)$ et $n \geqq p + x \Delta^x H = 0$ est simplifiable à gauche et devient $H = 0$. La quantité $n - p + 1$, indice critique de H est donc le plus petit exposant β pour lequel $\Delta^\beta H = 0$ n'entraîne pas identiquement $H = 0$. Par ailleurs de (10), $\dfrac{d}{d\Delta}[\Delta^\beta H] = \Delta^\beta \dfrac{dH}{d\Delta}$ et $\Delta^\beta H = 0$ équivaut à $\dfrac{dH}{d\Delta} = 0$, car $\Delta^\beta \dfrac{dH}{d\Delta} = 0$ est simplifiable puisque l'indice critique de $\dfrac{dH}{d\Delta}$ est $\beta + 2$. L'énoncé suivant généralise ces remarques.

Théorème 2. — *Pour* $H \in D(p)$ *les relations*

$$\Delta^{n-p+s} H = 0, \tag{22}$$

$$\frac{d^s}{d\Delta} H = 0 \tag{23}$$

sont équivalentes.

En effet : de (15), si $n + s = p + x$, on a

$$\Delta^x \left[\frac{d^s}{ds} H\right] = \frac{d^s}{d\Delta}[\Delta^x H].$$

S'il est nul chaque membre de cette égalité est simplifiable (théorèmes 1 et 1 *bis*); le premier par Δ^x et le second par $\dfrac{d^s}{d\Delta}$. Il en résulte que $\dfrac{d^s}{d\Delta} H = 0$ entraîne $\Delta^x H = 0$ et réciproquement. C. Q. F. D.

Remarque. — L'énoncé précédent suppose évidemment $n - p + s \geqq 0$, $s \geqq 0$. Pour $s = 0$ on retrouve un cas particulier du théorème 1 et pour $s = n - p$ particulier du théorème 1 *bis*.

THÉORÈME 3. — *Tout élément* H *du module* $D(n+h)(h>0)$ *est le produit par* Δ^h *d'un élément* Φ *bien déterminé du module* $D(n-h)$.

(Si Δ est de degré 2 c'est encore un théorème de Lepage.)

D'après la remarque qui suit le théorème 2 du paragraphe 17 la relation (11) appliquée à H ne contient pas de coefficient scalaire $C_{s-i}^{n-p+s-x}$ nul si $h > s - x$ (cas II). Par ailleurs il existe certainement une valeur de x telle que $\Delta^{x-1} H \neq 0$, $H\Delta^x = 0$.

Appliquons (11) à H en donnant à x la valeur définie ci-dessus et à s les valeurs successives $x, x+1, \ldots, x+h-1$. Nous obtiendrons h équations homogènes en les quantités $H_k = \Delta^k \dfrac{d^k}{d\Delta} H\,(H_0 = H)$. Elles peuvent s'écrire :

$$(A_{h\times h} \quad B)\begin{pmatrix} H \\ \vdots \\ H_{x+h-1} \end{pmatrix} = 0,$$

$A_{h\times h}$ étant une matrice triangulaire inversible. On en tire $H_i = \sum_{t=h}^{t=x+h-1} a_i^t H_t$ ou encore en particulier

$$H = \Delta^h\left[a_0^h \frac{d^h}{d\Delta} H + \ldots\right] \qquad (a_i^t \in K). \tag{24}$$

Observons d'ailleurs que d'après le théorème 1 *bis*, $\dfrac{d^h}{d\Delta} H \neq 0$ et que $H = \Delta^h \Phi$ entraîne l'unicité de Φ. Si l'on avait en effet $H = \Delta^h \Phi_1$, on aurait $\Delta^h(\Phi - \Phi_1) = 0$, d'où d'après le théorème 1, $\Phi = \Phi_1$. C. Q. F. D.

THÉORÈME 3 *bis* (corrélatif du précédent). — *Toute forme* $H \in D(n-h)$ *est la* $h^{\text{ième}}$ *dérivée totale d'une forme* $F \in D(n+h)$ *bien déterminée.*

$\mathrm{Cor}_X^{-1} H$ étant de degré réduit $n+h$, on a d'après le théorème précédent

$$\mathrm{Cor}_X^{-1} H = \frac{\Delta^h}{h\,!}\Phi_1.$$

En transformant par corrélation dans X $\left(\text{base canonique pour } \Delta, \text{ où } \mathrm{Cor}\dfrac{\Delta^x}{x\,!} = \dfrac{\Delta^{n-x}}{(n-x)\,!}\right)$, il vient $H = \mathrm{Cor}\,\Phi_1 \left| \dfrac{\Delta^{n-h}}{(n-h)\,!}\right.$, d'où d'après (8),

$$H = \frac{1}{h\,!}\frac{d^h}{d\Delta}[\mathrm{Cor}_X \Phi_1];$$

Φ_1 étant unique d'après le théorème précédent, la proposition est établie.

19. SUR LES ANNULATEURS DE Δ^x. — $\mathcal{J}_x$ désignera l'idéal annulateur de Δ^x et comme l'opérateur multiplicatif Δ^x transforme un élément de $\Omega_{k,r}$ en un élément (18) de $\Omega_{k+2x,r}$, $\mathcal{J}_x$ est somme directe des modules $\overline{\mathrm{D}}(p)$ [$\overline{\mathrm{D}}(p)$ étant l'intersection de $\mathcal{J}_x$ et de $\mathrm{D}(p)$]. Chaque $\overline{\mathrm{D}}(p)$ est somme directe de ses $\overline{\Omega}_{k,r}$.

Relations de structure fondamentales dans $\mathcal{J}_x$. — Les notations ψ_i, θ_i, R_i étant celles du paragraphe 16, nous poserons encore :

$$\omega_{i_1,\ldots,i_k} = \omega_{i_1} + \ldots + \omega_{i_k}, \qquad \omega'_{i_1,\ldots,i_k} = \Delta - \omega_{i_1,\ldots,i_k}.$$

Je dis que tout $\mathrm{H} \in \mathcal{J}_x$ *satisfait aux relations de structure suivantes :*

$$\boxed{\begin{aligned} &\theta_i(\mathrm{H})[\omega'_i]^x = 0, \\ &\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \omega_i}[\omega'_i]^{x+1} = 0. \end{aligned}} \tag{25}$$

En effet, on peut écrire

$$\mathrm{H} = \theta_i(\mathrm{H}) + \omega_i \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \omega_i} + \mathrm{R}_i(\mathrm{H}), \tag{26}$$

et

$$\theta_i(\Delta^x \mathrm{H}) = \Delta^x \theta_i(\mathrm{H}) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{R}_i(\Delta^x \mathrm{H}) = (\omega'_i)^x \mathrm{R}_i(\mathrm{H}).$$

D'ailleurs

$$\Delta^x = x\,\omega_i[\omega'_i]^{x-1} + [\omega'_i]^x.$$

Si $\mathrm{H} \in \mathcal{J}_x$, on a donc

$$\Delta^x \theta_i(\mathrm{H}) = 0, \qquad \text{d'où} \qquad \theta_i(\mathrm{H})[\omega'_i]^x = 0 \qquad \text{et} \qquad \Delta^{x+1}\mathrm{R}_i(\mathrm{H}) = 0.$$

En multipliant (26) par Δ^{x+1}, on tire, par conséquent

$$\omega_i \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \omega_i} \Delta^{x+1} = 0, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \omega_i}[\omega'_i]^{x+1} = 0.$$

C. Q. F. D.

En procédant par récurrence, on obtient encore

$$\boxed{\theta_{i_1,\ldots,i_r}(\mathrm{H})[\omega'_{i_1,\ldots,i_r}]^x = 0} \tag{28}$$

et

$$\boxed{\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial[\omega_{j_1}, \ldots, \omega_{j_k}]}[\omega'_{j_1,\ldots,j_k}]^{x+k} = 0.} \tag{29}$$

Complétons les relations précédentes en établissant directement une propriété remarquable des modules $\Omega_{0,r}$ (19).

(18) Éventuellement nul.

(19) Tout élément de $\Omega_{0,r}$ a évidemment une dérivée totale nulle. D'après le théorème 2 du paragraphe précédent il est donc annulateur de Δ^x *si* $x > n - r$. C'est cette dernière proposition qu'on retrouve ici par un raisonnement direct très simple.

LEMME. — *Tout monôme basique de* $H \in \overline{\Omega}_{0,r}$ *est annulateur de* Δ^x.

En effet si $m_1, \ldots, m_k$ sont k monômes unitaires, à composantes non nulles dans H et non contenus dans $\mathfrak{I}_x$, les différents produits $m_i \Delta^x$ n'ont deux à deux aucun terme unitaire commun. Il est donc impossible que leur somme s'annule, $k = 0$ et tous les monômes basiques de H annulent Δ^x.

