

# ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

MAURICE FRÉCHET

## **Le problème de l'existence d'un extremum local d'une fonctionnelle**

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 3<sup>e</sup> série*, tome 73, n° 2 (1956), p. 93-120

[http://www.numdam.org/item?id=ASENS\\_1956\\_3\\_73\\_2\\_93\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1956_3_73_2_93_0)

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1956, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

---

# LE PROBLÈME DE L'EXISTENCE D'UN EXTREMUM LOCAL D'UNE FONCTIONNELLE

PAR M. MAURICE FRÉCHET.

---

SOMMAIRE. — Nous formulons des conditions nécessaires ou suffisantes pour l'existence d'une fonctionnelle numérique  $F[z]$  dépendant d'un point  $z$  variable *dans un espace de Banach*.

Ces conditions sont entièrement analogues à celles qu'on trouve généralement dans les Traités classiques pour le cas d'une variable  $z$  euclidienne.

Toutefois, *même dans ce cas*, nos conditions, étant exprimées en termes de « variations généralisées », sont plus générales que les conditions classiques (toujours exprimées en termes de différentielles [ou de dérivées partielles]).

Nous avons aussi entrepris une étude (qui mériterait d'être poursuivie) des cas — que nous appelons *cas douteux* —. Ceux-ci, même quand la variable  $z$  est euclidienne, sont généralement négligés dans les Traités classiques <sup>(1)</sup>.

Dans un Mémoire ultérieur, nous appliquerons ce qui précède au Calcul des Variations.

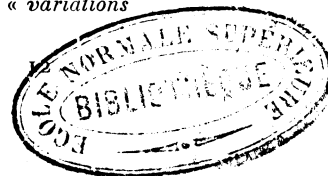
## PREMIÈRE PARTIE.

### DIFFÉRENTIELLES ET « VARIATIONS GÉNÉRALISÉES ».

INTRODUCTION. — Dans les Cours d'Analyse classique, les conditions d'existence d'un extremum local d'une fonction  $f(z_1, \dots, z_s)$  de plusieurs variables numériques sont exprimées en termes de dérivées partielles (supposées continues) de divers ordres. Une première extension s'obtient en supposant  $f(z_1, \dots, z_s)$  différentiable (de divers ordres) au sens de Stolz et W. H. Young. Une seconde extension s'obtiendrait en supposant que  $f(z_1, \dots, z_s)$  possède des « variations » (de divers ordres) au même sens que celui qui est employé en Calcul des Variations.

---

<sup>(1)</sup> On trouvera un résumé un peu plus détaillé du présent Mémoire dans notre Note aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences : Conditions d'existence (exprimées en termes de « variations généralisées ») d'un extremum local d'une fonctionnelle*, t. 244, 1955, p. 1901-1904.



Nous allons réaliser ici une troisième et double extension. D'abord en faisant jouer le rôle de telles variations par des « variations généralisées » de  $f$ , définies comme *coefficients de développements limités de  $\Delta f$*  et précisées plus loin.

Déjà plusieurs auteurs ont étudié de telles variations généralisées, particulièrement dans le cas d'une seule variable numérique où ils les déduisent des dérivées généralisées. Mais il est à peu près *aussi simple de traiter directement* le cas infiniment plus général où l'on substitue au point  $z$ , de coordonnées numériques  $z_1, \dots, z_n$ , un élément arbitraire d'un espace de Banach. (Nous l'appellerons espace B. W. H. pour rappeler que son introduction a été faite simultanément par S. Banach, N. Wiener et H. Hahn.)

C'est donc cette extension au cas des *fonctionnelles numériques*  $F[z]$  dépendant d'un élément  $z$  de B. W. H. qui va être traitée ici.

Le cas où la fonctionnelle  $F[z]$  considérée est de la forme  $f(z_1, \dots, z_n)$  s'en déduit *immédiatement* et n'apporte aucune simplification notable de la discussion générale. Au contraire, ce cas particulier est, bien entendu, plus simple à traiter *en ce qui concerne* les calculs effectifs à réaliser dans la mise en œuvre de la théorie générale. Il est aussi plus simple dans les cas que nous appellerons plus loin « cas douteux ».

*Remarques.* — I. Tous nos résultats seront exprimés en termes de « variations généralisées » et, par conséquent, la notion de différentielle d'une fonctionnelle ne nous est pas nécessaire. Nous la rappellerons cependant maintenant ainsi que quelques-unes de ses propriétés; d'une part, parce que l'une de celles-ci va servir de définition à la « variation généralisée »; d'autre part, parce que dans beaucoup de cas, pour prouver qu'une fonctionnelle possède une « variation », il suffit de montrer qu'elle est différentiable.

Mais, à première lecture, on pourra négliger le passage correspondant en petits caractères.

II. Le fait pour une fonctionnelle  $F[z]$  d'avoir non seulement une variation mais aussi une différentielle — qui d'ailleurs lui sera égale — n'apporte, *dans la théorie qui suit*, aucune simplification notable. Mais il est d'autres chapitres de l'Analyse fonctionnelle où, *au contraire*, les résultats obtenus pour une fonctionnelle différentiable *ne subsistent pas* quand on suppose seulement qu'elle possède une variation.

*Différentielle d'une fonctionnelle.* — Nous avons, il y a longtemps, défini une fonctionnelle numérique  $F[z]$  d'une variable  $z$  appartenant à un espace de Banach B. W. H. comme *différentiable* pour  $z = y$  s'il existe une fonctionnelle linéaire  $\mathcal{L}[z]$  telle que

$$(1) \quad \begin{cases} \Delta F[y] = \mathcal{L}[\Delta y] + \|\Delta y\| \varepsilon(y, \Delta y) \\ \text{avec } \lim |\varepsilon(y, \Delta y)| = 0 \quad (\|\Delta y\| \rightarrow 0). \end{cases}$$

Alors  $\mathcal{L}[\Delta y]$  sera appelée la différentielle de  $F[z]$  pour  $z = y$  et pour l'accroissement  $\Delta y$  et sera représentée par la notation

$$\partial_{\Delta y} F[y] \equiv \mathcal{L}[\Delta y].$$

On dira que  $F[z]$  a, pour  $z = y$ , une différentielle *du second ordre* si  $F[z]$  est différentiable pour  $z$  voisin de  $y$  et si, pour chaque  $\Delta_1 z$  fixe, la différentielle  $\partial_{\Delta_1 z} F[z]$  est une fonction de  $z$  différentiable pour  $z = y$ . La différentielle de  $\partial_{\Delta_1 z} F[z]$  pourra être représentée par la notation

$$\partial_{\Delta y} \partial_{\Delta_1 z} F[y].$$

Ce sera une fonctionnelle bilinéaire et symétrique en  $\Delta y$  et  $\Delta_1 y$ . Quand on prend  $\Delta_1 y \equiv \Delta y$ , on peut l'écrire

$$\partial_{(\Delta y)^2}^2 F(y).$$

*Calcul de la différentielle.* — Laissant  $\Delta y$  fixe, remplaçons-le par  $t \Delta y$  dans (1), on aura

$$\frac{F(y + t \Delta y) - F(y)}{t} = \mathcal{L}[\Delta y] + \varepsilon(t) \|\Delta y\|,$$

où  $\varepsilon(t)$  tend vers zéro avec  $t$ . D'où

$$(2) \quad \partial_{\Delta y} F(y) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(y + t \Delta y) - F(y)}{t}.$$

On se trouve ainsi ramené au calcul de la dérivée

$$\varphi'_t(0) = \partial_{\Delta y} F(y)$$

d'une fonction numérique d'une variable numérique  $t$ , soit

$$\varphi(t) = F(y + t \Delta y).$$

Le second membre de (2) est ce qu'on appelle en Calcul des Variations, la « variation » de  $F[y]$ . Mais son existence ne suffit pas à assurer l'existence du premier membre qui possède des propriétés précieuses n'appartenant pas à la « variation ». Nous reviendrons page 99 sur cette question.

*Développements limités.* — Nous aurons besoin dans ce qui suit de « développements limités » d'une fonctionnelle.

Ils consistent à généraliser les développements limités classiques des fonctions « ordinaires » (fonctions numériques de variables numériques). On sait que si la fonction ordinaire  $\varphi(t)$  a une dérivée d'ordre  $n$  pour  $t = 0$ , on a, *sous cette seule condition*,

$$(3) \quad \begin{cases} \varphi(t) = \varphi(0) + t \varphi'(0) + \dots + \frac{t^n}{n!} \varphi^{(n)}(0) + \varepsilon t^n, \\ \text{où } \lim_{t \rightarrow 0} \varepsilon = 0 \end{cases}$$

et si  $\varphi(t)$  possède une dérivée d'ordre  $n$  pour  $|t| < r (r > 0)$ , on peut écrire, pour  $|t| < r$ ,

$$(4) \quad \begin{cases} \varphi(t) = \varphi(0) + t \varphi'(0) + \dots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \varphi^{(n-1)}(0) \\ \quad + \frac{t^n}{n!} \varphi^n(\theta t), \quad \text{avec } 0 < \theta < 1, \end{cases}$$

où  $\theta$ , dépend en général de  $t$  et de  $n$ .

Généralisons et soit maintenant une fonctionnelle  $F[z]$  dépendant d'un élément  $z$  d'un espace B. W. H.

