ROLAND FRAÏSSÉ

Sur l'extension aux relations de quelques propriétés des ordres

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 71, nº 4 (1954), p. 363-388

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1954_3_71_4_363_0>

SUR

L'EXTENSION AUX RELATIONS DE QUELQUES PROPRIÉTÉS DES ORDRES (1)

PAR M. ROLAND FRAÏSSÉ.

1. — But du travail; définitions préliminaires et introduction des classes Γ et γ.

1.1. Cet article est une étude élémentaire de certaines classes de relations, Γ et γ, définies ci après (1.4), qui généralisent la classe des ordres et celle des ordres finis.

Les résultats essentiels concernant ces classes sont énoncés au paragraphe 1.5. Après avoir donné quelques précisions sur leur ensemble (théorème I), nous caractérisons ces classes par trois conditions (théorèmes II et III).

Le théorème III (1°) généralise le fait que tout ensemble peut être ordonné; l'une des conclusions du théorème III (2°) et le théorème IV généralisent les deux propositions suivantes : étant donnés deux ordres totaux A, B, il existe un ordre (A + B par exemple) prolongement commun à A et B ou à leurs isomorphes; étant donné un ensemble d'ordres A, il existe un ordre R prolongement commun aux A (ou à leurs isomorphes).

Les démonstrations de ces théorèmes sont obtenues aux paragraphes 2, 3, 4; elles utilisent l'axiome du choix et font intervenir les notions de filtre et ultrafiltre de projection, introduites précédemment (2) et exposées ici d'une façon différente.

Nous définissons ensuite la relation *homogène* (5.1) qui généralise l'ordre η des nombres rationnels; notre théorème V (5.1) et l'une des conclusions du théorème VI (8.1) généralisent les deux propositions suivantes : tout ordre dénombrable est isomorphe à une restriction de η; l'ordre η est le seul ordre

(1) Les principaux résultats de cet article ont fait l'objet de deux Notes aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (t. 237, 1953, p. 508-510 et 540-542). Un premier résumé avait paru au *Bulletin of the Amer. Math. Soc.* (t 59, 1953, p. 341).

(2) *Sur quelques classifications des systèmes de relations, Thèse*, Paris, 1953 et *Alger-Mathématiques*, t. 1, 1954, p. 35–182.

dénombrable dense sans premier ni dernier élément. Par ailleurs, notre théorème VI précise les rapports entre relations homogènes et classes Γ.

Nous appliquons enfin (10.1) les théorèmes III et IV à la solution d'une question de logique mathématique.

1.2. Définitions générales. — Une relation à n arguments $A(x_1, \ldots, x_n)$ est pour nous une fonction définie lorsque $x_i \in E$ (E étant un ensemble appelé *base* de A) et susceptible de prendre deux valeurs, que nous désignons par $+$ et $-$.

Par exemple, une relation d'ordre, total ou partiel, généralement notée $\leq$, est la fonction $A(x_1, x_2)$ égale à $+$ si $x_1 \leq x_2$, à $-$ si $x_1 > x_2$ ou si x_1 est incomparable à x_2.

Si D est une partie de E, la *restriction* [3] de A à D sera la relation à n arguments définie lorsque $x_i \in D$ et prenant les mêmes valeurs que A : nous la noterons $B = A \mid D$; A sera dite un *prolongement* [3] de B à E.

Soit un ensemble de relations dont les bases sont totalement ordonnées par inclusion, de sorte que, lorsque la base de la relation A contient celle de B, A est un prolongement de B. Nous dirons alors que ces relations forment une *chaîne*.

Il existe un prolongement R et un seul commun à ces relations et défini sur la réunion E de leurs bases. En effet, si la suite $a_1, \ldots, a_n$ est extraite de E, il existe des relations A de la chaîne dont les bases contiennent tous les $a_i (1 \leq i \leq n)$; toutes ces A prennent la même valeur $A(a_1, \ldots, a_n)$; on prend $R(a_1, \ldots, a_n)$ égal à cette valeur commune.

Soit φ une application biunivoque de E, base de A, sur E'. La relation A' de base E' telle que

$$A'(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_n)) = A(a_1, \ldots, a_n) \tag{1}$$

quels que soient $a_1, \ldots, a_n$ extraits de E, est dite une *isomorphe* [3] de A, et φ est un *isomorphisme* de A sur A' (ou φ *transforme* A en A'). Si $A' = A$, φ est un *automorphisme* de A.

La classe des relations isomorphes à une relation A sera appelée le *type* de A.

1.2.1. Pour que l'application biunivoque φ de E sur E' transforme A en A', il suffit qu'elle transforme chaque restriction de A à n éléments au plus, en une restriction de A'. En effet, dans ce cas, pour toute suite $a_1, \ldots, a_n$ de E, désignons par F l'ensemble des valeurs des $a_i (1 \leq i \leq n)$; φ transforme $A \mid F$ en $A' \mid \varphi(F)$: on en déduit bien l'égalité (1) ci-dessus.

1.3. Nous écrirons $A > B$ (ou $B < A$) si B est isomorphe à une restriction de A, et $A \succ B$ (ou $B \prec A$) si toute restriction de B à une partie finie de sa base est isomorphe à une restriction de A.

---

[3] N. Bourbaki, *Éléments de Mathématique*, *Théorie des Ensembles*, Paris, 1939, p. 12 et 44.

Les relations $<$ et $\prec$ sont réflexives et transitives; autrement dit, chaucune d'elles est un pré-ordre défini sur les relations à n arguments.

Lorsqu'on a $B < A$, ou $B \prec A$, cette condition subsiste si l'on transforme A ou B par isomorphie : les relations $<$ et $\prec$ définissent chacune un pré-ordre sur les types (1.2).

Si l'on a $B < A$ on en déduit $B \prec A$, mais l'inverse n'est pas vrai; par exemple, si A et B sont deux ordres de types ω et $\omega^\star$ ($\omega^\star$ désigne le symétrique de ω), on a $B \prec A$ et $A \prec B$ sans avoir $B < A$ ni $A < B$.

On peut avoir $B < A$ et $A < B$ sans que A et B soient isomorphes; par exemple, en utilisant les symboles de somme et de produit d'ordres [4] et en désignant par $\hat{1}$ l'ordre ayant un seul élément, alors $A = \omega . \omega^\star$ et $B = \hat{1} + \omega . \omega^\star$ ont des types distincts et vérifient $B < A$ et $A < B$.

1.4. Classes Γ et γ. — Étant donnée une relation R, nous désignerons par γ_R la classe des restrictions de R aux parties finies de sa base, et de leurs isomorphes. Autrement dit, $A \in \gamma_R$ équivaut à « $A < R$ et A est de base finie ».

Nous désignerons par Γ_R la classe des relations dont toutes les restrictions de bases finies appartiennent à γ_R. Autrement dit, $A \in \Gamma_R$ équivaut à $A \prec R$. On a évidemment $R \in \Gamma_R$.

Notons que γ_R n'est autre que la classe des relations de Γ_R dont la base est finie.

Par exemple, si R est un ordre (total) infini, Γ_R est la classe des ordres, γ_R celle des ordres finis.

Une classe K de relations sera dite une Γ, ou une γ, s'il existe une relation R telle que $K = \Gamma_R$, ou telle que $K = \gamma_R$.

De ce qui précède résultent les conséquences suivantes :

1° *Si une* Γ *ou une* γ *contient une relation* A, *elle contient toute isomorphe et toute restriction de* A.

2° *On a une correspondance biunivoque entre les* Γ *et les* γ, *en associant deux de ces classes* K *et* L *lorsqu'il existe une relation* R *telle que* $K = \Gamma_R$ *et* $L = \gamma_R$.

3° *Soient* K *une* Γ, R *une relation de* K; *pour que* $K = \Gamma_R$, *il faut et suffit que toute relation de base finie, extraite de* K, *soit isomorphe à une restriction de* R.

Les énoncés 1° et 2° s'obtiennent immédiatement; l'énoncé 3° se démontre ainsi : pour que $K = \Gamma_R$, il faut et suffit qu'en désignant par L la classe des relations de bases finies appartenant à K, on ait $L = \gamma_R$. Cette condition revient à celle de l'énoncé du fait que, R appartenant à K, toute restriction de R de base finie appartient à L.

---

(4) F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, 1914, réimpr., New-York, 1949, p. 75. Notre notation, pour le produit, est celle de Hausdorff inversée.