THÉORÈME 4. — *Un monôme basique* $m \in \Omega_{0,r}$ *annule* Δ^x, *si et seulement si* $r + x > n$. (*Alors* $\Omega_{0,r} \in \mathfrak{I}_x$.)

Posons $m = \lambda[\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_r}](\lambda \in K,\ \alpha_{i_r} \in \omega_{i_r})$, $m\Delta^x = 0$ si et seulement si chaque terme partiel du produit Δ^x contient au moins un des monômes $\omega_{i_1}, \ldots, \omega_{i_r}$, donc si $r + x > n$. C. Q. F. D.

COROLLAIRE. — $H \in \Omega_{k,r}$ *n'annule* Δ^x *que si* $2k + r + x > n$.

En effet $P = \dfrac{\partial H}{\partial[\omega_{j_1} - \omega_{j_k}]}$ appartient à l'algèbre $\mathfrak{A}'$ construite sur les éléments de $\Delta' = \omega'_{j_1,\ldots,j_k}$. Dans $\mathfrak{A}'$, $P \in \Omega'_{0,r}$ et d'après (29), $P\Delta'^{x+k} = 0$. On a donc d'après le théorème 4, $r + x + k > n - k$, C. Q. F. D.

Remarque. — La méthode précédente fournit une nouvelle démonstration du théorème 1. Voici également dans le même ordre d'idées une autre démonstration du théorème 3. Un monôme basique (de X) $\in \Omega_{k,r}$ est le produit d'un monôme $m \in \Omega_{0,r}$ et d'un monôme $P = \frac{1}{k!}[\omega_{j_1,\ldots,j_k}]^k \in \Omega_{k,0}$. On peut écrire

$$k!\,P = [-\omega'_{j_1,\ldots,j_k} + \Delta]^k. \tag{30}$$

Comme ci-dessus posons $m = [\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_r}]$; les $\omega_{i_1}, \ldots, \omega_{i_r}$ appartiennent à $\omega'_{i_1\ldots i_k}$. Il s'ensuit que $m[\omega'_{j_1,\ldots,j_k}]^t = 0$ si $t + r > n - k$. En développant le second membre de (30) par la formule du binôme on fera donc apparaître le facteur commun Δ^h avec

$$h = k - t_1 \qquad \text{et} \qquad t_1 = n - k - r, \qquad \text{d'où} \qquad h = n - (2k + r) = n - p.$$

C. Q. F. D.

Sur certaines classes de formes annulatrices de Δ^x. — Utilisant une terminologie connue ([20]) nous appellerons *forme de la classe zéro une forme* $H \in D(p)\,(p \leqq n)$ *dont la dérivée totale par rapport à* Δ *est nulle.* $\Big($On sait que si $p > n$, $\dfrac{dH}{d\Delta} = 0$ entraîne $H = 0.\Big)$

$\beta = n - p + 1 \geqq 0$ étant l'indice critique de $H \in D(p)$ on a $\dfrac{dH}{d\Delta} = 0$ si et seu-

([20]) *Cf.* A. LICHNEROWICZ, *Généralisations de la géométrie kählérienne globale* (*Colloque de géométrie de Louvain*, 1951, p. 117).

lement si $H\Delta^{\beta} = 0$ (théorème 2). *Alors* H *n'est pas divisible par* Δ *car* $H = \Delta\Phi$ entraînant $\Delta^{n-p+2}\Phi = 0$, pour $\Phi \in D(p-2)$, *il vient* $\Phi = 0$ (théorème 1 [22]).

Nous appellerons forme de la classe t (relativement à Δ) le produit par Δ^t d'une forme de la classe zéro. La classe t est le produit direct de la classe zéro par Δ^t car une forme non nulle $H\Delta^t$ de la classe t est toujours simplifiable (par Δ^t) puisque t est inférieur à l'indice critique de H; $\Delta^t H = \Delta^t H' \rightarrow H = H'$. Il en résulte que les classes sont disjointes : $F = \Delta^t H$, avec $\frac{dH}{d\Delta} = 0$ et $F = \Delta^{t+u} G$ entraîneraient en effet $H = \Delta^u G$, ce qui est contradictoire avec $\frac{dH}{d\Delta} = 0$.

Dans l'algèbre $\mathfrak{A}_{2nd}$ chaque classe $t (t = 0, 1, \ldots)$ est somme directe des classes t restreintes aux différents modules $D(p)$: en particulier si $H_1 \in D(p_1)$, $H_2 \in D(p_2)$, $\frac{d[H_1 + H_2]}{d\Delta} = 0$ se décompose en $\frac{dH_1}{d\Delta} = \frac{dH_2}{d\Delta} = 0$.

20. Décomposition canonique d'une forme $H \in D(p)$ en somme d'éléments appartenant aux classes définies par Δ. — Dans le module $D(p)$ chaque classe t est un espace vectoriel $\mathcal{V}_t (t = 0, 1, \ldots)$. La somme directe des $\mathcal{V}_t$ est un espace vectoriel $\mathcal{V}$. Lepage a montré que $\mathcal{V} = D(p)$ quand Δ est une forme quadratique. Nous étendrons au cas général (d quelconque) cette propriété remarquable.

Un élément de $\mathcal{V}$ s'écrit

$$H = a_0 + \sum_{i=1}^{i=k} \frac{\Delta^i}{i!} a_i, \tag{31}$$

avec

$$\frac{da_i}{d\Delta} = 0 \qquad (\text{pour } i = 0, 1, \ldots) \quad [22]. \tag{32}$$

Les a_i seront nommés les coefficients de H. On sait déjà que le développement du second membre est unique car $H = 0$ si et seulement si tous les a_i sont nuls. Inversement en nous donnant H quelconque dans $D(p)$ et (31) *a priori* nous montrerons qu'on trouve les a_i à l'aide de H et de ses dérivées totales. Plus exactement nous poserons d'abord

$$H = a_0 + \Delta\Phi \tag{33}$$

et nous calculerons a_0 et Φ, *p étant supposé inférieur à $n+1$*. a_0 sera nommé le reste de H modulo Δ.

---

[21] La démonstration précédente implique que si l'on a dans le module $D(p)$

$$a_0 + \Delta\Phi = a'_0 + \Delta\Phi', \qquad \text{avec } \frac{da_0}{d\Delta} = \frac{da'_0}{d\Delta} = 0$$

il vient nécessairement $a_0 = a'_0$; $\Phi = \Phi'$.

[22] $2k$ est le plus grand entier pair contenu dans p.

THÉORÈME. — *Tout* $H \in D(p)$ *admet* (*pour* $p \leqq n$) *la décomposition* (33) : $H = a_0 + \Delta\Phi$, a_0 *étant de classe zéro.* (On sait que l'existence de cette décomposition implique son unicité.)

Démonstration. — *a.* Considérons le polynôme

$$S_j = \beta! \sum_{i=0}^{i=j} \frac{[-\Delta]^i}{i!} \frac{1}{(\beta+i)!} \frac{d^i}{d\Delta}[H], \tag{34}$$

β étant l'indice critique de H. En appliquant la formule (10) il vient

$$\frac{dS_j}{d\Delta} = \beta! \left\{ \sum_{t=0}^{t=j-1} \frac{-[-\Delta]^t}{t!} \frac{1}{(\beta+t)!} \frac{d^{t+1}}{d\Delta}[H] + \sum_{i=0}^{i=j} \frac{[-\Delta]^i}{i!} \frac{1}{(\beta+i)!} \frac{d^{i+i}}{d\Delta}[H] \right\}.$$

Au second membre les termes se correspondant par l'égalité $t = i$ disparaissent deux à deux. Il ne reste que celui pour lequel $i = j$ et, par conséquent,

$$\frac{dS_j}{d\Delta} = \frac{\beta!}{(\beta+j)!} \frac{[-\Delta]^j}{j!} \frac{d^{j+1}}{d\Delta}[H]. \tag{35}$$

b. Soit k le plus haut degré en les ω_i du module $D(p)$. On a identiquement $\frac{d^{k+1}}{d\Delta}[H] = 0$. D'après (35), S_k est donc de la classe zéro. Or en développant (34) pour $j = k$, nous avons

$$S_k = H - \frac{\beta!}{(\beta+1)!} \Delta \frac{dH}{d\Delta} + \frac{\beta!}{(\beta+2)!} \frac{\Delta^2}{2!} \frac{d^2}{d\Delta}[H] + \ldots + \frac{\beta!}{(\beta+k)!} \frac{[-\Delta]^k}{k!} \frac{d^k}{d\Delta}[H] \tag{36}$$

(36) *s'identifie à* (33) *avec* $S_k = a_0$ et

$$\Phi = \beta! \left\{ \frac{1}{(\beta+1)!} \frac{d}{d\Delta}[H] - \frac{1}{(\beta+2)!} \frac{\Delta}{2!} \frac{d^2}{d\Delta}[H] + \ldots \right. \\ \left. + (-1)^k \frac{1}{(\beta+k)!} \frac{\Delta^{k-1}}{k!} \frac{d^k}{d\Delta}[H] \right\}. \tag{37}$$

C. Q. F. D.

Remarque. — Pour que H soit divisible par Δ il faut et il suffit que $S_k = 0$; Φ est alors le quotient de H par Δ.

