ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

PIERRE LALAGUË

Sur certaines classes de fonctions indéfiniment dérivables

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 72, nº 3 (1955), p. 237-298
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1955_3_72_3_237_0>

SUR CERTAINES CLASSES

DE

FONCTIONS INDÉFINIMENT DÉRIVABLES

PAR M. PIERRE LALAGUË.

INTRODUCTION.

Divers auteurs, notamment M. Mandelbrojt [18], ont étudié des classes de fonctions $C_I\{M_n\}$ définies de la façon suivante. Soit $\{M_n\}(n=1, 2, \ldots)$ une suite de nombres positifs dont une infinité, y compris M_1, sont supposés finis, et I un intervalle donné (fini ou infini, ouvert ou fermé) sur la droite réelle. $C_I\{M_n\}$ est l'ensemble des fonctions réelles (¹) $f(x)$ de la variable réelle x, indéfiniment dérivables sur I, et vérifiant, selon la nature de I, les conditions ci-dessous.

Si I est la droite entière ou une demi-droite fermée, $f(x)$ est bornée sur I et telle que, pour tout x appartenant à I,

$$(1) \qquad |f^{(n)}(x)| < C^n M_n \qquad (n=1, 2, \ldots),$$

C constante positive pouvant dépendre de f, mais non de n.

Si I est fini, $f(x)$ vérifie des inégalités du type (1) sur chaque intervalle compact contenu dans I (cette dernière définition est due à M. H. Cartan [5]).

Carleman avait posé pour de telles classes le problème suivant : donner des conditions, portant sur $\{M_n\}$ et $\{M'_n\}$, nécessaires et suffisantes pour que $C_I\{M'_n\}$ contienne $C_I\{M_n\}$.

(¹) Tous les résultats restent d'ailleurs valables, à de légères modifications près, si les valeurs de $f(x)$ sont complexes.

Ces conditions, qui varient selon la nature de I, ont été trouvées successivement dans les cas où I est la droite entière, un intervalle fini ouvert ou fermé, une demi-droite fermée, par M. Mandelbrojt ([14], [17]) avec les collaborations respectives de MM. Gorny [8], H. Cartan ([2]) [5] et Agmon [1]. La solution du problème de Carleman repose essentiellement sur des résultats de deux types.

D'une part elle est basée sur les inégalités existant entre les bornes supérieures sur I des dérivées successives d'une fonction. De telles inégalités ont été établies notamment par M. Hadamard (pour trois dérivées consécutives, I étant la droite entière), par M. Gorny [8], puis par M. H. Cartan [3] (si I est la droite entière ou un intervalle fini), par M. Kolmogoroff [11] qui a donné le résultat le plus précis dans le cas où I est la droite entière.

D'autre part, on utilise la régularisation convexe et la régularisation exponentielle d'une suite, notion due à M. Mandelbrojt [15].

Dans le premier chapitre du présent travail, nous résolvons (au paragraphe II) le problème de Carleman pour les classes $C^E\{M_n\}$ ainsi définies : $C^E\{M_n\}$ est l'ensemble des fonctions $f(x)$ qui appartiennent à $C_I\{M_n\}$ (I étant la droite entière) et qui, de plus, sont presque périodiques, de spectre contenu dans un ensemble donné E de nombres réels.

A cet effet, nous avons introduit, sur le conseil de M. Mandelbrojt, le procédé de « régularisation convexe d'une suite par rapport à un ensemble E » exposé au début du chapitre I (§ I). Puis (au paragraphe III) nous étudions de même les classes $K^E\{M_n\}$ qui diffèrent des classes $C^E\{M_n\}$ par le seul fait qu'au second membre de (1), $C^n M_n$ est remplacé par CM_n. Nous en déduisons certains résultats sur la dérivabilité et la quasi-analyticité des classes $C^E\{M_n\}$ et $K^E\{M_n\}$.

Dans le chapitre II, nous résolvons, grâce aux régularisations convexe et exponentielle, le problème de Carleman pour des classes analogues à $C_I\{M_n\}$ (I étant une demi-droite fermée ou la droite entière), mais où, dans les inégalités qui tiennent lieu de (1), $\overline{\text{borne}}_{x\in I} |f^{(n)}(x)|$ est remplacée par diverses autres normes de $f^{(n)}(x)$.

Dans le chapitre III, nous précisons et complétons certains théorèmes de M. Mandelbrojt [16] concernant la question suivante : le changement de variable $x = \cos\theta$ fait correspondre les fonctions $f(x)$ et $F(\theta) \equiv f(\cos\theta)$; la fonction $f(x)$ [resp. $F(\theta)$] appartenant à une classe $C_I\{M_n\}$ donnée, à quelle classe appartient $F(\theta)$ [resp. $f(x)$]?

La plupart des résultats de ces trois chapitres ont été publiés notamment dans [12] et [13].

J'ai commencé ces recherches avec la collaboration de mon ami J.-P. Kahane et je lui en suis très reconnaissant. Nos résultats communs se trouvent en [10] Je suis heureux d'exprimer ma profonde gratitude à M. Mandelbrojt, dont les

([2]) M. H. Cartan a, d'autre part, exposé dans [4] une autre méthode de démonstration, dont nous nous sommes fréquemment inspirés, pour montrer que les conditions trouvées sont nécessaires.

travaux sur la régularisation et les classes de fonctions indéfiniment dérivables [18] sont la base de ces trois chapitres. Ses conseils et encouragements ont été pour moi une aide constante et précieuse.

Qu'il me soit permis enfin de remercier M. le Doyen Pérès et M. Choquet qui, avec M. Mandelbrojt, m'ont fait l'honneur d'accepter de constituer le jury, et M. Paul Montel qui a bien voulu faire publier ce travail dans les *Annales de l'École Normale supérieure*.

CHAPITRE I.

Régularisation par rapport a un ensemble; classes $C^E\{M_n\}$ et $K^E\{M_n\}$.

Introduction.

Soit $\{M_n\}(n=1, 2, \ldots)$ une suite donnée de nombres positifs. Une infinité de ces nombres (dont M_1) sont supposés finis. Si, de plus, $\lim\limits_{n\to\infty} M_n^{\frac{1}{n}} = +\infty$, $\{M_n\}$ *sera dite suite* (S_∞).

Désignons par $C_R\{M_n\}$ l'ensemble des fonctions $f(x)$, bornées et indéfiniment dérivables pour $-\infty < x < \infty$ et vérifiant

$$\text{(A)} \qquad |f^{(n)}(x)| < C^n M_n$$

$(-\infty < x < \infty;\ n=1, 2, \ldots;$ C, constante positive pouvant dépendre de f mais non de n).

Soit $\{M_n^c\}$ la suite régularisée convexe de $\{M_n\}$, définie par

$$M_n^c = \overline{\text{borne}}_{r \geq 1}\, r^n/T(r), \qquad T(r) = \max_{n \geq 1} r^n/M_n.$$

MM. Mandelbrojt [14] et Gorny [8], puis M. Bang [2], ont montré que les classes $C_R\{M_n\}$ et $C_R\{M_n^c\}$ sont identiques et qu'il existe une fonction $F(x)$ telle que

$$F(x) \in C_R\{M_n\}, \qquad |F^{(n)}(0)| > \alpha^n M_n^c \qquad (n=1, 2, \ldots),$$

α, constante positive absolue.

Ceci permet de résoudre aisément pour les classes $C_R\{M_n\}$ un problème posé par Carleman : trouver des relations, portant sur $\{M_n\}$ et $\{M'_n\}$, nécessaires et suffisantes pour que

$$C_R\{M_n\} \subset C_R\{M'_n\}.$$

Les propriétés ci-dessus ont aussi permis (*voir* Mandelbrojt [17]) de résoudre les questions suivantes : trouver des conditions, portant sur $\{M_n\}$, impliquant que $C_R\{M_n\}$ ne contient que des fonctions analytiques, ou est « dérivable », ou est quasi-analytique.

Dans ce chapitre nous faisons une étude analogue, mais portant sur les classes $C^E\{M_n\}$, sous-classes des $C_R\{M_n\}$, définies de la façon suivante. $\{M_n\}$ étant une suite (S_∞), E un ensemble donné de nombres positifs, $C^E\{M_n\}$ est l'ensemble des fonctions presque périodiques dont les exposants de Fourier λ sont tels que $|\lambda|\in E$, qui de plus sont indéfiniment dérivables et vérifient (A).

M. Mandelbrojt nous a suggéré, pour étudier cette question, de définir la suite $\{M_n^E\}$ « régularisée de $\{M_n\}$ par rapport à l'ensemble E » de la façon suivante :

$$M_n^E = \overline{\text{borne}}_{r\in E}\, r^n/T(r), \qquad T(r) = \overline{\text{borne}}_{n\geq 1}\, r^n/M_n,$$

cette suite $\{M_n^E\}$ étant susceptible de rendre dans la question considérée les mêmes services que $\{M_n^c\}$ pour les classes $C_R\{M_n\}$. C'est effectivement ce qui se produit. Dans le premier paragraphe nous étudions les principales propriétés de ce mode de régularisation.

Dans le paragraphe II nous appliquons ces résultats à l'étude des classes $C^E\{M_n\}$. Dans le paragraphe III nous les appliquons à l'étude des classes $K^E\{M_n\}$, qui se définissent comme les classes $C^E\{M_n\}$ en remplaçant (A) par

$$\text{(B)} \qquad |f^{(n)}(x)| < CM_n \qquad (n=1, 2, \ldots; -\infty < x < \infty),$$

C, constante positive pouvant dépendre de f mais non de n.

I. — Régularisation convexe par rapport à un ensemble E.

1. Définitions préliminaires. — Soit E un ensemble donné de nombres réels finis τ tels que $\overline{\lim}\, E = +\infty$. Le procédé de régularisation convexe par rapport à E sera appliqué à des fonctions $f(x)$ de la variable réelle x, possédant les propriétés suivantes : $f(x)$ est une fonction réelle définie pour $x \geq 0$, faisant correspondre à chaque $x\geq 0$ une seule valeur $f(x)$; $f(x)$ peut prendre la valeur $(+\infty)$, mais il existe des valeurs de x aussi grandes que l'on veut pour lesquelles $f(x)$ est finie; enfin

$$\underline{\text{borne}}_{x\geq 0}\, f(x) > -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} x^{-1}f(x) = +\infty.$$

On désigne par $\mathcal{F}$ la classe de ces fonctions $f(x)$.

On appellera C_E la classe des fonctions réelles convexes de la variable réelle x, telles que, pour chaque x, les dérivées à droite et à gauche de la fonction appartiennent à E.

2. Définitions et propriétés de la fonction régularisée :

Définition. — *Si $f(x)\in\mathcal{F}$, on appelle fonction régularisée convexe de $f(x)$*

par rapport à l'ensemble E *la fonction* $F_E^f(x)$ *définie pour* $x \geqq 0$ *par les relations*

$$\varphi(\tau) = \overline{\operatorname{borne}}_{x \geqq 0}[x\tau - f(x)], \tag{1}$$

$$F_E^f(x) = \overline{\operatorname{borne}}_{\tau \in E}[x\tau - \varphi(\tau)], \tag{2}$$

$\varphi(\tau)$ sera dite fonction associée à $f(x)$. $F_E^f(x)$ sera notée $F(x)$, quand cette simplification ne risquera pas de provoquer d'ambiguïté.

D'après (2), on peut supposer (ce que nous ferons désormais) E fermé, ce qui simplifiera certains énoncés sans diminuer la généralité.

Lemme 1. — $\varphi(\tau)$, *définie pour* $-\infty < \tau < \infty$, *est finie, croissante, convexe, telle que*

$$\lim_{\tau \to +\infty} \tau^{-1}\varphi(\tau) = +\infty.$$

Les premières propriétés résultent des hypothèses sur $f(x)$ et du fait que $\varphi(\tau)$ est, d'après (1), l'enveloppe supérieure de la famille de droites d'équation (variables τ, y)

$$y = x\tau - f(x).$$

D'autre part, d'après les hypothèses sur $f(x)$, à chaque τ correspondent une valeur finie x_τ (au moins) et une suite de valeurs $x_i (i = 1, 2, \ldots)$ tendant vers (ou confondues avec) x, avec

$$\varphi(\tau) = \lim_{i \to \infty}[x_i\tau - f(x_i)].$$

On a $\lim\limits_{\tau \to +\infty} x_\tau = +\infty$. Si l'on avait, en effet, pour une suite $\tau_i \to +\infty$ une suite de $x_{\tau_i} \leqq x_0$, comme $\underline{\operatorname{borne}}_{x \geqq 0} f(x) > -\infty$, on aurait $f(x) = +\infty$ pour $x > x_0$, ce qui contredirait une des hypothèses faites sur $f(x)$. Mais d'après (1), si τ_0 est une valeur fixée quelconque et si $\tau > \tau_0$, on a

$$\frac{\varphi(\tau) - \varphi(\tau_0)}{\tau - \tau_0} \geqq x_{\tau_0}, \qquad \text{d'où} \qquad \varphi'^{+}(\tau_0) \geqq x_{\tau_0}.$$

La dérivée à droite de $\varphi(\tau)$ tend donc vers $+\infty$ quand $\tau \to +\infty$, d'où

$$\lim_{\tau \to +\infty} \frac{\varphi(\tau)}{\tau} = +\infty.$$

Remarque. — De $\lim\limits_{\tau \to +\infty} x_\tau = +\infty$ il résulte aussi que, si l'on modifie $f(x)$ pour $x \leqq x_0$, $\varphi(\tau)$, pour τ assez grand, n'est pas altérée. Quel que soit x_0 fini, pour τ assez grand, on a

$$\varphi(\tau) = \overline{\operatorname{borne}}_{x \geqq x_0}[x\tau - f(x)].$$

Lemme 2. — *On a* $F_E^f(x) \leqq f(x)$ *pour tout* $x \geqq 0$. $F_E^f(x)$ *appartient à* C_E. *Si* $f(x)$ *appartient à* C_E, *on a* $F_E^f(x) \equiv f(x)$.

D'après (1), quels que soient τ et $x \geqq 0$, on a

$$\varphi(\tau) \geqq x\tau - f(x) \quad \text{ou} \quad x\tau - \varphi(\tau) \leqq f(x).$$

Donc

$$F(x) = \overline{\text{borne}}_{\tau \in E} [x\tau - \varphi(\tau)] \leqq f(x).$$

Un raisonnement analogue à celui du lemme 1 montre que $F(x)$ est une fonction convexe de x.

Soit $a = \underline{\text{borne}}_{\tau \in E}\, \varphi'^{-}(\tau)$. D'après le lemme 1, on a $a \geqq 0$, $F(x)$ est égal à $(+\infty)$ pour $0 \leqq x < a$, est finie pour $x > a$, et à chaque $x > a$ correspond au moins une suite de $\tau_i \in E$, tendant vers une limite τ finie, et tels que

$$F(x) = \lim_{i \to \infty} [x\tau_i - \varphi(\tau_i)].$$

Par hypothèse faite sur E, $\tau \in E$. Comme $\varphi(\tau)$ est une fonction continue de τ, on a

$$F(x) = x\tau - \varphi(\tau).$$

Soit $x_0 < x_1$, τ_0 et τ_1 deux éléments de E tels que

$$F(x_0) = x_0\tau_0 - \varphi(\tau_0) \quad \text{et} \quad F(x_1) = x_1\tau_1 - \varphi(\tau_1).$$

Comme, d'après (2), on a aussi

$$F(x_0) \geqq x_0\tau_1 - \varphi(\tau_1) \quad \text{et} \quad F(x_1) \geqq x_1\tau_0 - \varphi(\tau_0),$$

il en résulte

$$\tau_0 \leqq \frac{F(x_1) - F(x_0)}{x_1 - x_0} \leqq \tau_1 \tag{3}$$

Si t'_0 est le plus grand des $\tau_0 \in E$ tels que $F(x_0) = x_0\tau_0 - \varphi(\tau_0)$ et si t_1 est le plus petit des $\tau_1 \in E$ tels que $F(x_1) = x_1\tau_1 - \varphi(\tau_1)$, quand x_1 tend vers x_0 (avec toujours $x_1 > x_0$), (3) montre que t_1 tend vers $\theta_1 \geqq t'_0$. Passant à la limite dans l'égalité $F(x_1) = x_1 t_1 - \varphi(t_1)$, on obtient $F(x_0) = x_0\theta_1 - \varphi(\theta_1)$. Ceci, joint à l'inégalité précédente, prouve que $\theta_1 = t'_0$. Alors, d'après (3), $F'^{+}(x_0) = t'_0 \in E$. Si t_0 est le plus petit élément de E tel que $F(x_0) = x_0\tau_0 - \varphi(\tau_0)$, on voit de même que $F'^{-}(x_0) = t_0 \in E$. Donc $F(x) \in C_E$.

Si $f(x) \in C_E$, $\tau = f'^{+}(x) \in E$, et comme $f(x)$ est convexe, on a

$$\varphi[f'^{+}(x)] = xf'^{+}(x) - f(x).$$

Mais, d'après (2),

$$F(x) \geqq xf'^{+}(x) - \varphi[f'^{+}(x)] = f(x).$$

Comme on a vu que $F(x) \leqq f(x)$, on a $F(x) \equiv f(x)$, ce qui achève la démonstration.

Remarque. — Considérant un τ_x tel que $F(x) = x\tau_x - \varphi(\tau_x)$, on voit aisément que $\tau_x \to \infty$ si $x \to \infty$. Donc, quel que soit t_0, si l'on pose $E_{t_0} = E \cap (t_0, +\infty)$

on a, pour x assez grand :

$$\mathrm{F}(x)=\overline{\text{borne}}_{\tau\in\mathrm{E}_{t_0}}[x\tau-\varphi(\tau)].$$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\tau_x=+\infty$, on en déduit aussi

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{F}(x)}{x}=+\infty.$$

LEMME 3. — *f_1 et f_2 étant deux fonctions appartenant à $\mathcal{F}$, F_1 et F_2 leurs régularisées convexes par rapport à* E, *la relation $f_1(x)\leqq f_2(x)$ pour tout $x\geqq 0$ entraîne $\mathrm{F}_1(x)\leqq\mathrm{F}_2(x)$ pour tout $x\geqq 0$.*

En effet, d'après (1), la première relation entraîne $\varphi_1(\tau)\geqq\varphi_2(\tau)$ pour tout τ. (2) entraîne alors $\mathrm{F}_1(x)\leqq\mathrm{F}_2(x)$ pour tout $x\geqq 0$.

THÉORÈME 1. — *$\mathrm{F}_{\mathrm{E}}^f(x)$ est la plus petite des fonctions de $\mathcal{F}$ admettant $\mathrm{F}_{\mathrm{E}}^f(x)$ pour régularisée convexe par rapport à* E.

C'est une conséquence immédiate du lemme 2.

THÉORÈME 2. — *$\mathrm{F}_{\mathrm{E}}^f(x)$ est la plus grande des fonctions de C_{E} inférieures ou égales à $f(x)$.*

En effet, d'après le lemme 2, $\mathrm{F}(x)$ est une fonction de C_{E} inférieure ou égale à $f(x)$. Soit, d'autre part, $\psi(x)$ une fonction de C_{E} inférieure ou égale à $f(x)$. Comme $\psi(x)$ est, d'après le lemme 2, sa propre régularisée convexe par rapport à E, le lemme 3 montre que $\psi(x)\leqq\mathrm{F}(x)$ pour tout $x\geqq 0$.

THÉORÈME 3. — *Pour $\tau\in\mathrm{E}$, on a*

$$\varphi(\tau)=\overline{\text{borne}}_{x\geqq 0}[x\tau-\mathrm{F}_{\mathrm{E}}^f(x)]. \tag{4}$$

D'après (2), on a

$$\mathrm{F}(x)\geqq x\tau-\varphi(\tau)\qquad\text{ou}\qquad\varphi(\tau)\geqq x\tau-\mathrm{F}(x)$$

quels que soient x et $\tau\in\mathrm{E}$. Donc

$$\varphi(\tau)\geqq\overline{\text{borne}}_{x\geqq 0}[x\tau-\mathrm{F}(x)].$$

D'autre part, si $\tau_0\in\mathrm{E}$, comme $\varphi(\tau)$ est une fonction convexe croissante, pour $x_{\tau_0}=\varphi'^{+}(\tau_0)$, on a

$$\mathrm{F}(x_{\tau_0})=\overline{\text{borne}}_{\tau\in\mathrm{E}}[x_{\tau_0}\tau-\varphi(\tau)]=x_{\tau_0}\tau_0-\varphi(\tau_0),$$

c'est-à-dire

$$\varphi(\tau_0)=x_{\tau_0}\tau_0-\mathrm{F}(x_{\tau_0})=\overline{\text{borne}}_{x\geqq 0}[x\tau_0-\mathrm{F}(x)].$$

Remarque. — Comme $x_{\tau_0}\to+\infty$ si $\tau_0\to+\infty$, et d'après la remarque faite à propos du lemme 2, on voit que, quel que soit $x_0 > 0$, pour τ assez grand et appartenant à E, on a

$$\varphi(\tau) = \overline{\text{borne}}_{x \geqq x_0} [x\tau - F_E^f(x)].$$

Corollaire. — *$\varphi_E(\tau)$ étant la restriction à E de la fonction $\varphi(\tau)$ pour que deux fonctions $f^1(x)$ et $f^2(x)$ aient même régularisée convexe par rapport à E, il faut et il suffit que les fonctions correspondantes $\varphi_E^1(\tau)$ et $\varphi_E^2(\tau)$ soient identiques.*

C'est une conséquence de (2) et (4).

Théorème 4. — *Les trois relations*

$$\begin{aligned} f_2(x) &\geqq F_1(x) \quad \textit{pour tout } x \geqq 0, \\ F_2(x) &\geqq F_1(x) \quad \textit{pour tout } x \geqq 0, \\ \varphi_2(\tau) &\leqq \varphi_1(\tau) \quad \textit{pour tout } \tau \in E \end{aligned}$$

sont deux à deux équivalentes.

La seconde relation entraînant la première, il suffit de montrer que la première entraîne la troisième et que la troisième entraîne la seconde. Or $f_2(x) \geqq F_1(x)$ pour tout $x \geqq 0$ entraîne, d'après la définition de φ et le théorème 3, τ étant un élément quelconque de E,

$$\varphi_2(\tau) = \overline{\text{borne}}_{x \geqq 0} [x\tau - f_2(x)] \leqq \overline{\text{borne}}_{x \geqq 0} [\alpha\tau - F_1(x)] = \varphi_1(\tau).$$

Si $\varphi_2(\tau) \leqq \varphi_1(\tau)$ pour tout $\tau \in E$, on a

$$F_2(x) = \overline{\text{borne}}_{\tau \in E} [x\tau - \varphi_2(\tau)] \geqq \overline{\text{borne}}_{\tau \in E} [x\tau - \varphi_1(\tau)] = F_1(x).$$

Corollaire. — *α étant une constante quelconque, les relations*

$$f_2(x) \geqq F_1(x) + \alpha x \quad \textit{pour tout } x \geqq 0$$

et

$$\varphi_2(\tau + \alpha) \leqq \varphi_1(\tau) \quad \textit{pour tout } \tau \in E$$

sont équivalentes.

Il suffit pour le voir de poser $g_2(x) = f_2(x) - \alpha x$, d'appliquer le théorème 4 à $g_2(x)$ et $F_1(x)$ et de remarquer que si $\varphi_2^*(\tau)$ est la fonction associée à $g_2(x)$ on a

$$\varphi_2^*(\tau) = \overline{\text{borne}}_{x \geqq 0} [x\tau - g_2(x)] = \overline{\text{borne}}_{x \geqq 0} [x(\tau + \alpha) - f_2(x)] = \varphi_2(\tau + \alpha).$$

Remarque. — Le théorème 4 et son corollaire restent vrais si l'on remplace les expressions « pour tout $x \geqq 0$ » et « pour tout $\tau \in E$ » respectivement par « pour x assez grand » et « pour tout τ assez grand appartenant à E ». Cela résulte des remarques faites à propos des lemmes 1 et 2 et du théorème 3.

THÉORÈME 5. — *Si* $E_1 \subset E_2$, *on a* $F^f_{E_1}(x) \leqq F^f_{E_2}(x)$ *pour tout* $x \geqq 0$

$$F^{F^f_{E_1}}_{E_2}(x) \equiv F^f_{E_1}(x) \qquad et \qquad F^{F^f_{E_2}}_{E_1}(x) \equiv F^f_{E_1}(x).$$

Comme $E_1 \subset E_2$, on a

$$\overline{\text{borne}}_{\tau \in E_1}[x\tau - \varphi(\tau)] \leqq \overline{\text{borne}}_{\tau \in E_2}[x\tau - \varphi(\tau)] \qquad [\varphi(\tau), \text{ fonction associée à } f],$$

c'est-à-dire

$$F^f_{E_1}(x) \leqq F^f_{E_2}(x).$$

$F^f_{E_1}(x)$ appartient à C_{E_1} et *a fortiori* à C_{E_2}; elle est donc, d'après le lemme 2, sa propre régularisée par rapport à E_2.

Si $\varphi^\star(\tau) = \underset{x \geqq 0}{\text{borne}}[x\tau - F^f_{E_2}(x)]$ est la fonction associée à $F^f_{E_2}(x)$, on a d'après le théorème 3, $\varphi^\star(\tau) = \varphi(\tau)$ pour tout $\tau \in E_2$ et *a fortiori* pour $\tau \in E_1$. Donc

$$F^f_{E_1} = \overline{\text{borne}}_{\tau \in E_1}[x\tau - \varphi(\tau)] = \overline{\text{borne}}_{\tau \in E_1}[x\tau - \varphi^\star(\tau)] = F^{F^f_{E_2}}_{E_1}(x).$$

Cas particulier où E *est l'ensemble de tous les nombres réels.* — La classe C_E est alors l'ensemble des fonctions convexes, $F(x)$ est définie par (1) et $F(x) = \overline{\text{borne}}_{-\infty < \tau < +\infty}[x\tau - \varphi(\tau)]$. C'est le procédé de régularisation convexe d'une fonction, qui est l'un des procédés de régularisation étudiés par M. Mandelbrojt dans [15]. Les théorèmes précédents, appliqués à ce cas particulier, donnent les principales propriétés de la fonction régularisée convexe de $f(x)$; c'est notamment la plus grande des fonctions convexes inférieures ou égales à $f(x)$.