Comme exemples de classes Γ, outre *la classe des ordres totaux*, citons celle de *toutes les relations à n arguments*, celle des *ordres partiels*, celle des *ordres ramifiés* (ordres partiels tels que les éléments antérieurs à un élément donné soient totalement ordonnés). Nous prouverons au paragraphe 2.7 que ces classes sont des Γ.

1.5. Énoncé des principaux résultats relatifs aux classes Γ et γ. — Nous considérerons dans la suite des classes K de relations vérifiant certaines des conditions suivantes :

$\mathcal{C}_1$. *Si* $A \in K$ *et* $B < A$, *alors* $B \in K$.

$\mathcal{C}_2$. *Si* $A, B \in K$, *il existe une relation* C *de* K *telle que* $C > A$ *et* $C > B$.

$\mathcal{C}_3$. *Pour toute chaîne* (1.2) *de relations* A *de* K, *le prolongement des* A *à la réunion de leurs bases appartient à* K.

Nous pouvons dès lors énoncer les théorèmes qui vont être démontrés aux paragraphes 2, 3, 4 :

Théorème I. — *Les classes* Γ *ou* γ *de relations à n arguments sont en infinité dénombrable pour* $n = 1$, *en nombre égal à* $2^{\aleph_0}$ *pour* $n \geqq 2$.

Théorème II. — *Pour qu'une classe de relations de bases finies soit une* γ, *il faut et suffit qu'elle vérifie* $\mathcal{C}_1$ *et* $\mathcal{C}_2$.

Théorème III. — 1° *Étant donnée une* Γ, *ou bien elle est formée d'une relation de base finie et de ses restrictions* (avec leurs isomorphes) *ou bien elle contient des relations définies sur tout ensemble.*

2° *Pour qu'une classe de relations soit une* Γ, *il faut et suffit qu'elle vérifie* $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ *et* $\mathcal{C}_3$.

Théorème IV. — *Étant donnée une* Γ, *soit* K, *et un ensemble de relations* A *de* K, *il existe dans* K *une relation* R *telle que* $R > A$ *pour toute* A.

2. — Démonstrations des théorèmes I et II.

2.1. 1° *Les types* (1.2) *des relations à n arguments définies sur p éléments* (*p étant un entier fini*) *sont en nombe fini; les types de relations de bases finies sont en infinité dénombrable.*

2° *Les* γ *sont au plus au nombre de* $2^{\aleph_0}$.

Preuve. — Étant donné un ensemble F de p éléments, les relations à n arguments définies sur F sont au nombre de $\nu = 2^{(p^n)}$. Donc il existe au plus ν types de relations à n arguments définies sur les ensembles de p éléments. L'énoncé 1° est démontré.

L'énoncé 2° résulte du fait qu'une γ est une réunion de types de relations de bases finies.

2.2. *Démontrons comme suit le théorème* I :

Cas de $n=1$. — Soit $A(x)$ une relation ; elle prend la valeur + pour r éléments x, et la valeur — pour s éléments (r, s finis ou cardinaux transfinis). La classe γ_A ne dépend que du couple (r, s) et elle reste inchangée si r ou s passe d'une valeur transfinie à une autre. Les γ_A distinctes sont donc en infinité dénombrable.

Cas de $n \geqq 2$. — Nous savons déjà que les γ, donc les Γ, sont au plus au nombre de $2^{\aleph_0}$ (2.1, 2°). Il nous suffit de montrer qu'il existe $2^{\aleph_0}$ classes γ pour $n \geqq 2$.

Supposons $n=2$: A chaque entier positif r, associons un ensemble E_r de r éléments $a_r^1, \ldots, a_r^r$, les différents E_r étant disjoints. Considérons la relation $A_r(x_1, x_2)$ égale à + si, et seulement si x_2 suit x_1 dans le cycle $a_r^1 a_r^2 \ldots, a_r^r a_r^1$. Pour chaque ensemble $\mathcal{E}$ formé d'entiers, définissons comme suit $A_{\mathcal{E}}(x_1, x_2)$ sur la réunion des $E_r (r \in \mathcal{E})$: si x_1 et x_2 appartiennent à un même E_r, on pose $A_{\mathcal{E}}(x_1, x_2) = A_r(x_1, x_2)$; sinon, on pose $A_{\mathcal{E}}(x_1, x_2) = -$.

Pour deux $\mathcal{E}$ distincts, soient $\mathcal{E}'$ et $\mathcal{E}''$, les classes $\gamma_{A_{\mathcal{E}'}}$ et $\gamma_{A_{\mathcal{E}''}}$ sont distinctes : en effet, si par exemple l'entier r appartient à $\mathcal{E}'$ mais non à $\mathcal{E}''$, alors A_r est une restriction de $A_{\mathcal{E}'}$ mais n'est isomorphe à aucune restriction de $A_{\mathcal{E}''}$. Le nombre des γ distinctes atteint bien $2^{\aleph_0}$.

Supposons $n>2$: A toute relation $A(x_1, x_2)$ associons $A^\star(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ définie sur la même base et telle qu'on ait $A^\star(x_1, x_2, \ldots, x_n) = A(x_1, x_2)$ quels que soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Si, étant données $A(x_1, x_2)$ et $B(x_1, x_2)$, on a $\gamma_A \neq \gamma_B$, il existe par exemple une restriction $A|F$ (F fini) qui n'est isomorphe à restriction de B. Alors $A^\star|F$ n'est isomorphe à aucune restriction $B^\star|G$, car il en résulterait évidemment l'isomorphie de $A|F$ et de $B|G$. Nous en déduisons $\gamma_{A^\star} \neq \gamma_{B^\star}$. Le nombre des γ_A distinctes, lorsque A n'a que deux arguments, atteignant $2^{\aleph_0}$, il en est de même du nombre des $\gamma_{A^\star}$ distinctes : le théorème s'en déduit pour $n>2$.

2.3. *Toute* γ *vérifie les conditions* $\mathcal{C}_1$ *et* $\mathcal{C}_2$ (1.5).

$\mathcal{C}_1$ est évidemment vérifiée (cela a été dit sous une autre forme au paragraphe 1.4, 1°).

Montrons que $\mathcal{C}_2$ est vérifiée : une γ est formée des restrictions $R|F$ d'une certaine relation R aux parties finies F de sa base, et de leurs isomorphes. Si l'on considère A et B, isomorphes à $R|F$ et à $R|G$, alors en posant $C = R|F \cup G$, on a bien $C > A$ et $C > B$.

2.4 *Soit* K *une classe qui, lorsqu'elle contient une relation, contient aussi ses isomorphes.*

1° *Si* K *vérifie* $\mathcal{C}_2$, *à tout ensemble fini ou dénombrable de relations* A *de* K *on peut associer des relations* B *de* K *constituant une chaîne* (1.2) *de sorte que, pour chaque* A, *il existe une* B *vérifiant* $B > A$;

2° *Si* K *vérifie* $\mathcal{C}_2$ *et* $\mathcal{C}_3$, *la conclusion précédente est valable pour tout ensemble de relations* A *de* K.

Preuve. — 1° Numérotons les A; nous obtenons une suite finie ou infinie $A_1, \ldots, A_p, \ldots$ et nous définissons comme suit $B_1, \ldots, B_p, \ldots$:

$$B_1 = A_1;$$

les B_q étant supposés définis jusqu'à B_{p-1} et tous étant extraits de K, on choisit dans K un prolongement B_p de B_{p-1}, tel que $B_p > A_p$ (cela est possible en raison de $\mathcal{C}_2$).

Les B_p ainsi obtenus vérifient l'énoncé 1°.

2° Rangeons les A en une suite bien ordonnée $A_1, \ldots, A_\alpha, \ldots$ (α fini ou transfini) et définissons comme suit les B_α :

Si α est un ordinal de première espèce, les B_β étant supposés définis jusqu'à $B_{\alpha-1}$ et étant extraits de K, on opère comme au 1°.

Si α est de deuxième espèce, les $B_\beta (\beta < \alpha)$ étant supposés extraits de K et $B_{\beta'}$ étant un prolongement de $B_{\beta''}$ lorsque $\beta'' < \beta' < \alpha$, soit R le prolongement des B_β à la réunion de leurs bases (1.2); R appartient à K en raison de $\mathcal{C}_3$; on choisit dans K un prolongement B_α de R, tel que $B_\alpha > A_\alpha$ (c'est possible en raison de $\mathcal{C}_2$).