Généralisation. — En décomposant $\Phi \in D(p-2)$ comme on vient de décomposer H et ainsi de suite on trouve bien un développement de H conforme à (31).

Calcul du « coefficient » a_s *de* (31) *à l'aide de* H *et de ses dérivées totales.* — On tire de (31), compte tenu de (32), de (11) et de (14)

$$\frac{1}{s!} \frac{d^s}{d\Delta}[H] = C_s^{\beta+2s-1} a_s + \Delta\Phi_s.$$

On est donc ramené pour calculer a_s à déterminer le reste modulo Δ de la forme

$$H_s = \frac{(\beta+s-1)!}{(\beta+2s-1)!} \frac{d^s}{d\Delta}[H].$$

a_s s'obtient alors par (36) en remplaçant dans le second membre H par H_s, β par $\beta + 2s$ et k par $k - s$. On trouve aisément

$$\boxed{a_s = \frac{\beta + 2s}{\beta + s} \sum_{i=0}^{i=k-s} \left(C_{\beta+s}^{\beta+2s+i}\right)^{-1} \frac{[-\Delta]^i}{i!} \frac{1}{(s+i)!} \frac{d^{s+i}}{d\Delta}[H].} \tag{38}$$

Décomposition dans $\mathcal{V}$ *d'une forme* F *dont le degré réduit est supérieur à* n. — Soit $F \in D(n+h)$. On peut écrire (théorème 3) $F = \Delta^h H$, $H \in D(n-h)$ est décomposable canoniquement selon (31) et il vient

$$F = \Delta^h \sum_{i=0}^{i=k} \frac{\Delta^i}{i!} a_i = \sum_{i=0}^{i=k} \frac{\Delta^{h+i}}{(h+i)!} b_i,$$

d'où

$$\frac{d^h}{d\Delta} F = \frac{(h+i)!}{i!} b_i \frac{\Delta^i}{i!}.$$

En décomposant $\frac{d^h}{d\Delta} F$ comme ci-dessus on pourra remonter aux b_i et aux a_i.

21. Structure des formes de la classe zéro. — Tout élément de l'algèbre $\mathfrak{A}$ se décomposant en une somme de produits comprenant une puissance de Δ et une forme de classe zéro il est intéressant d'analyser comment cette dernière est construite.

R_i désignant comme d'habitude le résidu d'une forme par rapport à ω_i nous introduirons encore l'opérateur linéaire

$$K_{ij} = R_i \frac{\partial}{\partial \omega_j} - R_j \frac{\partial}{\partial \omega_i}$$

et l'opérateur

$$S = \sum_{(ij)} [\omega_j - \omega_i] K_{ij}.$$

L'algèbre $\mathfrak{A}$ est toujours rapportée à la base X canonique pour Δ.

Théorème 1. — *L'opérateur* K_{kj} *change une forme de classe zéro en une forme de la même classe.*

Notons d'abord que pour tout monôme basique (de X)α, les opérateurs $\frac{\partial}{\partial \alpha}$, $\frac{d}{d\Delta}$ commutent puisque Δ est de degré pair. Il en résulte que toute dérivée dans la classe zéro est aussi de la classe zéro, ceci d'ailleurs quelle que soit la base dans laquelle on effectue les dérivations.

Cela posé, on peut écrire

$$R_i\left(\frac{\partial H}{\partial \omega_j}\right) = \frac{\partial H}{\partial \omega_j} - \omega_i \frac{\partial H}{\partial [\omega_i \omega_j]} - \theta_i \frac{\partial H}{\partial \omega_j}, \tag{39}$$

d'où

$$\frac{d}{d\Delta}\left[\mathrm{R}_i\left(\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \omega_j}\right)\right]=\frac{d}{d\Delta}\left[\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \omega_j}\right]-\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial[\omega_i\omega_j]}-\omega_i\frac{d}{d\Delta}\left[\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial[\omega_i\omega_j]}\right]-\theta_i\frac{d}{d\Delta}\left[\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \omega_j}\right].$$

Si $\dfrac{d\mathrm{H}}{d\Delta}=0$ toutes les dérivées totales qui figurent au second membre sont nulles et

$$\frac{d}{d\Delta}\left[\mathrm{R}_i\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \omega_j}\right]=-\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial[\omega_i\omega_j]}.$$

En permutant i et j on trouve aussitôt :

$$\frac{d}{d\Delta}\mathrm{K}_{ij}(\mathrm{H})=0.$$

C. Q. F. D.

Corollaire. — *Si* H *est de classe nulle, il en est de même de* S(H).

En effet $\mathrm{K}_{ij}(\mathrm{H})$ ne contenant aucun élément de ω_i et de ω_j :

$$\frac{d}{d\Delta}\{(\omega_j-\omega_i)\mathrm{K}_{ij}\mathrm{H}\}=\left[\frac{d}{d\Delta}(\omega_j-\omega_i)\right]\mathrm{K}_{ij}\mathrm{H}+(\omega_j-\omega_i)\frac{d}{d\Delta}\mathrm{K}_{ij}\mathrm{H}=0,$$

d'où

$$\frac{d}{d\Delta}\mathrm{SH}=0.$$

C. Q. F. D.

Théorème 2. — *L'opérateur* S *et l'opérateur multiplicatif* Δ^x *commutent.*

Nous utiliserons les notations du paragraphe 19 et nous observerons que A et B étant deux formes quelconques

$$\mathrm{R}_i(\mathrm{AB})=\mathrm{R}_i(\mathrm{A})\,\mathrm{R}_i(\mathrm{B}),\qquad \omega'_i=\mathrm{R}_i(\Delta)\qquad\text{et}\qquad [\omega'_i]^x=\mathrm{R}_i(\Delta^x).$$

Posons $\mathrm{F}=\Delta^x\mathrm{H}=x\omega_j[\omega'_j]^{x-1}\mathrm{R}_j[\mathrm{H}]+[\omega'_j]^x\mathrm{H}$,

$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \omega_j}=x[\omega'_j]^{x-1}\mathrm{R}_j[\mathrm{H}]+[\omega'_j]^x\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \omega_j},\qquad \mathrm{R}_i\omega'_j=\mathrm{R}_{ij}\Delta=\omega'_{ij},$$

donc

$$\mathrm{R}_i\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \omega_j}=x[\omega'_{ij}]^{x-1}\mathrm{R}_{ij}[\mathrm{H}]+[\omega'_{ij}]^x\mathrm{R}_i\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \omega_i},$$

$$\mathrm{K}_{ij}\mathrm{F}=[\omega'_{ij}]^x\mathrm{K}_{ij}\mathrm{H},\qquad (\omega_j-\omega_i)\mathrm{K}_{ij}\mathrm{F}=\Delta^x(\omega_j-\omega_i)\mathrm{K}_{ij}\mathrm{H}$$

et enfin après sommation par rapport aux permutations (ij)

$$\mathrm{SF}=\Delta^x\mathrm{SH}.$$

C. Q. F. D.

Corollaire. — *L'opérateur* S *change une forme de classe* x *en une forme de même classe.*

Théorème 3. — *Si* $\mathrm{H}\in\Omega_{k,r}$ *et* $\dfrac{d\mathrm{H}}{d\Delta}=0$; β *étant l'indice critique de* H *on a identiquement*

(40) $$\boxed{k(\beta+k)\,\mathrm{H}=\mathrm{SH}.}$$

Observons d'abord qu'on peut écrire en général

$$S = \sum_{i,j} (\omega_j - \omega_i) R_i \frac{\partial}{\partial \omega_j}.$$

Or si l'opérateur S est appliqué à une forme H de la classe zéro

$$\sum_i \omega_i R_i \frac{\partial H}{\partial \omega_j} = \omega_i R_i \frac{dH}{d\Delta} = 0.$$

On a donc

$$(41) \qquad S = \sum_{i,j} \omega_j R_i \frac{\partial}{\partial \omega_j}$$

et comme : 1° $R_i \omega_i \frac{\partial}{\partial \omega_i} = 0$; 2° $\omega_j R_i \frac{\partial}{\partial \omega_j} = R_i \omega_j \frac{\partial}{\partial \omega_j}$, si $i \neq j$, il vient de (41)

$$(42) \qquad S = \sum_i \omega_i R_i \frac{\partial}{\partial \omega_i} + \sum_{i,j} R_i \omega_j \frac{\partial}{\partial \omega_j}.$$

La première somme de (42) n'est autre que $\sum_i \omega_i \frac{\partial}{\partial \omega_i}$. La seconde s'écrit $\sum_i R_i \sum_j \omega_j \frac{\partial}{\partial \omega_j}$. Les sommations étant étendues aux valeurs 1, ..., n des indices. Mais d'après (5) (§ 16)

$$\sum_i \omega_i \frac{\partial H}{\partial \omega_i} = kH.$$

Dès lors de (42)

$$SH = kH + k \sum_i R_i(H).$$

De (6)

$$\sum R_i(H) = (n - k - r)H$$

et enfin

$$SH = k(n - k - r + 1)H = k(\beta + k)H.$$

C. Q. F. D.

En conséquence nous voyons que tout $H \in \Omega_{k,r} (k \neq 0)$ et de classe zéro peut s'écrire

$$(43) \qquad H = \eta \sum_{i,j} (\omega_j - \omega_i) K_{ij}(H),$$

η étant égal à $\frac{1}{k(\beta + k)}$, $K_{ij}(H)$ est de classe zéro et ne contient aucun élément appartenant à ω_i ou à ω_j.