3. RÉGULARISATION CONVEXE PAR RAPPORT À UN ENSEMBLE E D'UNE SUITE DE NOMBRES RÉELS. — Soit $\{\alpha_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ une suite S de nombres réels, possédant les propriétés suivantes. On a $\alpha_n > -\infty$; certains α_n peuvent être égaux à $(+\infty)$, mais une infinité d'entre eux (dont α_1) sont finis;

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\alpha_n}{n} = +\infty.$$

DÉFINITION. — *Considérons la fonction* $f_S(x)$ $(x \geqq 0)$ *définie par*

$$f_S(n) = \alpha_n \ (n = 1, 2, \ldots),$$

$f_S(x) = +\infty$ *si* x *n'est pas entier positif. Soit* $F^{f_S}_E(x)$ *la fonction régularisée convexe par rapport à* E *de* $f_S(x)$. *On appelle suite régularisée convexe de* $\{\alpha_n\}$ *par rapport à* E *la suite* $\{\alpha^E_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *définie par* $\alpha^E_n = F^{f_S}_E(n)$.

Les hypothèses faites sur la suite S entraînent que $f_S(x) \in \mathcal{F}$, donc que $F^{f_S}_E(x)$ possède toutes les propriétés précédemment démontrées.

Comme $f_S(1)$ est supposée finie, $F^{f_S}_E(x)$, que nous noterons $F(x)$ pour simplifier, est finie pour $x \geqq 1$. Tous les termes de $\{\alpha^E_n\}$ sont donc finis. Comme

$f_S(x)$ n'est pas une fonction quelconque de $\mathcal{F}$, sa fonction associée $\varphi_S(x)$ et sa régularisée convexe par rapport à E, F(x), possèdent des propriétés particulières que nous allons étudier.

A chaque τ correspond au moins un x entier fini tel que $\varphi(\tau) = x\tau - f_S(x)$, la valeur $f_S(x)$ étant naturellement finie. *La suite* $\{n_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ *de ces valeurs de* x, *rangées par ordre croissant, sera dite suite principale de* $\{\alpha_n\}$. On a $n_1 = 1$. Cette suite est infinie, car si les n_i étaient bornés supérieurement, $f(x)$ serait infinie pour x assez grand. Soit T_i l'ensemble des τ tels que $\varphi(\tau) = n_i\tau - f(n_i)$. Si τ_i est l'une des valeurs de T_i, T_{i+1}, l'une des valeurs de T_{i+1}, on voit que

$$\tau_i \leqq \frac{f(n_{i+1}) - f(n_i)}{n_{i+1} - n_i} \leqq \tau_{i+1}.$$

Il en résulte que, pour $i > 1$, T_i est l'intervalle fermé $\left[\frac{f(n_i) - f(n_{i-1})}{n_i - n_{i-1}}, \frac{f(n_{i+1} - f(n_i)}{n_{i+1} - n_i}\right]$, tandis que pour $i = 1$,

$$T_1 = \left(-\infty, \frac{f(n_2) - f(1)}{n_2 - 1}\right].$$

La fonction égale à $f_S(x)$ pour tous les $x = n_i (i = 1, 2, \ldots)$ et linéaire entre deux indices principaux consécutifs, qui est une fonction convexe, est d'ailleurs la régularisée convexe de $f_S(x)$ par rapport à l'ensemble des nombres réels.

Définition. — *La suite* $\{N_i\}$, *rangée en ordre croissant, des indices principaux* n_i *tels que* T_i *contienne au moins un* $\tau \in E$, *sera dite suite principale d'indices, relative à* E, *de* $\{\alpha_n\}$.

Cette suite extraite de $\{n_i\}$ est infinie puisqu'on suppose que E contient des valeurs de τ aussi grandes que l'on veut. L'ensemble des $\tau \in E$ tels que $\varphi(\tau) = N_i\tau - f(N_i)$ est l'ensemble $E_i = E \cap T_i$. D'après ce qui précède, pour $i > 1$, son plus grand élément est t'_i, plus grand élément de E inférieur ou égal à $\frac{f(N_{i+1}) - f(N_i)}{N_{i+1} - N_i}$, et son plus petit élément est t_i, plus petit élément de E supérieur ou égal à $\frac{f(N_i) - f(N_{i-1})}{N_i - N_{i-1}}$.

$\{\alpha_{N_i}\}$ suffit à caractériser F(x). En effet, pour $N_i \leqq x \leqq N_{i+1}$,

$$\begin{aligned} x\tau - \varphi(\tau) &\leqq (x - N_i)\tau + f(N_i) &\quad& (\text{si } \tau \in E \text{ et } \tau \leqq t'_i), \\ x\tau - \varphi(\tau) &\leqq (x - N_{i+1})\tau + f(N_{i+1}) && (\text{si } \tau \in E \text{ et } \tau \geqq t_{i+1}). \end{aligned}$$

Il en résulte que l'on a, pour $N_i \leqq x \leqq N_{i+1}$,

$$F(x) = \max[(x - N_i)\,t'_i + f(N_i),\ (x - N_{i+1})\,t_{i+1} + f(N_{i+1})].$$

En particulier, pour $x = N_i (i = 1, 2, \ldots)$ on a $F(x) = \alpha_{N_i}$.

Interprétation géométrique des résultats précédents. — Dans un plan rapporté aux axes rectangulaires Ox et Oy, considérons les points P_n de coordonnées $(x = n, y = \alpha_n)$. A chaque valeur de τ appartenant à E on fait correspondre la droite D_τ qui est la plus haute droite de pente τ ne laissant au-dessous d'elle aucun point P_n.

La suite des entiers n tels que P_n soit situé sur une droite D_τ au moins est la suite principale d'indices, relative à E, de $\{\alpha_n\}$, définie précédemment.

Théorème 6. — *Soit $\{N_i\}$ la suite principale d'indices, relative à E de $\{\alpha_n\}$, t'_i la plus grande valeur de E telle que la droite $D_{t'_i}$ passe par P_{N_i}, t_i la plus petite valeur de E telle que D_{t_i} passe par P_{N_i}. La suite $\{\alpha_n^E\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ est la suite des ordonnées des points P_n^E d'abscisse n situés sur la ligne polygonale convexe dont les côtés ont pour supports $D_{t_1}, D_{t'_1}, D_{t_2}, D_{t'_2}, \ldots$.*

Cette ligne polygonale n'est autre que la courbe $y = F(x)$ $(x \geqq 0)$. C'est la plus haute courbe de C_E qui ne laisse au-dessous d'elle aucun point P_n. Pour $x = N_i$, P_{N_i} et $P_{N_i}^E$ sont confondus. Si $E_1 \subset E_2$, et si $\{N_i^1\}$, $\{N_i^2\}$, sont les suites principales d'indices d'une même suite $\{\alpha_n\}$ relativement à E_1 et E_2, on a $\{N_i^1\} \subset \{N_i^2\}$. Pour $n = N_i^1$, on a $\alpha_n^{E_1} = \alpha_n^{E_2} = \alpha_n$.

Théorème 7. — *Les relations suivantes sont équivalentes :*

$$\underline{\lim}_{\tau \left\{ \substack{\in E \\ \to +\infty} \right.} \frac{\varphi(\tau)}{\tau^2} > 0, \qquad \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{\alpha_n^E}{n^2} < +\infty, \qquad \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{\alpha_{n+1}^E - \alpha_n^E}{n} < +\infty.$$

Si $\underline{\lim}_{\tau \left\{ \substack{\in E \\ \to \infty} \right.} \frac{\varphi(\tau)}{\tau^2} > 0$, pour $\tau \geqq \tau_0$ et appartenant à E on a $\varphi(\tau) > A\tau^2$ avec $A > 0$.

Donc, d'après la remarque du lemme 2, pour n assez grand, on a

$$\alpha_n^E \leqq \overline{\text{borne}}_{\tau \geqq 0} [n\tau - A\tau^2] = \frac{n^2}{4A},$$

c'est-à-dire

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{\alpha_n^E}{n^2} \leqq \frac{1}{4A} < +\infty.$$

Inversement, si $\overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{\alpha_n^E}{n^2} < +\infty$, pour $n \geqq n_0$ on a

$$\alpha_n^E < An^2, \qquad \text{avec} \quad A > 0.$$

D'après le théorème 3 et la remarque qui le suit, on a alors, pour τ assez grand et appartenant à E,

$$\varphi(\tau) \geqq \overline{\text{borne}}_{n \geqq n_0} [n\tau - An^2].$$

Comme la fonction de x, $x\tau - Ax^2$, atteint son maximum $\frac{\tau^2}{4A}$ pour la valeur

$x=\frac{\tau}{2A}$ qui tend vers $(+\infty)$ avec τ, $\overline{\text{borne}}_{n\geqq n_0}\,[n\tau-An^2]$ est pour τ assez grand un infiniment grand équivalent à $\frac{\tau^2}{4A}$, donc $\varliminf\limits_{\tau\left\{\substack{\in E\\ \to\infty}\right.}\frac{\varphi(\tau)}{\tau^2}>0$. Les deux premières relations sont donc équivalentes,

Montrons l'équivalence de la première et de la troisième.

Soit $\psi(\tau)=\overline{\text{borne}}_{x\geqq 0}\,[x\tau-F(x)]$. D'après le théorème 3, $\psi(\tau)=\varphi(\tau)$ pour $\tau\in E$. Si $\tau_1\in E$ et $\tau_2\in E$ et s'il n'y a aucune valeur de E, dans l'intervalle (τ_1,τ_2), $\psi(\tau)$ est linéaire pour $\tau_1\leqq\tau\leqq\tau_2$. Il en résulte

$$(a)\qquad \varliminf_{\tau\left\{\substack{\in E\\ \to\infty}\right.}\frac{\varphi(\tau)}{\tau^2}=\varliminf_{\tau\to\infty}\frac{\psi(\tau)}{\tau^2}.$$

Soit $\mu(\tau)$ la dérivée à droite de $\psi(\tau)$. D'après le théorème 6, entre deux indices principaux relatifs à E consécutifs, N_i et N_{i+1}, la courbe $y=F(x)$ se compose de deux segments rectilignes, issus de P_{N_i} et $P_{N_{i+1}}$, de pentes t'_i et t_{i+1}, qui ont pour extrémité commune un point d'abscisse X_i.

Entre $\tau=t'_i$ et $\tau=t_{i+1}$, la fonction $\psi(\tau)$ est linéaire et admet pour dérivée X_i. Le minimum de $\frac{\mu(\tau)}{\tau}$ dans l'intervalle $[t'_i,\ t_{i+1}]$ est donc $\frac{X_i}{t_{i+1}}$. D'autre part, comme $(\alpha^E_{n+1}-\alpha^E_n)$ reste égal à t_{i+1} dans l'intervalle $[X_i,X_{i+1})$, le maximum de $\frac{\alpha^E_{n+1}-\alpha^E_n}{n}$ dans l'intervalle $[X_i]\leqq n<X_{i+1}$, atteint pour $n=[X_i]$ ou $n=[X_i]+1$, a une valeur dont le rapport avec $\frac{t_{i+1}}{X_i}$ tend vers 1 quand $i\to\infty$. Donc

$$(b)\qquad \varlimsup_{n\to\infty}\frac{\alpha^E_{n+1}-\alpha^E_n}{n}=\varlimsup_{\tau\to\infty}\frac{\tau}{\mu(\tau)}.$$

Mais comme $\psi(\tau)=\psi(0)+\int_0^t\mu(u)\,du$ et que $\mu(u)$ est non décroissante,

$$\psi(0)+\tau\mu(\tau)\geqq\psi(\tau)\geqq\psi(0)+\frac{\tau}{2}\mu\left(\frac{\tau}{2}\right),$$

d'où

$$(c)\qquad \varliminf_{\tau\to\infty}\frac{\mu(\tau)}{\tau}\geqq\varliminf_{\tau\to\infty}\frac{\psi(\tau)}{\tau^2}\geqq\frac{1}{4}\varliminf_{\tau\to\infty}\frac{\mu(\tau)}{\tau}.$$

Les relations (a), (c) montrent l'équivalence de

$$\varliminf_{\tau\left\{\substack{\in E\\ \to\infty}\right.}\frac{\varphi(\tau)}{\tau^2}>0\qquad\text{et}\qquad\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\alpha^E_{n+1}-\alpha^E_n}{n}<\infty,$$

ce qui achève la démonstration du théorème.

4. Régularisation convexe d'une suite de nombres, par l'intermédiaire des logarithmes, par rapport à un ensemble de nombres positifs. — Soit $\{M_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ une suite de nombres réels positifs tels que, si l'on pose $\alpha_n = \log M_n$, $\{\alpha_n\}$ vérifie les hypothèses du n° 4.

Soit $\mathcal{E}$ un ensemble de nombres positifs r contenant des valeurs r aussi grandes que l'on veut, et contenant toutes ses valeurs limites finies. On appellera E l'ensemble des nombres $\tau = \log r$.

Définition. — *On appelle suite régularisée convexe de* $\{M_n\}$, *par l'intermédiaire des logarithmes, relativement à l'ensemble* $\mathcal{E}$, la suite $\{M_n^E\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, *où* $M_n^E = \exp \alpha_n^E$, $\{\alpha_n^E\}$ *étant la suite régularisée convexe par rapport à l'ensemble* E *de* $\{\alpha_n\}$, *où* $\alpha_n = \log M_n$.

Tous les théorèmes précédents sont applicables et peuvent être transcrits.

En particulier, si $T(r) = \overline{\text{borne}}_{n \geqq 1} \frac{r^n}{M_n}$ $(r \geqq 0)$ on a

$$M_n^E = \overline{\text{borne}}_{r \in \mathcal{E}} \frac{r^n}{T(r)}.$$

La fonction $\varphi(\tau)$ associée à $\{\alpha_n\}$ est $\varphi(\tau) = \log T(e^\tau)$.

Théorème 3'. — *Pour* $r \in \mathcal{E}$ *on a*

$$T(r) = \overline{\text{borne}}_{n \geqq 1} \frac{r^n}{M_n^E}.$$

Théorème 4'. — *Si l'on considère deux suites* $\{M_n\}$ *et* $\{M'_n\}$ *et les fonctions correspondantes*

$$T(r) = \overline{\text{borne}}_{r \geqq 1} \frac{r^n}{M_n}, \qquad T'(r) = \overline{\text{borne}}_{n \geqq 1} \frac{r^n}{M'_n},$$

les trois relations

$$\begin{array}{ll} M'_n \geqq M_n^E & \textit{pour tout } n \geqq 1, \\ M'^E_n \geqq M_n^E & \textit{pour tout } n \geqq 1, \\ T'(r) \leqq T(r) & \textit{pour tout } r \in \mathcal{E} \end{array}$$

sont deux à deux équivalentes.

Corollaire. — *Si q est une constante positive quelconque, les relations*

$$\begin{array}{ll} q^n M'_n \geqq M_n^E & \textit{pour tout } n \geqq 1, \\ q^n M'^E_n \geqq M_n^E & \textit{pour tout } n \geqq 1, \\ T'\left(\frac{r}{q}\right) \leqq T(r) & \textit{pour tout } r \in \mathcal{E} \end{array}$$

sont deux à deux équivalentes.

Le théorème 4' et son corollaire restent vrais si l'on remplace « pour tout $n \geqq 1$ » et « pour tout $r \in \mathcal{E}$ » par « pour n assez grand » et « pour r assez grand et appartenant à $\mathcal{E}$ ».

Application. — *Soit* $\{M_n\}$ *une suite de nombres positifs tels que* $\lim\limits_{n\to\infty} M_n^{\frac{1}{n}} = +\infty$ *et soit* $T(r)$ *la fonction associée. Les deux relations suivantes sont équivalentes :*

$$\overline{\lim_{r\left\{\substack{\in E\\ \to\infty}\right.}} \frac{\log T(r)}{r} > 0, \qquad (M_n^E)^{\frac{1}{n}} = O(n) \qquad (n \to \infty).$$

En effet, si dans le corollaire précédent on prend

$$M'_n = n!, \qquad T'(r) = \max_{n \geq 1} \frac{r^n}{n!} = \frac{r^{[r]}}{[r]!},$$

où $[r]$ est la partie entière de r.

D'après la formule de Stirling, on a donc

$$e^{[1-\varepsilon(r)]r} \leq T'(r) \leq e^r, \qquad \text{avec} \quad \lim_{r\to\infty} \varepsilon(r) = 0.$$

Si la première condition est vérifiée, il existe une constante μ telle que $T(r) > e^{\mu r} > T'(\mu r)$ pour r assez grand et appartenant à E, d'où d'après le corollaire, $M_n^E \leq n!\, \mu^{-n}$ pour n assez grand, c'est-à-dire

$$(M_n^E)^{\frac{1}{n}} = O(n) \qquad (n \to \infty).$$

Inversement, si la seconde condition est vérifiée, il existe une constante q telle que pour n assez grand $M_n^E \leq q^n n!$. Donc, d'après le corollaire, pour r assez grand et appartenant à E, on a

$$T(r) \geq T'\left(\frac{r}{q}\right) \geq e^{\frac{r}{q}[1-\varepsilon(r)]}, \qquad \text{avec} \quad \lim_{r\to\infty} \varepsilon(r) = 0.$$

Il existe, par conséquent, une constante positive μ telle que $T(r) \geq e^{\mu r}$ pour r assez grand et appartenant à E.

II. — Régularisation des classes $C^E\{M_n\}$.

Soit $\mathcal{E}$ un ensemble donné quelconque de nombres réels, E l'ensemble des valeurs absolues des éléments de E, et $\overline{E}$ la fermeture de E.

Soit $\{M_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ une suite de nombres positifs M_n dont une infinité, y compris M_1, sont supposés finis. *Une telle suite sera dite suite* (S).

1. Définition et lemmes préliminaires. — La propriété énoncée au lemme 3 est due à M. J. Favard [6].

Définition. — *On appelle classe* $C^E\{M_n\}$ *l'ensemble des fonctions* $f(x)$, *à valeurs réelles ou complexes, de la variable réelle* x, *qui sont presque périodiques au sens de Bohr, indéfiniment dérivables, dont le spectre est contenu dans* $\mathcal{E}$, *et dont les* *dérivées successives vérifient les inégalités*

$$(\mathrm{A}) \qquad |f^{(n)}(x)| \leqq \mathrm{C}^n \mathrm{M}_n \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

où C *est une constante positive ne dépendant que de* $f(x)$.

Une classe $\mathrm{C^E}\{\mathrm{M}_n\}$ sera dite contenue dans $\mathrm{C^E}\{\mathrm{M}'_n\}$ si toute fonction de $\mathrm{C^E}\{\mathrm{M}_n\}$ appartient à $\mathrm{C^E}\{\mathrm{M}'_n\}$. Deux classes seront dites équivalentes si chacune est contenue dans l'autre.

Lemme 1. — *Soit* $f(x)$ *une fonction presque périodique indéfiniment dérivable dont toutes les dérivées sont bornées*

$$f(x) \sim \Sigma a_n e^{i\lambda_n x}, \qquad m_n = \overline{\mathrm{borne}}_{-\infty < x < \infty} |f^{(n)}(x)| < \infty \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Les coefficients de Fourier de $f(x)$ *vérifient*

$$(1) \qquad |a_n| \leqq \mathrm{T}^{-1}(|\lambda_n|), \qquad \mathrm{T}(r) = \overline{\mathrm{borne}}_{n \geqq 1}\, r^n m_n^{-1} \qquad (r \geqq 0,\ n = 1, 2, \ldots).$$

Toutes les dérivées de $f(x)$ *sont presque périodiques et leur série de Fourier se déduit de celle de* $f(x)$ *par dérivations formelles.*

En effet, on sait que

$$a_n = \lim_{\mathrm{T} \to +\infty} \mathrm{T}^{-1} \int_0^{\mathrm{T}} f(x)\, e^{-i\lambda_n x}\, dx,$$

$f(x)$ étant bornée sur la droite entière, des intégrations par parties, suivies de passages à la limite pour $\mathrm{T} \to \infty$, conduisent à

$$a_n (i\lambda_n)^p = \lim_{\mathrm{T} \to \infty} \mathrm{T}^{-1} \int_0^{\mathrm{T}} f^{(p)}(x)\, e^{-i\lambda_n x}\, dx.$$

Les dérivées de $f(x)$, étant uniformément continues, sont presque périodiques, la formule précédente montre que leur série de Fourier se déduit de celle de $f(x)$ par dérivation formelle, et que $|a_n| \leqq m_p |\lambda_n|^{-p} (p \geqq 1)$, c'est-à-dire que (1) a lieu.

Nous utiliserons plus loin la propriété suivante.

Lemme 2. — *Si la fonction presque périodique au sens de Bohr*

$$f(x) \sim \Sigma\, a_n e^{-i\lambda_n x}$$

est telle que $|\lambda_n| \leqq \mathrm{R} < \infty$, $f(x)$ *a toutes ses dérivées presque périodiques; leur développement en série de Fourier se déduit de celui de* $f(x)$ *par dérivations formelles, elles vérifient*

$$|f^{(p)}(x)| \leqq \mathrm{MR}^p, \qquad \mathrm{M} = \overline{\mathrm{borne}}_{-\infty < x < \infty} |f(x)| \qquad (p \geqq 1).$$

Il suffit de démontrer ce lemme pour $p = 1$. Or il existe une suite de polynomes presque périodiques $P_n(x)$, d'exposants pris parmi les λ_n, convergeant vers $f(x)$ uniformément sur $(-\infty, \infty)$, c'est-à-dire tels que

$$|P_{n_1}(x) - P_{n_2}(x)| < \varepsilon \qquad \text{pour} \quad n_1 > n_2 > N(\varepsilon).$$

On sait qu'alors, pour $n_1 > n_2 > N(\varepsilon)$,

$$|P'_{n_1}(x) - P'_{n_2}(x)| < R\varepsilon, \qquad |P'_n(x)| \leqq R \, \overline{\text{borne}} \, |P_n(x)|.$$

Ces inégalités montrent d'une part que les polynomes $P'_n(x)$ convergent uniformément vers une fonction qui est donc la dérivée $f'(x)$ et est presque périodique. La dernière inégalité, par un passage à la limite pour $n \to \infty$, prouve que $|f'(x)| \leqq MR$.

Lemme 3. — *Si $f(x)$ est une fonction presque périodique continue à valeur moyenne nulle et telle que ses exposants de Fourier λ_n vérifient $|\lambda_n| \geqq R > 0$, $f(x)$ admet une intégrale d'ordre entier quelconque p, soit $f^{(-p)}(x)$, presque périodique, dont le développement de Fourier s'obtient à partir de celui de $f(x)$ par p intégrations formelles, et telle que*

$$|f^{(-p)}(x)| \leqq 2MR^{-p}, \qquad M = \overline{\underset{-\infty<x<\infty}{\text{borne}}} \, |f(x)|.$$

Lemme 4 [3]. — *Soit $x_\alpha(\lambda)$ la fonction continue de la variable réelle λ, égale à 1 pour $|\lambda| \leqq \alpha$, à 0 pour $|\lambda| \geqq 2\alpha$, linéaire entre α et 2α. $f(x)$ étant presque périodique, soit*

$$k_\alpha(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} x_\alpha(\lambda)\, d\lambda, \qquad f_\alpha(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)\, k_\alpha(t)\, dt,$$

$$f^\star_\alpha(x) = f(x) - f_\alpha(x), \qquad M = \overline{\underset{-\infty<x<\infty}{\text{borne}}} \, |f(x)|.$$

$f_\alpha(x)$ et $f^\star_\alpha(x)$ sont presque périodiques et vérifient

$$|f_\alpha(x)| \leqq 4M, \qquad |f^\star_\alpha(x)| \leqq 4M.$$

Leurs exposants de Fourier appartiennent à ceux de $f(x)$; si, pour $f(x)$, a_n est le coefficient de l'exposant λ_n, λ_n a pour coefficients, dans les développements de Fourier respectifs de $f_\alpha(x)$ et $f^\star_\alpha(x)$,

$$x_\alpha(\lambda_n)\, a_n \quad \textit{et} \quad [1 - x_\alpha(\lambda_n)]\, a_n.$$

On voit aisément que

$$k_\alpha(t) = 2(\pi\alpha t^2)^{-1} \sin\frac{\alpha t}{2} \sin\frac{3\alpha}{2} t,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |k_\alpha(t)|\, dt \leqq 4\sqrt{3}\,\pi^{-1}. \tag{a}$$

En raison de (a) et du fait qu'il existe une suite de polynomes exponentiels

---

[3] Ce procédé de décomposition d'une fonction $f(x)$ a été employé par T. Bang [2].

$P_n(x)$ convergeant uniformément vers $f(x)$ sur la droite entière, $f_\alpha(x)$ est aussi limite uniforme sur la droite entière des polynomes $(P_n)_\alpha$, et est par conséquent presque périodique. Les inégalités concernant $|f_\alpha|$ et $|f^\star_\alpha|$ résultent de (a). (a) permet enfin d'obtenir, en intervertissant l'ordre des sommations,

$$T^{-1}\int_0^T f_\alpha(x)\,e^{-ix\lambda}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} k_\alpha(t)\,e^{-i\lambda t}\int_{-t}^{T-t} T^{-1}\,e^{-i\lambda x} f(x)\,dx\,dt.$$

Comme la dernière intégrale écrite tend, uniformément par rapport à t, quand $T\to\infty$, vers a_λ ou o selon que λ appartient ou non au spectre de $f(x)$, le second membre tend, pour $T\to\infty$, vers $a_\lambda x_\alpha(\lambda)$ ou o, ce qui prouve la dernière assertion du lemme.

Remarque. — Le spectre de $f_\alpha(x)$ [resp. $f^\star_\alpha(x)$] appartient à $[-2\alpha, 2\alpha]$ (resp. est extérieur à $[-\alpha, \alpha]$). On peut donc appliquer les lemmes 2 et 3 respectivement à f_α et $f^\star_\alpha$. Enfin, d'après la définition de $f_\alpha(x)$, si $f(x)$ admet une dérivée presque périodique, il en est de même de $f_\alpha(x)$ et $[f'(x)]_\alpha = [f_\alpha(x)]'$.