Les B_α ainsi obtenus vérifient l'énoncé 2°.

2.5. *Toute classe* K *de relations de bases finies vérifiant* $\mathcal{C}_1$ *et* $\mathcal{C}_2$ *est une* γ.

Preuve. — K vérifiant $\mathcal{C}_1$ contient, avec chacune de ses relations, toute relation isomorphe : c'est donc une réunion de types (1.2) qui sont au plus en infinité dénombrable (2.1, 1°).

Considérons une représentante A de chaque type contenu dans K, et appliquons aux A l'énoncé 2.4 (1°). Si R est le prolongement des B à la réunion de leurs bases, nous avons $K = \gamma_R$. En effet, toute restriction de R à une partie finie de sa base est restriction d'une B, donc appartient à K en raison de $\mathcal{C}_1$; inversement toute relation de K est isomorphe à une A, donc à une restriction d'une B et par conséquent de R.

2.6. *Les énoncés* 2.3 *et* 2.5 *démontrent le théorème* II.

De ce théorème, on déduit facilement le résultat suivant, que nous n'utiliserons d'ailleurs pas ici.

Étant donné un ensemble de classes γ totalement ordonné par inclusion, la réunion et l'intersection de ces γ sont des γ.

2.7. Exemples de classes Γ et γ. — La classe K_1 de toutes les relations à n arguments, la classe K_2 des ordres partiels, la classe K_3 des ordres ramifiés (1.4) sont des Γ. Montrons que c'est une conséquence du théorème II.

Une relation A appartient à K_1, K_2 ou K_3 si, et seulement si les restrictions de A aux parties finies de sa base appartiennent à K_1, K_2 ou K_3. Il suffit donc de montrer que ces classes, restreintes à leurs relations de bases finies, sont des γ. Elles vérifient évidemment $\mathcal{C}_1$; elles vérifient aussi $\mathcal{C}_2$. En effet, si A et B, que nous pouvons supposer de bases disjointes F, G, appartiennent à K_1, désignons par C un prolongement arbitraire commun à A et B, défini sur $F \cup G$; si A et B appartiennent à K_2 ou à K_3, désignons par C l'ordre partiel qui se réduit à A sur F, à B sur G et pour lequel tout élément de F est incomparable à tout élément de G. On a $C > A$, $C > B$ et, selon le cas, $C \in K_1$, K_2 ou K_3, ce qui achève notre démonstration.

3. — Filtre de projection [5].

3.1. Considérons deux relations à n arguments, A de base E, A′ de base E′ et une application φ de E *dans* $E'(\varphi(E) \subset E')$. Nous dirons que A est *projection réciproque de* A′ *selon* φ si, quels que soient $a_1, \ldots, a_n$ de E, on a

$$A(a_1, \ldots, a_n) = A'(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_n)). \tag{1}$$

Il est évident que, si E, E′, φ et A′ sont donnés, il existe une projection réciproque de A′ selon φ et une seule; nous la noterons $A = \varphi^{-1}(A')$.

Si φ est une application de E *sur* $E'(\varphi(E) = E')$ nous dirons que A est une *polymorphe* de A′. Si de plus φ est biunivoque, nous retrouvons la notion d'isomorphisme de A sur A′ (1.2).

Soit D une partie de E; l'application de D dans E′ qui se confond avec φ pour tout élément de D sera dite la *restriction* de φ à D, et sera notée φ_D; φ sera dite un *prolongement* de φ_D à E (on dira encore que φ *prolonge* φ_D).

3.1.1. *Si* $A = \varphi^{-1}(A')$, *on a évidemment* $A \mid D = \varphi_D^{-1}(A')$.

3.2. E, E′ étant fixes, désignons par φ toute application de E dans E′; un filtre $\mathcal{F}$ défini sur les φ sera dit *filtre de projection* de E sur E′. Nous dirons que A est *projection réciproque de* A′ *selon* $\mathcal{F}$ si, quels que soient $a_1, \ldots, a_n$

---

(5) Pour les propriétés des filtres et ultrafiltres *voir* N. Bourbaki, *Éléments de Mathématique, Topologie générale*, chap. I, Paris, 1943, p. 20 et suivantes. Le filtre de projection a été introduit dans notre Thèse, § 13.

extraits de E, l'ensemble des φ qui vérifient l'égalité (1) du paragraphe 3.1 est un élément de $\mathcal{F}$.

Par exemple, soient Φ une application de E dans E′, $\mathcal{F}$ le filtre trivial formé des ensembles de φ qui contiennent Φ; $\mathcal{F}$ est un filtre de projection de E sur E′ et, une relation A′ étant donnée, il existe une projection réciproque et une seule de A′ selon $\mathcal{F}$, à savoir $\Phi^{-1}(A')$.

3.3. Revenons au cas d'un filtre $\mathcal{F}$ quelconque défini sur les φ.

Si E, E′, $\mathcal{F}$ *et* A′ *sont donnés, il existe au plus une projection réciproque de* A′ *selon* $\mathcal{F}$. *Nous la noterons* $\mathcal{F}^{-1}(A')$.

Preuve. — Supposons qu'il existe deux projections réciproques : leur valeur diffère pour une suite $a_1, \ldots, a_n$ extraite de E. Il existe donc un élément U de $\mathcal{F}$ formé des φ donnant la valeur $+$ à l'expression $A'(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_n))$ et un autre V formé des φ donnant à cette expression la valeur $-$. L'intersection $U \cap V$ est un élément de $\mathcal{F}$; or elle est évidemment vide, ce qui est contraire à la définition du filtre.

3.4. *Si* $\mathcal{G}$ *est un filtre plus fin que* $\mathcal{F}$ (c'est-à-dire ayant pour éléments tous ceux de $\mathcal{F}$ au moins) *et si la projection réciproque* $\mathcal{F}^{-1}(A')$ *existe, alors*

$$\mathcal{G}^{-1}(A') = \mathcal{F}^{-1}(A').$$

3.5 *Si* $\mathcal{F}$ *est un ultrafiltre, il existe une projection réciproque* $\mathcal{F}^{-1}(A')$ *et une seule.*

Preuve. — Compte tenu de l'énoncé 3.3, il suffit de démontrer l'existence de $\mathcal{F}^{-1}(A')$. Soit $a_1, \ldots, a_n$ une suite extraite de E. Désignons par V^+ et V^- les ensembles des φ qui donnent respectivement la valeur $+$ et la valeur $-$ à l'expression $A'(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_n))$. Toutes les φ se répartissent entre ces deux ensembles disjoints : l'un d'eux, et un seul, est donc un élément de l'ultrafiltre $\mathcal{F}$ [6].

Posons $A(a_1, \ldots, a_n) = +$ ou $-$ selon qu'il s'agit de V^+ ou de V^-. La relation A ainsi définie lorsque la suite $a_1, \ldots, a_n$ varie est la projection réciproque $\mathcal{F}^{-1}(A')$.

3.6. Soit D une partie de E. A tout élément U de $\mathcal{F}$, associons l'ensemble des φ de U restreintes à D (3.1), soit U_D. Les U_D (où D est fixe et U variable) constituent un filtre de projection de D sur E′ qui sera dit la *restriction de* $\mathcal{F}$ *à* D, et noté $\mathcal{F}_D$. $\mathcal{F}$ sera dit un *prolongement* de $\mathcal{F}_D$ à E.

3.6.1. *Si* $A = \mathcal{F}^{-1}(A')$, *on a évidemment* $A \mid D = \mathcal{F}_D^{-1}(A')$.

---

(6) N. Bourbaki, *loc. cit.*, p. 26.

3.6.2. *Si $\mathcal{F}$ est un ultrafiltre, il en est de même de toute restriction* $\mathcal{F}_D$.

En effet, si $\mathcal{F}_D$ n'est pas un ultrafiltre, il existe un ensemble V formé de φ restreintes à D, tel que ni V ni son complémentaire W ne sont des éléments de $\mathcal{F}_D$. Considérons les ensembles formés des φ dont les restrictions à D appartiennent à V ou à W : ces deux ensembles sont complémentaires par rapport à l'ensemble des φ, et aucun d'eux n'est un élément de $\mathcal{F}$: ce filtre n'est pas un ultrafiltre.