La décomposition de H en le second membre de (43) sera nommée l'opération [S]. On peut encore appliquer l'opération [S] aux $K_{ij} H \in \Omega_{k-1,r}$ et ainsi de suite. On obtient en définitive l'énoncé suivant :

THÉORÈME 4. — *Pour tout* $H \in \Omega_{k,r} (k \neq 0)$, *on a* $\frac{dH}{d\Delta} = 0$ *si et seulement si* H *est décomposable en somme de produits tels que*

$$\lambda[\omega_{i_1} - \omega_{j_1}] \ldots [\omega_{i_k} - \omega_{j_k}][q_{\alpha_1}, \ldots, q_{\alpha_r}] = \pi, \tag{44}$$

λ est un scalaire; $q_{\alpha_i} \in \omega_{\alpha_i}$ *et la suite d'indices* (au nombre de $2k+r$) $i_1, \ldots, i_k$; $j_1, \ldots, j_k$; $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ *ne présente aucune répétition.*

Remarque. — Il est bien facile de comprendre pourquoi $\frac{dH}{d\Delta} = 0$ entraîne $H\Delta^\beta = 0$. En effet $[\omega_i - \omega_j][\omega_i + \omega_j] = 0$. Il en résulte que le produit des binômes en ω_i de (44) annule $\omega_{i_1, \ldots, i_k j_1, \ldots, j_k}$. Le produit $[q_{\alpha_1} \ldots q_{\alpha_r}]$ annule $\omega_{\alpha_1} + \ldots + \omega_{\alpha_r}$. π annule donc identiquement la quantité

$$\Delta_1 = [\omega_{\alpha_1} + \ldots + \omega_{\alpha_r} + \omega_{i_1} + \ldots + \omega_{i_k} + \omega_{j_1} + \ldots + \omega_{j_k}].$$

Si l'on pose $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2$, on a $\pi(\Delta_1 + \Delta_2)^\beta = \pi \Delta_2^\beta$. Mais $\Delta_2^\beta = 0$, car le nombre des ω_i de Δ_2 est inférieur d'une unité au degré de l'exposant β. On a donc $\pi \Delta^\beta = 0$.

C. Q. F. D.

Conclusion relative aux annulateurs de Δ^x. — Si l'annulateur G de Δ^x est décomposé selon les classes relatives à Δ le représentant $a_t \frac{\Delta^t}{t!}$ de la classe t annule séparément Δ^x (puisque les classes sont disjointes) et p étant le degré réduit de a_t, on a

$$x + t \geqq n - p + 1. \tag{45}$$

Soit encore π l'élément de a_t donné par (44), $\omega_{\beta_1}, \ldots, \omega_{\beta_t} = P$ étant un produit partiel de $\frac{\Delta^t}{t!}$ (avec les α_s, i_s, j_s, β_s tous distincts) je dis que πP annule identiquement Δ^x. Le raisonnement est le même que ci-dessus. Si

$$\Delta_1 = \Sigma\omega_{\alpha_s} + \Sigma\omega_{i_s} + \Sigma\omega_{j_s} + \Sigma\omega_{\beta_s}$$

(au total Δ_1 contient $p+t$ éléments ω) et si $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2$, on a

$$\pi P(\Delta_1 + \Delta_2)^x = \pi P \Delta_2^x.$$

Mais, d'après (45), $\Delta_2^x = 0$ car l'exposant x est supérieur au nombre des termes de Δ_2. On a donc $\pi P \Delta^x = 0$. C. Q. F. D.

Or chaque binôme de π, tel $\omega_i - \omega_j$ peut être décomposé suivant la méthode indiquée au paragraphe 15 en somme de formes simples qui annulent séparément $\omega_i + \omega_j$. Compte tenu des propriétés des moduits $\Omega_{0,r}$ (*Cf.* § 19) il s'ensuit que l'idéal $\mathcal{J}_x$ possède une base de formes simples.

Nous énoncerons :

THÉORÈME 5. — *Toute forme* Δ *de degré pair réductible à une somme de monômes deux à deux disjoints et toutes les puissances non nulles de* Δ *ont des annulateurs toujours réductibles à des sommes d'annulateurs simples.*

22. La corrélation dans une base normale (X) canonique pour Δ. [Cette transformation sera notée Cor (sans indice)] :

a. Relations fondamentales (les trois premières tout à fait évidentes ont déjà été utilisées plus ou moins explicitement) :

1. Si $F \in D(p)$:

$$\mathrm{Cor}\,F \in D(2n-p).$$

2. $$\mathrm{Cor}.\mathrm{Cor}\,F = (-1)^N F,$$

N étant le degré vrai de F. [Tout monôme basique s'écrit λP; $\lambda \in \Omega_{0,r}$, $P \in \Omega_{k,0}$. Les degrés (vrais) de F, λ, Cor F ont même parité.]

3. (46) $$\frac{\mathrm{Cor}\,\Delta^\alpha}{\alpha\,!} = \frac{\Delta^{n-a}}{(n-\alpha)\,!}.$$

4. Comme $\mathrm{Cor}[\Delta^{2n-x-y}] = \mathrm{Cor}[\Delta^{n-x}.\Delta^{n-y}] = [\mathrm{Cor}\,\Delta^{n-x}] \,|\, [\mathrm{Cor}\,\Delta^{n-y}]$ il vient de (46) :

(47) $$\frac{\Delta^x}{x\,!}\,\Big|\,\frac{\Delta^y}{y\,!} = \frac{\Delta^{x+y-n}}{(x+y-n)\,!}\,C_{n-x}^{2n-(x+y)}.$$

5. (48) $$\mathrm{Cor}[F\Delta^x] = \frac{d^x}{d\Delta}\,\mathrm{Cor}\,F.$$

En effet :

$$\mathrm{Cor}[F\Delta^x] = \mathrm{Cor}\,F \,|\, \mathrm{Cor}\,\Delta^x,$$

$$\mathrm{Cor}\,F \,|\, \mathrm{Cor}\,\Delta^x = \mathrm{Cor}\,F \,\Big|\, \frac{\Delta^{n-x}x\,!}{(n-x)\,!} = \frac{d^x}{d\Delta}\,\mathrm{Cor}\,F.$$

b. Corrélative d'une forme de classe zéro :

Théorème 1. — *La corrélative d'une forme* $F \in D(n-h)$ *de classe zéro est une forme* $\mathrm{Cor}\,F \in D(n+h)$ *de la classe* h.

On peut poser *a priori* $\mathrm{Cor}\,F = \frac{\Delta^h}{h\,!}F_1$. Mais $\frac{dF}{d\Delta} = 0$ équivaut à $F \,|\, \Delta^{n-1} = 0$, d'où à $[\Delta.\mathrm{Cor}\,F] = 0$ et, par conséquent, à $\Delta^{h+1}F_1 = 0$. Comme $h+1$ est l'indice critique de F_1, cette dernière égalité prouve que $F_1 \in D(n-h)$ est de classe zéro. C. Q. F. D.

Tout monôme unitaire $\in \Omega_{k,r}$ est le produit d'un monôme $m \in \Omega_{0,r}$ dont les éléments $q_{\alpha_1}, \ldots, q_{\alpha_r}$ (*cf.* § 16, définitions) sont inclus dans $\omega_{\alpha_1}, \ldots, \omega_{\alpha_r}$ et d'un monôme $\mu \in \Omega_{k,0}$. $\mathcal{C}m$ représente le corrélatif de $q_{\alpha_1}, \ldots, q_{\alpha_r}$ dans la base canonique (X) réduite aux éléments de $\omega_{\alpha_1}, \ldots, \omega_{\alpha_r}$. (Si $r=0$, on peut poser $m = \mathcal{C}m = 1$.)