1° Supposons d'abord que  $F[z]$  soit différentiable jusqu'à l'ordre  $n$  pour  $\|z - y\| < \rho$ . Alors, si  $t$  est un nombre et  $u$  un élément de l'espace B. W. H.,

$$\varphi(t) = F[y + tu]$$

sera une fonction ordinaire de  $t$ , définie pour  $\|tu\| < \rho$ , c'est-à-dire en supposant  $\|u\| \neq 0$ , pour

$$|t| < r = \frac{\rho}{\|u\|}.$$

Or on a

$$\begin{aligned} \Delta\varphi(t) &= \varphi(t + \Delta t) - \varphi(t) = F[y + tu + \Delta tu] - F[y + tu] \\ &= \partial_{\Delta tu} F[y + tu] + \varepsilon \|\Delta tu\|, \\ \frac{\Delta\varphi(t)}{\Delta t} &= \partial_u F[y + tu] \pm \varepsilon \|u\|, \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \varepsilon = 0. \end{aligned}$$

Donc  $\varphi(t)$  est dérivable pour  $|t| < r$  et l'on a

$$(5) \quad \varphi'(t) = \partial_u F[y + tu].$$

En remplaçant  $F[z]$  par  $\partial_u F[z]$ , on voit de même que  $\varphi'(t)$  est dérivable pour  $|t| < r$  et que

$$(6) \quad \varphi''(t) = \partial_{u^2}^2 F[y + tu], \quad \dots$$

On aura, de même,

$$(7) \quad \varphi^{(n)}(t) = \partial_{u^n}^n F[y + tu] \quad \text{pour } |t| < r.$$

Dès lors, en vertu de (4), on pourra écrire

$$(8) \quad \begin{aligned} F[y + tu] &= F[y] + t \partial_u F[y] + \dots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \partial_{u^{n-1}}^{n-1} F[y] \\ &\quad + \frac{t^n}{n!} \partial_{u^n}^n F[y + \theta tu] \quad \text{avec } 0 < \theta < 1 \quad (2). \end{aligned}$$

Prenons, en particulier,  $tu = \Delta y$ , on aura

$$(9) \quad \boxed{\begin{aligned} F[y + \Delta y] &= F[y] + \partial_{\Delta y} F[y] + \dots + \frac{1}{(n-1)!} \partial_{(\Delta y)^{n-1}}^{n-1} F[y] \\ &\quad + \frac{1}{n!} \partial_{(\Delta y)^n}^n F[y + \theta \Delta y], \\ &\quad \text{avec } 0 < \theta < 1 \quad \text{pour } \|\Delta y\| < \rho. \end{aligned}}$$

2° Supposons seulement maintenant que  $F[z]$  est différentiable d'ordre  $n$  pour  $z = y$ . Alors  $F[z]$  est différentiable d'ordre  $n - 1$ , pour  $\|z - y\|$  assez petit (par exemple  $\|z - y\| < \rho$ ) et les égalités ci-dessus (5), (6), etc. subsistent jusqu'à l'ordre  $n - 1$ . La dernière (7) se réduit à

$$\varphi^{(n)}(0) = \partial_{u^n}^n F[y].$$

---

(2)  $\theta$  dépendra en général de  $y, u, t$  et  $n$ .

On a alors, en vertu de (3),

$$(10) \quad F[y + tu] = F[y] + t \partial_u F[y] + \dots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \partial_{u^{n-1}} F[y] \\ + \frac{t^n}{n!} \partial_{u^n} F[y] + \varepsilon t^n,$$

avec  $\lim_{t \rightarrow 0} \varepsilon = 0$  pour  $y, u$  fixes,

Prenons encore  $tu = \Delta y$ , mais  $\|u\| = 1$  d'où  $|t| = \|\Delta y\|$ , on aura

$$(11) \quad F[y + \Delta y] = F[y] + \partial_{\Delta y} F[y] + \dots + \frac{1}{n!} \partial_{(\Delta y)^n} F[y] + \varepsilon \|\Delta y\|^n, \\ \text{avec } \lim_{\|\Delta y\| \rightarrow 0} \varepsilon = 0.$$

Mais observons que  $\varepsilon$  dépend de  $t$  et de  $u$ . C'est pour chaque  $u$  fixe (tel que  $\|u\| = 1$ ) que  $\varepsilon \rightarrow 0$ , avec  $\|\Delta y\|$ . Autrement dit,  $\varepsilon$  tend vers zéro quand l'élément  $\Delta y$  tend vers l'élément neutre *suivant une ligne droite arbitraire mais fixe*.

Il n'en résulte pas nécessairement que  $\varepsilon$  tend vers zéro quand  $\Delta y$  tend vers l'élément neutre de façon quelconque.

VARIATION GÉNÉRALISÉE. — Nous avons déjà, à la page 94, généralisé au cas d'une fonctionnelle  $F[z]$  définie sur un espace B. W. H., la définition de la « variation » usitée en Calcul des Variations.

En employant *la notion  $\delta$  pour la « variation »*, pour la distinguer de la notation  $\partial$  pour la différentielle, on dira que  $F[z]$  possède une *variation première généralisée* pour  $z \equiv y$ , si pour chaque élément  $u$  de B. W. H., l'expression

$$\frac{1}{t} [F[y + tu] - F[y]]$$

converge vers une limite déterminée qui sera la variation première généralisée de  $F[y]$  correspondant à  $y$  et  $u$ , soit

$$\delta_u F[y] = \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{t} [F[y + tu] - F[y]] \right\}.$$

Cette définition est d'ailleurs *identique à la définition classique* de la variation dans le Calcul des Variations.

C'est à *partir de la variation seconde que nous nous écarterons* de la définition des variations classiques des différents ordres.

Pour définir la variation seconde, pour  $z \equiv y$ , de  $F[z]$ , on commence généralement par supposer que  $F[y]$  a une variation première *pour  $z$  voisin de  $y$* . Nous verrons plus loin que, *pour l'emploi que nous ferons* de la variation seconde *en vue de l'étude de l'extremum* en Calcul fonctionnel, il n'est pas nécessaire de faire cette supposition. *Le théorème de la page 96 va devenir une définition sous la forme suivante :*

Nous dirons que  $F[z]$  possède une *variation généralisée d'ordre  $n$*  pour  $z \equiv y$ ,

quand il existe des fonctions  $F_1[z, u], \dots, F_n[z, u]$  telles que

$$(12) \quad F[y + tu] = F[y] + t F_1[y, u] + \dots + \frac{t^n}{n!} F_n[y, u] + t^n \varepsilon_n[y, u, t],$$

où  $t$  est un nombre et où, pour chaque élément,  $u$ , de B. W. H., on ait

$$\lim_{t \rightarrow 0} \varepsilon_n[y, u, t] = 0,$$

pour chaque vecteur  $u$  fixe.

S'il en est ainsi,  $F_n[y, u]$  sera appelée une *variation généralisée n<sup>ième</sup>* de  $F[z]$  pour  $z \equiv y$  et l'on posera

$$\delta_{u^n}^n F[y] = F_n[y, u, t].$$

Pour  $p$  entier  $> 0$  et  $\leq n$ , on pourra écrire

$$(13) \quad F[y + tu] = F[y] + t F_1[y, u] + \dots + \frac{t^p}{p!} F_p[y, u] + t^p \varepsilon_p[y, u, t]$$

si l'on pose

$$\varepsilon_p[y, u, t] = \frac{t}{(p+1)!} F_{p+1}[y, u] + \dots + \frac{t^{n-p}}{n!} F_n[y, u] + t^{n-p} \varepsilon_n[y, u, t].$$

Pour chaque  $u$  fixe, on aura

$$(14) \quad \lim_{t \rightarrow 0} \varepsilon_p[y, u, t] = 0.$$

L'ensemble des relations (13), (14) montre que  $F_p[y, u]$  est une variation généralisée de  $F[z]$  pour  $z = y$ . Alors

$$\delta_{u^p}^p F[y] = F_p[y, u] = p! \left[ \frac{F[y + tu] - F[y] - \dots - \frac{t^{p-1}}{(p-1)!} F_{p-1}[y, u]}{t^p} \right] - \varepsilon_p[y, u, t].$$

Donc la fraction a une limite unique quand  $t \rightarrow 0$  pour  $u$  fixe et, par suite, il n'y a qu'une variation généralisée d'ordre  $p \leq n$ , pour  $z = y$ .

*En résumé* : 1° Si  $F[z]$  a une variation généralisée d'un ordre quelconque  $n$  pour  $z = y$  elle a aussi pour  $z = y$  des variations généralisées de tous les ordres  $\leq n$ ; 2° Il ne peut y avoir pour  $z = y$ , deux variations généralisées distinctes du même ordre; 3° Dans la formule (12), on a

$$F_p[y, u] = \delta_{u^p}^p F[y] \quad \text{pour } p \leq n;$$

4° On peut écrire

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} F[y + ut] = F[y] + t \delta_u F[y] + \dots + \frac{t^p}{p!} \delta_{u^p}^p F[y] \\ \quad + \dots + \frac{t^n}{n!} \delta_{u^n}^n F[y] + t^n \varepsilon_n[y, u, t], \\ \text{avec } \lim_{t \rightarrow 0} \varepsilon_n[y, u, t] = 0 \text{ pour } y, u \text{ fixes.} \end{array} \right.$$

5° D'autre part, on peut écrire

$$(16) \quad F\left[y + \frac{t}{\lambda} \lambda u\right] = F[y] + \frac{t}{\lambda} \delta_{\lambda u} F[y] + \dots \\ + \frac{t^n}{n! \lambda^n} \delta_{(\lambda u)^n}^n F[y] + \frac{t^n}{\lambda^n} \left[y, \lambda u, \frac{t}{\lambda}\right].$$

En égalant (15) et (16), éliminant  $F[y]$  et divisant par  $t$ , et faisant tendre  $t$  vers zéro, on a

$$\delta_{\lambda u} F[y] = \lambda \delta_u F[y].$$

De même, en procédant successivement, on trouve

$$(17) \quad \delta_{(\lambda u)^p}^p F[y] = \lambda^p \delta_{u^p}^p F[y].$$

Ainsi la variation d'ordre  $p$ ,  $\delta_{u^p}^p F[y]$  est homogène et de degré  $p$  en  $u$ . Profitons de cette propriété : si  $\Delta y$  est un élément quelconque de B. W. H., tel que  $\|\Delta y\| \neq 0$ , on peut prendre

$$u = \frac{\Delta y}{\pm \|\Delta y\|},$$

poser

$$t = \pm \|\Delta y\| \quad \text{et} \quad \Delta y = tu, \quad \text{d'où} \quad \|u\| = 1.$$

Et alors (15) devient

$$(18) \quad F[y + \Delta y] = F[y] + \delta_{\Delta y} F[y] + \dots + \frac{1}{n!} \delta_{(\Delta y)^n}^n F[y] + \|\Delta y\|^n \omega_n[y, \Delta y],$$

avec

$$(19) \quad \lim_{\|\Delta y\| \rightarrow 0} \omega_n[y, \Delta y] = 0.$$

(Cette relation prouvée pour  $\|\Delta y\| \neq 0$  devient évidente pour  $\|\Delta y\| = 0$ .)

Mais notons bien que la convergence vers zéro de  $\omega_n$  a lieu si  $\|\Delta y\| \rightarrow 0$ , de façon que  $u = \frac{\Delta y}{\pm \|\Delta y\|}$  reste fixe, autrement dit quand le point  $z = y + \Delta y$  tend vers le point  $y$  sur une droite quelconque passant par ce point  $y$ .

Nous reviendrons plus loin (p. 102, 104) sur ce point.

*Remarque.* — En comparant les définitions ci-dessus des différentielles et des variations généralisées, il devient clair que si  $F[z]$  a, pour  $z \equiv y$ , une différentielle d'ordre  $n$ , elle a aussi pour  $z \equiv y$ , une variation généralisée d'ordre  $n$  qui lui est égale.