3.7. Filtre normal. — Soit $\mathcal{F}$ un filtre de projection de E sur E'. Supposons que, pour toute partie finie F de E, l'ensemble $U_{[F]}$ des applications φ qui sont biunivoques sur F [c'est-à-dire appliquent de façon biunivoque F sur $\varphi(F)$] soit un élément de $\mathcal{F}$. En ce cas, $\mathcal{F}$ sera dit un *filtre normal*.

3.7.1. *Tout filtre plus fin qu'un filtre normal est évidemment normal.*

3.7.2. *Si* E' *est infini, il existre un filtre normal de projection de* E *sur* E'.

En effet, en utilisant les notations du paragraphe 3.7, un $U_{[F]}$ n'est jamais vide car toute partie finie F de E peut être appliquée de façon biunivoque sur des parties de E'. De plus l'intersection de deux $U_{[F]}$, soient $U_{[F]}$ et $U_{[G]}$, contient $U_{[F\cup G]}$: les $U_{[F]}$ engendrent un filtre normal.

3.8. *Étant données les relations* A, A' *de bases* E, E' :

1° *Pour qu'il existe un filtre $\mathcal{F}$ de projection de* E *sur* E' *tel que* $A = \mathcal{F}^{-1}(A')$, *il faut et il suffit que toute restriction de* A *à une partie finie de* E *soit polymorphe* (3.1) *d'une restriction de* A'.

2° *Pour qu'en outre $\mathcal{F}$ soit normal* (3.7) *il faut et suffit que toute restriction de* A *à une partie finie de* E *soit isomorphe d'une restriction de* A', *autrement dit qu'on ait* $A \prec A'$.

Preuve de l'énoncé 1°. — Supposons qu'on ait $A = \mathcal{F}^{-1}(A')$, et soit F une partie finie de E. Pour chaque suite $a_1, \ldots, a_n$, extraite de F, il existe un élément U de $\mathcal{F}$ formé des φ vérifiant l'égalité

$$A(a_1, \ldots, a_n) = A'(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_n)). \tag{1}$$

Ces suites sont en nombre fini : l'intersection des éléments U de $\mathcal{F}$ correspondants est un élément de $\mathcal{F}$: n'étant pas vide, il contient une φ qui vérifie (1) quels que soient $a_1, \ldots, a_n$ extraits de F. Cela signifie que $A|F$ est la projection réciproque de $A'|\varphi(F)$ selon cette φ; il s'ensuit que $A|F$ est polymorphe de $A'|\varphi(F)$: la condition du 1° est nécessaire.

Réciproquement, supposons que toute restriction $A|F$ (où F est fini) soit polymorphe d'une restriction de A' : il existe une application ψ de F sur une partie $\psi(F)$ de E′, telle que $\psi^{-1}(A' \mid \psi(F)) = A \mid F$; en considérant ψ comme une application de F dans E′, on a $\psi^{-1}(A') = A \mid F$.

Désignons par $U_{[F]}$ l'ensemble des applications φ de E dans E′ qui, une fois restreintes à F et désignées alors par φ_F (3.1) vérifient l'égalité $\varphi_F^{-1}(A') = A \mid F$:

un $U_{[F]}$ n'est jamais vide d'après ce qui précède;

l'intersection de deux $U_{[F]}$, soient $U_{[F]}$ et $U_{[G]}$, contient $U_{[F \cup G]}$; en effet, si $\varphi \in U_{[F \cup G]}$, alors on a $A \mid F \cup G = \varphi_{F \cup G}^{-1}(A')$ et par conséquent $A \mid F = \varphi_F^{-1}(A')$ (*voir* l'énoncé 3.1.1 où l'on remplace A par $A \mid F \cup G$, φ par $\varphi_{F \cup G}$ et D par F); il s'ensuit qu'on a $\varphi \in U_{[F]}$ et de même $\varphi \in U_{[G]}$.

Les $U_{[F]}$ engendrent un filtre que nous désignerons par $\mathcal{F}$.

Montrons qu'on a $A = \mathcal{F}^{-1}(A')$. Si $a_1, \ldots, a_n$ sont extraits de E, soit F l'ensemble de leurs valeurs. $U_{[F]}$ est un élément de $\mathcal{F}$ formé de φ qui satisfont à l'égalité $A \mid F = \varphi_F^{-1}(A')$, donc *a fortiori* à l'égalité (1) ci-dessus. L'ensemble des φ qui vérifient (1) est lui-même un élément de $\mathcal{F}$, ce qui prouve notre assertion.

Il est ainsi établi que la condition de l'énoncé 1° est suffisante.

La preuve de l'énoncé 2° se déduit de la précédente en y supposant ce qui suit :

lorsqu'on prouve que la condition est nécessaire, $\mathcal{F}$ est normal et U est formé de φ qui sont biunivoques sur F; le mot « polymorphe » peut alors être remplacé par « isomorphe »;

lorsqu'on prouve que la condition est suffisante, l'application ψ est biunivoque, $U_{[F]}$ est l'ensemble des φ qui vérifient l'égalité $\varphi_F^{-1}(A') = A \mid F$ et qui en outre sont biunivoques sur F; il en résulte que le filtre $\mathcal{F}$ est normal.

3.9. Éléments φ-équivalents ou $\mathcal{F}$-équivalents (φ étant une application de E dans E′, $\mathcal{F}$ un filtre de projection de E sur E′). — Deux éléments a, b de E seront dits *φ-équivalents* si l'on a

$$\varphi(a) = \varphi(b). \tag{1}$$

Ils seront dits *$\mathcal{F}$-équivalents* si l'ensemble des φ qui vérifient (1) constituent un élément de $\mathcal{F}$.

Deux éléments a, b qui sont chacun $\mathcal{F}$-équivalent à c, sont $\mathcal{F}$-équivalents entre eux : il suffit de considérer l'ensemble des φ qui vérifient $\varphi(a) = \varphi(c)$, celui des φ qui vérifient $\varphi(b) = \varphi(c)$, et de remarquer que leur intersection est un élément de $\mathcal{F}$.

Si, Φ étant une application de E dans E′, $\mathcal{F}$ est formé des ensembles de φ contenant Φ, alors la $\mathcal{F}$-équivalence se confond avec la Φ-équivalence.

3.9.1. *Si $\mathcal{F}$ est normal, il n'existe pas d'éléments de* E *distincts et $\mathcal{F}$-équivalents.*

En effet, soient a, b de tels éléments; l'ensemble des φ qui sont biunivoques sur $\{a, b\}$, autrement dit qui vérifient l'inégalité $\varphi(a) \neq \varphi(b)$, est un élément de $\mathcal{F}$: il ne peut en être de même de l'ensemble complémentaire des φ telles que $\varphi(a) = \varphi(b)$.

3.9.2. *Si $\mathcal{F}$ est un ultrafiltre et s'il n'existe pas d'éléments de* E *distincts et $\mathcal{F}$-équivalents, alors $\mathcal{F}$ est normal.*

En effet, pour toute paire $\{a, b\}$ d'éléments de E, l'ensemble U des φ telles que $\varphi(a) \neq \varphi(b)$ est un élément de l'ultrafiltre $\mathcal{F}$: sinon ce serait l'ensemble complémentaire qui appartiendrait à $\mathcal{F}$, contrairement à nos hypothèses. Étant donnée une partie finie F de E, l'intersection des ensembles U relatifs aux paires $\{a, b\}$ extraites de F est un élément de $\mathcal{F}$, constitué par les φ qui sont biunivoques sur F.

3.9.3. *Soient* D *une partie de* E, *a*, *b deux éléments de* D. *Si a et b sont $\mathcal{F}$-équivalents, ils sont $\mathcal{F}_D$-équivalents et inversement* ($\mathcal{F}_D$ a été défini au paragraphe 3.6).

En effet, si $\mathcal{F}$ a pour élément l'ensemble U des φ telles que $\varphi(a) = \varphi(b)$, alors $\mathcal{F}_D$ a pour élément l'ensemble V des restrictions à D de ces φ, c'est-à-dire l'ensemble des applications ψ de D dans E' qui vérifient $\psi(a) = \psi(b)$. Inversement, si $\mathcal{F}_D$ a pour élément V, $\mathcal{F}$ a pour élément un ensemble $\overline{V}$ contenant, pour chaque ψ extraite de V, une φ prolongement de ψ; on a donc $\overline{V} \subset U$, et par suite U est un élément de $\mathcal{F}$.