Théorème 2. — $H \in \Omega_{k,r} \in D(n-h)$ *étant de classe nulle on obtient* H_1 *définie par l'égalité* $\mathrm{Cor}\,H = \frac{\Delta^h}{h\,!}H_1$ *en multipliant* H *par* $(-1)^k$ *et en remplaçant le facteur m de tout monôme unitaire utilisé dans l'expression de* H, *par* $\mathcal{C}m$.

La corrélation étant une opération linéaire, il suffit d'établir le théorème en réduisant H à l'élément π de classe nulle défini par (44). Pour la circonstance nous écrirons $\omega_1, \ldots, \omega_k$ au lieu de $\omega_{i_1}, \ldots, \omega_{i_k}$ et $\overline{\omega}_1, \ldots, \overline{\omega}_k$ au lieu de $\omega_{j_1}, \ldots, \omega_{j_k}$ de sorte qu'un terme monôme de π aura pour expression

$$M = \lambda m (-1)^{k-t} \omega_{i_1} \ldots \omega_{i_t} \overline{\omega}_{i_{t+1}} \ldots \overline{\omega}_{i_k}. \tag{49}$$

Il y a dans π, 2^k monômes du type précédent. Ils correspondent aux 2^k combinaisons des indices $(1, \ldots, k)$ pris par groupes de $h = 0, 1, \ldots, k$. Or, on a manifestement

$$\operatorname{Cor} M = \lambda \mathfrak{C} m (-1)^{k-t} \overline{\omega}_{i_1} \ldots \overline{\omega}_{i_t} \omega_{i_{t+1}} \ldots \omega_{i_k} [\omega_{\beta_1} \ldots, \omega_{\beta_h}], \tag{50}$$

$\beta_1, \ldots, \beta_h$ étant tous les indices des ω_i qui ne figurent pas dans π. (Ω désignera le produit $\omega_{\beta_1}, \ldots, \omega_{\beta_h}$).

Au monôme M de π correspond biunivoquement le monôme de π :

$$M' = \lambda (-1)^t m \overline{\omega}_{i_1} \ldots \overline{\omega}_{i_t} \omega_{i_{t+1}} \ldots \omega_{i_k}$$

et Cor M se déduit de M' par substitution de $\mathfrak{C} m$ à m et par multiplication par $(-1)^k \Omega$; Cor M' se déduit de M de la même manière si bien que

$$\operatorname{Cor} \pi = \Omega \pi_1, \tag{51}$$

π_1 étant transformé de π par la substitution $m \to (-1)^k \mathfrak{C} m$. Par ailleurs avec $\Delta_2 = \omega_{\beta_1} + \ldots + \omega_{\beta_h}$, on a $\Omega = \frac{\Delta_2^h}{h!}$ et comme $(\Delta - \Delta_2)\pi = 0$, on peut remplacer (51) par $\operatorname{Cor} \pi = \frac{\Delta^h}{h!} \pi_1$; π_1 satisfaisant aux conditions de l'énoncé, le théorème est démontré.

Désormais $\overline{\mathfrak{C}}_k(H)$ (pour $H \in \Omega_{k,r}$) représentera ce que H devient quand chaque monôme basique a subi la transformation $m \to (-1)^k \mathfrak{C}(m)$.

c. Corrélative d'une forme de la classe s dans le module D(p). — Posons

$$F = \frac{\Delta^s}{s!} H \qquad \left[H \in D(p) \text{ et } \frac{dH}{d\Delta} = 0 \right].$$

De (48), compte tenu du théorème 1, il vient

$$\operatorname{Cor} F = \frac{1}{s!} \frac{d^s}{d\Delta} \frac{\Delta^h}{h!} H_1, \qquad \text{avec} \quad h = n - p \qquad \text{et} \quad \frac{dH_1}{d\Delta} = 0.$$

De la formule (11) du paragraphe 17, il vient encore, en faisant $x = h$,

$$\boxed{\operatorname{Cor} F = \frac{\Delta^{h-s}}{(h-s)!} H_1.} \tag{52}$$

(Il est évident que seul est à considérer le cas $s \leqq h$ puisque $\frac{dH}{d\Delta} = 0$ entraîne $\Delta^{h+1} H = 0$.)

La formule (52) permet de former la corrélatif de tout élément de $D(p)$ qu'on sait décomposer en les classes relatives à Δ. Si l'on fait apparaître le degré réduit $n - h_1$ de F, (52) devient

$$\boxed{\operatorname{Cor} F = \frac{\Delta^{h_1+s}}{(h_1+s)!} H_1.} \tag{53}$$

D'autre part, posant $H = \sum_k G_k$ avec $G_k \in \Omega_{k,r}$, on a d'après le théorème 2,

$$H_1 = \sum_k \overline{\mathcal{C}}_k G_k.$$

[La décomposition d'une forme $A \in D(p)$ dans les modules $\Omega_{k,r}$ a un sens intrinsèque si le degré de Δ est au moins égal à 4. On peut l'effectuer en utilisant par exemple la formule (5) (§ 16) :

Si $\mathcal{D}$ désigne l'opérateur $\sum_i \omega_i \frac{\partial}{\partial \omega_i}$ et si $A = \Sigma A_k$, $A_k \in \Omega_{k,r}$, il vient $\mathcal{D}^x A = \Sigma k^x A_k$.

La discussion est analogue à celle du paragraphe 18 *a*.]

THÉORÈME. — *Pour toute structure métrique de l'algèbre $\mathfrak{A}$ liée à une base* (X) *canonique de Δ les classes de $D(p)$ sont deux à deux orthogonales.*

Multiplions (52) par $F' = \frac{\Delta^{s'}}{s'!} H'$, $H' \in D(p')$ et $p' + 2s' = p + 2s = P$, nous aurons

$$[F' \operatorname{Cor} F] = \frac{1}{s'!} \frac{1}{(h-s)!} \Delta^{h-s+s'} H'_1 H_1.$$

Si $s' > s$,

$$h - s + s' \geqq n + 1 \qquad \text{et} \qquad H_1 \Delta^{h-s+s'} = 0.$$

Si $s' < s$,

$$h - s + s' \geqq h - 2s + 2s' + 1.$$

Or l'indice critique de H' est $h - 2s + 2s' + 1$, on a donc $\Delta^{h-s+s'} H = 0$.

Dans les deux cas $[F' \operatorname{Cor} F] = 0$. C. Q. F. D.

23. ÉTUDE PARTICULIÈRE DE LA CORRÉLATION QUAND Δ EST DU DEGRÉ (VRAI) 2. — Nous poserons $\omega_i = [X_i Y_i]$ et la corrélation sera tout d'abord attachée à la base $\mathcal{B} = (X_1 Y_1, \ldots, X_n Y_n)$. Nous rappelons que dans le cas actuel la notion de degré réduit se confond avec celle de degré vrai et nous nous proposons de préciser le sens de la transformation $\overline{\mathcal{C}}_k$ du paragraphe précédent.

Les quantités désignées antérieurement par q_{α_i} sont X_{α_i} ou Y_{α_i}. Si nous désignons par q'_{α_i} la complémentaire de q_{α_i} dans ω_{α_i}, on voit que

$$\mathcal{C} m = (-1)^{\frac{r(r-1)}{2}} q'_{\alpha_1} \ldots q'_{\alpha_r}$$

et que

$$(-1)^k \mathfrak{T} m = (-1)^{\frac{2k+r^2-r}{2}} q'_{\alpha_1} \dots q'_{\alpha_r}.$$

Remarquant que $\frac{p^2}{2}$ et $\frac{r^2}{2}$ sont de même parité et que nous pouvons retrancher $4k$ à l'exposant $\frac{2k+r^2-r}{2}$ sans modifier le signe du second membre, nous écrirons

$$(-1)^k \mathfrak{T} m = (-1)^{\frac{p(p-1)}{2}} q'_{\alpha_1} \dots q'_{\alpha_r}.$$

Il n'y a donc qu'une seule transformation $\overline{\mathfrak{T}}$ *dans le module* $\mathrm{D}(p)$. Elle agit sur un monôme quelconque de degré p en le multipliant par $(-1)^{\frac{p(p-1)}{2}}$ et en substituant à tout élément X_i ou Y_i son complémentaire dans ω_i, ce qui laisse invariant tout ω complet du monôme et remplace chaque q_α par le q'_α correspondant. Cette transformation linéaire désignée par $\mathcal{G}$ est définie par les relations

$$\mathcal{G}(X_i) = Y_i, \qquad \mathcal{G}(Y_i) = -X_i.$$

Corrélative de la forme $F = \frac{\Delta^s}{s!} H$ *de la classe s et du degré* $(p+2s)$. — En appliquant la relation (52), il vient immédiatement

$$\text{(54)}\quad \operatorname{Cor}\left[H\frac{\Delta^s}{s!}\right] = (-1)^{\frac{p(p-1)}{2}} \mathcal{G}(H)\frac{\Delta^{n-p-s}}{(n-p-s)!}, \qquad \text{avec évidemment} \quad n-p-s \geqq 0.$$

De ce qui précède se déduit l'énoncé suivant :

Théorème. — *La corrélation dans la base normale* $\mathcal{B}$ *est le produit commutatif de la transformation* $\mathcal{G}_{\mathcal{B}}$ *et d'une transformation intrinsèque* $\mathcal{C}$ *qui à la forme* $F = \sum_{s_0}^{s_1} a_s \frac{\Delta^s}{s!}$ *de degré p associe la forme* $\mathcal{C}(F)$ *de degré 2n-p définie par la relation*

$$\text{(55)}\qquad \boxed{\mathcal{C}(F) = (-1)^{\frac{p(p-1)}{2}} \sum_{s_0}^{s_1} (-1)^s a_s \frac{\Delta^{n-p+s}}{(n-p+s)!},}$$

en observant que $\frac{da_s}{d\Delta} = 0$, que s_0 est le plus petit entier positif (éventuellement zéro) tel que $n-p+s_0 \geqq 0$ et que $2s_1$ est le plus grand entier pair contenu dans p.