Au contraire, une fonctionnelle peut avoir une variation généralisée d'ordre  $n$  pour  $z \equiv y$ , sans avoir nécessairement une différentielle d'ordre  $n$  pour  $z \equiv y$  <sup>(3)</sup>

Et ceci, même dans le cas simple où l'espace B. W. H. est l'espace classique des nombres réels, (voir ci-dessous).

(3)  $F[z]$  n'a pas nécessairement une variation d'ordre  $p < n$  pour  $z$  voisin de  $y$ .



*Exemple.* — I. Prenons, par exemple,

$$(20) \quad F(z) = z^2 \omega(z),$$

où  $z$  est un nombre réel et  $\omega(z)$  une fonction continue qui n'a nulle part de dérivée (par exemple, la fonction construite à cet effet par Weierstrass).

Cette fonction  $F[z]$  a une variation seconde pour  $z = 0$ . Car on peut écrire

$$F(tu) = F(0) + tF_1(0, u) + \frac{t^2}{2}F_2(0, u) + t^2 \varepsilon(0, u, t),$$

avec

$$\lim_{t \rightarrow 0} \varepsilon(0, u, t) = 0$$

en prenant

$$(21) \quad \begin{cases} F_1(0, u) = 0, & F_2(0, u) = 2u^2 \omega(0), \\ u^2 \omega(ut) = u^2 [\omega(0) + \varepsilon_1(0, u, t)] \quad \text{et} \quad \varepsilon = u^2 \varepsilon_1. \end{cases}$$

Mais elle n'a pas une différentielle seconde pour  $z = 0$ . Car elle n'a même pas une différentielle première pour  $z$  voisin de 0.

En effet,

$$\frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} = z^2 \left[ \frac{\omega(z + \Delta z) - \omega(z)}{\Delta z} \right] + (2z + \Delta z) \omega(z + \Delta z).$$

Quand  $\Delta z \rightarrow 0$  et  $z \neq 0$ , le second membre n'a pas de limite,  $F(z)$  n'a pas de dérivée, donc pas de différentielle première.

II. Soit  $z(x)$  une fonction continue sur  $(a, b)$ . On peut la considérer comme élément d'un espace B. W. H., avec

$$\|z\| = \text{Max}_{a \leq x \leq b} |z(x)|.$$

Appelons  $\mathcal{C}$  cet espace et considérons la fonctionnelle définie sur  $\mathcal{C}$

$$F[z] = \text{Max}_{a \leq x \leq b} z(x).$$

C'est une fonctionnelle continue sur  $\mathcal{C}$ . Car

$$z \leq y + \|z - y\|,$$

d'où

$$\text{Max } z \leq \text{Max } y + \|z - y\|$$

et, de même,

$$|\text{Max } z - \text{Max } y| \leq \|z - y\|.$$

Paul Lévy a montré que si  $y(x)$  n'atteint son maximum qu'en un seul point de  $ab$ ,  $\text{Max } z$  possède une variation première pour  $z = y$  et ne la possède qu'en ce seul cas. Si alors

$$(22) \quad \text{Max } y = y(c),$$

on aura

$$\delta_u \text{Max } y = u(c).$$

On trouvera une démonstration de ce fait, par exemple à la page 247 de notre mémoire : *Sur la notion de différentielle* (Journal de Math. XVI, 1937). Notre démonstration prouve en même temps [toujours en supposant unique la solution  $c$ , de (22)] que  $\text{Max } z$  a pour  $z \equiv y$ , une différentielle au sens de Hadamard généralisé.

Mais elle prouve aussi que  $\text{Max } z$  n'a pas de différentielle, à notre sens, indiqué plus haut.

Au contraire, nous avons vu (p. 99) que si  $F[z]$  a une différentielle d'ordre  $n$  pour  $z \equiv y$ , elle a aussi des variations généralisées d'ordres  $1, 2, \dots, n$  pour  $z \equiv y$  et que

$$\delta_{\Delta y}^p F[y] = d_{\Delta y}^p F[y] \quad (p = 1, 2, \dots, n).$$

## DEUXIÈME PARTIE.

### CONDITIONS NÉCESSAIRES A L'EXISTENCE D'UN EXTREMUM (EN TERMES DE « VARIATIONS GÉNÉRALISÉES »).

*Rappel de définitions. Extremum local.* — Nous dirons que  $F(z)$  a un minimum local sur un espace B. W. H. pour  $z = y$ , s'il existe un nombre positif  $\rho$  tel que

$$(23) \quad F(z) \geq F(y) \quad \text{pour} \quad \|z - y\| \leq \rho.$$

Lorsqu'on a même

$$(24) \quad F(z) > F(y) \quad \text{pour} \quad \|z - y\| \leq \rho \quad \text{et} \quad z \neq y,$$

on dira que  $F$  a sur B. W. H. un minimum local *strict* pour  $z = y$ . On passe au maximum local et éventuellement au maximum local *strict* sur B. W. H. pour  $z = y$  en renversant dans (23) et (24) le sens des inégalités concernant  $F$ .

On dira qu'il y a un extremum local (strict) s'il y a un minimum ou un maximum local (strict).

#### CONDITION NÉCESSAIRE DU PREMIER ORDRE :

**THÉOREME I.** — Si  $F[z]$  possède pour  $z = y$  une « variation » première  $\delta_{\Delta z} F[y]$ , pour que  $F[z]$  ait un extremum local pour  $z = y$ , il faut que

$$(25) \quad \delta_{\Delta y} F[y] = 0$$

pour tout élément  $\Delta y$  de B. W. H.

En effet, on a par hypothèse

$$(26) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{F[y + t\Delta y] - F[y]}{t} = \delta_{\Delta y} F[y] + \varepsilon[y, \Delta y, t], \\ \lim_{t \rightarrow 0} \|\varepsilon[y, \Delta y, t]\| = 0. \end{array} \right.$$

Suivant le signe de  $t$ , le premier membre est  $\geq 0$  ou  $\leq 0$ , pour  $|t|$  assez petit. En faisant tendre  $t$  vers zéro, on voit qu'on a (25).

#### CONDITION NÉCESSAIRE DU SECOND ORDRE :

**THÉOREME II.** — Si  $F[z]$  a, pour  $z = y$ , une « variation » seconde généralisée,  $\delta_{(\Delta y)}^2 F[y]$ , pour que  $F[z]$  ait un minimum (maximum) local pour  $z = y$ , il faut

que l'on ait

$$(27) \quad \delta_{(\Delta y)^2}^2 F[y] \geq 0, \quad (\leq 0).$$

En effet, on a

$$F[y + tu] - F[y] = t \delta_u F[y] + \frac{t^2}{2} \delta_{u^2}^2 F[y] + t^2 \varepsilon_2[y, u, t],$$

avec

$$\lim_{t \rightarrow 0} \varepsilon_2[y, u, t] = 0 \quad \text{pour } u \text{ fixe.}$$

D'après le théorème précédent, si  $F[z]$  a un minimum local pour  $z = y$ , on a, plus simplement,

$$\frac{F[y + tu] - F[y]}{t^2} = \frac{1}{2} \delta_{u^2}^2 F[y] + \varepsilon_2[y, u, t].$$

Quand  $|t|$  est assez petit, le premier membre est  $\geq 0$ . En faisant tendre  $t$  vers zéro, on a donc à la limite

$$\delta_{u^2}^2 F[y] \geq 0$$

et, donc,

$$\delta_{(\Delta y)^2}^2 F[y] \geq 0 \quad \text{pour tout } \Delta y.$$

On aurait  $\leq 0$ , au lieu de  $\geq 0$ , pour un maximum local.

Nous allons maintenant considérer un cas plus général. En effet, quand  $\delta_u F[y] = 0$ , il peut arriver que plusieurs des variations généralisées d'ordres successifs  $\geq 1$  soient nulles pour  $z = y$ .

CONDITIONS NÉCESSAIRES D'ORDRE  $n$  :

THÉORÈME III. — *Supposons que  $F[z]$  ait une « variation généralisée » d'ordre  $n$  pour  $z \equiv y$  et que les « variations généralisées » d'ordres inférieurs correspondant à un accroissement  $\Delta y$  soient toutes nulles quel que soit  $\Delta y$  de B. W. H. pour  $z = y$ . Pour que  $F[z]$  ait un minimum (maximum) local pour  $z \equiv y$  il faut que, quel que soit  $\Delta y$  de B. W. H. :*

1° *Si  $n$  est impair,*

$$(28) \quad \delta_{(\Delta y)^n}^n F[y] = 0;$$

2° *Si  $n$  est pair,*

$$(29) \quad \delta_{(\Delta y)^n}^n F[y] \geq 0 \quad (\leq 0).$$

En effet, d'après les hypothèses, on a

$$(30) \quad \frac{F[y + tu] - F[y]}{t^n} = \frac{1}{n!} \delta_{u^n}^n F[y] + \varepsilon_n[y, u, t],$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \varepsilon_n[y, u, t] = 0 \quad \text{pour } u \text{ fini.}$$

Si  $n$  est impair et s'il y a un extremum local pour  $z \equiv y$ , le numérateur ne

changerait pas de signe lorsque  $|t|$  est assez petit, tandis que le dénominateur changerait de signe avec  $t$ ; la limite du premier membre serait donc à la fois  $\geq 0$  et  $\leq 0$ , d'où la conclusion annoncée.

Quand  $n$  est pair, le premier membre de (30) est  $\geq 0$  pour  $|t|$  assez petit, à la limite, on obtient (29).

*Remarque.* — On recherchera, plus loin (p. 109) d'autres conditions nécessaires, relatives à des cas plus particuliers, dits « cas douteux ».

ENSEMBLES ADMISSIBLES. — Dans les applications au Calcul des Variations, où  $z$  est une fonction de  $x$  pour  $a \leq x \leq b$ , il peut arriver (si l'on définit l'espace fonctionnel,  $\Gamma$ , des  $z$ , de façon à ce qu'il soit un espace B. W. H.), qu'on ait à se restreindre à une certaine catégorie de fonctions appartenant à cet espace  $\Gamma$ , fonctions dites fonctions « admissibles »; par exemple à toutes celles qui ont des valeurs données pour  $x = a$  et pour  $x = b$ .

Dans ce cas particulier on observe que si  $y$  et  $y + \Delta y$  ont des valeurs données en  $a$  et  $b$ , (si donc  $\Delta y$  s'annule en  $a$  et  $b$ ), il en est de même de  $y + \alpha \Delta y$  quelle que soit la constante  $\alpha$ .