2. Régularisation des classes $C^E\{M_n\}$. — Nous allons montrer que, si $\{M_n\}$ est une suite (S_∞), $C^E\{M_n\}$ et $C^E\{M^E_n\}$ sont équivalentes, et que $\{M^E_n\}$ caractérise « le mieux » la classe en question, en ce sens que, si $\{A_n\}$ est telle que $\varliminf\limits_{n\to\infty} A_p^{\frac{1}{n}}(M^E_n)^{-\frac{1}{n}} = 0$, il existe une fonction de $C^E\{M_n\}$ n'appartenant pas à $C^E\{A_n\}$.

Rappelons que toutes les suites $\{M_n\}$ définissant des classes $C^E\{M_n\}$ que nous considérerons seront supposées être des suites (S).

Théorème 1. — *Soit* $\{M_n\}$ $(n=1, 2, \ldots)$ *une suite* (S) *donnée. Si* $\varliminf\limits_{n\to\infty} M_p^{\frac{1}{n}} = 0$, $C^E\{M_n\}$, *identique à* $C^E\{0\}$, *ne comprend que les fonctions constantes.*

Si $0 < \varliminf\limits_{n\to\infty} M_p^{\frac{1}{n}} < \infty$, $C^E\{M_n\}$, *identique à* $C^E\{1\}$, *est constituée par l'ensemble des fonctions presque périodiques* $f(x)$ *dont le spectre est contenu dans* $\mathcal{E}\cap[-R_f, R_f]$, R_f *étant un nombre fini quelconque, dépendant de* f. *Si* $\lim\limits_{n\to\infty} m_n^{\frac{1}{n}} = +\infty$, $C^E\{M_n\}$ *et* $C^E\{M^E_n\}$ *sont équivalentes.*

Soit $f(x) \sim \Sigma a_n e^{i\lambda_n x}$ une fonction appartenant à $C^E\{M_n\}$. D'après le lemme 1, $|a_n| \leqq M_p|\lambda_n|^{-p}$, pour tout $p \geqq 1$. Si $\varliminf\limits_{p\to\infty} M_p^{\frac{1}{p}} = 0$, on en déduit que $a_n = 0$ si $\lambda_n \neq 0$, donc que $f(x)$ est une constante. La classe $C^E\{M_n\}$, constituée par les fonctions constantes, est alors identique à $C^E\{0\}$. Si $0 < \varliminf\limits_{n\to\infty} M_n^{\frac{1}{n}} < \infty$, on a $A^n < M_n$ $(n=1, 2, \ldots)$, A étant une constante positive indépendante de n, et le lemme 1 montre que $a_n = 0$ pour $|\lambda_n| > R_f$, R_f ne dépendant que de f.

Chaque fonction de $C^E\{M_n\}$ a donc son spectre contenu dans un segment fini et les classes $C^E\{M_n\}$ et $C^E\{1\}$ sont équivalentes. Inversement, si $f(x)$ est une fonction presque périodique dont le spectre est contenu dans $\mathcal{E} \cap [-R, R]$, R nombre fini, le lemme 2 montre qu'elle appartient à $C^E\{1\}$.

Soit $f(x)$ une fonction presque périodique indéfiniment dérivable telle que $|f(x)| \leqq M_0\, |f^{(n)}(x)| \leqq M_n$. Soit α un nombre positif qu'on fixera plus loin, $f_\alpha(x)$ et $f_\alpha^\star(x)$ les fonctions que l'on associe à $f(x)$ selon les définitions du lemme 4. D'après les lemmes 2, 3, 4, on a

$$(a) \qquad |f^{(p)}(x)| \leqq |f_\alpha^{(p)}(x)| + |f_\alpha^{\star(p)}(x)| \leqq 4M_0(2\alpha)^p + 8M_n\alpha^{p-n} \qquad (1 \leqq p \leqq n).$$

Si l'on choisit $\alpha^n = M_n M_0^{-1}$, on en déduit

$$(b) \qquad |f^{(p)}(x)|^n \leqq (8.2^p)^n M_0^{n-p} M_n^p.$$

Soit λ (resp. λ') la borne supérieure (resp. inférieure) des éléments de E inférieurs (resp. supérieurs) ou égaux à $(M_n M_0^{-1})^{\frac{1}{n}}$.

Si $\lambda' > 2\lambda$, on peut choisir α tel que $\lambda < \alpha < 2\alpha < \lambda'$, appliquer le lemme 2 à $f_\alpha(x)$ avec $R = \lambda$, le lemme 3 à $f_\alpha^\star(x)$ avec $R = \lambda'$.

Si $\lambda' \leqq 2\lambda$, on peut utiliser simplement (b). Dans les deux cas,

$$(c) \qquad |f^{(p)}(x)| \leqq 8.4^p \max(M_0\lambda^p, M_n\lambda'^{p-n}) \qquad (1 \leqq p \leqq n).$$

Si $f(x) \in C^E\{M_n\}$, soient N_i et N_{i+1} deux indices consécutifs de la suite principale d'indices, relative à E, de $\{M_n\}$ [supposée suite (S_∞)]. $f^{(N_i)}(x)$ vérifiant les inégalités (A) pour $n = N_i$ et $n = N_{i+1}$, on peut lui appliquer (c), d'où, tenant compte du théorème 6 (§ I)

$$|f^{(n)}(x)| \leqq 8(4C)^n M_n^E \qquad (N_i < n < N_{i+1}).$$

Ces inégalités, vraies pour tout i, montrent que

$$C^E\{M_n\} \subset C^E\{M_n^E\}.$$

L'inclusion opposée étant évidente, ces classes sont équivalentes.

Cas particulier. — Dans le cas où E est l'ensemble des entiers positifs, $C^E\{M_n\}$ est l'ensemble $C\{M_n\}$ des fonctions périodiques de période 2π, indéfiniment dérivables, $f(x)$, telles que

$$|f^{(n)}(x)| \leqq C^n M_n \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

$\{M_n^c\}$ étant la suite régularisée convexe de $\{M_n\}$, le théorème ci-dessus et l'inégalité $M_n^E \leqq M_n^c$ montre l'équivalence de $C\{M_n\}$ et $C\{M_n^c\}$, qui résulte d'ailleurs directement de (b), sans l'intermédiaire de $\{M_n^E\}$. On retrouve ainsi par une autre voie un résultat de M. Mandelbrojt (*voir* [17]).

THÉORÈME 2. — $\{M_n\}$ *étant une suite* (S_∞) *il existe une fonction* $F(x)$ *appar-*

tenant à $C^E\{M_n\}$ *et telle que*

$$4^{-n} M_n^E \leqq m_n = \overline{\underset{-\infty<x<\infty}{\text{borne}}} \, |F^{(n)}(x)| \leqq 4^n M_n^E \qquad (n=1, 2, \ldots).$$

D'après le théorème 6 (§ 1), les points $P_n^E(n, \log M_n^E)$ sont sur une ligne polygonale convexe dont les côtés ont des pentes t_i, t'_i $(i=1, 2, \ldots)$ telles que e^{t_i} et $e^{t'_i}$ $(i=1, 2, \ldots)$ appartiennent à $\overline{E}$.

Soient λ_i, λ'_i $(i=1, 2, \ldots)$ des éléments de E assez proches de e^{t_i}, $e^{t'_i}$ $(i=1, 2 \ldots)$, tels que par exemple $e^{t_i} \leqq 2\lambda_i \leqq 4e^{t_i}, \ldots$

Considérons la fonction

$$F(x) = \sum_{n=1} 2^{-n} \left[T^{-1}(e^{t_n}) \cos\left(\lambda_n x + \frac{\pi}{4}\right) + T^{-1}(e^{t'_n}) \cos\left(\lambda'_n x + \frac{\pi}{4}\right)\right].$$

L'inégalité $e^{kt_n} \leqq M_k^E T(e^{t_n})$ et le thèorème 6 (§ I) montrent que $F(x) \in C^E\{M_n^E\}$. D'autre part

$$(-1)^k F^{(k)}(0) > 4^{-k} M_k^E \qquad (k=1, 2, \ldots).$$

$F(x)$, qui a donc les propriétés énoncées dans le théorème, sera dite « fonction caractéristique » de $C^E\{M_n\}$. Des théorèmes 1 et 2 résulte le théorème suivant :

Théorème 3. — *Quelle que soit la suite* $\{A_n\}$ *telle que* $\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n^{\frac{1}{n}} (M_n^E)^{-\frac{1}{n}} = 0$, *il existe une fonction appartenant à* $C^E\{M_n\}$ *mais non à* $C^E\{A_n\}$.

Théorème 4. — *Soient* $\{M_n\}$ *et* $\{M'_n\}$ *deux suites* (S).

Si $\underline{\lim_{n\to\infty}} M_n^{\frac{1}{n}} = \underline{\lim_{n\to\infty}} M'^{\frac{1}{n}}_n = 0$, *les classes* $C^E\{M_n\}$ *et* $C^E\{M_n\}$, *identiques, ne contiennent que les fonctions constantes. Si* $0 < \underline{\lim_{n\to\infty}} M_n^{\frac{1}{n}} < \infty$ *et* $0 < \underline{\lim_{n\to\infty}} M'^{\frac{1}{n}}_n < \infty$, $C^E\{M_n\}$ *et* $C^E\{M'_n\}$, *identiques à* $C^E(1)$, *sont constituées par les fonctions presque périodiques dont le spectre est contenu dans* E *et aussi dans un segment fini, pouvant varier avec chaque fonction. Si* $\underline{\lim_{n\to\infty}} M_n^{\frac{1}{n}} = \infty$, *il faut et suffit, pour que* $C^E\{M_n\} \subset C^E\{M'_n\}$, *que l'une des conditions équivalentes suivantes soit satisfaite :*

$$(M_n^E)^{\frac{1}{n}} = O\left[(M'_n)^{\frac{1}{n}}\right] \qquad (n \to \infty),$$
$$(M)^{\frac{1}{n}} = O\left[(M'^E_n)^{\frac{1}{n}}\right] \qquad (n \to \infty),$$
$$T'(\alpha r) \leqq T(r) \quad \textit{pour tout } r \in E,$$

α *étant une constante positive, avec*

$$T(r) = \overline{\underset{n \geqq 1}{\text{borne}}}\, r^n M_n^{-1}, \qquad T'(r) = \overline{\underset{n \geqq 1}{\text{borne}}}\, r^n M'^{-1}_n.$$

Les deux premiers points résultent du théorème 1. Dans le troisième cas, la condition indiquée (le corollaire du théorème 4', § I, en donne trois formes équivalentes) est suffisante d'après le théorème 1, nécessaire d'après le théorème 2 [on le voit en écrivant que $F(x)$, fonction caractéristique de $C^E\{M_n\}$, appartient à $C^E\{M'_n\}$].

Remarque. — Pour que $C^E\{M_n\} \subset C^E\{M'_n\}$, il faut et il suffit que $F(x) \in C^E\{M'_n\}$, ce qui justifie son nom de fonction caractéristique de $C^E\{M_n\}$.

3. Applications :

Théorème 5. — *Pour que chaque fonction $f(x)$ de $C^E\{M_n\}$ soit prolongeable en une fonction holomorphe et bornée dans une bande $|y| < h_f$, h_f pouvant dépendre de f, il faut et il suffit qu'une des conditions suivantes soit satisfaite :*

$$a. \quad \varliminf_{n\to\infty} M_n^{\frac{1}{n}} < \infty;$$

$$b. \quad \lim_{n\to\infty} M_n^{\frac{1}{n}} = \infty \qquad \text{et} \qquad (M_n^E)^{\frac{1}{n}} = O(n) \qquad (n \to \infty).$$

On peut voir d'abord que, pour que $C^E\{M_n\}$ ait la propriété voulue, il faut et il suffit que $C^E\{M_n\} \subset C^E\{n!\}$. Car si $f(s)$ $(s = x + iy)$, égale à $f(x)$ sur l'axe réel, est holomorphe et bornée dans $|y| < h$, la formule de Cauchy donne successivement, en appelant C_x le cercle de centre x et de rayon $\frac{1}{2}h$,

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_{C_x} \frac{f(z)\,dz}{(z-x)^{n+1}}, \qquad |f^{(n)}(x)| \leq M\, 2^n h^{-n} n!, \qquad \text{avec} \quad M = \overline{\text{borne}}_{2|y|\leq h} |f(z)|.$$

Inversement, si $|f^{(n)}(x)| < k^n n!$, x_0 et x étant réels, le développement de Taylor de $f(x)$ autour de x_0 donne, avec $x' \in (x_0, x)$,

$$f(x) = P_{n-1}(x - x_0) + R_n(x), \qquad |R_n(x)| = |x - x_0|^n (n!)^{-1} |f^{(n)}(x')| \leq (k|x - x_0|)^n,$$

ce qui montre que la série de Taylor de $f(x)$ autour de x_0, qui converge vers $f(x)$ pour $k|x - x_0| \leq p < 1$, définit une fonction analytique bornée dans une certaine bande $|y| < h$.

Le théorème 4 donne alors la condition de l'énoncé, l'application qui suit le théorème 4' (§ I) en donne d'ailleurs une autre forme équivalente.

Définition. — *$C^E\{M_n\}$ est dite dérivable si*

$$f(x) \in C^E\{M_n\} \qquad \text{entraîne } f'(x) \in C^E\{M_n\}.$$

Alors on a aussi

$$f^{(p)}(x) \in C^E\{M_n\} \qquad (p \geq 1).$$

Théorème 6. — *Si $\lim_{n\to\infty} M_n^{\frac{1}{n}} = \infty$, il faut et il suffit, pour que $C^E\{M_n\}$ soit dérivable,* *qu'une des conditions équivalentes suivantes soit satisfaite :*

$$(\mathrm{M}_{n+1}^{\mathrm{E}})^{\frac{1}{n}} = \mathrm{O}\left(\mathrm{M}_n^{\frac{1}{n}}\right) \quad (n \to \infty), \qquad (\mathrm{M}_{n+1}^{\mathrm{E}})^{\frac{1}{n}} = \mathrm{O}\left[(\mathrm{M}_n^{\mathrm{E}})^{\frac{1}{n}}\right] \quad (n \to \infty),$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log \mathrm{M}_n^{\mathrm{E}}}{n^2} < \infty, \qquad \underline{\lim}_{r\left\{\substack{\in \mathrm{E} \\ \to \infty}\right.} \frac{\log \mathrm{T}(r)}{(\log r)^2} > 0.$$

D'après le théorème 7 (§ I), chacune de ces conditions équivaut à $\mathrm{C}^{\mathrm{E}}\{\mathrm{M}_{n+1}\} \subset \mathrm{C}^{\mathrm{E}}\{\mathrm{M}_n\}$, condition suffisante de dérivabilité, car $f(x) \in \mathrm{C}^{\mathrm{E}}\{\mathrm{M}_n\}$ entraîne $f'(x) \in \mathrm{C}^{\mathrm{E}}\{\mathrm{M}_{n+1}\}$. On voit que cette condition est nécessaire en considérant $\mathrm{F}(x)$, fonction caractéristique de $\mathrm{C}^{\mathrm{E}}\{\mathrm{M}_n\}$: $\mathrm{F}'(x)$, qui est fonction caractéristique de $\mathrm{C}^{\mathrm{E}}\{\mathrm{M}_{n+1}\}$, doit appartenir à $\mathrm{C}^{\mathrm{E}}\{\mathrm{M}_n\}$, d'où résulte la nécessité de la condition exprimée sous sa première forme.

DÉFINITION. — $\mathrm{C}^{\mathrm{E}}\{\mathrm{M}_n\}$ *sera dite quasi analytique* D *si toute fonction de cette classe est identiquement nulle dès qu'en un point elle est nulle ainsi que toutes ses dérivées.*

La régularisation des classes $\mathrm{C}^{\mathrm{E}}\{\mathrm{M}_n\}$ permet, à partir de résultats connus sur la quasi-analyticité de certaines classes de fonctions, d'obtenir de nouvelles conditions suffisantes de quasi-analyticité pour les classes $\mathrm{C}^{\mathrm{E}}\{\mathrm{M}_n\}$.

Si $\lim_{n\to\infty} \mathrm{M}_n^{\frac{1}{n}} = \infty$, on sait par exemple (*voir* [18], p. 102; c'est la forme donnée par M. Mandelbrojt au théorème de Denjoy-Carleman) que, pour que $\mathrm{C}_{\mathrm{R}}\{\mathrm{M}_n\}$ soit quasi analytique, que

$$\sum_{n=1} \frac{\mathrm{M}_n^c}{\mathrm{M}_{n+1}^c} = +\infty,$$

$\{\mathrm{M}_n^c\}$ étant la suite régularisée convexe de $\{\mathrm{M}_n\}$.

THÉORÈME 7. — *Si* $\lim_{n\to\infty} \mathrm{M}_n^{\frac{1}{n}} = \infty$, *il suffit, pour que* $\mathrm{C}^{\mathrm{E}}\{\mathrm{M}_n\}$ *soit quasi analytique* D, *que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{M}_n^{\mathrm{E}}}{\mathrm{M}_{n+1}^{\mathrm{E}}} = +\infty.$$

Cette condition exprime en effet la quasi-analyticité de $\mathrm{C}_{\mathrm{R}}\{\mathrm{M}_n^{\mathrm{E}}\}$. Elle est, pour les classes $\mathrm{C}^{\mathrm{E}}\{\mathrm{M}_n\}$, meilleure que la condition de Denjoy-Carleman proprement dite. Car on voit facilement par exemple que, $\mathrm{C}_{\mathrm{R}}\{\mathrm{M}_n\}$ étant une classe non quasi analytique quelconque, il suffit de choisir pour E une suite de λ_i assez espacés pour que $\mathrm{C}_{\mathrm{R}}\{\mathrm{M}_n^{\mathrm{E}}\}$ soit quasi analytique.

Dans sa thèse [9], M. J. P. Kahane a démontré divers théorèmes sur la quasi-analyticité de classes $\mathrm{C}^{\mathrm{E}}\{\mathrm{M}_n\}$ et de classes analogues (*voir* sa thèse [9], p. 25 à 47). Il a surtout recours à deux méthodes. L'une est basée sur la considération des transformées de Fourier-Carleman. L'autre, qui est essentiellement celle de M. Mandelbrojt dans [14], a été utilisée dans une Note publiée par M. J. P. Kahane et moi-même [10]. Dans le cas particulier où $\mathcal{E}$ est une suite de nombres réels λ_j symétrique ($\lambda_{2j} = -\lambda_{2j-1}$) telle que la suite $|\lambda_{2j}| j^{-1-\varepsilon}$ soit croissante pour un $\varepsilon > 0$, M. J. P. Kahane a même trouvé une condition nécessaire et suffisante pour que $C^E\{M_n\}$ soit quasi analytique D :

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{M_n}{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_{n+1}} \right|^{\frac{1}{n}} = 0.$$

Nous reviendrons à la fin du paragraphe III sur deux autres critères de quasi-analyticité démontrés dans sa thèse.

III. — Régularisation des classes $K^E\{M_n\}$.

Soit $\mathcal{E}$ un ensemble donné quelconque de nombres réels, E l'ensemble des valeurs absolues des éléments de $\mathcal{E}$, $\overline{E}$ la fermeture de E. Soit $\{M_n\}$ ($n = 1, 2, \ldots$) une suite (S).

Définition. — *Désignons par $K^E\{M_n\}$ l'ensemble des fonctions $f(x)$ à valeurs réelles ou complexes, de la variable réelle x, qui sont presque périodiques au sens de Bohr, indéfiniment dérivables, dont le spectre est contenu dans $\mathcal{E}$, et dont les dérivées successives vérifient les inégalités*

$$|f^{(n)}(x)| \leq k M_n \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

où k est une constante ne dépendant que de $f(x)$.

La régularisation de ces classes de fonctions peut aussi s'effectuer au moyen de la suite $\{M_n^E\}$. Pour le démontrer, nous utiliserons deux théorèmes, le premier dû à Kolmogoroff [11], le second à J. Favard [7] [nous l'appellerons théorème (F)].

Inégalité de Kolmogoroff. — *Soit $f(x)$ une fonction n fois dérivable sur $(-\infty, \infty)$. Posons*

$$M_k = \overline{\text{borne}}_x\, |f^{(k)}(x)| \qquad (0 \leq k \leq n)$$

et supposons que $M_0 < \infty$, $M_n < \infty$.
On a

$$M_k \leq M_n^{1-\frac{k}{n}} M_n^{\frac{k}{n}} \frac{t_{n-k}}{t_{1-\frac{k}{n}}^{\,n}} \qquad (0 \leq k \leq n),$$

où

$$t_h = \frac{4}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^{p(h+1)}}{(2p+1)^{h+1}} \qquad (h \geq 0).$$

En fait, nous emploierons la conséquence un peu moins précise suivante :

$$M_k \leqq 2 M_0^{1-\frac{k}{n}} M_n^{\frac{k}{n}}.$$

THÉORÈME (F). — *Soit $f(x)$ une fonction de période 2π, admettant une dérivée d'ordre n, $f^{(n)}(x)$, sommable et bornée en module par M_n,*

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Si m est un entier positif quelconque, on peut approcher $f(x)$ par un polynome trigonométrique

$$P_{m-1}(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{m-1} \gamma_k^m (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

où les coefficients γ_k^m sont indépendants de f, tel que

$$|f(x) - P_{m-1}(x)| \leqq t_n m^{-n} M_n,$$

t_n ayant même signification que dans l'inégalité de Kolmogoroff

LEMME 1. — *Étant données $\{n_k\}$ ($k = 1, 2, \ldots$), suite croissante infinie d'entiers positifs, et une fonction $f(x)$ périodique, de période 2π, admettant une dérivée d'ordre r sommable et bornée, telle que*

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos n_k x + b_k \sin n_k x), \qquad |f(x)| \leqq M_0, \qquad |f^{(r)}(x)| \leqq M_r,$$

on a, n_λ étant le plus grand exposant de f inférieur ou égal à $(M_r M_0^{-1})^{\frac{1}{r}}$

$$(1) \qquad |f^{(p)}(x)| \leqq 16 \max(M_0 n_\lambda^p, \quad M_r n_{\lambda+1}^{p-r}) \qquad (0 < p < r).$$

Posons

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

$f_1(x)$ étant le polynome $P_{m-1}(x)$ associé à f dans le théorème (F), avec $m = n_{\lambda+1}$. D'après le théorème (F),

$$(a) \qquad |f_2(x)| \leqq 2 M_r n_{\lambda+1}^{-r}.$$

Comme le second membre est inférieur à $2 M_0$, il en résulte

$$|f_1(x)| \leqq 3 M_0,$$

puis, $f_1(x)$ étant un polynome trigonométrique d'ordre n_λ,

$$(\alpha) \qquad |f_1^{(p)}(x)| \leqq 3 M_0 n_\lambda^p, \qquad |f_1^{(r)}(x)| \leqq 3 M_0 n_\lambda^r \leqq 3 M_r \qquad (0 < p < r),$$

d'où

$$(b) \qquad |f_2^{(r)}(x)| \leqq 4 M_r.$$

L'inégalité de Kolmogoroff appliquée à $f_2(x)$ moyennant (a) et (b), donne

$$|f_2^{(p)}(x)| \leqq 8 M_r n_{\lambda+1}^{p-r},$$

ce qui, joint à (α), prouve (1).

Lemme 2. — *Soit un polynome presque périodique*

$$P(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{N} (a_k \cos \lambda_k x + b_k \sin \lambda_k x)$$

d'exposants λ_k rangés en ordre croissant. Si

$$M_0 = \overline{\text{borne}}_x |P(x)|, \qquad M_r = \overline{\text{borne}}_x |P^{(r)}(x)|$$

et si λ_j est le plus grand exposant de P *inférieur ou égal à* $(M_r M_0^{-1})^{\frac{1}{r}}$, *on a pour* $0 < p < r$

$$(2) \qquad |P^{(p)}(x)| \leqq 16 \max(M_0 \lambda_j^p, M_r \lambda_{j+1}^{p-r}).$$

On peut passer du lemme 1 au lemme 2 par une méthode utilisée par M. Favard dans [6]. Soit ν un entier positif, $\frac{n_k^{(\nu)}}{\nu}$ la valeur approchée par défaut à $\frac{1}{\nu}$ près de λ_k. Considérons

$$P_\nu(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{N} \left(a_k \cos \frac{n_k^{(\nu)}}{\nu} x + b_k \sin \frac{n_k^{(\nu)}}{\nu} x \right).$$

$\varepsilon > 0$ quelconque étant donné, il existe, comme l'a montré M. Favard dans [6], une suite infinie d'entiers ν tels que

$$|P^{(p)}(x) - P_\nu^{(p)}(x)| \leqq \varepsilon \qquad \text{pour} \quad -\nu\pi \leqq x \leqq \nu\pi.$$

Prenant ν assez grand et posant

$$M_p = \overline{\text{borne}}_x |P^{(p)}(x)|, \qquad M_p^\nu = \overline{\text{borne}}_x |P_\nu^{(p)}(x)| \qquad (0 \leqq p \leqq r),$$

on a

$$|M_p - M_p^\nu| < 2\varepsilon \qquad (0 \leqq p \leqq r).$$

Le lemme 1 appliqué à $P_\nu(\nu x)$ donne

$$M_p^\nu \leqq 16 \max\left[M_0^\nu \left(\frac{n_j^{(\nu)}}{\nu} \right)^p, M_r^\nu \left(\frac{n_{j+1}^{(\nu)}}{\nu} \right)^{p-r} \right],$$

ε pouvant être choisi aussi petit et ν aussi grand qu'on veut, ces deux dernières inégalités entraînent (2) en passant à la limite.

Lemme 3. — *Soit $f(x)$ indéfiniment dérivable, presque périodique ainsi que ses dérivées, de spectre contenu dans $\mathcal{E}$. Si l'on pose*

$$M_p = \overline{\text{borne}}_x |f^{(p)}(x)| \qquad (0 < p < r)$$

si λ_r *est le plus grand élément de* $\overline{\mathrm{E}}$ *inférieur ou égal à* $(\mathrm{M}_r \mathrm{M}_0^{-1})^{\frac{1}{r}}$ *et* λ'_r *est le plus petit élément de* $\overline{\mathrm{E}}$ *supérieur ou égal à* $(\mathrm{M}_r \mathrm{M}_0^{-1})^{\frac{1}{r}}$, *on a*

$$\mathrm{M}_p \leqq 16 \max(\mathrm{M}_0 \lambda_r^p, \; \mathrm{M}_r \lambda_r'^{r-p}).$$

En effet, considérons $\sigma_m(x)$, polynome d'approximation de Bochner, d'ordre m, de $f(x)$. Comme $\sigma_m^{(p)}(x)$ et $\sigma_m^{(r)}(x)$ sont les polynomes d'approximation de Bochner de $f^{(p)}(x)$ et $f^{(r)}(x)$, les trois polynomes $\sigma_m(x)$, $\sigma_m^{(p)}(x)$, $\sigma_m^{(r)}(x)$ tendent respectivement vers $f(x)$, $f^{(p)}(x)$, $f^{(r)}(x)$, uniformément pour $-\infty < x < \infty$, quand $m \to \infty$. Appliquant le lemme 2 à $\sigma_m(x)$, puis passant à la limite pour $m \to \infty$, on obtient le lemme 3.