3.9.4. *Si $\mathcal{F}$ est un ultrafiltre normal, il en est de même de toute restriction $\mathcal{F}_D$.*

En effet, $\mathcal{F}_D$ est un ultrafiltre (3.6.2) et il n'existe pas d'éléments distincts de D qui soient $\mathcal{F}$-équivalents (3.9.1) donc qui soient $\mathcal{F}_D$-équivalents (3.9.3). D'après l'énoncé 3.9.2, $\mathcal{F}_D$ est normal.

3.10. *Soient* A, A' *deux relations à n arguments, de bases* E, E', *et $\mathcal{F}$ un filtre tel que* $A = \mathcal{F}^{-1}(A')$. *Soit ψ une application biunivoque transformant une partie* D *de* E *en une autre partie* $\psi(D)$. *Si, pour tout élément a de* D, *le transformé* $\psi(a)$ *est $\mathcal{F}$-équivalent à a, alors ψ est un isomorphisme de* $A \mid D$ *sur* $A \mid \psi(D)$.

Preuve. — Il suffit de montrer qu'étant donnée la suite $a_1, \ldots, a_n$ de D, on a

$$A(\psi(a_1), \ldots, \psi(a_n)) = A(a_1, \ldots, a_n). \tag{1}$$

Par hypothèse, a_i et $\psi(a_i)$ sont $\mathcal{F}$-équivalents ($1 \leq i \leq n$); soit U_i l'élément de $\mathcal{F}$ formé des φ telles que

$$\varphi(a_i) = \varphi\psi(a_i). \tag{2}$$

En raison de l'hypothèse $A = \mathcal{F}^{-1}(A')$, il existe un élément V de $\mathcal{F}$ formé des φ telles que

$$A(a_1, \ldots, a_n) = A'(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_n)) \tag{3}$$

et un élément W formé des φ telles que

$$A(\psi(a_1), \ldots, \psi(a_n)) = A'(\varphi\psi(a_1), \ldots, \varphi\psi(a_n)). \tag{4}$$

L'intersection de V, W et des U_i ($1 \leq i \leq n$) est un élément de $\mathcal{F}$, donc n'est pas vide : une φ de cette intersection vérifie à la fois les égalités (2), (3) et (4), d'où l'on déduit immédiatement l'égalité (1).

4. — Démonstrations des théorèmes III et IV. Condition $\mathcal{C}$.

4.1. *Démontrons le théorème* III (1°) énoncé en 1.5.

Considérons la classe Γ_R (1.4) où R est une relation de base E :

ou bien E est fini; alors Γ_R est formée des restrictions de R et de leurs isomorphes;

ou bien E est infini; en ce cas, si D est un ensemble quelconque, il existe, d'après l'énoncé 3.7.2, un filtre normal $\mathcal{F}$ de projection de D sur E. Soit $\mathcal{G}$ un ultrafiltre plus fin que $\mathcal{F}$, donc normal (3.7.1). La projection réciproque $\mathcal{G}^{-1}(R)$ (3.5) est définie sur D et vérifie, d'après l'énoncé 3.8 (2°), la condition $\mathcal{G}^{-1}(R) \prec R$, autrement dit $\mathcal{G}^{-1}(R) \in \Gamma_R$. Notre énoncé est démontré.

Dans le cas où Γ_R est la classe des ordres (totaux), on retrouve le fait que tout ensemble peut être ordonné.

4.2. *Toute* Γ *vérifie* $\mathcal{C}_1$ *et* $\mathcal{C}_3$.

Cela est évident pour $\mathcal{C}_1$ (1.4, 1°); montrons-le pour $\mathcal{C}_3$.

Considérons la classe Γ_R, et soient A des relations de Γ_R constituant une chaîne (1.2); désignons par E la réunion de leurs bases, par S leur prolongement commun défini sur E.

Toute partie finie F de E est entièrement contenue dans la base d'une A, donc toute restriction de S à une telle F est une restriction d'une A : on en déduit $S|F < R$. Par suite, on a $S \prec R$ ou $S \in \Gamma_R$: l'énoncé est démontré.

4.3. *Toute* Γ *vérifie* $\mathcal{C}_2$.

Considérons deux relations A, B de la classe Γ_R (où R est une relation de base E). On a $A \prec R$, $B \prec R$ et l'on peut supposer que A et B ont des bases disjointes F et G. *Il suffit de définir une relation* C *telle que* $C > A$, $C > B$ et $C \in \Gamma_R$ (ou $C \prec R$).

Définissons comme suit l'ultrafiltre $\mathcal{H}$ *et la relation* $P = \mathcal{H}^{-1}(R)$.

Désignons par φ (ou par ψ) toute application de F (ou de G) dans E. D'après l'énoncé 3.8 (2°) il existe deux filtres normaux $\mathcal{F}$ défini sur les φ, $\mathcal{G}$ sur les ψ, tels que $A = \mathcal{F}^{-1}(R)$ et $B = \mathcal{G}^{-1}(R)$.

Désignons par ξ toute application de $F \cup G$ dans E, par U tout ensemble de ξ tel que U_F (3.6) soit un élément de $\mathcal{F}$ et U_G un élément de $\mathcal{G}$. Un U n'est jamais vide, et l'intersection de deux U est évidemment un U : les U engendrent un filtre sur les ξ. Nous appellerons $\mathcal{H}$ un ultrafiltre arbitraire, plus fin que ce filtre et défini sur les ξ; nous désignerons par P la projection réciproque $\mathcal{H}^{-1}(R)$ (3.5).

Montrons que A *et* B *ne sont autres que* $P \mid F$ *et* $P \mid G$. Les filtres $\mathcal{H}_F$ et $\mathcal{H}_G$ (3.6) sont respectivement plus fins que $\mathcal{F}$ et que $\mathcal{G}$. On en déduit, d'après l'énoncé 3.4, les égalités $\mathcal{H}_F^{-1}(R) = \mathcal{F}^{-1}(R) = A$ et $\mathcal{H}_G^{-1}(R) = \mathcal{G}^{-1}(R) = B$. D'après l'énoncé 3.6.1, A et B ne sont autres que les restrictions à F et à G de $P = \mathcal{H}^{-1}(R)$.

Définissons comme suit les ensembles K, L *et l'application biunivoque* ψ. Deux éléments a, b de $F \cup G$, distincts et $\mathcal{H}$-équivalents (3.9) ne peuvent appartenir tous deux à F ni tous deux à G. Si par exemple ils appartiennent à F, ils sont $\mathcal{H}_F$-équivalents (3.9.3); or $\mathcal{H}_F$ étant plus fin que $\mathcal{F}$, est normal (3.7.1). Les deux conclusions précédentes sont contradictoires (3.9.1).

Il ne peut donc exister plus de deux éléments de $F \cup G$ qui soient $\mathcal{H}$-équivalents, et deux de ces éléments, s'ils sont distincts, appartiennent l'un à F, l'autre à G.

Nous désignerons par K l'ensemble des éléments de F pour lesquels il existe un élément $\mathcal{H}$-équivalent dans G, par L l'ensemble défini de même en échangeant F et G, enfin par ψ l'application biunivoque de $F \cup (G - L)$ sur $G \cup (F - K)$ qui, à chaque élément de K, associe l'élément $\mathcal{H}$-équivalent de L, et qui se réduit à l'identité sur $(F - K) \cup (G - L)$.

La relation $C = P \mid F \cup (G - L)$ *vérifie les conditions* $C > A$, $C > B$ *et* $C \prec R$.

Deux éléments, distincts ou non, transformés l'un de l'autre par ψ, sont $\mathcal{H}$-équivalents : d'après l'énoncé 3.10, ψ est un isomorphisme de $C = P \mid F \cup (G - L)$ sur $P \mid G \cup (F - K)$. Nous en déduisons $C > P \mid F = A$ et $C > P \mid G = B$.

Deux éléments distincts de $D = F \cup (G - L)$ ne sont pas $\mathcal{H}$-équivalents, donc ne sont pas $\mathcal{H}_D$-équivalents (3.9.3). Or $\mathcal{H}_D$ est un ultrafiltre (3.6.2) et il est normal d'après l'énoncé 3.9.2. Appliquons la proposition 3.8 (2°) : on a $\mathcal{H}_D^{-1}(R) \prec R$; or $\mathcal{H}_D^{-1}(R)$ n'est autre que $\mathcal{H}^{-1}(R) \mid D$ (3.6.1), c'est-à-dire C.