Dans le cas d'un espace B. W. H. quelconque, nous dirons qu'un ensemble  $E$  d'éléments  $z = y + \Delta y$  de B. W. H., voisins de  $y$ , est *admissible*, si, quand  $y$  et  $y + \Delta y$  appartiennent à B. W. H. et quand  $\|\Delta y\|$  est assez petit,  $y + \alpha \Delta y$  appartient aussi à  $E$  quel que soit le nombre  $|\alpha|$  pourvu qu'il soit assez petit. Grâce à cette seule restriction, nous voyons alors que les raisonnements précédents subsistent dans le cas où  $F[z]$  a, pour  $z = y$ , un extremum local seulement parmi un ensemble admissible d'éléments de B. W. H. voisins de  $y$ . Dans ce cas, les conditions  $\partial_{\Delta y} F(y) = 0, \dots$  n'auront à être vérifiées que sur l'ensemble  $E$ .

FONCTIONNELLES DIFFÉRENTIABLES. — D'après les résultats de la page 95, il est clair que les théorèmes des pages 101 et 102 subsistent *a fortiori* quand au lieu de supposer l'existence de « variations » de  $F[z]$ , on suppose l'existence de différentielles (des mêmes ordres respectifs). Dans l'énoncé des conditions obtenues, il suffira de remplacer les  $\delta$  par  $\partial$ .

### TROISIÈME PARTIE.

#### CONDITIONS SUFFISANTES EN TERMES DE VARIATIONS P.

Pour que  $F[z]$  ait, par exemple, un minimum local pour  $z \equiv y$ , il faut évidemment que  $F[z]$  ait un minimum local *sur toute droite passant par  $y$* , c'est-à-dire que  $F[y + tu]$  est une fonction du nombre  $t$  qui doit avoir un minimum local pour  $t = 0$  et ceci quel que soit  $u$  de B. W. H.

Mais il n'est pas évident que cette condition nécessaire soit *suffisante*.

Ce qui précède explique d'abord que, pour obtenir des conditions nécessaires pour un extremum de  $F[z]$  pour  $z \equiv y$ , l'emploi nous a suffi de variations où, dans la formule (18),  $\omega_n \rightarrow 0$ , avec  $\|\Delta y\|$ , mais séparément sur chaque droite fixe passant par  $y$ .

Mais c'est aussi ce qui explique que, pour obtenir des conditions suffisantes, une hypothèse plus stricte sur  $\omega_n$  nous soit utile. Nous allons la formuler.

PROPRIÉTÉ P. — Soit  $F[z]$  une fonctionnelle définie sur un espace B. W. H. et possédant une « variation généralisée »,  $\delta_{u^n}^n F[y]$ , d'ordre  $n$  pour  $z = y$ , donc vérifiant (18) et (19).

Nous dirons qu'elle possède la propriété P (ou plus brièvement que  $\delta_{u^n}^n F[y]$  est une variation P,) si, non seulement  $\omega_n$  tend vers zéro avec  $\|\Delta y\|$  pour  $u = \frac{\Delta y}{\|\Delta y\|}$  fixe, mais si sa convergence est uniforme quand  $u$  varie sur B. W. H. de sorte que  $\|u\| = 1$ . Autrement dit, pour préciser, pour  $y$  donné et pour  $\theta$  positif arbitraire, indépendant de  $u$ , il existe  $\eta$  positif tel que

$$|\omega_n(y, \Delta y)| < \theta \quad \text{pour } |\Delta y| < \eta.$$

Exemples. — Donnons deux exemples (où la variation est même une différentielle) de variation P.

Exemples — I. C'est ce qui a lieu dans un espace euclidien à un nombre fini,  $s$ , de dimensions.

Car, en effet, si  $F[z] \equiv f(z_1, z_2, \dots, z_s)$  est différentiable d'ordre  $n$  pour

$$z = a \quad (z_1 = a_1, \dots, z_s = a_s),$$

alors on sait qu'on a

$$f(a_1 + dz_1, \dots, a_s + dz_s) = f(a_1, \dots, a_s) + (df)_{a_1, \dots, a_s} + \dots + \frac{1}{n!} (d^n f)_{a_1, \dots, a_s} + \varepsilon \|\Delta z\|^n,$$

où

$$\|\Delta z\| = \sqrt{\Delta z_1^2 + \dots + \Delta z_s^2} \quad \text{avec} \quad \lim_{\|\Delta z\| \rightarrow 0} \varepsilon = 0,$$

ceci ayant lieu quelle que soit la façon dont  $\Delta z_1, \dots, \Delta z_s$  tendent vers zéro.

II. Nous donnerons, dans un autre Mémoire, un autre exemple très important de différentielle P d'ordre  $n$ , dans le Calcul des Variations.

INTRODUCTION DES BORNES. — Appelons  $m_n[y]$  et  $M_n[y]$  les bornes inférieure et supérieure (finies ou infinies) du rapport

$$\frac{1}{\|\Delta y\|^n} \delta_{(\Delta y)^n}^n F[y]$$

quand  $\Delta y$  varie sur B. W. H. avec  $\|\Delta y\| \neq 0$ .

(On peut observer que ce rapport est égal [puisque  $\delta_{(\Delta y)^n}^n$  est homogène et de

degré  $n$  en  $\Delta y$  (p. 99)] à  $\delta_{u^n}^n F[y]$ , où  $u = \frac{\Delta y}{\|\Delta y\|}$  est un élément de B. W. H. restant tel que  $\|u\| = 1$ .

Il est clair que les conditions nécessaires du second ordre (27) sont respectivement équivalentes à

$$m_2[y] \geq 0, \quad M_2[y] \leq 0.$$

Ces dernières conditions ne sont pas plus simples, ni plus commodes. Mais les conditions plus strictes que (27)

$$(31) \quad \delta_{\Delta y}^n F[y] > 0 \quad (< 0)$$

ne sont pas équivalentes (sont mêmes moins strictes) que les conditions

$$m_n[y] > 0, \quad (M_n[y] < 0).$$

C'est pourquoi ce sont ces dernières et non (31) qui vont nous permettre, combinées avec la propriété P, d'énoncer des conditions suffisantes très larges.

**THÉORÈME IV.** — *Supposons que  $F[z]$  possède pour  $z \equiv y$  une « variation généralisée » du second ordre ayant la propriété P de la page 104; pour que  $F[z]$  ait pour  $z \equiv y$ , un minimum (maximum) local, il suffit que les deux conditions suivantes soient remplies*

1°  $\delta_{\Delta y} F[y] = 0$  quel que soit  $\Delta y$  de B. W. H.;

2°  $m_2[y] > 0$  ( $M_2[y] \leq 0$ ).

*Et alors l'extremum de  $F[z]$  est un extremum local strict.*

En effet, on aura alors, d'après la page 102,

$$\frac{\Delta F[y]}{\|\Delta y\|^2} \geq \frac{1}{2} m_2[y] + \varepsilon, \quad \text{avec} \quad \lim_{\|\Delta y\| \rightarrow 0} \varepsilon = 0,$$

la limite ayant lieu de quelque façon que varie  $\Delta y$  quand  $\|\Delta y\|$ , restant  $\neq 0$ , tend vers zéro.

Donc il existe un nombre  $\rho > 0$ , tel que, si  $m_2[y] > 0$ , on ait

$$m_2[y] + \varepsilon > 0 \quad \text{pour} \quad \|\Delta y\| < \rho;$$

par suite,  $\Delta F[y]$  restant positif, pour  $0 < \|\Delta y\| < \rho$  (\*), on aura bien un minimum local strict de  $F[z]$  pour  $z \equiv y$ .

*Autres cas.* — Nous venons d'examiner les deux cas où zéro est extérieur au segment  $(m_2[y], M_2[y])$ .

(\*) Si la variation seconde n'avait pas la propriété P, le nombre  $\rho$  dépendrait non seulement de  $\|\Delta y\|$ , mais de  $\Delta y$  et la conclusion ne serait plus valable.

I. *Quand il lui est intérieur,*

$$(32) \quad m_2[y] < 0 < M_2[y].$$

Donc,  $F[z]$  ne peut avoir un extremum local pour  $z \equiv y$ , quand les relations (32) sont vérifiées.

II. Restent donc les « cas douteux » où

$$m_2[y] = 0 \quad \text{ou} \quad M_2[y] = 0.$$

Il y a trois cas :

A. Si l'on avait  $m_2[y] = 0 = M_2[y]$ , c'est que  $\delta_{(\Delta y)^2}^2 F[y] = 0$  quel que soit  $\Delta y$  de B. W. H.

On peut aussi avoir, soit

$$B. \quad m_2[y] = 0 < M_2[y];$$

soit

$$C. \quad m_2[y] < 0 = M_2[y].$$

Nous traiterons ces trois cas plus loin, page 107, sous une forme plus générale.

*Remarque.* — I. Quand  $z$  est un nombre, autrement dit, quand l'espace B. W. H. se réduit à une droite, la discussion précédente se simplifie. Car, dans ce cas,

$$\delta_{(\Delta y)^2}^2 F[y] = F''_{yy}(\Delta y)^2$$

et  $m_2[y]$ ,  $M_2[y]$  sont nécessairement égaux entre eux et à  $F''_{yy}$ .

II. Mais dès qu'on passe au cas où  $z$  est un vecteur d'un espace à un nombre fini de dimensions, la discussion précédente s'applique sans aucune simplification, sauf que la propriété P est nécessairement vérifiée quand  $F[z]$  a non seulement une variation seconde, mais aussi une différentielle seconde.

Il faudra seulement traduire ensuite les conditions où interviennent  $m_2$  et  $M_2$  en termes de dérivées partielles, comme il sera fait plus loin (p. 116).

III. Quand on passe au cas où B. W. H. est à une infinité de dimensions, il peut se présenter (comme cela a lieu en Calcul des Variations, voir p. 114) une difficulté qui rend inutilisable les conditions suffisantes en termes de  $m_2$  et  $M_2$ . Nous indiquerons, plus loin (p. 115) un moyen de formuler alors d'autres conditions suffisantes, cette fois utilisables, mais dans des hypothèses plus strictes.

IV. Les résultats précédents subsistent quand il s'agit de l'extremum de  $F[z]$  sur un ensemble admissible. Toutefois, dans ce cas, on doit faire varier la variable  $\Delta y$  seulement sur cet ensemble admissible, aussi bien pour vérifier la condition  $\delta_{\Delta y} F(y) = 0$  que pour calculer les bornes de  $\delta_{\Delta y}^2 F(y)$ .