THÉORÈME 1. — *Soit* $\{\mathrm{M}_n\}$ *une suite* (S).

Si $\underline{\lim}_{n \to \infty} \mathrm{M}_n^{\frac{1}{n}} = 0$, $\mathrm{K}^{\mathrm{E}}\{\mathrm{M}_n\}$, *identique à* $\mathrm{K}^{\mathrm{E}}\{0\}$, *ne contient que la fonction nulle* (si $0 \notin \mathcal{E}$) *ou les fonctions constantes* (si $0 \in \mathcal{E}$). *Si* $0 < \underline{\lim}_{n \to \infty} \mathrm{M}_n^{\frac{1}{n}} = \mathrm{A} < \infty$, $\mathrm{K}^{\mathrm{E}}\{\mathrm{M}_n\}$; *identique à* $\mathrm{K}^{\mathrm{E}}\{\mathrm{A}^n\}$, *est constituée par les fonctions presque périodiques de spectre contenu dans* $\mathcal{E} \cap [-\mathrm{A}, \mathrm{A}]$.

Si $\lim_{n \to \infty} \mathrm{M}_n^{\frac{1}{n}} = \infty$, $\mathrm{K}^{\mathrm{E}}\{\mathrm{M}_n\}$ *et* $\mathrm{K}^{\mathrm{E}}\{\mathrm{M}_n^{\mathrm{E}}\}$ *sont équivalentes.*

Soit

$$f(x) \sim \Sigma a_n e^{i\lambda_n x}, \qquad f(x) \in \mathrm{K}^{\mathrm{E}}\{\mathrm{M}_n\}.$$

D'après le lemme 1,

$$|a_n| < \mathrm{K}\mathrm{M}_p |\lambda_n|^{-p} \qquad (p \geqq 1).$$

Donc dans le premier cas $a_n = 0$ pour $\lambda_n \neq 0$, dans le second cas $a_n = 0$ pour $\lambda_n > \mathrm{A}$, ce qui établit les deux premiers points. Dans le troisième cas, il suffit de montrer que $\mathrm{K}^{\mathrm{E}}\{\mathrm{M}_n\} \subset \mathrm{K}^{\mathrm{E}}\{\mathrm{M}_n^{\mathrm{E}}\}$. N_i et N_{i+1} étant deux indices consécutifs de la suite principale d'indices (relative à E) de $\{\mathrm{M}_n\}$, on peut appliquer le lemme 3 à la fonction $f^{(\mathrm{N}_i)}(x)$ qui vérifie

$$|f^{(\mathrm{N}_i)}(x)| \leqq \mathrm{K}\mathrm{M}_{\mathrm{N}_i}, \qquad |f^{(\mathrm{N}_{i+1})}(x)| \leqq \mathrm{K}\mathrm{M}_{\mathrm{N}_{i+1}},$$

puis utiliser le théorème 6 (§ I), ce qui donne

$$|f^{(n)}(x)| \leqq 16\,\mathrm{K}\mathrm{M}_n^{\mathrm{E}} \qquad (\mathrm{N}_i < n < \mathrm{N}_{i+1});$$

i étant quelconque, le théorème est démontré.

THÉORÈME 2. — *Si* $\{\mathrm{M}_n\}$ *est une suite* (S_∞), *il existe* $\mathrm{F}_{\mathrm{E}}(x)$ *telle que*

$$\mathrm{F}_{\mathrm{E}}(x) \in \mathrm{K}^{\mathrm{E}}\{\mathrm{M}_n\}, \quad \operatorname*{borne}_{-\infty < x < \infty} |\mathrm{F}_{\mathrm{E}}^{(n)}(x)| \geqq \alpha \mathrm{M}_n^{\mathrm{E}} \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

α *constante positive absolue.*

D'après le théorème 6 (§ I), les points $P_n^E(x=n,\ y=\log M_n^E)$ sont sur une ligne polygonale convexe C^E dont la pente croît vers $(+\infty)$, les pentes t de ses côtés étant telles que $e^t \in \bar{E}$. On voit assez facilement qu'on peut construire de proche en proche, à partir de P_1^E, une ligne polygonale convexe dont les côtés sont portés par des droites Δ_i $(i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$ de pentes τ_i et d'ordonnées à l'origine α_i telles que $e^{\tau_i}=\lambda_i$ et $e^{\alpha_i}=a_i$ vérifient (α et β étant deux constantes positions absolues)

$$\lambda_i \in E, \qquad \alpha\sqrt{2}\,M_n^E \leqq \sum_{i=0}^{\infty} a_i\lambda_i^n \leqq \beta M_n^E \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots).$$

La fonction suivante répond alors aux conditions du théorème 2

$$F_E(x)=\sum_{i=0}^{\infty} a_i \cos\left(\lambda_i x+\frac{\pi}{4}\right).$$

Théorème 3. — *Quelle que soit la suite de nombres positifs* A_n *tels que* $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n(M_n^E)^{-1}=0$, *il existe une fonction appartenant à* $K^E\{M_n\}$ *mais non à* $K^E\{A_n\}$.

C'est la fonction $F_E(x)$ du théorème précédent.

Théorème 4. — *Pour que* $K^E\{M_n\} \subset K^E\{M'_n\}$, *il faut et il suffit que l'une des conditions suivantes soit satisfaite :*

a. $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} M_n^{\frac{1}{n}} < \infty$ *et* $\lambda \leqq \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} M'^{\frac{1}{n}}_n$, λ *étant le plus grand élément de* $\bar{E}$ *inférieur ou égal à* $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} M_n^{\frac{1}{n}}$;

b. $\lim\limits_{n\to\infty} M_n^{\frac{1}{n}}=\infty$ *et* $M_n^E=O(M'_n)$ $(n\to\infty)$.

Théorème 5. — *Si* $\lim\limits_{n\to\infty} M_n^{\frac{1}{n}}=\infty$, *il faut et il suffit, pour que* $K^E\{M_n\}$ *soit dérivable, que*

$$M_{n+1}^E=O(M_n) \qquad (n\to\infty).$$

Ces théorèmes se démontrent comme les théorèmes 4 et 6 (§ II).

La régularisation des classes $K^E\{M_n\}$ permet aussi d'améliorer certains théorèmes sur la quasi-analyticité de telles classes. M. J. P. Kahane [9] a notamment démontré des théorèmes qui, avec nos notations, peuvent s'exprimer ainsi :

a. $K^E\{M_n\}$ *est quasi analytique D dès que, avec* $\frac{1}{2} \leqq a \leqq 1$,

$$N(r)=O(r^a) \qquad \text{et} \qquad \overline{\lim_{r\to\infty}} \int^r \frac{\varphi(\log t)-\pi \sin \pi a\, N(t)}{t^{1+a}}\,dt=\infty,$$

$N(r)$ *étant le nombre d'éléments* $\lambda \leqq r$ *de la suite positive* E.

b. Soit Ω une réunion de segments de longueurs indéfiniment croissantes ne contenant aucun point $\log\lambda\,(\lambda \in \mathrm{E})$; désignons par $\mu(\Omega;\sigma)$ et $\mu(\complement\Omega;\sigma)$ les mesures de Ω et de son complémentaire sur le segment $[0, \sigma]$. $\mathrm{K}^{\mathrm{E}}\{\mathrm{M}_n\}$ est quasi analytique D *dès qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que*

$$\int^{\infty} \varphi(\sigma)\, e^{-\mu(\complement\Omega;\,\sigma)-\varepsilon\mu(\Omega;\,\sigma)}\, d\sigma = \infty.$$

En raison de l'équivalence des classes $\mathrm{K}^{\mathrm{E}}\{\mathrm{M}_n\}$ et $\mathrm{K}^{\mathrm{E}}\{\mathrm{M}_n^{\mathrm{E}}\}$, *les théorèmes précédents sont encore vrais en remplaçant $\varphi(\sigma)$ par $\varphi_{\mathrm{E}}(\sigma)$ dans les formules précédentes*, avec

$$\varphi(\sigma) = \max_n (n\sigma - \log \mathrm{M}_n), \qquad \varphi_{\mathrm{E}}(\sigma) = \max_n (n\sigma - \log \mathrm{M}_n^{\mathrm{E}}),$$

$\varphi_{\mathrm{E}}(\sigma)$ est d'ailleurs la fonction égale à $\varphi(\sigma)$ pour $e^{\sigma} \in \mathrm{E}$, linéaire dans les intervalles $[\sigma_1, \sigma_2]$ ne comprenant aucun σ tel que $e^{\sigma} \in \mathrm{E}$.

CHAPITRE II.

Problème d'équivalence pour certaines classes de fonctions indéfiniment dérivables définies sur une demi-droite ou sur la droite entière.

I. — Rappel de quelques notions : définitions et résultats préliminaires.

1. Régularisation. — Comme nous l'avons rappelé au début du chapitre I, MM. Mandelbrojt (*voir* [14] et [18]) et Gorny [8] ont résolu le problème d'équivalence de Carleman pour les classes de fonctions $\mathrm{C}_{\mathrm{R}}\{\mathrm{M}_n\}$. Puis MM. Mandelbrojt [18] et Agmon [1] ont résolu ce problème pour les classes $\mathrm{C}_{d\mathrm{R}}\{\mathrm{M}_n\}$ définies de la façon suivante : $\{\mathrm{M}_n\}$ étant une suite (S) donnée, $\mathrm{C}_{d\mathrm{R}}\{\mathrm{M}_n\}$ est l'ensemble des fonctions $f(x)$ indéfiniment dérivables sur $[0, +\infty)$ telles que

$$\overline{\text{borne}}_{x \geq 0}\, |f(x)| < \infty, \qquad |f^{(n)}(x)| \leq \mathrm{C}^n \mathrm{M}_n \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

C étant une constante positive dépendant de f, non de n.

La suite $\{\mathrm{M}_n^d\}$, définie par $\mathrm{M}_n^d = n^{-n}(n^n \mathrm{M}_n)^c$, joue pour ces classes le même rôle que $\{\mathrm{M}_n^c\}$ pour les classes $\mathrm{C}_{\mathrm{R}}\{\mathrm{M}_n\}$.

Le paragraphe II de ce chapitre est consacré à la résolution du problème d'équivalence de Carleman pour des classes de fonctions définies sur la demi-droite $(0, +\infty)$ de la façon suivante.

Définitions. — *$\{\mathrm{M}_n\}$ étant une suite* (S) *donnée, désignons par $\mathrm{C}_{d\mathrm{R}}^{\star(-1)}\{\mathrm{M}_n\}$ (resp. $\mathrm{C}_{d\mathrm{R}}^{\star 1}\{\mathrm{M}_n\}$, $\mathrm{C}_{d\mathrm{R}}^{-1}\{\mathrm{M}_n\}$, $\mathrm{C}_{d\mathrm{R}}^{1}\{\mathrm{M}_n\}$) l'ensemble des fonctions $f(x)$ indéfiniment* *dérivables sur* $[0, +\infty)$ *vérifiant*

$$(1)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty e^x |f(x)|^2\, dx < \infty \\ \left(\text{resp. } \displaystyle\int_0^\infty e^{-x} |f(x)|^2\, dx < \infty,\ \overline{\text{borne}}_{x\geq 0}\, e^{Cx} |f(x)| < \infty,\ \overline{\text{borne}}_{x\geq 0}\, e^{-Cx} |f(x)| < \infty\right), \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty e^x x^n |f^{(n)}(x)|^2\, dx \leqq C^n M_n \\ \left(\text{resp. } \displaystyle\int_0^\infty e^{-x} x^n |f^{(n)}(x)|^2\, dx \leqq C^n M_n,\ |f^{(n)}(x)| \leqq C_1^n M_n\, e^{-Cx},\ |f^{(n)}(x)| \leqq C^n M_n\, e^{Cx}\right) \end{cases}$$

($n = 1, 2, \ldots$; C *et* C_1, *constantes positives dépendant de* f, *non de* n).

Dans le paragraphe III, nous résolvons le problème d'équivalence pour les classes suivantes de fonctions définies sur la droite entière.

DÉFINITIONS. — $\{M_n\}$ *étant une suite* (S) *donnée, désignons par* $C_R^{*(-2)}\{M_n\}$ (*resp.* $C_R^{*2}\{M_n\}$, $C_R^{-2}\{M_n\}$, $C_R^{2}\{M_n\}$) *l'ensemble des fonctions* $f(x)$ *indéfiniment dérivables pour* $-\infty < x < \infty$ *vérifiant*

$$(3)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^\infty e^{x^2} |f(x)|^2\, dx < \infty \\ \left(\text{resp. } \displaystyle\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} |f(x)|^2\, dx < \infty,\ \overline{\text{borne}}_{-\infty<x<\infty}\, e^{C^2x^2} |f(x)| < \infty,\right. \\ \left.\qquad\qquad \overline{\text{borne}}_{-\infty<x<\infty}\, e^{-C^2x^2} |f(x)| < \infty\right), \end{cases}$$

$$(4)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^\infty e^{x^2} |f^{(n)}(x)|^2\, dx \leqq C^n M_n \\ \left(\text{resp. } \displaystyle\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} |f^{(n)}(x)|^2\, dx < \infty,\ |f^{(n)}(x)| \leqq C_1^n M_n\, e^{-C^2x^2},\ |f^{(n)}(x)| \leqq C^n M_n\, e^{C^2x^2}\right) \end{cases}$$

($n = 1, 2, \ldots$; C *et* C_1 *constantes positives dépendant de* f, *non de* n).

Les solutions de ces questions font intervenir les procédés de régularisation convexe (définie au début du chapitre I) et de régularisation exponentielle d'une suite (notion due à M. Mandelbrojt et exposée notamment dans [15] comme cas particulier de la régularisation par rapport à une fonction quelconque). Nous rappelons ci-dessous celles de leurs propriétés qui nous serviront dans ce chapitre. $\{M_n\}$ étant une suite (S_∞), la suite régularisée convexe $\{M_n^c\}$ de $\{M_n\}$ est définie par

$$M_n^c = \overline{\text{borne}}_{r\geq 1}\, r^n/T(r), \qquad T(r) = \max_{n\geq 1} r^n/M_n.$$

Ox et Oy étant deux axes rectangulaires, les points $P_n^c(x = n, y = \log M_n^c)$ sont sur la plus haute courbe convexe ne laissant au-dessous d'elle aucun point $P_n(x = n, y = \log M_n)$. Il existe une suite infinie croissante d'indices n_i

($n_1 = 1$, $i = 1, 2, \ldots$) dits indices principaux, tels que $M^c_{n_i} = M_{n_i}$ et que, pour $n_i < n < n_{i+1}$

$$(M^c_n)^{n_{i+1}-n_i} = (M_{n_i})^{n_{i+1}-n}(M_{n_{i+1}})^{n-n_i}. \tag{5}$$

$\{M_n\}$ étant une suite (S), sa suite régularisée exponentielle $\{M^0_n\}$ est définie par

$$M^0_n = \overline{\operatorname{borne}}_{r \geqq n}\, r^n/S(r), \qquad S(r) = \max_{n \leqq r} r^n/M_n.$$

Il existe une suite infinie croissante d'indices n_i ($n_1 = 1$, $i = 1, 2, \ldots$), dits indices principaux, tels que $M^0_{n_i} = M_{n_i}$ et que pour $n_i \leqq n < n_{i+1}$

$$(M^0_n)^{n_{i+1}-n_i} = \max\left[M_{n_i}^{n_{i+1}-n} M_{n_{i+1}}^{n-n_i},\ (M_{n_i} n_{i+1}^{n-n_i})^{n_{i+1}-n_i}\right]. \tag{6}$$

Revenant à l'interprétation géométrique précédente, on voit que les points $P^0_n(x = n, y = \log M^0_n)$ sont, pour $n_i \leqq n < n_{i+1}$, alignés sur un segment $[P_{n_i} P'_{n_{i+1}}]$, $P'_{n_{i+1}}$ n'étant pas au-dessous de $P_{n_{i+1}}$. L'ensemble de ces segments, de pentes croissant vers l'infini, forme la « base exponentielle » de $\{P_n\}$. Parmi les indices principaux, il y en a en général une infinité $\{n_j\}$, dits indices de discontinuité, tels que P_{n_j} soit strictement au-dessous de P'_{n_j}. La « base exponentielle » est constituée, entre deux indices de discontinuité consécutifs, par un contour polygonal convexe, fermé à gauche, ouvert à droite, dont tous les sommets, sauf l'extrémité droite, sont des points à indices principaux ou « points principaux » ([4]).

2. Quelques propriétés des polynomes de Laguerre et d'Hermite. — Suivant les notations de Szegö [19], nous définissons $L_n(x)$, polynome de Laguerre de degré n, et $H_n(x)$, polynome d'Hermite de degré n, par

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!}\left(\frac{d}{dx}\right)^n (e^{-x}x^n) = \sum_{\nu=0}^{n} C^\nu_n \frac{(-x)^\nu}{\nu!}, \tag{7}$$

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}\left(\frac{d}{dx}\right)^n (e^{-x^2}) = \sum_{\nu=0}^{[n/2]} \frac{n!}{\nu!}(-1)^\nu \frac{(2x)^{n-2\nu}}{(n-2\nu)!}. \tag{8}$$

Posons

$$L^{(-p)}_n(x) = \underbrace{\int_0^x \cdots \int_0^{x_1}}_{p} L_n(x_1)\, dx_1 \ldots dx_p = \frac{n!}{\overline{n+p}\,!} x^p P_{n,p}(x), \tag{9}$$

$$\varphi_n(x) = e^{-x} L_n(x), \qquad \varphi^{(-p)}_n(x) = e^{-x} x^p \Pi_{n,p}(x). \tag{10}$$

On a les relations

$$\varphi^{(p)}_n(x) = e^{-x} P_{n,p}(x), \tag{11}$$

$$n!\, \Pi_{n,p}(x) = (-1)^p\, \overline{n-p}\,!\, L^{(p)}_n(x). \tag{12}$$

([4]) Dans la suite de ce chapitre, $\{M_n\}$, $\{M'_n\}$ désigneront des suites (S) données.

Comme on sait que

$$\int_0^\infty e^{-x} \mathrm{L}_n(x)\, \mathrm{L}_m(x)\, dx = \delta_{n,m}$$

$$(n,\ m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ \delta_{n,m} = 1 \text{ si } n = m,\ \delta_{n,m} = 0 \text{ si } n \neq m);$$

on en déduit au moyen d'intégrations par parties que les polynomes $\mathrm{P}_{n,p}(x)$ et $\pi_{n,p}(x)$ vérifient les relations

$$(13) \qquad \int_0^\infty e^{-x} x^p \mathrm{P}_{n,p}(x)\, \mathrm{P}_{m,p}(x)\, dx = \frac{\overline{n+p}\,!}{n\,!} \delta_{n,m} \qquad (n,\ m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

$$(14) \qquad \int_0^\infty e^{-x} x^p \Pi_{n,p}(x)\, \Pi_{m,p}(x)\, dx = \frac{\overline{n-p}\,!}{n\,!} \delta_{n,m} \qquad (n,\ m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Nous aurons besoin au paragraphe II d'une estimation des dérivées successives de $\varphi_n(x)$ et $\mathrm{L}_n(x)$. Exprimant $\varphi_n^{(k)}(x)$, dérivée d'ordre $(n+k)$ de $(e^{-x}x^n/n\,!)$ par la formule de Leibniz, puis remarquant que

$$x^{\mathrm{N}} < \mathrm{N}\,!\, 2^{\mathrm{N}} e^{\frac{x}{2}} \qquad (x \geqq 0,\ \mathrm{N} = 1,\ 2,\ \ldots)$$

et que C_{n+k}^{ν} croît avec ν pour $2\nu \leqq n+k$, on obtient

$$(15) \qquad |\varphi_n^{(k)}(x)| \leqq 2(4e)^k e^{-\frac{x}{2}} \qquad (k \geqq n).$$

Les inégalités

$$|\varphi_n^{(n)}(\mathrm{X})| \leqq 2(4e)^n e^{-\frac{x}{2}}, \qquad |\varphi_n(\mathrm{X})| \leqq e^{-\frac{x}{2}} \qquad (\mathrm{X} \geqq x \geqq 0)$$

impliquent (*voir* Mandelbrojt [18], p. 222) une majoration de $|\varphi_n^{(k)}(x)|$ pour $0 < k < n$. On obtient ainsi les relations

$$(16) \qquad |\varphi_n^{(k)}(x)| \leqq 2(32\, e^2)^k n^k k^{-k} e^{-\frac{x}{2}} \qquad (0 \leqq k < n;\ x \geqq 0),$$

$$(17) \qquad \varphi_n^{(k)}(0) = (-1)^k \mathrm{C}_{n+k}^k, \qquad |\varphi_n^{(k)}(0)| \geqq n^k k^{-k}.$$

Comme $\mathrm{L}_n(x) = e^x \varphi_n(x)$, on peut exprimer $\mathrm{L}_n^{(k)}(x)$ par la formule de Leibniz, puis tenir compte de (12); $n^\nu \nu^{-\nu}$ croissant avec ν pour $2\nu \leqq n$, on a ainsi une majoration de $\mathrm{L}_n^{(k)}(x)$ pour $2k \leqq n$. Remplaçant, dans le développement de $\mathrm{L}_n^{(k)}(x)$ en puissances de x, x^{N} par $2^{\mathrm{N}}\mathrm{N}\,!\, e^{\frac{x}{2}}$ $(\mathrm{N} = 1,\ 2,\ \ldots)$, on voit que cette majoration vaut aussi pour $2k \geqq n$.

D'où

$$(18) \qquad |\mathrm{L}_n^{(k)}(x)| \leqq 2(64\, e^2)^k n^k k^{-k} e^{\frac{x}{2}} \qquad (x \geqq 0,\ 0 \leqq k \leqq n),$$

$$(19) \qquad \mathrm{L}_n^{(k)}(0) = (-1)^k \mathrm{C}_n^k, \qquad |\mathrm{L}_n^{(k)}(0)| \geqq n^k k^{-k} \qquad (0 \leqq k \leqq n).$$

Une estimation de l'ordre de grandeur des dérivées de e^{x^2}, e^{-x^2}, $e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{H}_p(x)$, nous sera utile dans le paragraphe II. Le développement en puissances de x de $\mathrm{H}_n(x)$, compte tenu de

$$|x|^{2p-2\nu} \leqq \overline{p-\nu}\,!\, \alpha^{2p-2\nu} e^{x^2\alpha^{-2}}, \qquad |x|^{2p+1-2\nu} \leqq \overline{p+1-\nu}\,!\, \alpha^{2p+1-2\nu} e^{x^2\alpha^{-2}}$$

donne une majoration de $H_n(x)$. Comme la dérivée d'ordre n de e^{x^2} est une somme des mêmes termes, au signe près, que $e^{x^2} H_n(x)$, on a

$$\left|\frac{d^n}{dx^n}(e^{\varepsilon x^2})\right| \leqq (2\alpha)^n n^{\frac{n}{2}} e^{\varepsilon x^2 + x^2 \alpha^{-2}} \qquad (\varepsilon = \pm 1, \alpha > 0).$$

De cette inégalité (appliquée pour $\alpha = \sqrt{3}$, $\varepsilon = \pm 1$) on déduit aussi une majoration de la dérivée d'ordre n de

$$e^{-\frac{x^2}{2}} H_p(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^p}{dx^p}(e^{-x^2}),$$

exprimée au moyen de la formule de Leibniz. D'où

$$(20) \qquad \left|\frac{d^n}{dx^n}(e^{x^2})\right| \leqq 2^n n^{\frac{n}{2}} e^{2x^2} \qquad (-\infty < x < \infty;\ n = 1, 2, \ldots),$$

$$(21) \qquad |H_n(x)| \leqq (2\sqrt{3})^n n^{\frac{n}{2}} e^{\frac{x^2}{3}},$$

$$(22) \qquad \left|\frac{d^n}{dx^n}\left[e^{-\frac{x^2}{2}} H_p(x)\right]\right| \leqq \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n (2\sqrt{3})^{n+p} (n+p)^{\frac{n+p}{2}}.$$

Enfin, si l'on pose

$$(23) \qquad K_n(x) = (2^n n!\sqrt{\pi})^{-\frac{1}{2}} H_n(x), \qquad \Phi_n(x) = e^{-x^2} K_n(x),$$

on a

$$(24) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} K_n(x) K_m(x)\, dx = \delta_{n,m} \qquad (n, m = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$(25) \qquad (2^p \overline{n+p}\,!)^{\frac{1}{2}} K_n^{(-p)}(x) = (n!)^{\frac{1}{2}} K_{n+p}(x),$$

$$(26) \qquad (2^p n!)^{\frac{1}{2}} \Phi_n^{(-p)}(x) = (\overline{n-p}\,!)^{\frac{1}{2}} \Phi_{n-p}(x).$$

II. — Classes de fonctions sur une demi-droite.

$F(x)$ étant indéfiniment dérivable sur $[0, +\infty)$, nous poserons

$$(27) \qquad I_n(F) = \int_0^{\infty} e^x x^n |F^{(n)}(x)|^2\, dx, \qquad \mathcal{J}_n(F) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^n |F^{(n)}(x)|^2\, dx$$
$$(n = 0, 1, 2, \ldots).$$

1. Classes $C_{dR}^{*-1}\{M_n\}$:

Lemme 1. — *Si $f(x)$, indéfiniment dérivable sur $[0, +\infty)$ vérifie*

$$(a) \qquad I_0(f) < \infty$$

et s'il existe une suite infinie $\{n_i\}$ d'entiers positifs tels que

$$(b) \qquad m_{n_i} = I_{n_i}(f) < \infty,$$

$f(x)$ admet un développement en série de la forme

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n L_n(x) e^{-x},$$

cette série converge uniformément et absolument sur $[0, +\infty)$ *ainsi que toutes ses dérivées et l'on a*

$$m_p = \mathrm{I}_p(f) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 \frac{\overline{n+p}\,!}{n\,!} \qquad (p = 0, 1, 2, \ldots).$$

Posons

$$a_n = \int_0^{\infty} f(x)\,\mathrm{L}_n(x)\,dx \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \qquad s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \mathrm{L}_n(x)\,e^{-x}.$$

Il existe, en raison de (a), une suite $\{x_i\}$ de valeurs tendant vers $(+\infty)$ telles que

$$\lim_{i \to \infty} f(x_i)\,e^{\frac{x_i}{2}} = 0.$$

Des intégrations par parties et un passage à la limite montrent alors que

$$a_n = \lim_{i \to \infty} (-1)^{n_i} \int_0^{x_i} f^{(n_i)}(x)\,\mathrm{L}_n^{(-n_i)}(x)\,dx.$$

Appliquant l'inégalité de Schwarz, compte tenu de (9) et (13), il vient

$$|a_n| \leq \frac{n\,!}{\overline{n+n_i}\,!}\left[\mathrm{I}_{n_i}(f)\,\mathcal{J}_{n_i}(\mathrm{P}_{n,n_i})\right]^{\frac{1}{2}} = \left(m_{n_i}\frac{n\,!}{\overline{n+n_i}\,!}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Comme on peut prendre n_i aussi grand que l'on veut, il en résulte que la série $s(x)$ converge uniformément et absolument sur $[0, +\infty)$ ainsi que toutes ses dérivées et que, p étant un entier positif quelconque, on peut intégrer terme à terme $\{s^2(x)\,e^x x^p\}$. Donc

$$\mathrm{I}_p(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 \frac{\overline{n+p}\,!}{n\,!}, \qquad a_n = \int_0^{\infty} s(x)\,\mathrm{L}_n(x)\,dx \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Comme $\mathrm{I}_0(f-s) < \infty$ et que les fonctions $e^{-\frac{x}{2}}\mathrm{L}_n(x)(n = 0, 1, 2, \ldots)$ forment un système orthonormal complet sur $[0, \infty)$, l'égalité de Parseval, applicable à $[f(x) - s(x)]$, montre que $\mathrm{I}_0(f - s) = 0$, donc que $f(x) \equiv s(x)$, ce qui achève la démonstration du lemme.