La proposition 4.3 est démontrée.

4.4. *Soit* K *une classe de relations vérifiant* $\mathcal{C}_3$. *Si toute restriction d'une relation* R *aux parties finies de sa base appartient à* K, *alors* R *appartient à* K.

Preuve. — L'énoncé est évident si la base E de R est finie. Supposons E de puissance infinie $\mathfrak{T}$.

Il suffit de supposer l'énoncé vrai pour toute relation définie sur un ensemble de puissance inférieure à $\mathfrak{T}$, *et de montrer qu'alors il est vrai pour* R.

Ordonnons les éléments de E suivant le plus petit ordinal de puissance $\mathfrak{T}$ et désignons par H tout ensemble formé des éléments antérieurs à un élément donné. Les restrictions $R|H$ constituent une chaîne (1.2) et les H ont des puissances inférieures à $\mathfrak{T}$. Les restrictions d'une $R|H$ aux parties finies de H sont des restrictions de R : elles appartiennent par hypothèse à K. Il s'ensuit, d'après ce que nous avons supposé plus haut, que $R|H$ appartient à K quel que soit H. Appliquons $\mathcal{C}_3$: la relation R, prolongement des $R|H$ à la réunion E des H, appartient à K.

4.5. *Toute classe* K *de relations qui vérifie* $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ *et* $\mathcal{C}_3$ *est une* Γ.

Preuve.— Les relations de bases finies appartenant à K vérifient évidemment $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$. D'après le théorème II (1.5), elles constituent une γ, soit L. D'après le paragraphe 1.4, il suffit de montrer qu'une relation A appartient à K si, et seulement si ses restrictions aux parties finies F de sa base appartiennent à L.

K vérifiant $\mathcal{C}_1$, si A appartient à K, toute restriction de A à une F appartient à K, donc à L. Inversement, si toute restriction de A à une F appartient à L, donc à K, alors A appartient à K d'après l'énoncé 4.4. La proposition est établie.

Le théorème III (2°) *résulte immédiatement des propositions* 4.2, 4.3 *et* 4.5.

4.6. *Démontrons le théorème* IV (1.5).

Soit K une Γ; considérons un ensemble de relations A de K. La classe K vérifiant $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$, appliquons l'énoncé 2.4 (2°) : il existe une chaîne de relations B de K telles que, pour chaque A, il existe une B telle que $B > A$. Soit R le prolongement des B à la réunion de leurs bases. On a évidemment $R > A$ pour chaque A. De plus, K vérifiant $\mathcal{C}_3$, contient R : le théorème IV est établi.

4.7. Condition $\mathcal{C}$. — Supposons que les relations A du théorème IV soient de bases finies ou dénombrables; *nous ignorons si* R *peut être choisie de base finie ou dénombrable.*

Si la réponse est affirmative, toute Γ satisfait à la condition suivante :

$\mathcal{C}$. *Soit* K *la classe considérée, restreinte à ses relations de bases finies et dénombrables; il existe une relation* R *de* K *telle que* $R > A$ *pour toute* A *de* K.

La classe des ordres totaux vérifie $\mathcal{C}$, la relation R étant alors l'ordre η des nombres rationnels ou tout ordre dénombrable prolongement de η.

Nous montrerons (8.5) que, plus généralement, les classes vérifiant une certaine condition $\mathcal{D}$ donnée au paragraphe 7.1, vérifient aussi $\mathcal{C}$: il en résultera que la classe des ordres partiels et celle de toutes les relations à n arguments vérifient $\mathcal{C}$. Pour cette dernière classe, l'existence d'une R de base dénombrable a été annoncée par A. Lindenbaum qui l'a appelée « relation universelle » (7) et par nous-même qui l'avons appelée « relation riche » (8).

5. — Relation homogène et condition $\mathcal{H}$. Énoncé et démonstration du théorème V.

5.1. Une relation R de base E sera dite *homogène* si, quelle que soit la partie finie F de E, tout isomorphisme de $R|F$ sur une restriction de R peut être prolongé en un automorphisme de R.

THÉORÈME V. — *Si* R *est une relation homogène, on a* $R > A$ *pour toute relation* A *de* Γ_R (1.4) *ayant une base finie ou dénombrable.*

Ce théorème généralise bien la proposition relative aux ordres totaux signalée au paragraphe 1.1; en effet, nous montrerons au paragraphe 6.3 que le seul ordre dénombrable homogène est l'ordre η des nombres rationnels, et que tout ordre infini homogène est un prolongement de η; nous rappelons par ailleurs que, si R est un ordre infini, Γ_R n'est autre que la classe des ordres.

5.2. Nous dirons qu'une relation R vérifie la *condition* $\mathcal{H}$ si, *quelles que soient la relation* A *et son prolongement* $\overline{A}$ *extraits de* γ_R (autrement dit, isomorphes à deux restrictions de R, de bases finies) *tout isomorphisme de* A *sur une restriction de* R *peut être prolongé en un isomorphisme de* $\overline{A}$ *sur une restriction de* R.

5.2.1. On n'affaiblit évidemment pas la condition $\mathcal{H}$ en y supposant que la base de $\overline{A}$ se déduit de celle de A par addition d'un seul élément.

5.3. *Toute relation homogène vérifie* $\mathcal{H}$.

Preuve. — Soit R une relation homogène; considérons une relation A de base F et un prolongement $\overline{A}$ de A, de base $\overline{F}$ $(A, \overline{A} \in \gamma_R)$; enfin soit φ un isomorphisme de A sur une restriction $R|\varphi(F)$. Il suffit de montrer que φ peut être prolongé en un isomorphisme $\overline{\varphi}$ de $\overline{A}$ sur une restriction de R.

$\overline{A}$ appartenant à γ_R, il existe un isomorphisme ψ de $\overline{A}$ sur une restriction $R|\psi(\overline{F})$; ψ transforme A en $R|\psi(F)$, donc $\varphi\psi^{-1}$ transforme $R|\psi(F)$ en $R|\varphi(F)$. Par hypothèse, ce dernier isomorphisme se prolonge en un automorphisme de R, donc *a fortiori* en un isomorphisme ξ de $R|\psi(\overline{F})$ sur une restriction de R.

(7) A. LINDENBAUM, *Ann. Soc. Pol. de Math.*, t. 17, 1938, p. 124-126.
(8) *C. R. Acad. Sc.*, t. 226, 1948, p. 987-988.

L'application $\bar{\varphi} = \xi\psi$, définie sur $\bar{F}$, transforme $\bar{A}$ en $\xi\,(R\,|\,\psi(\bar{F}))$ qui est, on vient de le voir, une restriction de R; de plus $\bar{\varphi}$ se confond, sur F, avec $\varphi\psi^{-1}\psi = \varphi$: la proposition est démontrée.

5.4. *Soient* R, S *deux relations de bases* D, E.

1° *Si* R *vérifie* $\mathcal{H}$, *si* $S \prec R$ *et si* E *est finie ou dénombrable, alors* $S < R$.

2° *Si* R *et* S *vérifient* $\mathcal{H}$, $R \prec S$, $S \prec R$ *et si* D *et* E *sont finies ou dénombrables, alors* R *et* S *sont isomorphes, et en outre tout isomorphisme d'une restriction de* R *à une partie finie de sa base, sur une restriction de* S, *peut être prolongé en un isomorphisme de* R *sur* S.

Preuve du 1°. — Numérotons les éléments de E, soient $e_1, \ldots, e_p, \ldots$ et posons $E_p = \{e_1, \ldots, e_p\}$, $S_p = S\,|\,E_p$. D'après l'hypothèse, les S_p appartiennent à γ_R.

Il existe un isomorphisme φ_1 de S_1 sur une restriction de R. Supposons qu'il existe une suite d'isomorphismes $\varphi_1, \ldots, \varphi_{p-1}$ de $S_1, \ldots, S_{p-1}$ sur des restrictions de R, chaque $\varphi_i (1 \leqq i \leqq p-1)$ prolongeant les précédents. R vérifiant $\mathcal{H}$, il existe un isomorphisme φ_p de S_p sur une restriction de R, prolongeant φ_{p-1} et les φ_i précédents.