Remarques. — On notera que $\mathcal{G}^2 = (-1)^p$ et que $\mathcal{G}\frac{d}{d\Delta} = \frac{d}{d\Delta}\mathcal{G}$. Pour établir cette dernière propriété on écrit

$$\frac{d}{d\Delta}F = F \,\Big|\, \operatorname{Cor}\Delta; \qquad \frac{d}{d\Delta}\mathcal{G}F = \mathcal{G}F \,\Big|\, \operatorname{Cor}\Delta = \mathcal{G}[F \mid \operatorname{Cor}\Delta] = \mathcal{G}\frac{dF}{d\Delta}.$$

Si les vecteurs de la base $\mathcal{B}$ sont rangés dans l'ordre $X_1, \dots, X_n; Y_1, \dots, Y_n$

(ce que nous supposerons désormais) le second membre de (55) doit être multiplié par $\frac{n(n-1)}{2}$ et

$$\mathcal{G}\begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix} \qquad \left[\text{J représentera la matrice } \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}\right].$$

Les transformations $\mathcal{G}$ étendues à toutes les bases canoniques pour Δ sont en général distinctes. Pour que $\mathcal{G}_{\alpha\mathfrak{B}} = \mathcal{G}_{\mathfrak{B}}$ il faut et il suffit que la matrice α soit en même temps symplectique et orthogonale, donc qu'elle vérifie les relations $\alpha^\star J\alpha = J$, $\alpha^\star\alpha = J$, d'où l'on tire $\alpha J = J\alpha$ (deux de ces égalités entraînent d'ailleurs la troisième). Si pour α réel on pose $\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on trouve facilement ($a$, b, c, d étant carrées d'ordre n) que α est orthogonale et commutable avec J si et seulement si $\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, la matrice $M = a + ib$ étant unitaire $(M\overline{M}^\star = I_n)$.

NOTE SUR LES RELATIONS STRICTES ENTRE LES COMPOSANTES D'UN p-VECTEUR ET LA THÉORIE DES MATRICES EXTÉRIEUREMENT ÉQUIVALENTES.

1. Classification des monômes basiques de degré p, et des composantes d'une p-forme. — Dans la base $\mathfrak{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ nous posons

$$X_{p+i} = Y_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-p = q),$$

nous représentons par X l'ensemble des vecteurs unitaires $X_1, \ldots, X_p$ et par Y l'ensemble $Y_1, \ldots, Y_q$. T figure le produit extérieur $[X_1, \ldots, X_p]$ et $T_{i_1,\ldots,i_k}^{j_1,\ldots,j_k}$ le monôme basique qui se déduit du monôme initial (ou fondamental) T par la substitution de Y_{j_s} à X_{i_s} (pour $s = 1, \ldots, k$). On a

$$\text{(1)} \qquad \boxed{T_{i_1,\ldots,i_k}^{j_1,\ldots,j_k} = [Y_{j_1}, \ldots, Y_{j_k}]\frac{\partial T}{\partial[X_{i_1}, \ldots, X_{i_k}]}.}$$

En effet les deux membres de (1) deviennent tous deux équivalents à T si l'on effectue la substitution $Y_{j_s} \to X_{i_s}$.

La composante scalaire relative au monôme $T_{i_1,\ldots,i_k}^{j_1,\ldots,j_k}$ dans le développement d'une p-forme est notée par exemple $l_{i_1,\ldots,i_p}^{j_1,\ldots,j_p}$.

Ainsi $b_1, \ldots, b_M$ désignant les monômes basiques du degré k dans (Y) et $a_1, \ldots, a_N$ les monômes unitaires du degré k dans (X) la p-forme Φ admet dans $\mathfrak{X}$ le développement suivant :

$$\text{(2)} \qquad \boxed{\Phi = \lambda[T] + \sum_{i,j} l_i^j Y_j \frac{\partial T}{\partial X_i} + \sum_{k=2}^{k=p \text{ ou } q} \sum_{a_i, b_j} l_{(i)}^{(j)}\left[b_j \frac{\partial T}{\partial a_i}\right],}$$

(i), (j) représentent les suites d'indices [dans (X) et (Y)] qui caractérisent a_i et b_j. *L'ensemble des pq nombres* l_i^j $(i = 1, \ldots, p;\ j = 1, \ldots, q)$ *est dit la suite primaire associée à T (ou à* λ*).*

Remarque. — Nous noterons que le second membre de (3) peut être considéré comme un polynôme en $(X_1, \ldots, X_p)$ ou en $(Y_1, \ldots, Y_q)$ à coefficients dans (Y) ou dans (X). Ainsi $\sum\limits_{j,\ldots,1} b_j \frac{\partial T}{\partial a_i}$, où (i) et (j) sont toutes les combinaisons des indices $(1, \ldots, p)(1, \ldots, q)$ pris k par k est la somme des termes de Φ qui sont de degré k en $(Y_1, \ldots, Y_q)$. Plus brièvement nous dirons : qui sont de degré k dans (Y).

2. Matrices caractéristiques d'un multivecteur. — Considérons le p-vecteur $\Phi = [V_1, \ldots, V_p]$ dont les facteurs $\vec{V}_i$ de degré 1 sont définis dans la base $\mathfrak{X}$, par la relation

$$\begin{pmatrix} \vec{V}_1 \\ \vdots \\ \vec{V}_p \end{pmatrix} = (M) \begin{pmatrix} \vec{X}_1 \\ \vdots \\ \vec{X}_p \\ \vec{Y}_1 \\ \vdots \\ \vec{Y}_p \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Nous supposerons par ailleurs que (2) représente le développement de Φ dans $\mathfrak{X}$.

Le tableau $M_{p\times n}$ [dans (3)] des composantes des V_i dans $\mathfrak{X}$ peut s'écrire $M_{p\times n} = (A_{p\times p} B_{p\times q})$ ou plus brièvement $M = (A.B)$. La composante λ dans (2) est égale à $|A|$. *Nous supposerons essentiellement dans tout ce qui suit* $\lambda \neq 0$. Dans ces conditions il vient

$$\boxed{M = A(I_p \theta),} \tag{4}$$

I_p étant la matrice unité d'ordre p et θ le produit $A^{-1}B$, $(I_p\theta)$ est une image analytique du multivecteur $\frac{\Phi}{\lambda}$ dont les composantes 1, λ_i^j, $\lambda_{i_1,\ldots,i_s}^{j_1,\ldots,j_s}$ seront appelées *composantes réduites (par rapport à* λ*) de* Φ.

Théorème. — *Un multivecteur défini par* (2) *et pour lequel* $\lambda = 1$ *n'admet qu'une seule image analytique du type* $(I_p\theta)$.

En effet si $(I_p\theta)$, $(I_p\theta')$ sont dans la base $\mathfrak{X}$ deux images analytiques du même multivecteur, on a (*cf.* § 2, 4°).

$$(I_p\theta) = \zeta(I_p\theta'), \qquad \text{d'où} \qquad \zeta = I_p \qquad \text{et} \qquad \theta = \theta'. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Corollaire. — *Un multivecteur de degré p dans l'algèbre* $\mathfrak{A}_n$ *dépend de* $p(n-p)+1$ *paramètres, savoir* $\lambda \neq 0$ *et les éléments de la matrice* θ *ci-dessus définie.*

Définition. — La matrice θ *définie par* (4) *est dite la matrice caractéristique, associée à* T (de composante λ non nulle), *du multivecteur* Φ *développé dans la base* $\mathfrak{X}$.

3. Relations strictes (J) entre les composantes d'un multivecteur Φ. — Φ est défini, par hypothèse, par sa composante λ et la matrice caractéristique θ. (L'élément de θ appartenant à la ligne i et à la colonne j est noté θ_i^j).