Théorème 1. — *Si,* $\underline{\lim}_n\, n^{-1}\mathrm{M}_n^{\frac{1}{n}} = 0$, *la classe* $\mathrm{C}_{d\mathrm{R}}^{*(-1)}\{\mathrm{M}_n\}$ *ne contient que la fonction nulle.*

Si $\underline{\lim}_n\, n^{-1}\mathrm{M}_n^{\frac{1}{n}} > 0$, *les classes* $\mathrm{C}_{d\mathrm{R}}^{*(-1)}\{\mathrm{M}_n\}$ *et* $\mathrm{C}_{d\mathrm{R}}^{*(-1)}\{\mathrm{M}_n^c\}$ *sont équivalentes.*

D'après (1), (2) et le lemme 1, si $f(x) \in \mathrm{C}_{d\mathrm{R}}^{*(-1)}\{\mathrm{M}_n\}$, on a

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-x}\mathrm{L}_n(x), \qquad |a_n|^2 \leq \mathrm{C}^{\mathrm{N}}\mathrm{M}_{\mathrm{N}}\,n\,!\,(\overline{n+\mathrm{N}}\,!)^{-1} \qquad (\mathrm{N} = 1, 2, \ldots).$$

Donc, dans le premier cas, $a_n = 0$ pour tout n et $f(x) \equiv 0$.

Dans le second cas, soit $\{M_n^c\}$ la suite régularisée convexe de $\{M_n\}$, $\{n_i\}$ la suite principale d'indices de $\{M_n\}$. Pour $n_i \leqq n \leqq n_{i+1}$, l'expression de m_n fournie pour le lemme 1, l'inégalité

$$(\overline{p+n}\,!)^{n_{i+1}-n_i} \leqq (\overline{p+n_i}\,!)^{n_{i+1}-n} (\overline{p+n_{i+1}}\,!)^{n-n_i}$$

l'inégalité de Hölder, (2) et (5) entraînent

$$m_n^{n_{i+1}-n_i} \leqq m_{n_i}^{n_{i+1}-n} m_{n_{i+1}}^{n-n_i} \leqq C^{n(n_{i+1}-n_i)} M_{n_i}^{n_{i+1}-n} M_{n_{i+1}}^{n-n_i} = (C^n M_n^c)^{n_{i+1}-n_i}.$$

Donc $C_{dR}^{\star(-1)}\{M_n\} \subset C_{dR}^{\star(-1)}\{M_n^c\}$. L'inclusion opposée étant évidente, les deux classes sont équivalentes.

THÉORÈME 2. — *Si* $\underline{\lim}_n\, n^{-1} M_n^{\frac{1}{n}} > 0$, *il existe une fonction* $F(x)$ *appartenant à* $C_{dR}^{\star(-1)}\{M_n\}$ *et telle que*

$$m_n > \alpha^n M_n^c \qquad (n = 1, 2, \ldots;\ \alpha \text{ constante positive indépendante de } n).$$

Soit r_n un nombre supérieur ou égal à 1 tel que

$$r_n^n[T(r_n)]^{-1} = \overline{\text{borne}}_{r \geqq 1}\, r^n[T(r)]^{-1} = M_n^c$$

et λ_n la partie entière de r_n. On a

$$\lambda_n^n[T(\lambda_n)]^{-1} \geqq \lambda_n^n[T(r_n)]^{-1} = \lambda_n^n r_n^{-n} M_n^c \geqq 2^{-n} M_n^c.$$

La fonction

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} [2^n T(\lambda_n)]^{-\frac{1}{2}} e^{-x} L_{\lambda_n}(x)$$

a les propriétés indiquées dans le théorème. En effet, d'après (11) et (13),

$$m_p = \sum_{n=1}^{\infty} [2^n T(\lambda_n)]^{-1} (\lambda_n + 1)(\lambda_n + 2) \ldots (\lambda_n + p) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \beta_n,$$

$$\beta_n \leqq 2^p \lambda_m^p [T(\lambda_n)]^{-1} \leqq 2^p M_p^c \qquad (\text{si } \lambda_n \geqq p),$$

$$\beta_n \leqq M_1 (2p)^p \leqq C^p M_p \qquad (\text{si } \lambda_n < p),$$

car $\underline{\lim}_n\, n^{-1} M_n^{\frac{1}{n}} > 0$ entraîne qu'il existe $c > 0$ tel que $M_p > c^p p^p$ $(p = 1, 2, \ldots)$. Il existe donc $B > 0$ tel que $\beta_n \leqq B^p M_p$ $(n = 1, 2, \ldots)$ et l'on a bien

$$4^{-p} M_p^c \leqq m_p \leqq B^p M_p \qquad (p = 1, 2, \ldots).$$

THÉORÈME 3. — *Une condition nécessaire et suffisante pour que* $C_{dR}^{\star(-1)}\{M_n\} \subset C_{dR}^{\star(-1)}\{M'_n\}$ *est que l'une des conditions suivantes soit satisfaite :*

a. $\underline{\lim}_n\, n^{-1} M_n^{\frac{1}{n}} = 0$,

b. $\underline{\lim}_n\, n^{-1} M_n^{\frac{1}{n}} > 0$ *avec* $(M_n^c)^{\frac{1}{n}} = O\left(M_n'^{\frac{1}{n}}\right)$ $(n \to \infty)$.

En effet, dans le premier cas $C_{dR}^{*(-1)}\{M_n\}$ ne contient que la fonction nulle. Dans le second cas, la condition est suffisante d'après le théorème 1. On voit qu'elle est nécessaire d'après le théorème 2, en écrivant que $F(x)$ définie dans le théorème 2 appartient à la seconde classe.

2. Classes $C_{dR}^{*1}\{M_n\}$. — Pour le lemme 2 nous utilisons les notations (27).

Lemme 2. — *Si $f(x)$ est indéfiniment dérivable sur $[0, +\infty)$ et s'il existe une suite infinie croissante d'entiers positifs $\{n_i\}$ tels que*

$$\mathcal{J}_0(f) < \infty, \qquad m'_{n_i} = \mathcal{J}_{n_i}(f) < \infty,$$

$f(x)$ est développable en une série de polynomes de Laguerre

$$f(x) = \sum_{n=0} b_n \mathrm{L}_n(x).$$

Cette série converge uniformément et absolument sur tout segment fini $[0, X]$ (avec $0 < X < +\infty$) ainsi que ses dérivées. On a

$$m'_n = \mathcal{J}_n(f) = \sum_{p=n}^{\infty} b_p^2 \frac{p!}{\overline{p-n}!}.$$

On voit comme au lemme 1 qu'en posant

$$b_n = \int_0^{\infty} e^{-x} f(x) \mathrm{L}_n(x)\, dx \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$s_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \mathrm{L}_n(x)$$

il existe une suite de valeurs $\{x_i\}$ tendant vers $(+\infty)$ telle que

$$b_n = (-1)^p \lim_{i \to \infty} \int_0^{x_i} f^{(p)}(x) [e^{-x} \mathrm{L}_n(x)]^{(-p)}\, dx \qquad (p = 1, 2, \ldots).$$

L'inégalité de Schwarz, (10) et (14) donnent alors

$$|b_n| \leqq (m'_{n_i} \overline{n - n_i}!)^{\frac{1}{2}} (n!)^{-\frac{1}{2}}.$$

Il en résulte que la série $s_1(x)$ converge absolument et uniformément sur tout segment $[0, X]$ $(0 < X < \infty)$ ainsi que ses dérivées et que

$$b_n = \int_0^{\infty} s_1(x) e^{-x} \mathrm{L}_n(x)\, dx, \qquad \mathcal{J}_n(s_1) = \sum_{p=n}^{\infty} b_p^2 \frac{p!}{\overline{p-n}!} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Puis l'égalité de Parseval appliquée à $e^{-x}[g(x) - s_1(x)]$ montre que $f(x) \equiv s_1(x)$.

Théorème 4. — *Les classes $C_{dR}^{*1}\{M_n\}$ et $C_{dR}^{*1}\{M_n^0\}$ sont équivalentes.*

Il suffit de montrer que $C_{dR}^{*1}\{M_n\} \subset C_{dR}^{*1}\{M_n^0\}$. Soit $\{n_i\}$ la suite des indices principaux de $\{M_n\}$ par rapport à la régularisation exponentielle. Soit i l'indice tel que $n_i \leqq n < n_{i+1}$.

Posons pour abréger l'écriture

$$l_n = \sum_{v=n}^{\infty} b_p^2 p^n, \qquad l_{n,m} = \sum_{p=n}^{\infty} b_p^2 p^m.$$

Appliquant d'abord à l_n l'inégalité de Hölder, on obtient successivement

$$(\alpha) \qquad \begin{gathered} l_n^{n_{i+1}-n_i} \leqq l_{n,n_i}^{n_{i+1}-n}\, l_{n,n_{i+1}}^{n-n_i}, \qquad l_{n,n_i} \leqq l_{n_i}, \qquad l_{n,n_{i+1}} - l_{n_{i+1}} \leqq l_{n_i} n_{i+1}^{n_{i+1}-n_i}, \\ l_n^{n_{i+1}-n_i} \leqq 2 \max\left[l_{n_i}^{n_{i+1}-n}\, l_{n_{i+1}}^{n-n_i},\ (l_{n_i} n_{i+1}^{n-n_i})^{n_{i+1}-n_i} \right]. \end{gathered}$$

Comme $p^n e^{-n} \leqq p!(\overline{p-n}!)^{-1} \leqq p^n (p \geqq n)$, l'expression de m'_n donnée par le lemme 2 conduit à

$$(\beta) \qquad e^{-n} l_n \leqq m'_n \leqq l_n,$$

(α), (β) et l'hypothèse $m'_n < A^n M_n (n = 1, 2, \ldots)$ entraînent, compte tenu de (6),

$$m'_n \leqq 2 e^n A^n M_n^0 \qquad (n_i \leqq n < n_{i+1}),$$

ce qui démontre le théorème.

THÉORÈME 5. — *Il existe une fonction* $F(x)$ *telle que*

$$F(x) \in C_{dR}^{*1}\{M_n\}, \qquad \mathcal{J}_n(F) > \alpha^n M_n^0 \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

(*α constante positive indépendante de n*).

Soit μ_n la partie entière d'un nombre r_n tel que

$$r_n \geqq n, \qquad r_n^n [S(r_n)]^{-1} = \overline{\text{borne}}_{r \geqq n}\, r^n [S(r)]^{-1}.$$

On a

$$\begin{gathered} \mu_n^n [S(\mu_n)]^{-1} \geqq \mu_n^n [S(r_n)]^{-1} \geqq \mu_n^n (\mu_n + 1)^{-n} M_n^0 \geqq e^{-1} M_n^0, \\ \mu_n^p [S(\mu_n)]^{-1} \leqq M_p^0 \qquad (p \leqq n). \end{gathered}$$

La fonction

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} [2^n S(\mu_n)]^{-\frac{1}{2}} L_{\mu_n}(x)$$

a les propriétés voulues. En effet, les inégalités précédentes, la valeur de $\mathcal{J}_n(F)$ donnée par le lemme 2 et la double inégalité

$$n^p e^{-p} \leqq n! [\overline{n-p}!]^{-1} \leqq n^p \qquad (n \geqq p)$$

conduisent aux inégalités du type cherché

$$2^{-p} e^{-p-1} M_p^0 \leqq \mathcal{J}_p(F) \leqq M_p^0 \qquad (p = 1, 2, \ldots).$$

Théorème 6. — *Pour que* $C^{*1}_{dR}\{M_n\} \subset C^{*1}_{dR}\{M'_n\}$ *il faut et suffit que*

$$(M^0_n)^{\frac{1}{n}} = O\left(M'^{\frac{1}{n}}_n\right) \qquad (n \to \infty).$$

Ce théorème résulte des deux précédents comme dans le n° 1.

3. Classes $C^{-1}_{dR}\{M_n\}$:

Théorème 7. — *Si* $\underline{\lim}_{n} M_n^{\frac{1}{n}} = 0$, $C^{-1}_{dR}\{M_n\}$ *ne contient que la fonction nulle. Si* $\underline{\lim}_{n} M_n^{\frac{1}{n}} > 0$, $C^{-1}_{dR}\{M_n\}$ *et* $C^{-1}_{dR}\{M^d_n\}$ *sont équivalentes.*

Nous emploierons les notations suivantes (⁵) :

$$\varphi(x) = f(C^{-1}x), \qquad \Phi(x) = \int_{\infty}^{x}\int_{\infty}^{x_1}\cdots\int_{\infty}^{x_{p-1}} \varphi^{(n)}(x_p)\,dx_1\ldots dx_p$$
$$\mu_n = \overline{\text{borne}}_{x\geq 0}\, e^{x}\,|\varphi^{(n)}(x)|.$$

$[\varphi(x) - \Phi(x)]$ est un polynome en x de degré $(n-1)$. Si n est tel que M_n soit fini, il résulte des hypothèses que $|\varphi(x)|$ et $|\Phi(x)|$ sont bornées sur $[0, +\infty)$, donc que $\varphi(x) - \Phi(x) \equiv 0$. En particulier,

$$\varphi^{(n-1)}(x) = \int_{\infty}^{x} \varphi^{(n)}(t)\,dt, \qquad |\varphi^{(n-1)}(x)| < \mu_n \left|\int_{\infty}^{x} e^{-t}\,dt\right| = \mu_n e^{-x}.$$

La suite $\{\mu_n\}(n = 1, 2, \ldots)$ est donc croissante et inférieure à $\{M_n\}$.

Si $\underline{\lim}_{n} M_n^{\frac{1}{n}} = 0$, on a donc $\mu_0 = 0$ et $f(x) \equiv 0$.

Si $\underline{\lim}_{n} M_n^{\frac{1}{n}} > 0$, *a fortiori* $\lim_{n\to\infty}(n^n M_n)^{\frac{1}{n}} = +\infty$ et l'on peut considérer $\{M^d_n\}$ définie par $n^n M^d_n = (n^n M_n)^c$. Les inégalités

$$|f^{(n)}(x)| \leq C^n M_n e^{-X} \qquad (x \geq X \geq 0;\ n = 1, 2, \ldots)$$

entraînent (*voir* Mandelbrojt [18], p. 227)

$$|f^{(n)}(X)| \leq B^n M^d_n e^{-X} \qquad (X \geq 0;\ n = 1, 2, \ldots),$$

ce qui montre l'équivalence des deux classes.

Théorème 8. — *Si* $\lim M_n^{\frac{1}{n}} > 0$, *il existe une fonction* $F(x)$ *telle que*

$$F(x) \in C^{-1}_{dR}\{M_n\}, \qquad |F^{(n)}(0)| > \alpha^n M^d_n \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

α, *constante positive indépendante de* n.

(⁵) Pour cette démonstration, nous nous plaçons dans le cas où, pour (2), $C_1 = C$. Dans le cas général, les calculs sont les mêmes, en remplaçant M_n par $(C_1C^{-1})^n M_n$.

Soit λ_p la partie entière d'un nombre positif r_p tel que

$$r_p^p = p^p M_p^d H(r_p), \qquad H(r) = \overline{\text{borne}}_{p \geqq 1}\, r^p/M_p p^p, \qquad p^p M_p^d = \overline{\text{borne}}_{r \geqq 1}\, r^p/H(r).$$

On a

$$(\alpha) \qquad \lambda_p^n < n^n M_n^d H(\lambda_p) \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

$$(\beta) \qquad \lambda_p^p \geqq 2^{-p} p^p M_p^d H(\lambda_p) \qquad (p = 1, 2, \ldots).$$

La fonction

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} [2^n H(\lambda_n)]^{-1} \varphi_{\lambda_n}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

écrite avec les notations (10) a les propriétés voulues, car

$$F(x) = \sum_{n=1}^{p} u_n(x) + \sum_{n=p+1}^{\infty} u_n(x) = G_1(x) + G_2(x).$$

Or (15) et $\underline{\lim}_n M_n^{\frac{1}{n}} > 0$ d'une part, (16) d'autre part, donnent avec (α)

$$|G_1^{(p)}(x)| \leqq A^p e^{-\frac{x}{2}} \leqq B^p M_p e^{-\frac{x}{2}}, \qquad |G_2^{(p)}(x)| \leqq B^p M_p^d e^{-\frac{x}{2}} \qquad (p = 1, 2, \ldots).$$

Ces relations, où B ne dépend pas de p, montrent que $F(x) \in C_{dR}^{-1}\{M_n\}$.
Mais (17) et (β) montrent que

$$2^p |F^{(p)}(0)| \geqq H^{-1}(\lambda_p) |\varphi_{\lambda_p}^{(p)}(0)| \geqq H^{-1}(\lambda_p) p^{-p} \lambda_p^p \geqq 2^{-p} M_p^d \qquad (p = 1, 2, \ldots),$$

ce qui achève la démonstration.

Théorème 9. — *Une condition nécessaire et suffisante pour que* $C_{dR}^{-1}\{M_n\} \subset C_{dR}^{-1}\{M'_n\}$ *est que l'une des conditions soit satisfaite :*

a. $\underline{\lim}_n M_n^{\frac{1}{n}} = 0$;

b. $\underline{\lim}_n M_n^{\frac{1}{n}} > 0$, *avec* $(M_n^d)^{\frac{1}{n}} = O\left(M_n'^{\frac{1}{n}}\right) (n \to \infty)$.

Ce théorème qui résulte des deux précédents résout le problème d'équivalences pour les classes $C_{dR}^{-1}\{M_n\}$.

4. Classes $C_{dR}^{1}\{M_n\}$:

Lemme 3. — *Si* $P_n(x)$ *est un polynome de degré* $n > 1$, *tel que pour* $x \geqq 0$ *on ait* $|P_n(x)| \leqq M_0 e^x$, *il en résulte pour* $1 \leqq p < n$

$$|P_n^{(p)}(x)| \leqq 4[e(1 + 40e)]^p n^p p^{-p} M_0 e^x \qquad (x \geqq 0).$$

On a

$$g_n(x) = P_n(4^{-1}x) = \sum_{i=0}^{n} a_i L_i(x), \qquad a_i = \int_0^{\infty} e^{-x} g_n(x) L_i(x)\, dx \qquad (0 \leqq i \leqq n).$$

Comme $|g_n(x)e^{-\frac{x}{4}}| \leqq M_0$ pour $x \geqq 0$, l'inégalité de Schwarz appliquée à a_i montre que $|a_i| \leqq 2M_0$, d'où

$$\left|\frac{d^n}{dx^n}[e^{-x}P_n(x)]\right| \leqq 2M_0 5^n \qquad (x \geqq 0).$$

Comme, de plus, $|e^{-x}P_n(x)| \leqq M_0$ il en résulte (*voir* Mandelbrojt [18], p. 222)

$$\left|\frac{d^p}{dx^p}[e^{-x}P_n(x)]\right| \leqq 2M_0(40e)^p n^p p^{-p}.$$

La formule de Leibniz appliquée à $P_n(x) = e^x e^{-x} P_n(x)$ donne alors

$$|P_n^{(p)}(x)| \leqq 2M_0 e^x \sum_{k=0}^{p} (40e)^k C_p^k n^k k^{-k}.$$

La fonction $n^x x^{-x}$ croît jusqu'à $x = ne^{-1}$ et a pour maximum $e^{ne^{-1}}$.

On peut donc dans le second membre remplacer $n^k k^{-k}$ par $n^p p^{-p}$ si $pe \leqq n$, par e^p si $pe \geqq n$, ce qui donne l'inégalité annoncée.

LEMME 4. — *Si $f(x)$, fonction n fois dérivable sur $[0, +\infty)$ vérifie*

$$|f(x)| \leqq M_0 e^x \quad (x \geqq 0), \qquad |f^{(n)}(x)| \leqq M_n e^x \quad (x \geqq 0),$$

on a pour $0 \leqq p < n$ et $x \geqq 0$

$$|f^{(p)}(x)| \leqq 4[2e(1+40e)]^p n^p p^{-p} e^x \max\left(M_0^{1-\frac{p}{n}} M_n^{\frac{p}{n}}, M_0\right).$$

Considérons la fonction $F(X) = f(a+X)$ $(a \geqq 0, X \geqq 0)$ et son développement de Taylor d'ordre $(n-1)$ autour de $X = 0$

$$F(X) = P_{n-1}(X) + \int_0^X \frac{(X-t)^{n-1}}{(n-1)!} F^{(n)}(t)\, dt.$$

Les hypothèses entraînent que

$$|P_{n-1}(X)| \leqq e^a(M_0 + M_n)e^{2X} \qquad (X \geqq 0).$$

Appliquant alors le lemme 3 à $P_{n-1}(\lambda X)$ $(0 < \lambda \leqq 1)$ pour $X = 0$ choisissant $\lambda^n = \min(1, M_0 M_n^{-1})$ et remarquant que $P_{n-1}^{(p)}(0) = F^{(p)}(0) = f^{(p)}(a)$, on obtient l'inégalité annoncée.

THÉORÈME 10. — *Les classes $C_{dR}^1\{M_n\}$ et $C_{dR}^1\{n^{-n}(n^n M_n)^0\}$ sont équivalentes.*

Soit $\{n_i\}$ la suite d'indices principaux de $\{n^n M_n\}$ relative à la régularisation exponentielle. Supposons que $n_i \leqq n < n_{i+1}$ et que $f(x) \in C_{dR}^1\{M_n\}$. Le lemme 4, appliqué à $f^{(n_i)}(x)$ compte tenu des hypothèses (2) pour $n = n_i$ et $n = n_{i+1}$, conduit, tous calculs faits, moyennant la relation (6) écrite pour $\{n^n M_n\}$, à

$$n^n |f^{(n)}(x)| \leqq 4D^n \left[(u-1)u^{\frac{u}{1-u}}\right]^{n-n_i} C_n^{n-n_i}(n^n M_n)^0 e^x,$$

avec

$$D = C\,2e(1+40e), \qquad u = n_{i+1}n_i^{-1} > 1, \qquad [C, \text{ constante de } (2)],$$

Comme $C_n^{n-n_i} < 2^n$ et que la fonction de u entre crochets est inférieure à 1 pour $u > 1$, cette inégalité montre bien que la première des classes considérées est contenue dans la seconde. L'inclusion opposée étant évidente, les deux classes sont équivalentes.

Théorème 11. — *Il existe une fonction* $F(x)$ *telle que*

$$F(x) \in C^1_{dR}\{M_n\}, \qquad |F^{(n)}(0)| > \alpha^n n^{-n}(n^n M_n)^0 \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

α, *constante positive indépendante de* n.

Soit λ_n la partie entière d'un nombre $r_n \geqq r$ tel que

$$r_n^n S_1^{-1}(r_n) = \overline{\underset{r \geqq n}{\text{borne}}}\, r^n S_1^{-1}(r), \qquad S_1(r) = \max_{n \leqq r} r^n n^{-n} M_n^{-1}.$$

On a comme au théorème 5

$$\lambda_p^n S_1^{-1}(\lambda_p) \leqq (n^n M_n)^0 \leqq e\lambda_n^n S_1^{-1}(\lambda_n) \qquad (p \leqq n,\ n = 1, 2, \ldots).$$

Une fonction répondant aux conditions du théorème est

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} S_1^{-1}(\lambda_n) L_{\lambda_m}(2x).$$

Les inégalités précédentes, (18) et (19) conduisent en effet à

$$|F^{(k)}(x)| \leqq 2^{k+1}(64e)^k k^{-k}(k^k M_k)^0 e^x \qquad (x \geqq 0;\ k = 1, 2, \ldots),$$
$$|F^{(k)}(0)| \geqq e^{-1} k^{-k}(k^k M_k)^0 \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Théorème 12. — *Pour que* $C^1_{dR}\{M_n\} \subset C^1_{dR}\{M'_n\}$, *il faut et il suffit que*

$$[(n^n M_n)^0]^{\frac{1}{n}} = O\left\{n(M'_n)^{\frac{1}{n}}\right\}.$$

Ce théorème résulte des théorème 10 et 11.