Désignons par Φ l'application biunivoque définie sur E, qui se réduit à φ_p sur chaque E_p. On a $\Phi(E) \subset D$; toute partie finie de E étant contenue dans un E_p, toute restriction de S à une partie finie de E est une restriction d'une S_p, donc est transformée par Φ en une restriction de $R\,|\,\Phi(E)$. D'après l'énoncé 1.2.1, Φ transforme S en $R\,|\,\Phi(E)$, ce qui donne $S < R$.

Preuve du 2°. — Outre les éléments de E, numérotons ceux de D, soient $d_1, \ldots, d_p, \ldots$. En raison des hypothèses $R \prec S$ et $S \prec R$, les suites d_p et e_p ont le même nombre (fini ou dénombrable) d'éléments.

Soit φ un isomorphisme de $R\,|\,F$ sur $S\,|\,G$ (F, G parties finies de D, E).

Montrons que, si $d \in D - F$ *et* $e \in E - G$, *alors* φ *peut être prolongé en un isomorphisme* $\bar{\varphi}$ *de* $\bar{F}$ *sur* $\bar{G}$, *où* $\bar{F} \supset F \cup \{d\}$ *et* $\bar{G} \supset G \cup \{e\}$.

En effet, S vérifiant $\mathcal{H}$ et $R\,|\,F \cup \{d\}$ appartenant à $\gamma_R = \gamma_S$, φ peut être prolongé en un isomorphisme φ' de $R\,|\,F \cup \{d\}$ sur une restriction de S. En échangeant les rôles de R et de S, on montre que φ'^{-1} peut être prolongé en un isomorphisme φ'' de $S\,|\,\bar{G}\,[\text{où } \bar{G} = G \cup \{\varphi'(d), e\}]$ sur $R\,|\,\bar{F}\,[\text{où } \bar{F} = F \cup \{d, \varphi''(e)\}]$. Notre assertion est établie en prenant $\bar{\varphi} = \varphi''^{-1}$.

D'après ce qui précède, partant de φ, nous en obtenons des prolongements successifs $\varphi_1, \ldots, \varphi_p, \ldots$ où φ_p applique F_p sur G_p, avec $F_p \supset F \cup \{d_1, \ldots, d_p\}$ et $G_p \supset G \cup \{e_1, \ldots, e_p\}$. Les ensembles D et E ayant le même nombre d'éléments, nous ne pouvons avoir $F_p = D$ sans avoir $G_p = E$ et inversement. Que la suite des φ_p soit finie ou infinie, le prolongement Φ commun aux φ_p est une application biunivoque de D sur E, et c'est un prolongement de φ. Toute restriction de R à une partie finie de D est transformée par Φ en une restriction de S. D'après l'énoncé 1.2.1, on a $\Phi(R) = S$: l'énoncé est démontré.

Le théorème V *résulte immédiatement des propositions* 5.3 *et* 5.4 (1°), où l'on remplace $S \prec R$ par la condition équivalente $S \in \Gamma_R$.

5.5. *Toute relation de base finie ou dénombrable, vérifiant $\mathcal{H}$, est homogène.*

En effet, soit R cette relation. Elle vérifie les hypothèses de l'énoncé 5.4 (2°) où l'on pose $S = R$: la conclusion exprime alors que R est homogène (5.1).

Nous verrons au paragraphe 6.3 que la condition $\mathcal{H}$ n'implique pas l'homogénéité pour des relations de bases infinies non dénombrables.

Des énoncés 5.3 et 5.5, nous déduisons le résultat suivant :

5.5.1. *Pour qu'une relation de base finie ou dénombrable soit homogène, il faut et suffit qu'elle vérifie $\mathcal{H}$.*

6. — Application aux ordres.

Examinons ce que deviennent l'homogénéité et la condition $\mathcal{H}$ dans le cas des ordres (totaux).

6.1. *Pour qu'un ordre* I *soit homogène, il faut et suffit qu'il vérifie la condition suivante : le type de* I *restreint aux éléments antérieurs à un élément a, ou postérieurs à a, ou compris entre deux éléments a, b, ne dépend pas du choix de a et de b.*

Preuve. — Soient F et F′ deux ensembles formés chacun de p éléments de I désignés par $a_1, \ldots, a_p$ et $a'_1, \ldots, a'_p$ dans l'ordre induit par I. Désignons par E_0, $E_i (1 \leqq i \leqq p-1)$ et E_p les ensembles d'éléments de I antérieurs à a_1, compris entre a_i et a_{i+1}, postérieurs à a_p. Les E'_i $(0 \leqq i \leqq p)$ sont définis de même au moyen de $a'_1, \ldots, a'_p$.

Le seul isomorphisme φ de $I|F$ sur $I|F'$ est celui qui transforme a_i en a'_i $(1 \leqq i \leqq p)$. Pour que I soit homogène, il faut et suffit que φ puisse être prolongé en un automorphisme Φ de I. Cet automorphisme doit conserver l'ordre des éléments : il existe si et seulement si $I|E_i$ est isomorphe à $I|E'_i$ pour chaque $i (0 \leqq i \leqq p)$. Cela est vrai, quels que soient F et F′, si la condition de l'énoncé est réalisée et dans ce cas seulement.

6.2. *Pour qu'un ordre* I *ayant plus d'un élément vérifie la condition $\mathcal{H}$, il faut et suffit qu'il soit dense, sans premier ni dernier élément.*

Preuve. — 1° Supposons que I vérifie $\mathcal{H}$ et qu'il y existe deux éléments consécutifs a, b. Montrons qu'il ne peut exister un troisième élément c, supposé par exemple postérieur à b. En effet, les restrictions $I|\{a, c\}$ et $I|\{a, b, c\}$ appartiennent à la classe γ_1 (1.4). Or l'isomorphisme φ de $I|\{a, c\}$ sur $I|\{a, b\}$ ne peut être prolongé en un isomorphisme $\bar{\varphi}$ de $I|\{a, b, c\}$ sur une restriction de I, car $\bar{\varphi}(b)$ devrait être compris entre $\bar{\varphi}(a)=a$ et $\bar{\varphi}(c)=b$, ce qui est impossible.

Supposons qu'il existe dans I un premier élément b. Appliquons le raisonnement précédent, en y supprimant partout a et en remplaçant les mots « compris entre a et $\bar{\varphi}(c)=b$ » par « antérieur à $\bar{\varphi}(c)=b$ ». On montre ainsi qu'il ne peut exister dans I un élément c distinct de b. On a le même résultat si I contient un dernier élément b.

En définitive, si I vérifie $\mathcal{H}$ et contient plus d'un élément, aucun d'eux ne peut être le premier, ni le dernier, ni être consécutif à un autre : la condition de l'énoncé est bien nécessaire.

2° Démontrons qu'elle est suffisante. D'après l'énoncé 5.2.1, il suffit de montrer que, si J est un ordre fini de p éléments, rangés dans l'ordre $a_1, \ldots, a_p$, et $\bar{J}$ un ordre prolongement de J à l'ensemble $\{a_1, \ldots, a_p, b\}$, alors tout isomorphisme φ de J sur une restriction de I, soit $I|\{\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_p)\}$ peut être prolongé en un isomorphisme $\bar{\varphi}$ de $\bar{J}$ sur une restriction de I. Nous prenons $\bar{\varphi}(a_i)=\varphi(a_i)$ pour $1 \leqq i \leqq p$, et, selon que b est antérieur, dans $\bar{J}$, à a_1, compris entre a_i et a_{i+1} $(1 \leqq i \leqq p-1)$ ou postérieur à a_p, nous prenons $\bar{\varphi}(b)$ antérieur dans I à $\varphi(a_1)$, compris entre $\varphi(a_i)$ et $\varphi(a_{i+1})$ ou postérieur à a_p; cela est possible d'après l'hypothèse : la proposition est démontrée.

6.3. D'après l'énoncé 5.3, tout ordre homogène vérifie $\mathcal{H}$; donc, s'il contient plus d'un élément, il est dense, sans premier ni dernier élément (6.2); de plus, tout ordre dénombrable jouissant de cette dernière propriété est homogène (5.5 et 6.2); tout cela peut d'ailleurs être prouvé directement en utilisant l'énoncé 6.1. Il en résulte que le seul ordre dénombrable homogène est η et que tout ordre infini homogène est un prolongement de η (résultat annoncé au paragraphe 5.1).