La matrice $(I_p \theta)$ est une image analytique du p-vecteur $\frac{\Phi}{\lambda}$ dont elle fournit p facteurs de degré 1, linéairement indépendants, savoir les vecteurs

$$U_i = X_i + \sum_j \theta_i^j Y_j \qquad (cf. \text{ § } \mathbf{10}, c). \tag{5}$$

Théorème. — *La composante réduite* $\lambda_{i_1, \ldots, i_k}^{j_1, \ldots, j_k}$ *est égale au mineur de degré k formé dans* θ *par les lignes notées, dans leur ordre de succession,* $i_1, \ldots, i_k$ *et par les colonnes notées, dans leur ordre de succession* $j_1, \ldots, j_k$.

En convenant de représenter un tel déterminant par le développement de sa diagonale principale, on a

$$\boxed{\lambda_{i_1, \ldots, i_k}^{j_1, \ldots, j_k} = |\,\theta_{i_1}^{j_1} \ldots \theta_{i_k}^{j_k}\,|,} \tag{6}$$

Démonstration. — On peut écrire

$$\frac{1}{\lambda}\Phi = [U_1, \ldots, U_p] = [U_{i_1}, \ldots, U_{i_k}] \frac{\partial [U_1, \ldots, U_p]}{\partial [U_{i_1}, \ldots, U_{i_k}]} \tag{7}$$

le terme noté $\begin{pmatrix} j_1, \ldots, j_k \\ i_1, \ldots, i_k \end{pmatrix}$ dans le développement (3) de $\frac{1}{\lambda}\Phi$ est ce que le dernier membre de (7) devient quand, dans tous les U_i, définis par (5), on supprime les Y_s autres que $Y_{j_1}, \ldots, Y_{j_k}$ et les vecteurs $X_{i_1}, \ldots, X_{i_k}$. Ainsi modifiée cette expression s'écrit

$$\left[\left(\sum_{j_1}^{j_k} \theta_{i_1}^j Y_j\right) \ldots \left(\sum_{j_1}^{j_k} \theta_{i_k}^j Y_j\right)\right] \frac{\partial [X_1, \ldots, X_p]}{\partial [X_1, \ldots, X_{i_k}]}$$

ou

$$|\,\theta_{i_1}^{j_1} \ldots \theta_{i_k}^{j_k}\,|\,[Y_{j_1}, \ldots, Y_{j_k}] \frac{\partial [X_1, \ldots, X_p]}{\partial [X_{i_1}, \ldots, X_{i_k}]}.$$

En comparant à (1) on voit que

$$\lambda_{i_1, \ldots, i_k}^{j_1, \ldots, j_k} = |\,\theta_{i_1}^{j_1} \ldots \theta_{i_k}^{j_k}\,| \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Remarque. — Il découle immédiatement du théorème précédent que les composantes de degré 1 en (Y) $\left(\text{de } \frac{1}{\lambda}\Phi\right)$ ne sont autres que les éléments de θ. On a $\lambda_i^j = \theta_i^j$ et

$$\boxed{\lambda_{i_1,\ldots,i_k}^{j_1,\ldots,j_k} = |\lambda_{j_1}^{i_1}\ldots\lambda_{i_k}^{j_k}|} \qquad [\text{relations (J)}],$$

$\frac{\Phi}{\lambda}$ *est entièrement déterminé par sa suite primaire.*

Quelques applications des équations (J) :

A. Φ étant une forme quelconque définie par (2), avec $\lambda \neq 0$, et F une forme simple ayant les mêmes composantes primaires λ, l_i^j : $\Phi - F$ est de degré 2 au moins en (Y).

En effectuant le changement de base

$$X_i \to U_i = X_i + \sum_j \lambda_i^j Y_j; \qquad Y_j \to Y_j$$

on aura donc

$$\Phi = \lambda[U_1, \ldots, U_p] + \sum_{(i_1 i_2), (j_1 j_2)} L_{i_1 i_2}^{j_1 j_2} Y_{j_1} Y_{j_2} \frac{\partial[U_1, \ldots U_p]}{\partial[U_{i_1} U_{i_2}]} + \ldots \tag{9}$$

Cas particuliers. — 1° Si Φ est de degré 2 ($p = 2$), l'égalité (9) devient

$$\Phi = \lambda[U_1 U_2] + \sum_{(j_1 j_2)} L_{12}^{j_1 j_2}[Y_{j_1} Y_{j_2}].$$

En répétant sur la forme quadratique $\Sigma L_{12}^{j_1 j_2}[Y_{j_1} Y_{j_2}]$ du type $\binom{n-2}{2}$ le raisonnement effectué sur Φ, on voit immédiatement qu'il est possible de réduire Φ à la somme

$$[U'_1 U_2] + [U_3 U_4] + \ldots + [U_{2h-1} U_{2h}]; \; (2h \leqq n)$$

On a d'ailleurs

$$[U_1, \ldots, U_{2h}] = \frac{1}{h!}\Phi^h \neq 0.$$

2° Si Φ est une forme cubique ($p = 3$), on a

$$\Phi = [U_1 U_2 U_3] + \Delta_1 U_1 + \Delta_2 U_2 + \Delta_3 U_3 + \Sigma L^{j_1 j_2 j_3} Y_{j_1} Y_{j_2} Y_{j_3},$$

Δ_1, Δ_2, Δ_3 sont des formes quadratiques en (Y) et $\Sigma L^{j_1 j_2 j_3} Y_{j_1} Y_{j_2} Y_{j_3}$ est une forme cubique $\binom{n-3}{3}$ qui ne contient plus U_1, U_2, U_3.

B. *Relations* (K) *entre les composantes du degré k en* Y *d'un multivecteur* Φ *du degré p défini par* (2). — θ *étant comme ci-dessus la matrice caractéristique associée à* [T] *les composantes réduites de degré k en* (Y) *sont, d'après les* *équations* (J) *tous les mineurs de degré k extraits de* θ. Nous supposerons que le mineur $\begin{pmatrix} 1, 2, \ldots, k \\ 1, 2, \ldots, k \end{pmatrix}$ n'est pas nul. Il sera désigné par $|a|$ et la sous-matrice $\begin{pmatrix} 1, \ldots, k \\ 1, \ldots, k \end{pmatrix}$ de θ par (a) [23]. Le monôme basique associé à la composante $|a|$ est

$$(10) \qquad \mathfrak{T} = [Y_1, \ldots, Y_k] \frac{\partial T}{\partial [X_1, \ldots, X_k]}.$$

Nous conviendrons de représenter X_{k+t} par X'_t ($t = 1, \ldots, p-k = s$); Y_{k+t} par Y'_t ($t = 1, \ldots, q-k = r$).

Dans ces conditions en ordonnant $\frac{\Phi}{\lambda |a|}$ par rapport au nouveau terme initial $\mathfrak{T}$, il vient

$$(11) \qquad \frac{\Phi}{\lambda |a|} = [\mathfrak{T}] + \Sigma x_i^\alpha \left[X_\alpha \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial Y_i} \right] + \Sigma \varphi_i^j \left[Y'_j \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial Y_i} \right] + \Sigma \xi_\beta^\alpha \left[X_\alpha \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial X'_\beta} \right] + \Sigma y_\beta^j \left[Y'_j \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial X'_\beta} \right] + \ldots.$$

La matrice $\theta_1 = \begin{pmatrix} x_{k \times k} & \varphi_{k \times r} \\ \xi_{s \times k} & y_{s \times r} \end{pmatrix}$ *est la matrice caractéristique associée à* $\mathfrak{T}$.

Les monômes basiques *du degré k en* (Y) se déduisent de $\mathfrak{T}$ par des substitutions de Y'_j à Y_i ou de X_α à X'_β. Considérons l'un deux noté $\mathfrak{T}_{(\beta)}^{(\alpha)} \big| _{(i)}^{(j)}$ et défini comme il suit :

$$(12) \qquad \mathfrak{T}_{(\beta)}^{(\alpha)} \big| _{(i)}^{(j)} = [X_{\alpha_1}, \ldots, X_{\alpha_N}; Y'_{j_1}, \ldots, Y'_{j_{N'}}] \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial [X'_{\beta_1}, \ldots, X'_{\beta_N}; Y_{i_1}, \ldots, Y_{i_{N'}}]}.$$

Nous conviendrons que

$$\begin{aligned} [\alpha] &= [X_{\alpha_1}, \ldots, X_{\alpha}]; & [\beta] &= [X'_{\beta_1}, \ldots, X'_{\beta_N}], \\ [i] &= [Y_{i_1}, \ldots, Y_{i_{N'}}]; & [j] &= [Y'_{j_1}, \ldots, Y'_{j_{N'}}], \\ [u] &= [X_1, \ldots, X_k]; & [v] &= [Y_1, \ldots, Y_k], \end{aligned}$$

ce qui permet d'écrire

$$(13) \qquad \mathfrak{T}_{(\beta)}^{(\alpha)} \big| _{(i)}^{(j)} = [\alpha j] \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial [\beta i]}$$

et

$$(14) \qquad \mathfrak{T} = [v] \frac{\partial T}{\partial u}.$$

THÉORÈME. — *On a*

$$(15) \qquad \boxed{[\alpha j] \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial [\beta i]} = (-1)^N [j] \frac{\partial v}{\partial [i]} \frac{\partial T}{\partial \left[\beta \frac{\partial u}{\partial \alpha} \right]}.}$$

---

(23) D'une façon générale le déterminant d'une matrice carrée notée (m) par exemple est représenté par $|m|$.