III. — Classes de fonctions sur la droite entière.

$F(x)$ étant une fonction indéfiniment dérivable sur $(-\infty, \infty)$, nous poserons

$$(28)\qquad I_n^\star(F) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{x^2}|F^{(n)}(x)|^2\,dx, \qquad \mathcal{J}_n^\star(F) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}|F^{(n)}(x)|^2\,dx \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

1. Classes $C_R^{\star(-2)}\{M_n\}$:

Lemme 1. — *Nous utilisons les notations* (23) *et* (28). *Si* $f(x)$, *indéfiniment dérivable sur* $(-\infty, \infty)$, *est telle que*

$$I_0^\star(f) < \infty, \qquad I_{n_i}^\star(f) < \infty \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

pour une suite infinie d'entiers positifs $\{n_i\}$, $f(x)$ *est développable en une série*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-x^2} \mathrm{K}_n(x)$$

absolument et uniformément convergente sur $(-\infty, \infty)$ *ainsi que toutes ses dérivées et l'on a*

$$m_p^\star = \mathrm{I}_p^\star(f) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^p a_n^2 \frac{\overline{n+p}\,!}{n\,!} \qquad (p = 0, 1, 2, \ldots).$$

La démonstration de ce lemme est analogue à celle du lemme 1 (§ II). Posant

$$a_n = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \mathrm{K}_m(x)\, dx \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$s^\star(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-x^2} \mathrm{K}_n(x),$$

on montre à partir de $\mathrm{I}_0^\star(f) < \infty$ que

$$a_n = \lim_{i \to \infty} (-1)^p \int_{x'_i}^{x_i} f^{(p)}(x) \mathrm{K}_n^{(-p)}(x)\, dx,$$

$\{x'_i\}$ et $\{x_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ étant deux suites tendant respectivement vers $(-\infty)$ et $(+\infty)$. Il en résulte moyennant (25) que

$$2^{n_i} \overline{n + n_i}\,! \, |a_n|^2 \leq n\,!\, m_{n_i}^\star \qquad (i = 1, 2, \ldots),$$

puis, comme le système $\{e^{-x^2} \mathrm{K}_n(x)\}$ est orthonormal complet sur $(-\infty, \infty)$, que $s^\star(x)$ a les propriétés que le lemme attribue à $f(x)$, enfin que

$$\mathrm{I}_0^\star(f - s) = 0, \qquad \text{d'où} \qquad f(x) \equiv s^\star(x).$$

Théorème 1. — *Si* $\underline{\lim}_n\, n^{-1} \mathrm{M}_n^{\frac{1}{n}} = 0$, $\mathrm{C}_\mathrm{R}^{\star(-2)}\{\mathrm{M}_n\}$ *ne contient que la fonction nulle.*

Si $\underline{\lim}_n\, n^{-1} \mathrm{M}_n^{\frac{1}{n}} > 0$, $\mathrm{C}_\mathrm{R}^{\star(-2)}\{\mathrm{M}_n\}$ et $\mathrm{C}_\mathrm{R}^{\star(-2)}\{\mathrm{M}_n^c\}$ sont équivalentes. Ceci résulte du lemme 1 (comme au paragraphe II, th. 1).

Théorème 2. — *Si* $\underline{\lim}_n\, n^{-1} \mathrm{M}_n^{\frac{1}{n}} > 0$, *il existe une fonction* $\mathrm{F}(x)$ *telle que*

$$\mathrm{F}(x) \in \mathrm{C}_\mathrm{R}^{\star(-2)}\{\mathrm{M}_n\}, \qquad m_n^\star = \mathrm{I}_n^\star(f) > \alpha^n \mathrm{M}_n^c \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

α, *constante positive indépendante de* n.

Avec les notations du théorème 2 (§ II)

$$\mathrm{F}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}[2^n\,\mathrm{T}(\lambda_n)]^{-\frac{1}{2}}\,e^{-x^2}\,\mathrm{K}_{\lambda_n}(x).$$

La démonstration est la même que pour le théorème 2 (§ II).

Théorème 3. — *Pour que* $C_{\mathrm{R}}^{\star(-2)}\{\mathrm{M}_n\}\subset C_{\mathrm{R}}^{\star(-2)}\{\mathrm{M}'_n\}$, *il faut et suffit que l'une des conditions suivantes soit satisfaite :*

a. $\varliminf_n n^{-1}\,\mathrm{M}_n^{\frac{1}{n}}=0$;

b. $\varliminf_n n^{-1}\,\mathrm{M}_n^{\frac{1}{n}}>0$ avec $(\mathrm{M}_n^c)^{\frac{1}{n}}=\mathrm{O}\left(\mathrm{M}'^{\frac{1}{n}}_n\right)\ (n\to\infty)$.

2. Classes $C_{\mathrm{R}}^{\star 2}\{\mathrm{M}_n\}$:

Lemme 2. — *Si $f(x)$, indéfiniment dérivable sur $(\infty,\ \infty)$, est telle que*

$$\mathfrak{I}_n^\star(f)<\infty,\qquad \mathfrak{I}_{n_i}^\star(f)<\infty\qquad (i=1,\ 2,\ \ldots)$$

pour une suite croissante infinie d'entiers $\{n_i\}$, $f(x)$ est développable en une série de polynomes d'Hermite

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n\,\mathrm{K}_n(x),$$

cette série convergeant absolument et uniformément sur tout segment fini, et l'on a

$$m_n^{\star\prime}=\mathfrak{I}_n^\star(f)=\sum_{n=p}^{\infty}2^p\,a_n^2\,\frac{n\,!}{\overline{n-p}\,!}.$$

La marche de la démonstration est la même que pour le lemme 2 (§ II).

Avec les notations (23) on pose

$$b_n=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,\Phi_n(x)\,dx\qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

$$s_n^\star(x)=\sum_{n=p}^{\infty}b_n\,\mathrm{K}_n(x).$$

On montre que, avec les notations du lemme 1 (§ II),

$$b_n=\lim_{i\to\infty}(-1)^p\int_{x'_i}^{x_i}f^{(p)}(x)\,\Phi^{(-p)}(x)\,dx,$$

puis on suit un raisonnement analogue à celui du lemme 2 (§ II), e^{x^2} et (26) remplaçant e^x et (10).

Théorème 4. — *Les classes* $C_{\mathrm{R}}^{\star 2}\{\mathrm{M}_n\}$ *et* $C_{\mathrm{R}}^{\star 2}\{\mathrm{M}_n^0\}$ *sont équivalentes.*

THÉORÈME 5. — *Il existe une fonction* $F(x)$ *telle que*

$$F(x) \in C_R^{*2}\{M_n\}, \qquad m_n^{*\prime} > \alpha^n M_n^0 \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

α, *constante positive indépendante de* n.

Avec les mêmes notations que pour le théorème 5 (§ II)

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} [2^n S(\mu_n)]^{-\frac{1}{2}} K_{\mu_n}(x).$$

THÉORÈME 6. — *Pour que* $C_R^{*2}\{M_n\} \subset C_R^{*2}\{M'_n\}$ *il faut et suffit que*

$$(M_n^0)^{\frac{1}{n}} = O\left(M_n'^{\frac{1}{n}}\right) \qquad (n \to \infty).$$

Les théorèmes 4, 5, 6 se démontrent comme les théorèmes correspondants du paragraphe II.

3. CLASSES $C_R^{-2}\{M_n\}$:

THÉORÈME 7. — *Si* $\underline{\lim}_n\, n^{-\frac{1}{2}} M_n^{\frac{1}{n}} = 0$, $\{C_R^{-2} M_n\}$ *ne contient que la fonction nulle.*

Si $\underline{\lim}_n\, n^{-\frac{1}{2}} M_n^{\frac{1}{n}} > 0$, $C_R^{-2}\{M_n\}$ *et* $C_R^{-2}\{M_n^c\}$ *sont équivalentes.*

C étant la constante intervenant dans (4)([6]), soit

$$\varphi(x) = f(C^{-1}x), \qquad \psi_p(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{(x-t)^{n-p-1}}{(n-p-1)!} \varphi^{(n)}(t)\, dt \qquad (0 \leq p < n).$$

Soit n tel que M_n soit fini. Comme $|\varphi^{(n)}(x)| \leq M_n e^{-x^2}$ et que $e^{x^2}|\varphi(x)|$ est borné sur la droite, $[\varphi(x) - \psi_0(x)]$ est un polynome $P_{n-1}(x)$ tel que $e^{x^2}|P_{n-1}(x)|$ soit borné sur la droite, donc identiquement nul. D'où en dérivant

$$\varphi^{(p)}(x) \equiv \psi_p(x) \qquad (p = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Tenant compte dans l'expression de $\psi_p(x)$ des inégalités

$$|\varphi^{(n)}(t)| \leq M_n e^{-t^2}, \qquad (k+1)^{\frac{k+1}{2}} u^k < 2^{k+1} k!\, e^{u^2} \qquad (u > 0,\ k = 0, 1, 2, \ldots),$$

il vient

$$(\alpha) \qquad (n-p)^{\frac{n-p}{2}} |\varphi^{(p)}(x)| \leq 3(2\sqrt{2})^{n-p} M_n e^{-x^2} \qquad (p = 0, 1, 2, \ldots, n-1).$$

Si $\underline{\lim}_n\, n^{-\frac{1}{2}} M_n^{\frac{1}{n}} > 0$, soit

$$F(x) = \varphi(x)\, e^{\frac{x^2}{2}}.$$

([6]) Dans cette démonstration, on se place dans le cas où, dans (4), $C_1 = C$, ce qui simplifie l'écriture. Dans le cas général, les calculs sont les mêmes, en remplaçant M_n par $(C_1 C^{-1})^n M_n$.

Exprimant $F^{(n)}(x)$ par la formule de Leibniz, utilisant (α) et (20) on obtient, tous calculs faits

$$|F^{n)}(x)| \leqq 3.5^n M_n \qquad (n=1, 2, \ldots).$$

Il en résulte, d'après le chapitre I (th. 6, § I)

$$|F^{n)}(x)| \leqq 6.5^n M_n^c \qquad (n=1, 2, \ldots; -\infty < x < \infty).$$

Comme $\underline{\lim}_n\, n^{-\frac{1}{2}} M_n^{\frac{1}{n}} > 0$, on a

$$\left|\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)^{(p)}\right| \leqq 2^p p^{\frac{p}{2}} e^{-\frac{x^2}{4}} \leqq a^p M_c^p e^{-\frac{x^2}{4}} \qquad (p=1, 2, \ldots).$$

Exprimant la dérivée d'ordre n de $\varphi(x) = F(x) e^{-\frac{x^2}{2}}$ par la formule de Leibniz et utilisant les deux groupes d'inégalités précédents, on aboutit, en remarquant que $M_p^c M_{n-p}^c \leqq M_1^c M_n^c$ $(p=1, \ldots, n)$, à

$$|\varphi^{(n)}(x)| \leqq 6\mu_0 (a+5)^n M_n^c e^{-\frac{x^2}{4}} \qquad (n=1, 2, \ldots; -\infty < x < \infty),$$

où $\mu_0 = \max(M_0, M_1)$, donc $C_R^{-2}\{M_n\} \subset C_R^{-2}\{M_n^c\}$, ce qui établit le théorème.

THÉORÈME 8. — *Si* $\underline{\lim}_n\, n^{-\frac{1}{2}} M_n^{\frac{1}{n}} > 0$, *il existe une fonction* $F(x)$ *telle que*

$$F(x) \in C_R^{-2}\{M_n\}, \qquad |F^{(n)}(0)| > \alpha^n M_n^c \qquad (n=1, 2, \ldots),$$

α, *constante positive indépendante de n.*

Avec les notations du théorème 2 (§ II),

$$F(x) = e^{-x^2} f_1(x) = e^{-x^2} \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} T^{-1}(\lambda_n) \cos\left(\lambda_n x + \frac{\pi}{4}\right)$$

a les propriétés voulues. Car les inégalités vérifiées par λ_n (*voir* th. 2, § II) montrent d'abord que

$$|f_1^{(n)}(x)| \leqq M_n^c \qquad (-\infty < x < \infty;\ n=1, 2, \ldots),$$
$$|f_1^{(n)}(0)| \geqq 4^{-n} 2^{-\frac{1}{2}} M_n^c \qquad (n=1, 2, \ldots).$$

Il en résulte d'abord comme à la fin du théorème précédent que $F(x) \in C_R^{-2}\{M_n\}$. D'autre part,

$$F^{n)}(0) = \sum_{p=0}^{n} C_n^p f_1^{(p)}(0) \left(e^{-x^2}\right)_{x=0}^{(n-p)}.$$

Or $f_1^{(p)}(0)$ a le signe de $\cos\left(\frac{\pi}{4} + p\frac{\pi}{2}\right)$ et, pour $x=0$, les dérivées d'ordre impair de e^{-x^2} sont nulles tandis que les dérivées d'ordre pair $2k$ ont le signe de

$(-1)^k$. Donc les termes de la somme précédente out tous le même signe, d'où la relation du type cherché

$$|F^{(n)}(0)| > |f_1^{(n)}(0)| > 4^{-n} 2^{-\frac{1}{2}} M_n^c \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

THÉORÈME 9. — *Pour que $C_R^{-2}\{M_n\} \subset C_R^{-2}\{M'_n\}$ il fàut et il suffit que l'une des conditions suivantes soit satisfaite :*

a. $\underline{\lim}_n\, n^{-\frac{1}{2}} M_n^{\frac{1}{n}} = 0$;

b. $\underline{\lim}_n\, n^{-\frac{1}{2}} M_n^{\frac{1}{n}} > 0$ *avec* $(M_n^c)^{\frac{1}{n}} = O\left(M_n'^{\frac{1}{n}}\right) (n \to \infty)$.

4. CLASSES $C_R^2\{M_n\}$:

LEMME 3. — *Si $\pi_n(x)$ est un polynome de degré n tel que*

$$|\pi_n(x)| \leqq M_0 e^{x^2} \qquad (-\infty < x < \infty),$$

on a pour $0 \leqq p \leqq n$

$$|\pi_n^{(p)}(x)| \leqq 4 M_0 K^p n^{\frac{p}{2}} e^{2x^2} \qquad (-\infty < x < \infty),$$

K *étant une constante absolue. On peut prendre*

$$K = 2 + 12(2 + \sqrt{2})\sqrt{e}.$$

On peut écrire

$$\pi_n\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) = \sum_{p=0}^{n} a_p H_p(x).$$

$$a_p = (2^p p!\sqrt{\pi})^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \pi_n\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) e^{-x^2} H_p(x)\, dx.$$

L'inégalité de Schwarz et (24) donnent

$$(2^p p!)^{\frac{1}{2}} |a_p| \leqq 2^{\frac{1}{4}} M_0 \qquad (0 \leqq p \leqq n).$$

Ces inégalités, jointes à (22), entraînent une majoration de la dérivée d'ordre n de $e^{-\frac{x^2}{2}} \pi_n\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$, donc aussi de $e^{-x^2}\pi_n(x)$.

Tous calculs faits, on obtient

$$|[e^{-x^2}{}_n(x)]\pi^{(n)}| \leqq 2 M_0 \delta^n n^{\frac{n}{2}} \qquad (-\infty < x < \infty),$$

avec

$$S = 12(2 + \sqrt{2})\sqrt{e}$$

Comme, de plus, $|e^{-x^2}\pi_n(x)| \leqq M_0$, il en résulte

$$|[e^{-x^2}\pi_n(x)]^{(p)}| \leqq 4 M_0 \delta^p n^{\frac{p}{2}} \qquad (0 \leqq p \leqq n).$$

Comme $\pi_n(x) = e^{x^2} e^{-x^2} \pi_n(x)$, on aboutit, par la formule de Leibniz et les inégalités ci-dessus, à la majoration annoncée.

LEMME 4. — *Si $f(x)$, fonction n fois dérivable sur $(-\infty, \infty)$, vérifie*

$$|f(x)| \leqq M_0 e^{x^2} \quad \text{et} \quad |f^{(n)}(x)| \leqq M_n e^{x^2} \qquad (-\infty < x < \infty),$$

on a pour $0 \leqq p < n$

$$|f^{(p)}(x)| \leqq 8\sqrt{2}(2K)^p \max\left(M_0 n^{-\frac{p}{2}}, M_0^{1-\frac{p}{n}} M_n^{\frac{p}{n}}\right) e^{2x^2} \qquad (-\infty < x < \infty).$$

Considérons la fonction

$$F(u) = f\left(x_0 + 2^{-\frac{1}{2}} \lambda u\right) \qquad (0 < \lambda \leqq 1).$$

Les hypothèses faites sur f entraînent

$$|F(u)| \leqq M_0 e^{2x_0^2} e^{u^2}, \qquad |F^{(n)}(u)| \leqq \lambda^n 2^{-\frac{n}{2}} M_n e^{2x_0^2} e^{u^2} \qquad (-\infty < x < \infty).$$

Ces inégalités montrent que, si l'on envisage le développement de Taylor d'ordre $(n-1)$ de $F(u)$ autour de $u = 0$, soit

$$F(u) = P_{n-1}(u) + \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} F^{(n)}(t)\, dt,$$

on a

$$|P_{n-1}(u)| \leqq \left(M_0 + \sqrt{2}\, 2^{\frac{n}{2}} n^{-\frac{n}{2}} \lambda^n M_n\right) e^{2x_0^2} e^{u^2} \qquad (-\infty < u < \infty)$$

(ce résultat s'obtient comme le résultat analogue, pour $\psi_p(x)$, obtenu au cours du théorème 7, § III).

Si l'on applique alors le lemme 3 à $P_{n-1}(u)$ pour $u = 0$, si l'on choisit $\lambda = \min\left(1, M_0 n^{\frac{n}{2}} 2^{-\frac{n}{2}} M_n^{-1}\right)$ et si l'on remarque que

$$P_{n-1}^{(p)}(0) = F^{(p)}(0) = \lambda^p 2^{-\frac{p}{2}} f^{(p)}(x_0) \qquad (0 \leqq p < n),$$

on aboutit à l'inégalité annoncée.

THÉORÈME 10. — *Les classes $C_R^2\{M_n\}$ et $C_R^2\{\sqrt{(M_n^2)^0}\}$ sont équivalentes.*

Il suffit de montrer que la première est contenue dans la seconde. Soit $\{n_i\}$ la suite d'indices principaux, relative à la régularisation exponentielle, de $\{M_n^2\}$. Supposons que $f(x) \in C_R^2\{M_n\}$ et que $n_i \leqq n < n_{i+1}$. On peut appliquer le lemme 4 à la fonction $f^{(n_i)}(x)$ qui vérifie les inégalités (4) pour $n = n_i$ et $n = n_{i+1}$. Se servant alors de l'égalité (6) écrite pour la suite $\{M_n^2\}$, il vient

$$f^{(n)}(x)^2 \leqq A^n (M_n^2)^0 e^{4x^2}$$

(A indépendant de n), ce qui démontre le théorème.

THÉORÈME 11. — *Il existe une fonction* $F(x)$ *telle que*

$$F(x) \in C_R^2\{M_n\}, \qquad |F^{(n)}(0)| > \alpha^n \sqrt{(M_n^2)^0} \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

α, constante positive, indépendante de n.

$L_m(u)$ étant le polynome de Laguerre de degré m, posons

$$\Psi_{2m}(x) = L_m(x^2), \qquad \Psi_{2m+1}^*(x) = \frac{d}{dx}\{L_{m+1}(x^2),$$

$L_m(x^2)$ et $L_{m+1}(x^2)$ étant inférieurs en module à $e^{\frac{x^2}{2}}$ on peut leur appliquer le lemme 3, d'où pour $0 \leqq p \leqq n$

$$|\Psi_{2m}^{(p)}(x)| \leqq 4 \cdot 2^{-\frac{p}{2}} K^p (2m)^{\frac{p}{2}} e^{x^2},$$

$$|\Psi_{2m+1}^{*(p)}(x)| \leqq 4 \cdot 2^{-\frac{p+1}{2}} K^{p+1} (2m+2)^{\frac{p+1}{2}} e^{x^2}.$$

D'autre part

$$|\Psi_{2m}^{(p)}(0)| = C_m^{\frac{p}{2}} p! \left[\left(\frac{p}{2}\right)!\right]^{-1} > \beta^p (2m)^{\frac{p}{2}} \qquad (p \text{ pair}),$$

$$|\Psi_{2m+1}^{*(p)}(0)| > \beta^p (2m+2)^{\frac{p+1}{2}} \qquad (p \text{ impair}),$$

$$\Psi_{2m}^{(p)}(0) = 0 \quad (p \text{ impair}), \qquad \Psi_{2m+1}^{*(p)}(0) = 0 \quad (p \text{ pair}),$$

β étant une constante positive absolue. Donc si l'on pose

$$\Psi_{m+1}(x) = 2^{\frac{1}{2}}[4k(2m+2)]^{-\frac{1}{2}} \Psi_{2m+1}^*(x),$$

$$2P_n(x) = \Psi_n(x) + \Psi_{n-1}(x) \qquad (n \text{ entier quelconque}),$$

les polynomes $P_n(x)$ vérifient pour $0 \leqq p \leqq n$

$$a^p |P_n^{(p)}(x)| e^{-x^2} \leqq n^{\frac{p}{2}} \leqq b^p |P_n^{(p)}(0)|,$$

a et b constantes positives absolues.

Si λ_n est la partie entière d'un nombre $r_n \geqq n$ tel que

$$r_n^n S_1^{-1}(r_n) = \overline{\underset{r \geqq n}{\text{borne}}}\, r^n S_1^{-1}(r), \qquad S_1(r) = \max_{n \leqq r} r^n M_n^{-2},$$

$\{\lambda_n\}$ vérifie les inégalités

$$\lambda_p^n S_1^{-1}(\lambda_p) \leqq (M_n^2)^0 \leqq e \lambda_n^n S_1^{-1}(\lambda_n) \qquad (p \leqq n).$$

Les deux groupes d'inégalités obtenus montrent que

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} S_1^{-\frac{1}{2}}(\lambda_n) P_{\lambda_n}(x)$$

a les propriétés voulues.

THÉORÈME 12. — *Pour que* $C_R^2\{M_n\} \subset C_R^2\{M'_n\}$, *il faut et suffit que*

$$[(M_n^2)^0]^{\frac{1}{n}} = O\left[(M_n'^2)^{\frac{1}{n}}\right] \qquad (n \to \infty).$$

CHAPITRE III.

TRANFORMÉES DE CERTAINES CLASSES DE FONCTIONS PAR UN CHANGEMENT DE VARIABLE.

1. INTRODUCTION; NOTIONS PRÉLIMINAIRES. — M. Mandelbrojt ([16] et [18] a posé et partiellement résolu la question suivante.

Si $f(x)$ appartient à une classe donnée $C_f\{M_n\}$ sur l'intervalle fermé $[-1, 1]$, à quelle classe appartient, sur la droite entière, la fonction $F(\theta)=f(\cos\theta)$ déduite de $f(x)$ par le changement de variable $x=\cos\theta$? Inversement, sachant qu'une fonction $F(\theta)=f(\cos\theta)$ appartient à une classe donnée $C_R\{M_n\}$, à quelle classe appartient $f(x)$ sur l'intervalle ouvert $(-1, 1)$ ou l'intervalle fermé $[-1, 1]$? Rappelons que $f(x)$ est dite appartenir à $C_f\{M_n\}$ sur $[-1, 1]$ si elle est indéfiniment dérivable sur cet intervalle et y vérifie

$$|f^{n)}(x)| \leqq C^n M_n$$

($n=1, 2, \ldots$; $|x| \leqq 1$; C, constante positive pouvant dépendre de f, non de n).

On dit que $f(x)$ appartient à la classe $C_0\{M_n\}$ sur $[-1, 1]$ si elle appartient à $C_f\{M_n\}$ sur tout intervalle fermé intérieur à $(-1, 1)$. M. Mandelbrojt a démontré les résultats suivants :

1° Si $f(x) \in C_f\{M_n\}$ sur $[-1, 1]$, $F(\theta)$ appartient à la classe $C_R\{M^c_{n+2}\}$, M^c_n étant définie par

$$M^{\bar{c}}_n = \overline{\text{borne}}_{r\geqq 1}\, r^n S^{-1}(r), \qquad S(r) = \max_{n\leqq r} r^n M_n^{-1}.$$

2° Si $|F^{(n)}(\theta)| < A_n$ ($n=1, 2, \ldots$) et si $C_R\{A^c_n\}$ est une classe dérivable, on a, pour tout $\varepsilon > 0$, dans $[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$,

$$|f^{n)}(x)| < \beta^n A^{\bar{0}}_n,$$

β, constante indépendante de n, ne dépendant que de $\{A^c_n\}$ et de ε, $A^{\bar{0}}_n$ étant définie par

$$A^{\bar{0}}_n = \overline{\text{borne}}_{r\geqq n}\, r^n/T(r), \qquad T(r) = \max_{n\geqq 1} r^n/A_n.$$

Les notations ci-dessus sont justifiées par l'interprétation géométrique que M. Mandelbrojt a donné des suites $M^{\bar{c}}_n$, $M^{\bar{0}}_n$ dans [16]. Dans ce chapitre :

1° Nous trouvons la plus petite classe C_R contenant toutes les transformées $F(\theta)$ des fonctions de la classe $C_f\{M_n\}$ sur $[-1, 1]$ par le changement de variable $x=\cos\theta$. C'est la classe $C_R\{M^{\bar{c}}_n\}$;

2° Considérant l'ensemble des fonctions $f(\cos\theta)=F(\theta)$ vérifiant $|F^{(n)}(\theta)| \leqq CM_n$ ($n=1, 2\ldots$, C indépendante de n), nous trouvons la plus petite classe C_f sur $[-1, 1]$ et la plus petite classe C_0 sur $(-1, 1)$ contenant toutes ces fonctions $f(x)$. Ce sont respectivement les classes $C_f\{M_n^\star\}$ et $C_0\{M_n^0\}$, $M_n^\star$ étant défini par

$$n^n M_n^\star = \overline{\underset{r\geq n}{\text{borne}}}\, r^{2n}/T(r), \qquad T(r) = \max_{n\geq 1} r^n/M^n.$$

Rappelons les propriétés suivantes qui nous seront utiles. $\{M_n^c\}$ s'obtient géométriquement à partir de $\{M_n^0\}$ comme suit. Les points $(x=n,\ y=\log M_n^c)$ sont situés sur une ligne polygonale convexe obtenue de la façon suivante : pour chacun des contours polygonaux convexes constituant la base exponentielle sur laquelle sont les points $(n, \log M_n^0)$, on prolonge indéfiniment le côté le plus à droite vers les x croissants, et on ne laisse que le contour supérieur de la figure ainsi obtenue.