*Exemples de l'avantage des variations généralisées.* — I. Considérons la fonction d'une variable réelle  $z$  déjà mentionnée plus haut, page 100,

$$F(z) = z^2 \omega(z).$$

D'après les formules (21), on a

$$\delta_{\Delta z} F(o) = o, \quad \delta_{(\Delta z)^2}^2 F(o) = 2(\Delta z)^2 \omega(o).$$

La borne inférieure de

$$\frac{1}{(\Delta y)^2} \delta_{(\Delta z)^2}^2 F(o) = 2 \omega(o)$$

est

$$m_2(o) = 2 \omega(o).$$

Donc si  $\omega(o) > o$ ,  $F[z]$  a un minimum local strict pour  $z = o$ ; si  $\omega(o) < o$ ,  $F[z]$  a un maximum local stric pour  $z = o$ .

Bien entendu, un raisonnement direct (sans différentielle, ni variation) aurait pu aussi mener à ce résultat. Mais nous constatons que,  $F[z]$  n'ayant pas de dérivée première pour  $z \neq o$ , donc pas de dérivée seconde au sens classique pour  $z \equiv y$ , la théorie classique faisant usage des dérivées ne fournit rien ici, alors que notre théorie en termes de variations généralisées, donne la réponse pour  $\omega(o) \neq o$ .

II. Revenons à la fonctionnelle  $\text{Max } z$  définie page 100. Et prenons comme élément admissibles les fonctions continues  $z(x)$  qui prennent des valeurs données  $A, B$  ( $A > B$ ) pour  $x = a$  et  $x = b$ . On peut facilement déterminer l'extremum de  $\text{Max } z$  dans cet ensemble admissible sans utiliser variation ni différentielle.

D'après la page 100, on ne peut y utiliser de différentielle à notre sens. Par contre, on peut obtenir une solution partielle au moyen de la variation. Cherchons, en effet, si  $y(x)$  réalise un extremum local de  $\text{Max } z$ , dans le cas où  $y(x)$  n'atteint son maximum qu'une fois, soit pour  $x = c$ . Alors

$$\delta_{\Delta y} \text{Max } y = \Delta y(c).$$

Pour qu'il y ait un extremum local pour  $z \equiv y$ , il faut que  $\Delta y(c)$  soit nul pour tout  $\Delta y$  de B. W. H. Or les  $\Delta y(x)$  ne sont assujettis qu'aux conditions : d'être continus, de s'annuler en  $a$  et  $b$ . Il faut donc que  $c = a$  ou  $b$  et puisque  $y(a) = A > B = y(b)$ , il faut que  $c = a$ . Autrement dit,  $y(x)$  ne peut réaliser un extremum que si  $y(x)$  est partout inférieur ou égal à  $A = y(a)$ . D'ailleurs s'il en est ainsi  $A = \text{Max } y$ , ne réalise pas un maximum (lequel est évidemment infini) de  $\text{Max } z$ . Et, au contraire, toute fonction  $y(x)$  telle que  $\text{Max } y = A$  [avec  $y(a) = A, y(b) = B$ ], réalise un minimum de  $\text{Max } z$ .

CONDITIONS D'ORDRE  $n$ . — Généralisons les cas douteux de la page 106 en supposant qu'on a

$$\delta_{\Delta y} F(y) = \delta_{(\Delta y)^2}^2 F(y) = \dots = \delta_{(\Delta y)^{n-1}}^{n-1} F(y) = o$$

pour tout  $\Delta y$  de B. W. H., tandis qu'il existe au moins un  $\Delta y$ , soit  $\Delta_0 y$  tel que

$$(33) \quad \delta_{(\Delta_0 y)^n}^n F(y) \neq o.$$

Alors

$$(34) \quad \Delta F = \frac{1}{n!} \delta_{(\Delta y)^n}^n F(y) + \omega_n \|\Delta y\|^n \quad \text{avec} \quad \lim_{\|\Delta y\| > 0} \omega_n = o.$$



On a vu, page 102, que quand la première des variations d'ordres croissant de  $F(z)$ , pour  $z=y$ , qui est non identiquement nulle en  $\Delta y$ , est d'ordre impair,  $F(z)$  n'a localement pour  $z=y$ , ni maximum, ni minimum.

4° Supposons, au contraire,  $n$  pair et soient  $m_n[y]$ ,  $M_n[y]$ , les bornes inférieure et supérieure de  $\partial_{u^n} F(y)$  quand  $u$  varie sur B. W. H. en restant tel que  $\|u\|=1$ .

Alors, on verra comme dans le cas de  $n=2$  que, pour  $n$  pair :

- I. Si  $0 < m_n[y] (\leq M_n[y])$ ,  $F(z)$  a un minimum (local strict) pour  $z=y$ ;
- II. Si  $m_n[y] \leq M_n[y] < 0$ ,  $F(z)$  a un maximum (local strict) pour  $z=y$ ;
- III. Si  $m_n[y] < 0 < M_n[y]$ ,  $F(z)$  n'a ni maximum ni minimum local pour  $z=y$ ;
- IV. Si  $m_n[y] = 0 < M_n[y]$ ,  $F(z)$  n'a pas un maximum local pour  $z=y$  et il y a doute pour le minimum;
- V.  $m_n[y] < 0 = M_n[y]$ . Pour  $z=y$ ,  $F[z]$  n'a pas un minimum local et il y a doute quand au maximum.

Le cas VI où  $M_n[y] = 0 = m_n[y]$  ne peut se présenter dans notre hypothèse actuelle (33).

## QUATRIÈME PARTIE.

### ÉTUDE DES CAS DOUTEUX.

INTRODUCTION. — Dans les Traités d'Analyse classiques, l'étude de l'extremum d'une fonction de plus d'une variable se borne généralement aux cas I, II, III ci-dessus, où une réponse précise peut être donnée. On laisse sans réponse les « cas douteux » IV et V : ce sont, en effet, des cas dont la solution est moins simple et ce sont en même temps des « cas limites » qu'on risque moins de rencontrer.

Nous avons donné plus haut des solutions aux cas I, II, III aussi précises que dans l'Analyse classique, mais dans un domaine de validité infiniment plus vaste.

A l'image des Traités classiques, nous pourrions donc nous en tenir là.

Tout de même, certains auteurs ont pu traiter les « cas douteux » en Analyse classique d'une manière assez satisfaisante <sup>(5)</sup>. Sans aller aussi loin dans notre plus vaste domaine, nous allons donc essayer de traiter ces cas en considérant encore les mêmes fonctionnelles  $F[z]$  et en nous contentant encore de supposer l'existence de « variations généralisées » de divers ordres.

---

<sup>(5)</sup> Voir, par exemple, pour le cas de deux variables, le résumé des résultats de van Danscher à la page 258 de la 1<sup>re</sup> édition du premier volume du remarquable *Cours d'Analyse mathématique*, par G. VALIRON, chez Masson, 1949.

PREMIER RÉSULTAT. — Nous reprenons les hypothèses caractérisant les « cas douteux » IV et V :

$F[z]$  a une « variation généralisée » d'ordre pair,  $n$ , pour  $z = y$ ;

$$(35) \quad \begin{cases} \partial_{\Delta y} F[y] = \dots = \partial_{(\Delta y)^{n-1}} F[y] = 0 & (5) \\ \text{pour tout } \Delta y \text{ de B. W. H.,} \end{cases}$$

$$(36) \quad m_n[y] = 0 < M_n[y]$$

ou

$$(37) \quad m_n[y] < M_n[y] = 0.$$

On a, par hypothèse,

$$(38) \quad F[y + tu] - F[y] = t^n \left\{ \frac{\partial_{u^n}^n F[y]}{n!} + \varepsilon_n[y, u, t] \right\} \quad \text{avec} \quad \lim_{t \rightarrow 0} \varepsilon_n[y, u, t] = 0.$$

Quand  $m_n[y] = 0$ ,

$$\partial_{u^n}^n F[y] \geq 0 \quad \text{pour} \quad \|u\| = 1$$

et si  $M_n[y] > 0$ , il y a des  $u$  pour lesquels

$$\partial_{u^n}^n F[y] > 0.$$

Appelons *droites critiques*, d'ordre  $n$ , les droites passant par  $y$ , sur lesquelles  $\partial_{u^n}^n F[y] = 0$ , s'il en existe. Alors, d'après (38) et puisque  $n$  est pair,  $F[z]$  a un *minimum local sur toute droite non critique d'ordre  $n$  passant par  $y$* . C'est un premier résultat intéressant. Mais, même dans le cas où il n'y aurait pas de droites critiques, il n'en résulterait pas d'une manière évidente que  $F[z]$  ait un minimum au voisinage de  $y$ , c'est-à-dire qu'il n'est pas évident que la distance de  $y$  à partir de laquelle, sur la droite parcourue par  $tu$  quand  $t$  décroît,  $F[z]$  reste  $\geq F[y]$ , ait un minimum positif. Un résultat et une remarque analogues s'établiraient de la même façon quand

$$m_n[y] < 0 = M_n[y].$$

CONDITIONS NÉCESSAIRES. — 1° Pour éclaircir les cas douteux et aller plus loin, faisons une première supposition supplémentaire en admettant que  $F[z]$  a aussi pour  $z = y$  une variation d'ordre  $n + 1$ .

On aura

$$(39) \quad F[y + tu] - F[y] = \frac{t^n}{n!} \left\{ \partial_{u^n}^n F[y] + \frac{t}{n+1} \left[ \partial_{u^{n+1}}^{n+1} F[y] + \theta_{n+1}[y, u, t] \right] \right\};$$

$$(40) \quad \lim_{t \rightarrow 0} \theta_{n+1}(y, u, t) = 0.$$

L'hypothèse

$$m_n[y] = 0 \quad \text{ou} \quad M_n[y] = 0$$

peut être réalisée de deux façons.

I. Considérons d'abord la façon la plus simple : il existe une droite critique d'ordre  $n$ , c'est-à-dire qu'il y a un élément  $u_0$  tel que

$$\delta_{u_0}^n F[y] = 0, \quad \text{avec } \|u_0\| = 1.$$

Alors, on a

$$F[y + tu_0] - F[y] = \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} [\delta_{u_0}^{n+1} F[y] + \theta_n[y, u_0, t]].$$

Si  $\delta_{u_0}^{n+1} F[y]$  n'était pas nul, l'accroissement de  $F[y]$  serait, puisque  $n+1$  est impair, d'un signe variant avec celui de  $t$ , pour  $[t]$  assez petit. Donc s'il y a un extremum local de  $F[z]$  pour  $z = y$ , on a

$$\delta_{u_0}^{n+1} F[y] = 0.$$

Autrement dit, s'il y a extremum dans ce cas douteux, toute droite critique d'ordre  $n$  passant par  $y$  est aussi droite critique d'ordre  $n+1$ .