En effet en dérivant (14) par rapport à [β] puis par rapport à [i], il vient

$$\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial[\beta i]} = (-1)^{kN} \frac{\partial v}{\partial i} \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial[u\beta]}; \tag{16}$$

d'où en multipliant (16) par $[\alpha j]$ et en groupant les termes

$$[\alpha j]\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial[\beta i]} = \left[j\frac{\partial v}{\partial i}\right]\alpha \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial[u\beta]}. \tag{17}$$

Mais

$$[u\beta] = (-1)^{\mathrm{N}}\left[\beta \frac{\partial u}{\partial \alpha}\alpha\right]$$

et par conséquent

$$\alpha\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial[u\beta]} = (-1)^{\mathrm{N}}\alpha\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial\left[\beta\frac{\partial u}{\partial\alpha}\alpha\right]} = (-1)^{\mathrm{N}}\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial\left[\beta\frac{\partial u}{\partial\alpha}\right]}\right] = (-1)^{\mathrm{N}}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial\left[\beta\frac{\partial u}{\partial\alpha}\right]}.$$

En remplaçant $\alpha\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial[u\beta]}$ dans (17) par le dernier membre des égalités précédentes, on trouve (15). C. Q. F. D.

Conclusion. — D'après (15) la composante de $\frac{\Phi}{\lambda}$ associée au monôme basique $\mathfrak{T}^{(\alpha)}_{(\beta)}\big|^{(j)}_{(i)}$ est le produit par $(-1)^{\mathrm{N}}$ du déterminant de la sous-matrice a' qu'on déduit de a dans θ en substituant les colonnes (j) aux colonnes (i) et les lignes (β) aux lignes (α). D'autre part d'après (12) la même composante divisée par $|a|$ est égale [en appliquant les relations (J) à θ_1] au déterminant

$$\begin{vmatrix} \xi^{(\alpha)}_{(\beta)} & y^{(j)}_{(\beta)} \\ x^{(\alpha)}_{(i)} & \varphi^{(j)}_{(i)} \end{vmatrix}.$$

Il vient donc

$$\boxed{(-1)^{\mathrm{N}}|a'| = |a|\begin{vmatrix} \xi^{(\alpha)}_{(\beta)} & y^{(j)}_{(\beta)} \\ x^{(\alpha)}_{(i)} & \varphi^{(j)}_{(i)} \end{vmatrix}.} \tag{18}$$

4. Matrices extérieurement équivalentes. — Toutes les matrices caractéristiques d'un même multivecteur seront dites extérieurement équivalentes. Avec précision, deux matrices $(p \times q)$, θ et θ_1 sont extérieurement équivalentes si et seulement si l'on peut trouver une matrice régulière ζ et une matrice de permutation P, telles que

$$(\mathrm{I}_p\theta_1) = \zeta(\mathrm{I}_p\theta)\mathrm{P} \tag{19}$$

(I_p étant la matrice unité d'ordre p).

On vérifie facilement que l'équivalence extérieure est une opération réflexive, symétrique et transitive. D'après les équations (J) les mineurs de tous les degrés de θ et θ_1 sont deux à deux proportionnels (aux signes près). Cette correspondance n'associe pas en général des mineurs du même degré.

Nous nous bornerons désormais à l'étude des matrices θ et θ_1 du paragraphe précédent : P *est une matrice symétrique qui transpose simplement les k premières colonnes de* θ *avec les k premières colonnes de* I_p. [On s'en assure aisément en remontant à l'égalité (3).] Nous poserons

$$\theta = \begin{pmatrix} a_{k\times k} & b_{k\times r} \\ c_{s\times k} & d_{s\times r} \end{pmatrix}, \qquad \theta_1 = \begin{pmatrix} x_{k\times k} & \varphi_{k\times r} \\ \xi_{s\times k} & y_{s\times r} \end{pmatrix}$$

d'où d'après (19)

$$(20) \qquad \begin{pmatrix} I_k & 0 & x & \varphi \\ 0 & I_s & \xi & y \end{pmatrix} = \zeta \begin{pmatrix} a & 0 & I_k & b \\ c & I_s & 0 & d \end{pmatrix}$$

de (20) on tire d'abord :

$$(21) \qquad I_p = \zeta \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & I_s \end{pmatrix}$$

puis

$$(22) \qquad \begin{pmatrix} 0 & x \\ I_s & \xi \end{pmatrix} = \zeta \begin{pmatrix} 0 & I_k \\ I_s & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \zeta = \begin{pmatrix} x & 0 \\ \xi & I_s \end{pmatrix}$$

et enfin

$$(23) \qquad \begin{pmatrix} \varphi \\ y \end{pmatrix} = \zeta \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}.$$

De (21), (22) et (23), il vient

$$(\mathrm{L}) \qquad \begin{cases} x = a^{-1}, & \varphi = a^{-1} b, \\ \xi = -ca^{-1}, & y = d - ca^{-1} b. \end{cases}$$

Toutes ces relations restent d'ailleurs vérifiées après les transpositions $(x\, a)$; $(\varphi\, b)$; $(\xi\, c)$; $(y\, d)$ car (19) s'écrit encore

$$\zeta_1 (I_p \theta_1) P = (I_p \theta).$$

Elles impliquent en particulier que *sous la seule condition* $|a| \neq 0$ *toute matrice* θ *admet la décomposition*

$$(24) \qquad \boxed{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ -\xi & I_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{-1} & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_k & \varphi \\ 0 & I_r \end{pmatrix},}$$

où x, φ, y, ξ sont définies par le système (L) et l'on déduit de (24), si θ est une matrice carrée $(s = r)$ (24).

1° $|\theta| = |a|\,|(d - ca^{-1} b)|$;

2° Quand $|\theta| \neq 0$, c'est-à-dire quand $|y| \neq 0$:

$$\boxed{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} I_k & -\varphi \\ 0 & I_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ \xi & I_r \end{pmatrix}.}$$

---

(24) Si θ est unitaire ou paraunitaire on obtient des décompositions intéressantes (cf. *C. R. Acad. Sc.*, t. **238**, 1954, p. 1957 et **240**, 1955, p. 2285 ou *Bull. Sc. math.*, 1956).

Reconstruction de la matrice θ_1 *à l'aide des seuls mineurs du degré k de* θ. — L'ensemble $\mathcal{E}$ des composantes du degré k en Y : $(Y_1, \ldots, Y_k; Y'_1, \ldots, Y'_r)$ de $\frac{\Phi}{\lambda}$ contient les quantités $-\xi^\alpha_\beta |a|$; $\varphi^j_i |a|$ mais non les paramètres $x^\alpha_i |a|$; $y^j_\beta |a|$. On peut chercher à calculer ces derniers à l'aide des composantes $|a| \mu^\alpha_\beta|^j_i \in \mathcal{E}$ qui affectent les monômes

$$\mathcal{E}^\alpha_\beta|^j_i = X_\alpha Y'_j \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial [X'_\beta Y_i]}.$$

On a

$$\mu^\alpha_\beta|^j_i = \zeta^\alpha_\beta \varphi^j_i - x^\alpha_i y^j_\beta \tag{26}$$

Nous poserons

$$\pi^\alpha_\beta|^j_i = -\mu^\alpha_\beta|^j_i + \xi^\alpha_\beta \varphi^j_i \tag{27}$$

et nous appellerons D^j_β le déterminant des quantités $\pi^\alpha_\beta|^j_i$, j et β ayant des valeurs données tandis que α et i prennent les valeurs $1, \ldots, k$. De (25) on tire aisément $D^j_\beta = |x| (y^j_\beta)^k$ ou d'après la première des relations (L)

$$(y^j_\beta)^k = |a| D^j_\beta. \tag{28}$$

Discussion. — S'il existe au moins un D^j_k non nul, on peut, à l'aide des relations (26) déterminer tous les paramètres x^α_i, y^j_β, un seul des y^j_β étant calculé par (28) (k déterminations).

Si tous les D^j_β sont nuls, $y = 0$ et la matrice x est complètement indéterminée. On a d'ailleurs de (18)

$$(-1)^N |a'| = |\xi^{(\alpha)}_{(\beta)}| \, |\varphi^{(j)}_{(i)}|.$$