Soit $\{M_n\}$ une suite (S_∞), $\{M_n^c\}$ sa suite régularisée convexe. Les indices principaux (en nombre infini) de $\{M_n\}$ sont les indices n_i tels que $M_{n_i} = M_{n_i}^c$. Les points $(n, \log M_n^c)$ sont sur la ligne polygonale convexe, de pente croissant vers l'infini, ayant pour sommets les points $(n_i, \log M_{n_i})$. Les indices principaux peuvent encore être ainsi définis : si $t \geq 0$, on appelle $D(t)$ la plus haute droite de pente t ne laissant au-dessous d'elle aucun point $(n, \log M_n)$; les indices principaux n_i sont les indices tels que le point $(n_i, \log M_{n_i})$ soit situé sur au moins une droite $D(t)$. Sur chaque $D(t)$ il y a un nombre fini (≥ 1) de points $(n, \log M_n)$. Soit $m(t)$ l'indice du plus à droite de ces points, $t = \log r$, $m(t) = N(r)$. Avec ces notations, on a

$$\text{(A)} \qquad \log T(r) = \log T(1) + \int_1^r \frac{N(u)}{u}\,du.$$

Nous utiliserons aussi les propriétés suivantes des polynomes de Tchebycheff, énoncés dans [18] et de la régularisation exponentielle (*voir* Mandelborjt [18], p. 224). On pose

$$T_n(x) = \cos n(\operatorname{arc}\cos x);$$

$$\text{(B)} \qquad \begin{cases} (x^2-1)\,T_n^{(k+2)}(x) + (2k+1)\,x\,T_n^{(k+1)}(x) = (n^2-k^2)\,T_n^{(k)}(x), \\ T_{2m}(0) = (-1)^m, \qquad T'_{2m}(0) = 0, \\ T_{2m+1}(0) = 0, \qquad T'_{2m+1}(0) = (-1)^m(2m+1); \end{cases}$$

$$\text{(C)} \qquad T_n^{(k)}(1) = \frac{n^2(n^2-1)(n^2-2^2)\ldots[n^2-(k-1)^2]}{1.3\ldots(2k-1)} \qquad (1\leq k\leq n);$$

$$\text{(D)} \qquad 2^{k-1}(ek)^{-k}n^{2k} \leq T_n^{(k)}(1) \leq 2^{k-1}k^{-k}n^{2k} \qquad (1\leq k\leq n);$$

$$\text{(E)} \qquad (1-x^2)^k\,|T_n^{(k)}(x)| \leq 3^k n^k \qquad (0\leq k\leq n;\ |x|<1).$$

Si $f(x)$, indéfiniment dérivable sur $[-1, 1]$, est telle que

$$|f^{(n)}(x)| \leq \lambda^n M_n \qquad (n=1, 2, \ldots;\ \lambda\geq 1),$$

on a

$$\text{(F)} \qquad |f^{(n)}(0)| \leq (2e\lambda)^n M_n^0 \qquad (n=1, 2, \ldots).$$

2. Effet du changement de variable $x = \cos\theta$ sur une classe $C_f\{M_n\}$:

Théorème 1. — *Si $f(x)$ appartient sur $[-1, 1]$ à la classe $C_f\{M_n\}$, la fonction $F(\theta) \equiv f(\cos\theta)$ appartient à la classe $C_R\{M_n^{\bar{c}}\}$ où $\{M_n^{\bar{c}}\}$ est définie à partir de $\{M_n\}$ par les formules*

$$M_n^{\bar{c}} = \overline{\underset{r \geqq 1}{\text{borne}}}\, r^n/S(r), \qquad S(r) = \max_{n \leqq r} r^n/M_n.$$

On obtient les dérivées de $F(\theta)$ à partir de celles de $f(x)$ au moyen de la formule (où $x_0 = \cos\theta$)

$$\text{(1)} \qquad F^{(n)}(\theta_0) = \sum_{s=1}^{n} \frac{f^{(s)}(x_0)}{s!} \left\{ \frac{D^n}{D\theta^n} (\cos\theta - \cos\theta_0)^s \right\}_{\theta=\theta_0}.$$

Par hypothèse,

$$\text{(1)} \qquad |f^{(n)}(x)| \leqq A^n M_n \qquad (-1 \leqq x \leqq 1,\ n = 1, 2, \ldots).$$

Il en résulte (*voir* Mandelbrojt [18], p. 224)

$$\text{(2)} \qquad |f^{(n)}(0)| \leqq (2eA)^n M_n^0 \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Soit $\Pi_s(\theta)$ un polynome trigonométrique en θ, d'ordre s. On a

$$\text{(3)} \qquad |\Pi_s^{(n)}(\theta)| \leqq M_0 s^n,$$

M_0 étant le maximum de $|\Pi_s(\theta)|$.

Considérons le développement de Taylor de $f(x)$, d'ordre $(n-1)$, autour de $x = 0$, et posons

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x), \qquad R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,dt, \qquad \Phi_n(\theta) = R_n(\cos\theta),$$

$$P_n(x) = \sum_{s=0}^{n-1} p_s(x), \qquad p_s(x) = \frac{x^s}{s!} f^{(s)}(0), \qquad \varphi_s(\theta) = p_s(\cos\theta);$$

(2) et (3) entraînent pour tout θ

$$\text{(4)} \qquad |\varphi_s^{(n)}(\theta)| \leqq (2eA)^s M_s^0 [s!]^{-1} s^n \leqq (2e^2A)^s M_s^0 s^{n-s}.$$

Soit $\{M_n^0\}$ la suite régularisée exponentielle de $\{M_n\}$, $\{n_i\}$ la suite correspondante d'indices principaux, $\{n_j\}$ la suite des indices de discontinuité. Supposons $n_j \leqq n < n_{j+1}$. Comme, pour ces valeurs de n, les points $(n, \log M_n^0)$ sont situés sur une ligne polygonale convexe dont la pente, au point d'abscisse x, est supérieure ou égale à $\log x$, il résulte de (4) que

$$\text{(5)} \qquad |\varphi_s^{(n)}(\theta)| \leqq (2e^2A)^s M_n^0 \qquad (n_j \leqq s \leqq n < n_{j+1}),$$

$$\text{(6)} \qquad |\varphi_s^{(n)}(\theta)| \leqq (2e^2A)^s M'_{n_{j+1}} n_{j+1}^{n-n_{j+1}} \qquad (n \geqq n_{j+1}),$$

$\log M'_{n_{j+1}}$ étant l'ordonnée ($> \log M_{n_{j+1}}^0$) de l'extrémité droite de la base exponentielle de $\{M_n^0\}$ entre n_j et n_{j+1}.

D'autre part, d'après (1) et l'expression de $R_n(x)$, on a

$$\overline{n-s}\,!\,|R_n^{(s)}(x)| \leqq A^n M_n \qquad (-1 \leqq x \leqq 1,\ s \leqq n).$$

Si, tenant compte de ces inégalités et de (3), on applique la formule (I) à $R_n(x)$, il vient

$$(7) \qquad |\Phi_n^{(n)}(\theta)| \leqq (1+2e)^n A^n M_n \qquad (n=1, 2, \ldots).$$

Comme

$$\Phi_{n_j}(\theta) = \sum_{s=n_j}^{n_i-1} \varphi_s(\theta) + \Phi_{n_i}(\theta) = \sum_{s=n_j}^{n_{j+1}-1} \varphi_s(\theta) + \Phi_{n_{j+1}}(\theta) \qquad (n_j \leqq n_i < n_{j+1}),$$

on déduit de (5) et (7), puis de (6) et (7), pour $n_j \leqq n_i < n_{j+1}$,

$$|\Phi_{n_j}^{(n_i)}(\theta)| \leqq (4e^2 A)^{n_i} M_{n_i}^0, \qquad |\Phi_{n_i}^{(n_{j+1})}(\theta)| \leqq (4e^2 A)^{n_{j+1}} M'_{n_{j+1}}.$$

La base exponentielle de $\{M_n\}$ étant un polygone convexe entre $x = n_j$ et $x = n_{j+1}$, ces inégalités entraînent (d'après le chapitre I)

$$(8) \qquad |\Phi_{n_j}^{(n)}(\theta)| \leqq 2(4e^2 A)^n M_n^0 \qquad (n_j \leqq n < n_{j+1}).$$

Comme

$$f(x) = \sum_{s=0}^{n_j-1} p_s(x) + R_{n_j}(x), \qquad \max_{1 \leqq \lambda \leqq j}\left(M'_{n_\lambda} n_\lambda^{n-n_\lambda},\ M_n^0\right) = M_n^{\bar{c}} \ (n_j \leqq n < n_{j+1}),$$

il résulte de (6) et (8)

$$|F^{(n)}(\theta)| \leqq 2n(4e^2 A)^n M_n^{\bar{c}} \leqq (8e^2 A)^n M_n^{\bar{c}} \qquad (n_j \leqq n < n_{j+1}),$$

j pouvant être choisi quelconque, ce résultat vaut pour tout $n \geqq 1$ et prouve le théorème.

THÉORÈME 2. — *Il existe une fonction $f^\star(x)$ [avec $F^\star(\theta) = f^\star(\cos\theta)$] telle que, α étant une constante positive indépendante de n,*

$$f^\star(x) \in C_f\{M_n\} \quad sur\ [-1, 1], \qquad \left|F^{(n)}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right| \geqq \alpha^n M_n^{\bar{c}} \qquad (n=1, 2, \ldots).$$

D'après la formule (I) appliquée pour $\theta = \frac{\pi}{2}$,

$$F^{(n)}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{s=1}^{n} (-1)^s \frac{f^{(s)}(0)}{s!} \left\{ \frac{D^n}{Du^n} (\sin u)^s \right\}_{u=0}.$$

Or, les $\beta_p (p = 1, 2, \ldots)$ étant des coefficients positifs,

$$(\sin u)^s = u^s - \beta_1 u^{s+2} + \ldots + (-1)^p \beta_p u^{s+2p} + \ldots.$$

Donc, en posant $s!\,\delta_s = n!\,\beta_{\frac{n-s}{2}} > 0$, on a

$$(9) \qquad F^{(n)}\left(\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^n [f^{(n)}(0) - \delta_{n-2} f^{(n-2)}(0) + \delta_{n-4} f^{(n-4)}(0) \ldots].$$

Posons

$$p_n(x) = \frac{1}{2}(-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]} T_n\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2}(-1)^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} T_{n+1}\left(\frac{x}{2}\right), \qquad P_n(\theta) = p_n(\cos\theta),$$

$$r_n(x) = p_n(2x), \qquad R_n(\theta) = r_n(\cos\theta).$$

Dans ces formules, $T_n(x) = \cos n(\arccos x)$ est le polynome de Tchebycheff de degré n, $\left[\frac{n}{2}\right]$ et $\left[\frac{n+1}{2}\right]$ désignent les parties entières respectives de $\frac{n}{2}$ et $\frac{n+1}{2}$.

Il résulte de (B) que $p_n^{(k)}(0)$ a le signe de $(-1)^{\left[\frac{k}{2}\right]}$.

Comme $r_n^{(k)}(0) = 2^k p_n^{(k)}(0)$, (9) peut alors s'écrire (pour $f = p_n$)

$$\left| P_n^{(k)}\left(\frac{\pi}{2}\right) \right| = \frac{1}{2^k} | r_n^{(k)}(0) | + \frac{1}{2^{k-2}} \delta_{k-2} | r_n^{(k-2)}(0) | + \ldots.$$

Mais (9) appliquée à $R_n(\theta)$ donne aussi

$$\left| R_n^{(k)}\left(\frac{\pi}{2}\right) \right| = | r_n^{(k)}(0) | + \delta_{k-2} | r_n^{(k-2)}(0) | + \ldots.$$

La comparaison de ces deux formules et le fait que l'on a $\left| R_n^{(k)}\left(\frac{\pi}{2}\right) \right| \geqq \frac{1}{2} n^k$ d'après l'expression directe de $R_n(\theta)$ conduisent à

$$(10) \qquad (-1)^{\left[\frac{k+1}{2}\right]} P_n^{(k)}\left(\frac{\pi}{2}\right) \geqq \frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}\right)^k \qquad (k \text{ entier} \geqq 0).$$

De plus, d'après (E) on a

$$(11) \qquad | p_n^{(k)}(x) | \leqq 4^k n^k \qquad (-1 \leqq x \leqq 1,\ k \text{ entier} \geqq 0).$$

Soit maintenant λ_n la partie entière d'un nombre $r_n \geqq 1$ tel que

$$r_n^n S^{-1}(r_n) = \overline{\text{borne}}_{r \geqq 1}\, r^n S^{-1}(r) = M_n^{\bar{c}}.$$

On a aussi

$$\lambda_n^n S^{-1}(\lambda_n) \geqq 2^{-n} M_n^{\bar{c}}.$$

Soit alors

$$f^\star(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} S^{-1}(\lambda_n) p_{\lambda_n}(x).$$

D'après (11) et les relations précédentes,

$$| f^{\star(k)}(x) | \leqq 4^k \sum_{\lambda_n \geqq k} 2^{-n} \frac{\lambda_n^k}{S(\lambda_n)} < 2.4^k\, \overline{\text{borne}}_{r \geqq k} \frac{r^k}{S(r)} = 2.4^k M_k^0 \leqq 2.4^k M_k.$$

D'autre part, d'après (10) et les relations précédentes,

$$\left| F^{\star(k)}\left(\frac{\pi}{2}\right) \right| \geqq \frac{1}{2.4^k} \frac{\lambda_k^k}{S(\lambda_k)} \geqq \frac{1}{2.8^k} M_k^{\bar{c}} \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

$f^\star(x)$ a donc bien les propriétés voulues.

On peut exprimer comme suit les théorèmes 1 et 2 :

La plus petite classe C_R contenant toutes les transformées par le changement de *variable* $x = \cos\theta$ *des fonctions* $f(x)$ *appartenant sur* $[-1, 1]$ *à* $C_f\{M_n\}$, *est* $C_R\{M_n^{\bar{c}}\}$.

3. Effet du changement de variable $\cos\theta = x$ sur des fonctions périodiques d'une classe $C_R\{M_n\}$. — Nous allons maintenant supposer qu'une fonction de $\cos\theta$, soit $f(\cos\theta)$, est telle que $F(\theta) \equiv f(\cos\theta) \in C_R\{M_n\}$, et nous allons chercher à quelle classe C_f appartient $f(x)$ sur l'intervalle fermé $[-1, 1]$.

Nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 1. — *Soit la fonction de* X

$$\varphi_s(X) = \frac{(\operatorname{Arc}\cos X - \operatorname{Arc}\cos x)^s}{s\,!}$$

(x *est une constante; s un entier* $\geqq 1$).

On a pour tout entier $n \geqq s$

$$\left|\varphi_s^{(n)}(X)_{X=x}\right| \leqq \left(\sqrt{1-x^2}\right)^{s-2n} 6^n n^{n-s} \qquad (|x|<1).$$

Étudions d'abord le cas où $s = 1$. On voit par récurrence que

$$\varphi_1^{(n)}(X) = (1-X^2)^{\frac{1}{2}-n} P_{n-1}(X),$$

où $P_{n-1}(X)$ est un polynome en X de degré $(n-1)$ défini par la formule de récurrence

$$P_0(X) = -1, \qquad P_{n-1}(X) = (1-X^2)P'_{n-2}(X) + (2n-3)XP_{n-2}(X).$$

Comme $\left(-\sqrt{1-X^2}\,P'_{n-2}\right)$ est la dérivée par rapport à θ de $P_{n-2}(\cos\theta)$, polynome trigonométrique d'ordre $(n-2)$, cette quantité est bornée en module par μ_{n-2}, maximum du module de $P_{n-2}(X)$ sur $[-1, 1]$. On déduit alors de la relation de récurrence

$$|\varphi_1^{(n)}(X)| \leqq (1-X^2)^{\frac{1}{2}-n} 3^{n-1}(n-1)! \qquad (-1<X<1).$$

L'inégalité du lemme est alors vraie *a fortiori* (pour $s = 1$).

Dans le cas général $\varphi_s^{(n)}(X)$ au point $X = x$ peut se calculer en prenant le produit par $n!\,(s!)^{-1}$ du coefficient de $(X-x)^n$ dans le développement limité à l'ordre n de $\varphi_1^s(X)$ autour de $X = x$. D'après les résultats obtenus pour $\varphi_1(X)$, on voit que

$$\varphi_s^{(n)}(X)_{X=x} = \left(\sqrt{1-x^2}\right)^{s-2n} P(x),$$

$$\left|\varphi_s^{(n)}(X)_{X=x}\right| \leqq n\,!\,(s\,!)^{-1}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^{s-2n} 3^{n-s} C_{n-1}^{s-1},$$

$P(x)$ étant un polynome. Comme $C_{n-1}^{s-1} < 2^{n-1}$, le lemme en résulte.

Théorème 3. — $\{M_n\}$ *étant une suite* (S_α), C *une constante positive indépendante* *de n, si une fonction $f(\cos\theta) = F(\theta)$, indéfiniment dérivable, vérifie pour tout* θ

$$|F^{(n)}(\theta)| \leq CM_n \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

on a, pour $-1 \leq x \leq 1$, *α étant une constante* (> 0) *absolue*

$$|f^{(n)}(x)| \leq C\alpha^n M_n^\star \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

$\{M_n^\star\}$ *étant définie par*

$$n^n M_n^\star = \overline{\text{borne}}_{r \geq n}\, r^{2n} T^{-1}(r), \qquad T(r) = \max_{n \geq 1} r^n M_n^{-1}.$$

Il est clair que l'on peut supposer $C = 1$, c'est-à-dire

$$(12) \qquad |F^{(p)}(\theta)| \leq M_p \qquad (p = 1, 2, \ldots)$$

sans diminuer la généralité. On a

$$F(\theta) = f(\cos\theta) = a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos m\theta.$$

Les relations suivantes, dont la première résulte de (12)

$$|a_m| \leq 2T^{-1}(m) \qquad (m \geq 1),$$
$$2|T_m^{(p)}(x)| \leq 4^p p^{-p} m^{2p} \qquad (1 \leq p \leq m;\ |x| \leq 1)$$

montrent que $f(x)$ est développable en une série de polynomes de Tchebycheff, absolument et uniformément convergente, ainsi que toutes ses dérivées, sur $[-1, 1]$.

Nous allons, selon un procédé déjà employé au chapitre I (§ II, lemme 4), décomposer $F(\theta)$ en somme de deux fonctions $F_1(\theta)$ et $F_2(\theta)$, de la façon suivante (n désignant un entier positif quelconque, mais désormais fixé). Soit $x_n(\lambda)$ la fonction continue de la variable réelle λ, égale à 1 pour $|\lambda| \leq n$, à 0 pour $|\lambda| \geq 2n$, linéaire entre $\lambda = n$ et $\lambda = 2n$,

$$k_n(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} x_n(\lambda)\, d\lambda,$$

$$F_1(\theta) = F(\theta) - F_2(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\theta - t) k_n(t)\, dt.$$

Soit $f_1(x)$ la fonction associée à $F_1(\theta)$ par

$$F_1(\theta) = a_0 + \sum_{m=1}^{2n} x_n(m) a_m \cos m\theta, \qquad f_1(x) = a_0 + \sum_{m=1}^{2n} x_n(m) a_m T_m(x).$$

Il résulte de (12) et de la dernière expression de $F_1(\theta)$ que

$$(13) \qquad |F_1^{(p)}(\theta)| \leq 4M_p, \qquad |F_2^{(p)}(\theta)| \leq 4M_p \qquad (p = 1, 2, \ldots).$$

De plus, le développement en séries de cosinus de $F_2(\theta)$ commence par un terme d'ordre supérieur à n. On peut donc appliquer à $F_2(\theta)$ le lemme 3 (chap. I, § II). Donc (13) entraîne

$$|F_2^{(p)}(\theta)| \leqq 8 M_p^c \quad (p = 1, 2, \ldots), \qquad |F_2^{(p)}(\theta)| \leqq 8 M_k n^{p-k} \quad (p \leqq k).$$

Prenant $K = N(n)$ (notations de l'introduction), il vient

$$(14) \qquad |F_2^{(p)}(\theta)| \leqq 8 M'_p, \qquad M'_p = \overline{\operatorname{borne}}_{r \geqq n}\, r^p T^{-1}(r) \qquad (p = 1, 2, \ldots).$$

Étudions d'abord $f_1(x)$. Comme

$$f_1^{(n)}(x) = \sum_{m=n}^{m=2n} a_m x_n(m) T_m^{(n)}(x),$$

les inégalités du début sur $|a_m|$ et $|T_m^{(n)}(x)|$ donnent

$$|f_1^{(n)}(x)| \leqq n 4^n n^{-n} \overline{\operatorname{borne}}_{m \geqq n}\, m^{2n} T^{-1}(m) \leqq 8^n M_n^* \qquad (|x| \leqq 1).$$

Pour prouver le théorème, il suffit maintenant de montrer que, si l'on pose $F_2(\theta) = f_2(\cos\theta)$, on a

$$(15) \qquad n^n |f_2^{(n)}(x)| \leqq A^n M'_{2n} \qquad (|x| \leqq 1)$$

(M'_{2n} défini en (14), A constante indépendante de n).

De façon générale, si $F(\theta) = f(\cos\theta)$ est une fonction de θ indéfiniment dérivable dont chaque dérivée est bornée sur la droite entière, $f(x)$ est indéfiniment dérivable sur $[-1, 1]$, et ses dérivées, pour $|x| < 1$, sont données par

$$\text{(II)} \quad (16) \qquad f^{(n)}(x) = \sum_{s=1}^{n} F^{(s)}(\theta) \left\{ \frac{d^n}{dX^n} \frac{(\operatorname{Arc}\cos X - \operatorname{Arc}\cos x)^s}{s\,!} \right\}_{X=x} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

On voit par récurrence que

$$f^{(n)}(x) = (\sin\theta)^{1-2n} [(-1)^n \sin^{n-1}\theta\, F^{(n)}(\theta) + \alpha_{m,n-1}(\theta) \sin^{n-2}\theta\, F^{(n-1)}(\theta) + \ldots + \alpha_{n,1}(\theta) F'(\theta)],$$

où $\alpha_{n,s}(\theta)$ est un polynome trigonométrique d'ordre $(n - s)$, le crochet ayant d'ailleurs toutes ses dérivées nulles jusqu'à l'ordre $(n-1)$ exclu pour $\theta = 0$ et $\theta = \pi$. Quand $x \to 1$ ou $x \to -1$, le second membre tend vers le produit par $\frac{1}{(2n-1)!}$ de la dérivée $(n-1)^{\text{ième}}$ du terme entre crochets. Comme les dérivées d'ordre impair de $F(\theta)$ sont nulles pour $\theta = 0$ et $\theta = \pi$, on a

$$(17) \qquad f^{(n)}(1) = \beta_{n,2n} F^{(2n)}(0) + \beta_{n,2n-2} F^{(2n-2)}(0) + \ldots + \beta_{n,2} F^{(2)}(0),$$

où les coefficients β sont indépendants de la fonction $F(\theta)$. On a une formule analogue pour $x = -1$ et $\theta = \pi$.

Montrons d'abord que $f_2(x)$ vérifie la relation (15) pour $x = \pm 1$, $x = 1$, par exemple. Nous allons évaluer $f_2^{(n)}(1)$ au moyen de la formule (17). Les coefficients β étant indépendants de F, on peut les calculer par identification à partir de la fonction particulière $f(x) = T_N(x)$ associée à $F(\theta) = \cos N\theta$, ce qui donne

$$\begin{aligned} f^{(n)}(1) &\equiv \frac{N^2(N^2-1)(N^2-2^2)\ldots[N^2-(n-1)^2]}{1.3\ldots 2n-1} \\ &\equiv (-1)^n[\beta_{n,2n}N^{2n} - \beta_{n,2n-2}N^{2n-2}\ldots] \quad (\text{tout } N). \end{aligned}$$

Ceci montre que $(-1)^n\beta_{n,2s} = \gamma_{n,2s} > 0$ et que

$$\gamma_{n,2n}x^{2n} + \gamma_{n,2n-2}x^{2n-2} + \ldots + \gamma_{n,2}x^2 \equiv \frac{x^2(x^2+1)(x^2+2^2)\ldots[x^2+(n-1)^2]}{1.3\ldots(2n-1)}.$$

Divisant par x^{2n} les deux membres et faisant $x = n$ dans cette identité, on obtient

$$\begin{aligned} &\gamma_{n,2n} + \frac{\gamma_{n,2n-2}}{n^2} + \ldots + \frac{\gamma_{n,2s}}{n^{2n-2s}} + \ldots \\ &\quad + \frac{\gamma_{n,2}}{n^{2n-2}} \equiv \frac{1}{1.3\ldots(2n-1)}\,1\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\cdots\left[1+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right] \leqq \frac{2^n}{n^n}2^n, \end{aligned}$$

car

$$\frac{1}{1.3\ldots(2n-1)} = \frac{2^n n!}{(2n)!} < 2^n\frac{1}{n^n}.$$

Comme $\gamma_{n,2s} = |\beta_{n,2s}|$, il vient

(18) $$|\beta_{n,2s}| < 4^n n^{n-2s} \qquad (s \leqq n).$$

Cette inégalité, jointe à (14), montre que

$$|\beta_{n,2s}|.|F_2^{(2s)}(0)| \leqq \frac{4^n}{n^n}8\,\overline{\underset{r\geqq n}{\text{Borne}}}\,\frac{r^{2s}}{T(r)}n^{2n-2s} \leqq 8\cdot\frac{4^n}{n^n}\,\overline{\underset{r\geqq n}{\text{Borne}}}\,\frac{r^{2n}}{T(r)} = 8\cdot\frac{4^n}{n^n}M'_{2n} \qquad (s \leqq n).$$

Portant ces valeurs dans (17), on a l'inégalité (15) pour $x = 1$

(15′) $$n^n|f_2^{(n)}(1)| \leqq 8^{n+1}M'_{2n}.$$

On raisonnerait de même pour $x = -1$.