Pour aller encore plus loin, faisons une nouvelle hypothèse et supposons que  $F[z]$  a une « variation généralisée » d'ordre  $n+2$ . On aura, d'après ce qui précède,

$$(41) \quad \frac{F[y + tu_0] - F[y]}{t^{n+2}} = \frac{1}{(n+2)!} \{ \delta_{u_0}^{n+2} F[y] + \theta_{n+1}[y, u_0, t] \}.$$

Quand  $t \rightarrow 0$ , le premier membre a une limite  $\geq 0$  égale à  $\frac{1}{(n+2)!} \delta_{u_0}^{n+2} F[y]$

Ainsi :

THÉOREME V. — Supposons que  $F[z]$  a pour  $z = y$  une « variation généralisée » d'ordre  $n+2$ . Si l'on se trouve dans le cas douteux où

$$(42) \quad \begin{cases} \delta_{\Delta y} F[y] = \dots = \delta_{\Delta y}^{n-1} F[y] = 0, \\ m_n[y] = 0 < M_n[y] \quad (\text{ou } m_n[y] < 0 = M_n[y]). \end{cases}$$

alors, pour que  $F[z]$  ait un minimum (maximum) local pour  $z = y$ , il faut que :

1°  $n$  soit pair ;

2° toute droite critique d'ordre  $n$ ,  $\Delta y = tu_0$ , passant par  $y$ , soit aussi droite critique d'ordre  $n+1$  ;

3° on ait  $\delta_{u_0}^{n+2} F[y] \geq 0$  [ $\leq 0$ ].

Remarques. — 1° Il est clair que si ces conditions sont réalisées et si de plus dans la dernière, le signe d'égalité est exclu (c'est-à-dire si  $\delta_{u_0}^{n+2} F[y] > 0$  [ $< 0$ ]) il y aura minimum [maximum] local sur toute droite critique d'ordre  $n$ . En associant ce résultat à celui de la page 109, on voit que sous les conditions qui viennent d'être admises,  $F[z]$  a un minimum [maximum] local sur chacune des droites, sans exception, passant par  $y$ .

Il n'est cependant pas évident que  $F[z]$  ait alors un minimum [maximum] sur tout un voisinage de  $y$  <sup>(6)</sup>.

2° Dans le cas où l'espace B. W. H. est un espace cartésien à un nombre fini de dimensions et où  $F[z]$  a une différentielle d'ordre  $n$  pour  $z = y$ , alors la borne inférieure de  $\delta_{u_p}^n F[y]$  pour  $\|u\| = 1$  est certainement atteinte, de sorte que dans les cas douteux d'ordre  $n$ , il y a certainement au moins une droite critique d'ordre  $n$  passant par  $y$ .

Cette circonstance peut encore se produire dans des cas plus généraux, où s'appliquera le théorème précédent.

II. Considérons maintenant le cas où on ne sait pas s'il y a une droite critique d'ordre  $n$ . En nous basant sur (49), nous pouvons dire seulement qu'il existe une suite d'éléments  $u_p$  de B. W. H., (distincts ou non) tels que

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \delta_{u_p}^n F[y] = 0, \quad \text{avec } \|u_p\| = 1.$$

Supposons, en outre, que  $\delta_{(\Delta y)^{n+1}} F[y]$  possède la propriété P.

1° Alors, quand  $p \rightarrow \infty$ , la suite des nombres  $\delta_{u_p}^{n+1} F[y]$  tend aussi vers zéro. En effet, au cas contraire, on pourrait aussi extraire de la suite des  $u_p$ , une suite  $v_r = u_{p_r}$  telle que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \delta_{v_r}^{n+1} F[y] = K,$$

où  $K$  est un certain nombre fini ou infini, mais non nul. Puisque  $\delta_{(\Delta y)^{n+1}} F[y]$  possède la propriété P, il existe un nombre  $\rho > 0$ , tel que pour  $|t| < \rho$ , on ait

$$|\theta_{n+1}[y, v_r, t]| < \frac{K}{4}$$

quel que soit  $r$ .

Supposons, par exemple,  $K$  positif.

Prenons  $r$  assez grand, ( $r > R$ ), pour qu'on ait

$$\delta_{(v_r)^{n+1}} F[y] \geq \frac{K}{2}.$$

Si  $r > R$  et  $|t| < \rho$ , on aura

$$\delta_{(v_r)^{n+1}} F[y] + \theta_{n+1}(y, v_r, t) \geq \frac{K}{4} > 0.$$

(6) Même dans le cas simple où l'espace B. W. H. est un plan, ces conditions ne suffisent pas à assurer un minimum. On le voit, par exemple, quand

$$F[z] = f(\alpha, \xi) = \xi^2 - 2(\alpha + \xi)^2 \xi + (\alpha^2 + \xi^2)^2$$

où ces conditions sont évidemment vérifiées à l'origine pour  $n = 2$ . Cependant,

$$f(\alpha, \xi) = [\xi - (\alpha + \xi)^2]^2 - 2\alpha\xi[\alpha^2 + \xi^2 + (\alpha + \xi)^2] < 0.$$

pour  $\xi = (\alpha + \xi)^2$  et  $\alpha > 0$ .

Quant  $|t|$  reste fixe et  $< \rho$  et  $r \rightarrow \infty$ ,

$$n! \frac{F[y + tv_r] - F[y]}{t^n}$$

est, d'après (39 et 40), la somme d'un terme tendant vers zéro et d'un autre qui reste en valeur absolue supérieur ou égal à un nombre fixe

$$\frac{|t|}{n+1} \frac{K}{4} > 0$$

et dont le signe dépend de celui de  $t$ .

Dès lors (puisque  $t^n > 0$ ), le signe de  $F[y + tv_r] - F[y]$  dépendrait de celui de  $t$  :  $F[z]$  n'aurait pas un extremum pour  $z \equiv y$ .

2° Si l'on suppose que  $F[z]$  a aussi une variation P d'ordre  $n+2$ , on peut donner une seconde condition nécessaire. On aura, en effet, dans ce cas

$$\begin{aligned} \frac{F[y + tu_p] - F[y]}{t^n} &= \frac{1}{n!} \delta_{(u_p)^n}^n F[y] + \frac{t}{(n+1)!} \delta_{(u_p)^{n+1}}^{n+1} F[y] \\ &+ t^2 \frac{1}{(n+2)!} [\delta_{(u_p)^{n+2}}^{n+2} F[y] + \theta_{n+2}(y, u_p, t)]. \end{aligned}$$

Puisque la variation d'ordre  $n+2$  a la propriété P, on peut pour chaque  $\omega > 0$ , déterminer  $\alpha$  de sorte que, quel que soit  $p$ , on ait

$$|\theta_{n+2}(y, u_p, t)| < \omega \quad \text{pour } |t| < \alpha.$$

Si  $F[z]$  a, par exemple, un minimum local pour  $z \equiv y$ , on peut même choisir  $\alpha$  pour qu'on ait aussi

$$F[y + tu_p] - F[y] \geq 0 \quad \text{pour } |t| < \alpha.$$

Prenons alors  $t$  fixe ( $|t| < \alpha$ ), et faisons croître  $p$ . Toutes les limites du dernier crochet seront  $\geq 0$ . Or le crochet est  $\leq \delta_{(u_p)^{n+2}}^{n+2} F[y] + \omega$ , où  $\omega$  est indépendant de  $p$ . Donc toutes les limites de  $\delta_{(u_p)^{n+2}}^{n+2} F[y]$  sont au moins égales à n'importe quel nombre négatif  $-\omega$ . Elles sont donc  $\geq 0$ .

En résumé, quand, pour  $z \equiv y$  : 1°  $F[z]$  une variation d'ordre  $n+2$ ; 2° quand, en outre, ses variations d'ordre  $n+1$  et  $n+2$  possèdent la propriété P; 3° quand  $F[z]$  se conforme aux hypothèses (42), alors, pour que  $F[z]$  ait un minimum [maximum] local pour  $z \equiv y$ , il faut que : pour toute suite d'éléments  $u_p$  (distincts ou non) de B. W. H., tels que

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \delta_{(u_p)^n}^n F[y] = 0$$

(et il y a certainement de telles suites), on ait aussi

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \delta_{(u_p)^{n+1}}^{n+1} F[y] = 0$$

et

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \delta_{(u_p)^{n+2}}^{n+2} F[y] \geq 0 \quad (\leq 0).$$

La démonstration précédente subsiste s'il y a au moins une droite critique d'ordre  $n$  et permet de retrouver par une autre voie les résultats obtenus directement plus haut dans ce cas particulier.

UNE CONDITION SUFFISANTE SIMPLE. — Supposons que  $F[z]$  a une variation P d'ordre  $n + 2$  pour  $z \equiv y$  et vérifie encore les mêmes hypothèses (42) du cas douteux. Pour que  $F[z]$  ait un minimum [maximum] local pour  $z = y$ , il suffit que : 1°  $n$  soit pair; 2°  $\delta_{(\Delta y)^{n+1}}^{n+1} F[y] = 0$  pour tout  $\Delta y$  de B. W. H. et que : 3°  $m_{n+2}[y] > 0$  ( $M_{n+2}[y] < 0$ ).

Car, on aura

$$F[y + \Delta y] - F[y] = \frac{\|\Delta y\|^n}{n!} \delta_{u^n}^n F[y] + \frac{\|\Delta y\|^{n+2}}{(n+2)!} \delta_{u^{n+2}}^{n+2} F[y] + \|\Delta y\|^{n+2} \omega_{n+2},$$

$$\lim_{\|\Delta y\| \rightarrow 0} \omega_{n+2} = 0$$

et en supposant  $m_n[y] = 0$  et  $\Delta y \neq 0$

$$\frac{F[y + \Delta y] - F[y]}{\|\Delta y\|^{n+2}} \geq \frac{1}{(n+2)!} m_{n+2}[y] + \omega_{n+2}.$$

Quand  $\|\Delta y\| \rightarrow 0$ , le second membre tend vers une quantité positive, on a bien un minimum local et même un minimum local strict.

La condition suffisante précédente est simple. On peut la rendre moins stricte (mais moins simple), ainsi :

FORME MOINS STRICTE DE CONDITION SUFFISANTE. — Supposons que pour  $z = y$ ,  $F[z]$  ait une « variation » P d'ordre  $n + 2$  et que ses « variations » d'ordre  $< n$  soient nulles pour tout accroissement  $\Delta y$  dans B. W. H.