De plus, (17) et (18) sont vrais quel que soit l'entier n.

Donc si $k < n$,

$$|f_2^{(k)}(1)| \leqq 8\cdot\frac{4^k}{k^k}\sum_{s=1}^{k}\overline{\underset{r\geqq n}{\text{borne}}}\,\frac{r^{2s}}{T(r)}k^{2k-2s} \leqq 8k\frac{4^k}{k^k}\,\overline{\underset{r\geqq n}{\text{borne}}}\,\frac{r^{2k}}{T(r)} \leqq \frac{8^{k+1}}{k^k}M'_{2k}.$$

Cette inégalité nous servira plus loin :

(19) $$k^k|f_2^{(k)}(1)| \leqq 8^{k+1}M'_{2k} \qquad (k < n).$$

Il suffit maintenant de prouver (15) pour $|x| < 1$, ou même $0 \leqq x < 1$. Considérons le développement de Taylor de $f_2(x)$, d'ordre $(n-1)$, autour de $x=1$ et posons

$$f_2(x)=p_n(x)+r_n(x),\qquad p_n(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\varphi_k(x),\qquad \varphi_k(x)=f_2^{(k)}(1)\frac{(x-1)^k}{k!},$$
$$\varphi_k(\cos\theta)=\Phi_k(\theta),\qquad r_n(\cos\theta)=\mathrm{R}_n(\theta).$$

(19) montre que pour $k<n$

$$|\Phi_k^{(2n)}(\theta)|\leqq 8^{k+1}\frac{2^k k^{2n}}{k^k(k!)}\mathrm{M}'_{2k}\leqq 8^{k+1}(2e)^k k^{2n-2k}\mathrm{M}'_{2k}\leqq 8(16e)^k\mathrm{M}'_{2n},$$

car les points $(p, \log \mathrm{M}'_p)$ $(p=1, 2, \ldots)$ sont sur une ligne convexe de pente supérieure ou égale à n.

Revenant alors à $r_n(x)=f_2(x)-p_n(x)$, utilisant l'inégalité ci-dessus et (14), on obtient

$$(20)\qquad |\mathrm{R}_n^{(2n)}(\theta)|\leqq(2e)^{-1}(32e)^n\mathrm{M}'_{2n}.$$

D'autre part, d'après la définition de $r_n(x)$, on a

$$r_n(1)=r'_n(1)=\ldots=r_n^{(n-1)}(1)=0.$$

La formule (I) du théorème 1 donne pour $\theta_0=0$,

$$\mathrm{F}^{(n)}(0)=\sum_{s=1}^{n}\frac{(-2)^s f^{(s)}(1)}{s!}\,\frac{\mathrm{D}^n}{\mathrm{D}\theta^n}\left\{\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{2s}\right\}_{\theta=0}.$$

Dans la formule ci-dessus seules interviennent en fait les valeurs $f^{(s)}(1)$ pour $2s\leqq n$. Les conditions vérifiées par $r_n(x)$ entraînent donc

$$\mathrm{R}_n(0)=\mathrm{R}'_n(0)=\ldots=\mathrm{R}_n^{(2n-1)}(0)=0.$$

Ce fait joint à (20) montre que pour $s<2n$ et $0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$

$$|\mathrm{R}_n^{(s)}(\theta)|\leqq\frac{1}{2e}(32e)^n\mathrm{M}'_{2n}\frac{\theta^{2n-s}}{(2n-s)!}\leqq\frac{1}{2e}(16e^2\pi)^n\mathrm{M}'_{2n}\frac{(\sin\theta)^{2n-s}}{n^{2n-s}}$$

ou, comme un $\theta=\sqrt{1-x^2}$ pour $0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$,

$$(21)\qquad |\mathrm{R}_n^{(s)}(\theta)|\leqq\frac{1}{2e}(16e^2\pi)^n\mathrm{M}'_{2n}\frac{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^{2n-s}}{n^{2n-s}}\qquad\left(s<2n,\ 0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}\right).$$

Enfin $f_2^{(n)}(x)=r_n^{(n)}(x)$. La formule (II) (16), écrite pour $r_n^{(n)}(x)$, avec les notations du lemme 1, donne donc

$$f_1^{(n)}(x)=\sum_{s=1}^{n}\varphi_s^{(n)}(\mathrm{X})_{\mathrm{X}=x}\,\mathrm{R}^{(s)}(\theta).$$

Utilisant alors le résultat du lemme 1 et (20), il vient

$$(15'')\qquad n^n|f_2^{(n)}(x)|\leqq(2e)^{-1}12^n(16e^2\pi)^n\mathrm{M}'_{2n}\qquad(0\leqq x<1).$$

De la même façon, on verrait que (15″) vaut pour $-1 < x \leqq 0$.

On a démontré (15′) et (15″), c'est-à-dire (15), donc le théorème.

Remarque. — Si l'on suppose $\varliminf_{n\to\infty} M_n^{\frac{1}{n}} < +\infty$, la classe $C_R\{M_n\}$ est identique à la classe $C_R(1)$ et se compose des polynomes trigonométriques. Le changement de variable $x = \cos\theta$ fait correspondre à $C_R(1)$ l'ensemble des polynomes en x.

THÉORÈME 4. — *Il existe une fonction $f(\cos\theta) = F(\theta)$ telle que*

$$|F^{(n)}(0)| \leqq M_n, \qquad |f^{(n)}(1)| > \alpha^n M_n^\star \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

α, *constante positive indépendante de n.*

Soit h_n la partie entière d'un nombre $r_n (\geqq n)$ tel que

$$r_n^{2n} T^{-1}(r_n) = \overline{\text{borne}}_{r \geqq n}\, r^{2n} T^{-1}(r), \qquad T(r) = \max_{n \geqq 1} r^n / M_n.$$

On a, par conséquent, k étant un entier quelconque

$$h_n^k T^{-1}(h_n) \leqq M_k^c \leqq e^2 h_n^{2n} n^{-n} T^{-1}(h_n).$$

Ces inégalités montrent que les fonctions associées

$$F(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} T^{-1}(h_n) \cos h_n \theta, \qquad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} T^{-1}(h_n) T_{h_n}(x)$$

ont les propriétés voulues. Car elles entraînent, compte tenu de

$$|\cos^{(k)}(h_n\theta)| \leqq h_n^k, \qquad T_{h_n}^{(k)}(1) \geqq 2^{k-1}(ek)^{-k} n^{2k},$$

les inégalités suivantes qui prouvent le théorème

$$|F^{(k)}(0)| \leqq M_k^c, \qquad f^{(k)}(1) \geqq (2e^2)^{-1} e^{-k} M_k^\star \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

On peut chercher aussi, connaissant les bornes des dérivées successives de $F(\theta) = f(\cos\theta)$ sur la droite, à quelle classe appartient $f(x)$ sur $(-1, 1)$. On a le théorème suivant :

THÉORÈME 5. — $\{M_n\}$ *et $f(\cos\theta) = F(\theta)$ remplissant les conditions de l'énoncé du théorème* 3, *on a*

$$|f^{(n)}(x)| \leqq C\alpha^n \left(\sqrt{1-x^2}\right)^{-n} M_n^0$$

($n = 1, 2, \ldots$; $|x| < 1$; α, *constante absolue*), *avec*

$$M_n^0 = \overline{\text{borne}}_{r \geqq n}\, r^n T^{-1}(r), \qquad T(r) = \max_{n \geqq 1} r^n M_n^{-1}.$$

La démonstration est analogue à celle du théorème 3. Nous pouvons supposer $C = 1$, et décomposer $F(\theta)$, comme pour le théorème 3, en somme de $F_1(\theta)$ et $F_2(\theta)$. Comme

$$f_1(x) = a_0 + \sum_{m=1}^{2n} a_m x(m) T_m(x), \qquad |x(m) a_m| \leqq 2 T^{-1}(m),$$
$$|T_m^{(n)}(x)| \leqq 2^{-1} 4^n n^{-n} m^{2n} \leqq 2^{-1} 8^n m^n \qquad (m \leqq 2n),$$

$f_1(x)$ vérifie

$$|f_1^{(n)}(x)| \leqq 16^n M_n^0 \qquad (|x| \leqq 1),$$

donc *a fortiori* l'inégalité du lemme (avec $\alpha = 16$).

Reste à montrer que $f_2^{(n)}(x)$ vérifie une inégalité analogue. Plaçons-nous, par exemple, dans le cas où $0 \leqq x < 1$, et considérons le développement de Taylor de $f_2(x)$, par rapport à $x = 1$, d'ordre $\left[\frac{n}{2}\right]$, partie entière de $\frac{n}{2}$,

$$f(x) = p_{\left[\frac{n}{2}\right]}(x) + r_{\left[\frac{n}{2}\right]}(x).$$

Avec des notations analogues à celles du théorème 3 et en utilisant les relations (19), on obtient successivement, comme au théorème 3, des inégalités analogues à (20) et (21)

$$\left| R^{(n)}_{\left[\frac{n}{2}\right]}(0) \right| \leqq 8(32e)^{\frac{n}{2}} M'_n,$$
$$\left| R^{(n)}_{\left[\frac{n}{2}\right]}(\theta) \right| \leqq 8(8\pi^2 e^2)^{\frac{n}{2}} n^{s-n} M'_n (\sqrt{1-x^2})^{n-s} \qquad \left(s \leqq n,\ 0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\right).$$

Cette inégalité, le lemme 1, et la formule (II) (16) donnent alors

$$|f_2^{(n)}(x)| \leqq 8 \cdot 16^n (8\pi^2 e^2)^{\frac{n}{2}} (\sqrt{1-x^2})^{-n} M'_n.$$

Comme $M'_n = M_n^0$, le théorème est démontré.

Théorème 6. — $\{M_n\}$ *étant une suite* (S_∞), *il existe une fonction* $f(\cos\theta) = F(\theta)$ *telle que*, β *étant une constante indépendante de n*,

$$|F^{(n)}(\theta)| \leqq M_n, \qquad \left| f^{(n)}\left(\frac{\pi}{2}\right) \right| \geqq \beta^n M_n^0 \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Soit λ_n la partie entière d'un nombre $r_n (\geqq n)$ tel que

$$r_n^n T^{-1}(r_n) = \overline{\text{borne}}_{r \geqq n}\, r^n T^{-1}(r) = M_n^0.$$

On a alors

$$\lambda_n^n T^{-1}(\lambda_n) \geqq e^{-1} M_n^0, \qquad \lambda_n^p T^{-1}(\lambda_n) \leqq M_n^c \qquad (p \text{ entier quelconque}).$$

Soit $p_n(x)$ le polynome défini et utilisé dans la démonstration du théorème 2. Les inégalités ci-dessus et les inégalités (10) et (11) relatives à $p_n(x)$ montrent que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} T^{-1}(\lambda_n) p_{\lambda_n}(x)$$

a les propriétés voulues.

A l'aide des théorèmes précédents, on peut, en supposant que

$$f(\cos\theta) = F(\theta) \in C_R\{M_n\},$$

chercher à quelle classe appartient $f(x)$, d'une part sur l'intervalle fermé $[-1, 1]$ (classe C_f), d'autre part sur l'intervalle ouvert $(-1, 1)$ (classe C_0). On a le théorème suivant :

THÉORÈME 7. — *Soit* $\{M_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *une suite positive donnée, telle que*

$$\lim_{n \to \infty} M_n^{\frac{1}{n}} = +\infty.$$

Si $f(\cos\theta) = F(\theta)$ *appartient à la classe* $C_R\{M_n\}$, $f(x)$ *appartient à la classe* $C_f\{n^{-n} M_{2n}^c\}$ *sur* $[-1, 1]$ *et à la classe* $C_0\{M_n^c\}$ *sur* $(-1, 1)$.

Si, de plus, $\underline{\lim}_{n} n^{-1} M_n^{\frac{1}{n}} > 0$ (*c'est-à-dire si* $C_R\{M_n\}$ *contient* $C_R\{n!\}$), *il existe deux fonctions* $f_1(\cos\theta) = F_1(\theta)$ *et* $f_2(\cos\theta) = F_2(\theta)$ *appartenant à* $C_R\{M_n\}$ *et telles que l'on ait*

$$f_1^{(n)}(1) \geqq \alpha^n n^{-n} M_{2n}^c \quad (n = 1, 2, \ldots) \qquad \text{et} \qquad |f_2^{(n)}(0)| \geqq \alpha^n M_n^c \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

α *étant une constante absolue.*

Soit

$$T(r) = \max_{n \geqq 1} r^n M_n^{-1}, \qquad T_1(r) = \max_{n \geqq 1} r^n A^{-n} M_n^{-1}.$$

On a

$$T_1(r) = T(A^{-1} r).$$

En appliquant le théorème 3 à $\{A^n M_n\}$ $(A > 1)$ au lieu de $\{M_n\}$, on voit que si

$$|F^{(n)}(\theta)| \leqq A^n M_n \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

on a pour $-1 \leqq x \leqq 1$ et $n = 1, 2, \ldots$

$$|f^{(n)}(x)| \leqq \frac{\alpha^n}{n^n} \overline{\text{borne}}_{r \geqq n} \frac{r^{2n}}{T_1(r)} = \frac{\alpha^n}{n^n} \overline{\text{borne}}_{r \geqq n} \frac{r^{2n}}{T\left(\frac{r}{A}\right)} = \frac{\alpha^n}{n^n} A^{2n} \overline{\text{borne}}_{r \geqq \frac{n}{A}} \frac{r^{2n}}{T(r)} = \frac{\alpha^n}{n^n} A^{2n} M_n^{*(A)}.$$

On a aussi pour $-1 < x < 1$

$$|f^{(n)}(x)| \leqq \frac{\alpha^n}{(\sqrt{1 - x^2})^n} \overline{\text{borne}}_{r \geqq n} \frac{r^n}{T_1(r)} = \frac{(\alpha A)^n}{(\sqrt{1 - x^2})^n} \overline{\text{borne}}_{r \geqq \frac{n}{A}} \frac{r^n}{T(r)} = \frac{(\alpha A)^n}{(\sqrt{1 - x^2})^n} M_n^{0(A)}$$

$$(n = 1, 2, \ldots).$$

Ces inégalités prouvent la première partie du théorème, car

$$\mathrm{M}_n^{\star(\mathrm{A})} = \overline{\underset{r \geq \frac{n}{\mathrm{A}}}{\text{borne}}}\, \frac{r^{2n}}{\mathrm{T}(r)} \leq \overline{\underset{r \geq 1}{\text{borne}}}\, \frac{r^{2n}}{\mathrm{T}(r)} = \mathrm{M}_{2n}^c$$

et

$$\mathrm{M}_n^{0(\mathrm{A})} = \overline{\underset{r \geq \frac{n}{\mathrm{A}}}{\text{borne}}}\, \frac{r^{n}}{\mathrm{T}(r)} \leq \overline{\underset{r \geq 1}{\text{borne}}}\, \frac{r^{n}}{\mathrm{T}(r)} = \mathrm{M}_{n}^c.$$

Plaçons-nous maintenant dans le cas où $\underline{\lim}\, n^{-1} \mathrm{M}_n^{\frac{1}{n}} > 0$. Cette hypothèse équivaut à

$$\overline{\lim_{r \geq 1}}\, r^{-1} \log \mathrm{T}(r) < \infty.$$

Car $\mathrm{M}_n > \mathrm{C}^n n^n$ entraine

$$\mathrm{T}(r) = \max_{n \geq 1} r^n \mathrm{M}_n^{-1} \leq \max_{n \geq 1} r^n (\mathrm{C}n)^{-n} \leq e^{r(\mathrm{C}e)^{-1}} \qquad \text{ou} \qquad \mathrm{C}e \log \mathrm{T}(r) \leq r,$$

et inversement $\log \mathrm{T}(r) \leq \mathrm{B}r$ entraine

$$\mathrm{M}_n \geq \mathrm{M}_n^c = \overline{\underset{r \geq 1}{\text{borne}}}\, r^n \mathrm{T}^{-1}(r) \geq \overline{\underset{r \geq 1}{\text{borne}}}\, r^n e^{-\mathrm{B}r} = n^n (\mathrm{B}e)^{-n}.$$

La relation (A) de l'introduction et le fait que $\mathrm{N}(r)$ croît avec r montrent que $\overline{\lim\limits_{r}}\, r^{-1} \log \mathrm{T}(r) < \infty$ équivaut à $\overline{\lim\limits_{r}}\, r^{-1} \mathrm{N}(r) < \infty$ ou encore à $\overline{\lim\limits_{n \to \infty}}\, n^{-1}\, \mathrm{T}(n) < \infty$.

L'hypothèse de la seconde partie de l'énoncé équivaut donc à

$$\overline{\lim_{n \to \infty}}\, n^{-1}\, \mathrm{N}(n) < +\infty. \tag{22}$$

Or, avec les notations de la page précédente,

$$\mathrm{M}_n^{\star(\mathrm{A})} = \begin{cases} n^{-n} \mathrm{M}_{2n}^c & \text{si} \quad \mathrm{N}(\mathrm{A}^{-1} n) \leq 2n, \\ (\mathrm{A}^{-2} n)^n \mathrm{T}^{-1}(\mathrm{A}^{-1} n) & \text{si} \quad \mathrm{N}(\mathrm{A}^{-1} n) > 2n \end{cases}$$

et

$$\mathrm{M}_n^{0(\mathrm{A})} = \begin{cases} \mathrm{M}_n^c & \text{si} \quad \mathrm{N}(\mathrm{A}^{-1} n) \leq n, \\ (\mathrm{A}^{-1} n)^n \mathrm{T}^{-1}(\mathrm{A}^{-1} n) & \text{si} \quad \mathrm{N}(\mathrm{A}^{-1} n) > n. \end{cases}$$

Si (22) a lieu, il existe une constante k telle que $\mathrm{N}(r) < kr\, (r \geq 1)$.

Les formules précédentes montrent que, si l'on prend $\mathrm{A} = k$,

$$\mathrm{M}_n^{\star(k)} = n^{-n} \mathrm{M}_{2n}^c \qquad \text{et} \qquad \mathrm{M}_n^{0(k)} = \mathrm{M}_n^c.$$

Il en résulte que les fonctions $f_1(x)$ et $f_2(x)$, construites pour les théorèmes 4 et 6 appliqués à la suite $\{\mathrm{K}^n \mathrm{M}_n\}$, possèdent les propriétés énoncées dans le théorème 7.

Remarque. — Lorsque la condition $\underline{\lim\limits_{n}}\, n^{-1} \mathrm{M}_n^{\frac{1}{n}} > 0$ *n'est pas vérifiée, c'est-*

à-dire lorsqu'il existe une suite infinie d'entiers $\{n_i\}$ *tels que*

$$\lim_{i\to\infty} n_i^{-1}\,\mathrm{N}(n_i) = +\infty, \tag{23}$$

il n'existe pas de fonction $f_1(x)$ *telle que,* $f_1(\cos\theta)$ *appartenant à* $\mathrm{C_R}\{\mathrm{M}_n\}$, *avec* $m_n = \max\limits_{|x|\leq 1} |f^{(n)}(x)|$, *toutes les fonctions* $f(x)$ *telles que* $f(\cos\theta) \in \mathrm{C_R}\{\mathrm{M}_n\}$ *appartiennent à* $\mathrm{C}_f\{m_n\}$ *sur* $[-1, 1]$.

En effet, si $\mathrm{F}_1(\theta) \in \mathrm{C_R}\{\mathrm{M}_n\}$, il existe un entier A tel que

$$|\mathrm{F}_1^{(n)}(\theta)| \leq \mathrm{A}^n \mathrm{M}_n \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

On a vu qu'il en résulte

$$|f_1^{(n)}(x)| \leq n^{-n} (\mathrm{A}^2\alpha)^n \mathrm{M}_n^{\star(\mathrm{A})} \qquad (n = 1, 2, \ldots; \; |x| \leq 1). \tag{24}$$

Soit alors $f_{2\mathrm{A}}(x)$ la fonction du théorème 4 relative à la suite $\{(2\mathrm{A})^n \mathrm{M}_n\}$. D'après le théorème 4, si $m'_n = \max\limits_{|x|\leq 1} |f_{2\mathrm{A}}^{(n)}(x)|$, on a

$$m'_n \geq n^{-n} \beta^n \mathrm{A}^{2n} \mathrm{M}_n^{\star(2\mathrm{A})} \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{25}$$

Mais, en raison de (23) et des formules, rappelées plus haut, donnant une expression de $\mathrm{M}_n^{\star(\mathrm{A})}$, on a, pour $\mathrm{N}_i = 2\mathrm{A}n_i$ et i assez grand,

$$[\mathrm{M}_{\mathrm{N}_i}^{\star(2\mathrm{A})} / \mathrm{M}_{\mathrm{N}_i}^{\star(\mathrm{A})}]^{\frac{1}{\mathrm{N}_i}} \geq 2^{\frac{\mathrm{N}(n_i)}{2\mathrm{A}n_i} - 1}.$$

Le second membre, d'après (23), tend vers $(+\infty)$ avec i.

D'après (24) et (25), on a *a fortiori*

$$\lim_{i\to\infty} [m'_{\mathrm{N}_i} / m_{\mathrm{N}_i}]^{\frac{1}{\mathrm{N}_i}} = +\infty,$$

ce qui prouve que $f_{2\mathrm{A}}(x)$ n'appartient pas à $\mathrm{C}_f\{m_n\}$ sur $[-1, 1]$.

De plus, il peut arriver que toutes les fonctions $f(x)$ *telles que* $\mathrm{F}(\theta) \in \mathrm{C_R}\{\mathrm{M}_n\}$ *appartiennent à une classe strictement plus petite que* $\mathrm{C}_f\{n^{-n}\mathrm{M}_{2n}^c\}$ *sur* $[-1, 1]$.

On peut le voir par l'exemple suivant. Prenons $\mathrm{N}(r) = r^2$, d'où

$$\mathrm{M}_n^c = \overline{\operatorname{borne}}_{r\geq 1}\, r^n e^{-\frac{r^2}{2}} = e^{-\frac{n}{2}} n^{\frac{n}{2}}.$$

Si $f(\cos\theta) = \mathrm{F}(\theta) \in \mathrm{C_R}\{\mathrm{M}_n^c\}$, il existe une constante k telle que, sur $[-1, 1]$, $f(x)$ appartienne à $\mathrm{C}_f\left\{n^n e^{-\frac{n^2}{2k^2}}\right\}$. Toutes ces fonctions $f(x)$ appartiennent donc, par exemple, sur $[-1, 1]$, à la classe $\mathrm{C}_f\{n^n e^{-n\sqrt{n}}\}$, strictement plus petite que $\mathrm{C}_f\{n^{n-}\mathrm{M}_{2n}^c\} = \mathrm{C}_f\{1\}$. Les mêmes remarques sont valables pour la classe C_0 à laquelle appartient $f(x)$ sur $(-1, 1)$ quand $\mathrm{F}(\theta) = f(\cos\theta)$ appartient à $\mathrm{C_R}\{\mathrm{M}_n\}$.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] S. AGMON, *Sur l'équivalence des classes de fonctions indéfiniment dérivables sur un demi-axe* (*C. R. Acad. Sc.*, t. **230**, 1950, p. 350).

[2] T. BANG, *On quasi analytiske Funktioner* (*Thèse*, Kyobenhavn, 1946).

[3] H. CARTAN, *Sur les inégalités entre les maxima des dérivées successives d'une fonction* (*C. R. Acad. Sc.*, t. **208**, 1939, p, 414).

[4] H. CARTAN, *Sur les maxima des dérivées successives d'une fonction* (*C. R. Acad. Sc.*, t. **210**, 1940, p. 431).

[5] H. CARTAN et S. MANDELBROJT, *Solution du problème d'équivalence des classes de fonctions indéfiniment dérivables* (*Acta Math.*, t. **72**, 1940, p. 31-49).

[6] J. FAVARD, *Matematisk Tiddskrift* (B. 1936, p. 81-94).

[7] J. FAVARD, *Sur l'approximation des fonctions périodiques par des polynomes trigonométriques* (*C. R. Acad. Sc.*, t. **203**, 1936, p. 1122).

[8] A. GORNY, *Contribution à l'étude des fonctions dérivables d'une variable réelle* (*Acta Math.*, t. **71**, 1939, p. 317).

[9] J. P. KAHANE, *Sur quelques problèmes d'unicité et de prolongement, relatifs aux fonctions approchables par des sommes d'exponentielles* (*Thèse*, Paris, 1954; *Ann. Inst. Fourier*, 1954).

[10] J. P. KAHANE et P. LALAGUË, *Quasi-analyticité des fonctions sommes de séries de Fourier lacunaires* (*C. R. Acad. Sc.*, t. **230**, 1950, p. 2250).

[11] A. KOLMOGOROFF, *Une généralisation de l'inégalité de J. Hadamard entre les bornes supérieures des dérivées successives d'une fonction* (*C. R. Acad. Sc.*, t. **207**, 1938, p. 764).

[12] P. LALAGUË, *Classes de fonctions indéfiniment dérivables presque périodiques de spectre donné* (*C. R. Acad. Sc.*, t. **236**, 1953, p. 2473).

[13] P. LALAGUË, *Sur des classes de fonctions indéfiniment dérivables* (*C. R. Acad. Sc.*, t. **240**, 1955, p. 1041).

[14] S. MANDELBROJT, *Séries de Fourier et classes quasi analytiques de fonctions* (Gauthier-Villars, Paris, 1935).

[15] S. MANDELBROJT, *La régularisation des fonctions* (*Act. scient. et ind.*, t. **733**, 1938).

[16] S. MANDELBROJT, *Quelques nouvelles considérations sur les classes de fonctions dont les dérivées sont bornées* (*C. R. Acad. Sc.*, t. **208**, 1939, p. 1202).

[17] S. MANDELBROJT, *Analytic Functions and Classes of Infinitely Differentiable Functions* (*The Rice Institute Pamphlet*, t. **29**, n° **1**, 1942).

[18] S. MANDELBROJT, *Séries adhérentes. Régularisation des suites. Applications* (Coll. Borel, Gauthier-Villars, 1952, *voir* p. 1-26 et 201-250).

[19] G. SZEGÖ, *Orthogonal Polynomials* (*Amer. Math. Soc. Colloqium Publications*, New York, t. **23**, 1939).