Plaçons-nous dans le cas douteux où

$$(44) \quad m_n[y] = 0 < M_n[y] \quad (m_n[y] < 0 = M_n[y]).$$

THÉORÈME VI. — *Sous ces hypothèses, pour que  $F[z]$  ait un minimum [maximum] local pour  $z = y$ , il suffit que : 1°  $n$  soit pair; 2°*

$$(45) \quad m_{n+2}[y] > 0 \quad (M_{n+2}[y] < 0);$$

3° le rapport

$$(46) \quad \frac{\delta_{u^{n+1}}^{n+1} F[y]}{\delta_{u^n}^n F[y]}$$

reste borné quand  $\|u\| = 1$  ou, plus précisément, qu'il existe un nombre fini  $K > 0$  tel que

$$(46 \text{ bis}) \quad |\delta_{u^{n+1}}^{n+1} \dots| \leq K \delta_{u^n}^n \dots \quad \text{pour tout } \|u\| = 1.$$

On a d'abord d'après (46 bis) et (45)

$$\delta_{u^n}^n \dots \geq 0, \quad \delta_{u^{n+2}}^{n+2} \dots > 0.$$

Alors, d'après (15), on a ( $n$  étant supposé pair)

$$(47) \quad \left( \frac{F[y + tu] - F[y]}{t^n} \right) n! = \delta_{u^n}^n \dots + \frac{t}{n+1} \delta_{u^{n+1}}^{n+1} \dots + \frac{t^2 [\delta_{u^{n+2}}^{n+2} \dots + \varepsilon_{n+2}]}{(n+1)(n+2)}.$$

La variation d'ordre  $n+2$  ayant par hypothèse la propriété P, il existe  $\alpha > 0$ , indépendant de  $u$ , tel que pour  $|t| < \alpha$ , on ait

$$|\varepsilon_{n+2}[y, u, t]| < \frac{m_{n+2}[y]}{2},$$

d'où

$$(48) \quad \delta_{u^{n+2}}^{n+2} \dots + \varepsilon_{n+2} > \frac{m_{n+2}[y]}{2} > 0 \quad \text{pour } |t| < \alpha.$$

Alors le second membre de (47) est au moins égal à

$$(49) \quad \delta_{u^n}^n \dots - \frac{|t|}{n+1} |\delta_{u^{n+1}}^{n+1}| \geq \delta_{u^n}^n \dots \left[ 1 - \frac{|t|}{n+1} K \right].$$

D'après (47), (48) et (49), on aura donc

$$F[y + tu] - F[y] > 0 \quad \text{pour } |t| < r \quad \text{et } \|u\| = 1$$

si  $r$  est le plus petit des nombres  $\alpha$  et  $\frac{n+1}{K}$ . Ou encore, en prenant  $z = y + \Delta y$  et  $\Delta y$  arbitraire sur B. W. H., mais avec  $\|\Delta y\| \neq 0$  et posant  $tu = \Delta y$  et  $\|u\| = 1$ ,

$$F[z] > F[y] \quad \text{pour } 0 < \|z - y\| < r.$$

Autrement dit,  $F[z]$  a bien un minimum local et même un minimum local *strict* pour  $z = y$ .

ENSEMBLES ADMISSIBLES. — Ici encore, lorsqu'on cherche les conditions pour que  $F[z]$  ait un extremum local parmi un sous-ensemble E d'éléments, dits admissibles, de B. W. H., on devra remplacer les conditions à vérifier quel que soit  $\Delta y$  de B. W. H. ou, quel que soit  $u$  de B. W. H. tel que  $\|u\| = 1$ , par des conditions analogues mais limitées aux cas où  $\Delta y$  ou  $u$  sont admissibles.

UNE DIFFICULTÉ. — Il existe certaines catégories de fonctionnelles (par exemple en Calcul des Variations) qui sont telles que  $m_2[y] \leq 0 \leq M_2[y]$  pour tout  $y$ . Pour une fonctionnelle de cette espèce, la condition nécessaire (27) pour un minimum [maximum] local pour  $z \equiv y$  se réduit à

$$m_2[y_2] = 0 \quad (M_2[y] = 0).$$

Et les conditions suffisantes (2° du théorème IV) *disparaissent*, ne pouvant être remplies.

Pour éviter cette difficulté, nous introduirons une nouvelle hypothèse.

PROPRIÉTÉ Q. — *Supposons que  $F[z]$  ait une variation d'ordre  $n$ , non seulement pour  $z \equiv y$ , mais aussi au voisinage de  $y$ . Nous dirons que cette variation a la pro-*

priété Q si pour chaque  $\Delta y$  de norme  $\|\Delta y\|$  assez petite, il existe un nombre  $\theta$  entre 0 et 1, tel que

$$F[y + \Delta y] = F[y] + d_{\Delta y} F[y] + \dots, \\ \frac{1}{(n-1)!} \delta_{(\Delta y)^{n-1}} F[y] + \frac{1}{n!} \delta_{(\Delta y)^n} F[y + \theta \Delta y], \quad \text{avec } 0 < \theta < 1,$$

$\theta$  dépendant en général de  $y$ ,  $\Delta y$  et  $n$ .

En justification de cette introduction, on notera que non seulement cette propriété nous sera commode, mais qu'elle est possédée au moins par toute « variation » qui est en même temps une différentielle, comme nous l'avons vu [p. 96, form. (9)].

UNE AUTRE CONDITION SUFFISANTE.

THÉOREME VI. — Soit  $F[z]$  une fonctionnelle définie sur B. W. H., ayant en chaque point du voisinage de l'élément  $y$  une « variation généralisée » d'ordre  $n$  possédant pour  $z \equiv y$  la propriété Q et dont les « variations généralisées » d'ordre inférieur à  $n$  sont nulles pour  $z \equiv y$  quel que soit l'accroissement  $\Delta y$  : pour que  $F[z]$  ait un minimum [maximum] local pour  $z \equiv y$ , il suffit que  $n$  soit pair et que

$$(50) \quad \delta_{(\Delta z)^n} F[z] \geq 0 \quad [\leq 0]$$

quel que soit  $z$  de B. W. H., pris au voisinage de  $y$  ( $\|z - y\| < \rho$ ) et quel que soit  $\Delta z$  de B. W. H.

Car dans les hypothèses faites, on a

$$F[y + \Delta y] - F[y] = \frac{1}{n!} \delta_{(\Delta y)^n} F[y + \theta \Delta y]$$

et si la propriété Q est réalisée pour  $\|z - y\| < \rho'$ , on aura en posant  $z = y + \Delta y$  et prenant  $\|\Delta y\| < \rho''$ , (le plus petit des nombres  $\rho$ ,  $\rho'$ )

$$\|(y + \theta \Delta y) - y\| < \|\Delta y\| < \rho'' \leq \begin{cases} \rho \\ \rho' \end{cases},$$

d'où

$$F[z] - F[y] \geq \quad \text{pour } \|z - y\| < \rho''.$$

On a dans le cas actuel  $m_n[y] \geq 0$  et rien n'empêche d'appliquer le théorème au « cas douteux » où

$$m_n[y] = 0 < M_n[y].$$

## APPLICATIONS.

Pour donner l'exemple le plus simple de l'emploi des bornes  $m_2[y]$ ,  $M_2[y]$ , prenons pour  $z$  un vecteur de l'espace à deux dimensions, de projections  $\alpha$ ,  $\xi$ ;



$F[z]$  sera une fonction  $f(\alpha, \xi)$  de deux variables numériques. Pour simplifier, supposons que  $f(\alpha, \xi)$  a des dérivées partielles continues jusqu'à l'ordre  $n$ , au voisinage du vecteur  $\gamma$  de coordonnées  $(\beta, \eta)$ .

1° Pour  $n = 1$ , on a la condition nécessaire du premier ordre

$$\partial_{\Delta z} F[\gamma] \equiv 0,$$

c'est-à-dire ici

$$f'_{\beta} \Delta\beta + f'_{\eta} \Delta\eta = 0$$

quels que soient  $\Delta\beta, \Delta\eta$ , pour un extremum local de  $f(\alpha, \xi)$  pour  $\alpha = \beta, \xi = \eta$ . Cette condition équivaut à la condition classique

$$(51) \quad f_{\beta} = 0, \quad f_{\eta} = 0.$$

2° Pour  $n = 2$ , on doit ajouter une autre condition nécessaire pour un minimum local

$$\partial_{(\Delta y)^2}^2 F[\gamma] \geq 0,$$

c'est-à-dire

$$f''_{\beta\beta} \Delta\beta^2 + 2f''_{\beta\eta} \Delta\beta \Delta\eta + f''_{\eta\eta} \Delta\eta^2 \geq 0.$$

Écrivons-la pour simplifier l'écriture

$$A \Delta\beta^2 + 2B \Delta\beta \Delta\eta + C \Delta\eta^2 \geq 0.$$

Il faut pour cela que l'on ait

$$(52) \quad B^2 - AC \leq 0 \quad \text{d'où} \quad AC \geq 0$$

$$(53) \quad A + C \geq 0 \quad \text{et, par suite,} \quad A \geq 0, \quad C \geq 0.$$

3° Supposons réalisées les conditions (51), (52), (53) qui sont nécessaires et passons aux conditions suffisantes. Alors  $m_2[\gamma]$  sera la borne inférieure de

$$(54) \quad A \Delta\beta^2 + 2B \Delta\beta \Delta\eta + C \Delta\eta^2$$

( $\geq 0$ , d'après ce qui précède), quand

$$(55) \quad 1 = \|\Delta y\| = \sqrt{\Delta\beta^2 + \Delta\eta^2}.$$

Si l'on prend des coordonnées polaires  $\|\Delta y\|, \theta$ , pour  $\Delta\beta, \Delta\eta$ , on voit que  $m_2[\gamma]$  sera la borne inférieure, quand  $\|\Delta y\| \neq 0$ , de

$$\begin{aligned} A \cos^2 \theta + 2B \sin \theta \cos \theta + C \sin^2 \theta &= \frac{1}{2} [A + C + (A - C) \cos 2\theta + 2B \sin 2\theta] \\ &= \frac{1}{2} [(A + C) + \rho \cos(2\theta - \omega)], \end{aligned}$$

avec

$$\rho^2 = (A - C)^2 + 4B^2 \quad (\rho \geq 0),$$

d'où

$$m_2[\gamma_c] = \frac{1}{2} [A + C - \rho] \geq 0.$$

Pour que  $m_2[\gamma] > 0$ , il faut que

$$\rho < A + C$$

ou, puisque  $\rho$  et  $A + C$  sont  $\geq 0$ ,

$$0 < (A + C)^2 - \rho^2 = 4(AC - B^2).$$

Donc : si  $AC - B^2$  non seulement est supposé  $\geq 0$  comme dans (52), mais est  $> 0$  (avec  $A + C \geq 0$ ), alors, il y a un minimum local strict de  $f(\alpha, \xi)$  pour  $\alpha = \beta$ ,  $\xi = \eta$ . Quand  $AC - B^2 = 0$ , il y a doute.

Finalement, une condition nécessaire pour le minimum local de  $f$  pour  $\alpha = \xi$ ,  $\beta = \eta$  est

$$\begin{aligned} f'_{\beta} &= f'_{\eta} = 0, \\ f''_{\beta\beta} f''_{\eta\eta} - (f''_{\beta\eta})^2 &\geq 0, \quad f''_{\beta\beta} + f''_{\eta\eta} \geq 0 \end{aligned}$$

et quand le signe d'égalité dans la première relation est exclu (et alors il l'est aussi dans la seconde), l'ensemble de ces deux inégalités est *suffisant* pour le minimum local strict. *Ce sont les conditions sous leur forme classique.*

Si  $A + C$  était nul avec  $AC - B^2 \geq 0$ ,  $A$ ,  $B$ ,  $C$  seraient nuls on aurait un cas particulier de  $AC - B^2 = 0$ .

*Reste donc le cas douteux où*

$$f''_{\beta\beta} f''_{\eta\eta} - (f''_{\beta\eta})^2 = 0.$$

Dans ce cas,  $A \Delta\beta^2 + \dots + C \Delta\eta^2$  serait constamment  $\geq 0$ , mais serait nul pour

$$A \Delta\beta + B \Delta\eta = 0, \quad B \Delta\beta + C \Delta\eta = 0.$$

Si  $f(\alpha, \xi)$  admet des dérivées partielles continues du 3<sup>e</sup> ordre pour  $\alpha = \beta$ ,  $\xi = \eta$ , il faudra pour le minimum, d'après le théorème V, que, pour ces valeurs de  $\Delta\beta$ ,  $\Delta\eta$ ,  $\partial_{\Delta}^3 F[\gamma]$ , c'est-à-dire  $d^3 f$  soit aussi nul, donc que  $d^3 f$  soit divisible par  $A \Delta\beta + B \Delta\eta$  si, par exemple,  $A \neq 0$ . Et, si  $f$  a des dérivées partielles continues du 4<sup>e</sup> ordre, que *pour ces valeurs*,  $d^4 f$  soit  $\geq 0$ .

Les conditions suffisantes du théorème sont sensiblement plus strictes. Les projections du vecteur unitaire  $u$  sont de la forme  $\cos \varphi$ ,  $\sin \varphi$ . En posant

$$d^3 f = L \Delta^3 \beta + M \Delta\beta^2 \Delta\eta + \dots,$$

la 1<sup>re</sup> condition nécessaire ci-dessus pour le cas douteux implique que  $d^3 f$  est de la forme

$$d^3 f = (A \Delta\beta + B \Delta\eta) (U \Delta\beta^2 + V \Delta\beta \Delta\eta + W \Delta\eta^2)$$

et la condition (46 bis) devient, si, par exemple  $A \neq 0$  ( $A > 0$ ),

$$|U \cos^2 \varphi + V \sin \varphi \cos \varphi + W \sin^2 \varphi| \cdot |A \cos \varphi + B \sin \varphi| \leq K \frac{(A \cos \varphi + B \sin \varphi)^2}{A}$$

ou, en posant  $\frac{K}{A} = H$ ,

$$|U \cos^2 \varphi + V \sin \varphi \cos \varphi + W \sin^2 \varphi| \leq H |A \cos \varphi + B \sin \varphi|.$$

Quand  $A \cos \varphi + B \sin \varphi = 0$ , le premier membre devra être aussi nul, c'est-à-dire que  $U \Delta x^2 + V \Delta x \Delta y + W \Delta y^2$  devra être le produit de  $(A \Delta x + B \Delta y)$  par un facteur du premier degré; c'est-à-dire enfin que  $d^3 f$  devra être divisible par  $d^2 f$  et cette condition suffira pour assurer l'existence du nombre  $K$ . Car la condition (46 bis) deviendra, après division de  $d^3 f$  et  $d^2 f$ , de la forme

$$|P \cos \varphi + Q \sin \varphi| \leq K$$

qui est vérifiée par

$$K = \sqrt{P^2 + Q^2}.$$

Ainsi dans le cas douteux,  $d^2 f$  est  $\equiv 0$  ou est de la forme (si, par exemple  $A \neq 0$ ),

$$\frac{1}{A} (A \Delta \beta + B \Delta \eta)^2$$

et pour que les conditions suffisantes de la page 115 soient remplies, il faut que  $d^3 f$  soit de la forme

$$(A \Delta \beta + B \Delta \eta)^2 (P \Delta \beta + Q \Delta \eta),$$

que  $d^4 f$  ne soit nul que pour  $\Delta x = \Delta y = 0$  et que son signe ailleurs, alors invariable, soit celui de  $A$ .

Des changements de variables permettent de mettre ces conditions sous forme plus simple.

En changeant l'origine des axes, on peut d'abord supposer  $\beta = \eta = 0$ . Alors on peut écrire  $\alpha$  et  $\xi$  au lieu de  $\Delta \alpha$  et  $\Delta \xi$ . Si  $C = f''_{\xi\xi}(0, 0) \neq 0$ ,

$$\partial_{(\Delta y)^2}^2 f = A \alpha^2 + 2B \alpha \xi + C \xi^2 = C \left( \xi + \frac{B}{C} \alpha \right)^2$$

et l'on pourra, en posant

$$\alpha_1 = \alpha, \quad \xi_1 = \xi + \frac{B}{C} \alpha,$$

ramener au cas où  $A = 0 = B$ .

Si les conditions suffisantes précédentes sont remplies,  $d^3 f$  devra être divisible par  $\xi^2$  et l'on aura

$$(56) \quad \Delta f = C \xi^2 + (b \alpha + c \xi) \xi^2 + L \alpha^4 + \dots + Q \xi^4 + (\alpha^2 + \xi^2) \varepsilon(\alpha, \xi),$$

avec

$$C > 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\alpha^2 + \xi^2 \rightarrow 0} \varepsilon = 0.$$

Il faut pour le minimum que  $d^4 f \geq 0$  pour  $\xi = 0$  donc que  $L \geq 0$ . Il suffira que  $L \alpha^4 + \dots + Q \xi^4$  soit  $> 0$  en tout point autre que l'origine.

On peut aussi appliquer au cas douteux les conditions suffisantes du théorème.

On peut déjà supposer que  $f$  vérifie les conditions nécessaires du minimum. Après des changements de variables analogues aux changements précédents,  $f$  aura donc la forme

$$(56) \quad f = C\xi^2 + (a\alpha^2\xi + b\alpha\xi^2 + c\xi^3) + (L\alpha^4 + \dots + Q\xi^4) + (\alpha^2 + \xi^2)^2\varepsilon(\alpha, \xi),$$

avec

$$\lim_{\alpha^2 + \xi^2 \rightarrow 0} \varepsilon(\alpha, \xi) = 0,$$

et  $C > 0$ . (Si  $C$  était nul, on devrait avoir  $a = b = c = 0$ ).

Si les conditions suffisantes du théorème VI étaient remplies, on devrait avoir

$$(\Delta\alpha)^2 f''_{\alpha^2} + 2\Delta\xi f'_{\alpha\xi^2} + (\Delta\xi)^2 f''_{\xi^2} \geq 0$$

pour  $\alpha, \xi$ , assez petits, quels que soient  $\Delta\alpha, \Delta\xi$ . Il faut et il suffit pour cela que

$$(f''_{\alpha\xi})^2 - f''_{\alpha^2} f''_{\xi^2} \leq 0, \quad f''_{\alpha^2} + f''_{\xi^2} \geq 0$$

pour  $\alpha$  et  $\xi$  assez petits.

Pour simplifier, considérons le cas où  $f$  est un polynôme du 4<sup>e</sup> degré au plus c'est-à-dire où  $\varepsilon(\alpha, \xi) \equiv 0$ . Alors les conditions (45), deviennent

$$(2a\alpha + 2b\xi + 3M\alpha^2 + \dots)^2 - (2a\eta + 12L\alpha^2 + \dots)(2C + 2b\alpha + 6c\eta + 2N\alpha^2 + \dots) \leq 0$$

ou, en posant  $\alpha = \rho \cos \varphi$ ,  $\xi = \rho \sin \varphi$  et divisant par  $\rho$ ,

$$\rho[2a \cos \varphi + 2b \sin \varphi + \rho(\dots)]^2 - [2a \sin \varphi + \rho(m)][2C + \rho(\dots)] \leq 0.$$

D'où en faisant tendre  $\rho$  vers zéro,

$$-4Ca \sin \varphi \leq 0$$

qui ne peut avoir lieu quel que soit  $\varphi$  que si  $a = 0$ .

Nous ne continuerons pas la discussion, il nous suffira de remarquer que dans le cas douteux si  $f$  est un polynôme du 4<sup>e</sup> degré de la forme (56), avec  $\varepsilon \equiv 0$ , nos deux formes de conditions suffisantes d'un extremum local dans le cas douteux) définies par les théorèmes V et VI impliquent que dans (56),  $a$  soit nul.

Pourtant, il est clair que le polynôme particulier du 4<sup>e</sup> degré

$$f = \left(\xi + \frac{\alpha}{2}\alpha^2\right)^2 + p^2\alpha^4 = \xi^2 + a\alpha^2\xi + L\alpha^4$$

(avec  $p \neq 0$ , donc  $L > 0$ ) a un minimum local (stric) à l'origine quel que soit  $a$ , même si  $a$  est  $\neq 0$ . Et nous sommes bien dans le cas douteux.

On voit ainsi que *dans le cas douteux*, nos deux formes de conditions suffisantes laissent échapper un cas beaucoup plus général où le minimum a lieu, celui où, quand  $f$  est un polynôme du 4<sup>e</sup> degré de la forme (56),  $a$  n'est pas nul.

Quand l'espace B. W. H. est un plan, la méthode de van Dantscher [signalée plus haut p. 108, note (<sup>5</sup>)] permettrait de résoudre complètement le problème [en supposant  $f(\alpha, \xi)$  indéfiniment différentiable près du point  $(\beta, \eta)$ ].

Mais en passant au cas général où l'espace B. W. H. est un espace de Banach quelconque, l'extension de sa méthode ne paraît pas évidente. Puisque le cas douteux n'est même pas traité du tout dans la plupart des Traités classiques d'Analyse, il nous a semblé que *dans le même cas douteux*, nos théorèmes apporteront une première contribution non négligeable, bien que non définitive.