Il existe plusieurs ordres homogènes infinis et non dénombrables; citons l'ordre $\Omega\eta$ (où Ω est le premier ordinal non dénombrable), l'ordre λ des nombres réels, l'ordre $\lambda+\Omega(\hat{1}+\lambda)$ (où $\hat{1}$ désigne l'ordre ayant un seul élément). On voit en effet aisément que ces ordres vérifient la condition de l'énoncé 6.1.

Il existe des ordres non homogènes vérifiant la condition $\mathcal{H}$. Ainsi l'ordre déduit de λ par suppression d'un élément e est dense, sans premier ni dernier élément : il vérifie $\mathcal{H}$ (6.2). Cependant il n'est pas homogène en raison de l'énoncé 6.1 : sa restriction aux éléments antérieurs à un élément donné a est de type différent selon que a est antérieur ou postérieur à e dans λ.

7. — Conditions $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$, $\overline{\mathcal{D}}$.

7.1. Soit K une classe qui, lorsqu'elle contient une relation, contient aussi ses isomorphes, et soient A, B deux relations de K, de bases finies F, G.

Considérons les conditions suivantes :

$\mathcal{D}$. *Si* A, B *ont une restriction commune* D, *il existe une relation* C *de* K *et deux isomorphismes* φ *et* ψ *de* A *et de* B *sur deux restrictions de* C, *avec* $\varphi(x) = \psi(x)$ *lorsque* x *appartient à la base de* D.

$\mathcal{D}'$. *Tout isomorphisme* ξ *d'une restriction* $A\,|\,F'(F' \subset F)$ *sur une restriction de* B *peut être prolongé en une application biunivoque* $\overline{\xi}$ *définie sur* F, *de telle sorte qu'il existe dans* K *un prolongement* C *commun à* $\overline{\xi}(A)$ *et à* B.

$\overline{\mathcal{D}}$. *Si les restrictions de* A *et* B *à* $F \cap G$ *sont identiques, il existe dans* K *un prolongement* C *commun à* A *et* B.

Nous allons montrer que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont équivalentes, et que $\overline{\mathcal{D}}$ est plus forte que $\mathcal{D}$. Nous donnerons au paragraphe 9 des exemples de classes vérifiant ou non $\mathcal{D}$ ou $\overline{\mathcal{D}}$.

7.2. *Les conditions* $\mathcal{D}$ *et* $\mathcal{D}'$ *sont équivalentes.*

Supposons que K *vérifie* $\mathcal{D}$, et soit ξ un isomorphisme de $A\,|\,F'(F' \subset F)$ sur une restriction $B\,|\,\xi(F')$. Désignons par ξ_1 l'application biunivoque qui se réduit à ξ sur F', à l'identité sur $F - F'$, et posons $A_1 = \xi_1(A)$.

A_1 et B ont une restriction commune D de base $\xi(F')$. Appliquons l'énoncé $\mathcal{D}$ en y remplaçant A par A_1 et en supposant que ψ soit la permutation identique de G (cela peut toujours être réalisé, en transformant au besoin C par un isomorphisme approprié). φ se réduit alors à l'identité sur $\xi(F')$. L'application $\overline{\xi} = \varphi\xi_1$ définie sur F, se réduit à ξ sur F', et la relation C introduite par l'application de $\mathcal{D}$ est un prolongement commun à $\psi(B) = B$ et à $\varphi(A_1) = \overline{\xi}(A)$: la classe K vérifie $\mathcal{D}'$.

Supposons que K *vérifie* $\mathcal{D}'$, et soit D une restriction commune à A et B, de base H (on a donc $H \subset F \cap G$). Appliquons $\mathcal{D}'$ en prenant pour ξ la permutation identique de H. Il existe une application biunivoque $\overline{\xi}$ définie sur F, se réduisant à l'identité sur H et telle que $\overline{\xi}(A)$ et B aient un prolongement commun C extrait de K. Cela n'est autre que la conclusion de $\mathcal{D}$ où l'on prend $\varphi = \overline{\xi}$ et où ψ est la permutation identique de G.

7.3. *La condition* $\overline{\mathcal{D}}$ *est plus forte que* $\mathcal{D}$, *même si l'on se borne au cas où* K *est une* Γ.

$\overline{\mathcal{D}}$ entraîne $\mathcal{D}$. En effet, si A et B ont une restriction commune D de base H, on peut toujours transformer A et B par deux isomorphismes φ et ψ qui se réduisent à l'identité sur H, de telle sorte que $\varphi(F)$ et $\psi(G)$ aient pour intersection H.

Par application de $\overline{\mathcal{D}}$, il existe dans K un prolongement C commun à $\varphi(A)$ et $\psi(B)$: la condition $\mathcal{D}$ est bien satisfaite.

$\overline{\mathcal{D}}$ n'est pas équivalente à $\mathcal{D}$. Prenons pour K la classe des relations à un argument prenant la valeur $+$ pour un élément de la base et un seul; on voit aisément que cette classe est une Γ, car elle vérifie les conditions $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ de 1.5.

K *ne vérifie pas* $\overline{\mathcal{D}}$. — Soient A et B deux relations de K, a et b les éléments tels que $A(a)=+$ et $B(b)=+$. Si les bases de A et B sont disjointes, ou n'ont en commun que des éléments autres que a et b, l'hypothèse de $\overline{\mathcal{D}}$ est vérifiée; or sa conclusion ne peut l'être, car un prolongement C commun à A et B prend nécessairement la valeur $+$ pour a et pour $b\neq a$; C n'appartient pas à K.

K *vérifie* $\mathcal{D}$. — Soit H une partie commune aux bases F, G de A et de B, et soit $D=A|H=B|H$. L'ensemble H ne peut contenir a, seul élément tel que $A(a)=+$, ni b, seul élément tel que $B(b)=+$, à moins que l'on ait $a=b$. Soient φ et ψ deux applications biunivoques définies sur F et sur G, se réduisant sur H à l'identité et telles que $\varphi(a)=\psi(b)$. Les relations $\varphi(A)$ et $\psi(B)$ sont toujours égales à $-$, sauf pour l'élément $\varphi(a)=\psi(b)$: leur prolongement commun défini sur $\varphi(F)\cup\psi(G)$ appartient à K. Notre assertion est établie.

7.4. *Soit* K *une classe vérifiant* $\mathcal{D}$ *et qui, lorsqu'elle contient une relation, contient aussi ses isomorphes. Considérons une relation* R, *une suite finie de relations* A_i(R, $A_i\in K$ *et de bases finies*) *et une suite d'isomorphismes* ξ_i *transformant chacun une certaine restriction de* A_i *en une restriction de* R. *Alors chaque* ξ_i *peut être prolongé en une application biunivoque* $\overline{\xi}_i$ *de sorte que* R *et les* $\overline{\xi}_i(A_i)$ *aient un prolongement commun* P *dans* K.

Pour le voir, appliquons $\mathcal{D}'$ en y remplaçant A et B par A_1 et R. Nous obtenons l'application $\overline{\xi}_1$ et un prolongement R_1 commun à $\overline{\xi}_1(A_1)$ et à R (avec $R_1\in K$). Appliquons à nouveau $\mathcal{D}'$ en y remplaçant A et B par A_2 et R_1 ; nous obtenons $\overline{\xi}_2$ et un prolongement R_2 commun à $\overline{\xi}_2(A_2)$ et à R_1, donc commun à $\overline{\xi}_1(A_1)$, $\overline{\xi}_2(A_2)$ et R (avec $R_2\in K$). Par itération de ce procédé, nous obtenons les $\overline{\xi}_i$ et une suite de R_i dont le dernier n'est autre que la relation P de l'énoncé.

8. — Homogénéité et condition $\mathcal{D}$. Énoncé et démonstration du théorème VI.

8.1. Théorème VI. — *Soit* K *une classe* Γ; *désignons par* R *toute relation de* K (si elle existe) *qui est homogène et qui vérifie* $K = \Gamma_R$ [rappelons que, d'après l'énoncé 1.4 (3°), cette dernière condition équivaut au fait que toute relation de base finie appartenant à K est isomorphe à une restriction de R].

1° *Pour qu'il existe des relations* R, *il faut et suffit que* K *vérifie* $\mathcal{D}$ (7.1).

2° *En ce cas, l'une des* R *et une seule* (avec ses isomorphes) *est de base finie ou dénombrable.*

3° *Désignons cette dernière relation par* R_0; *on a* $R_0 < R$ *pour toute* R.

Nous verrons au paragraphe 9.2 que la classe des ordres (totaux) vérifie $\mathcal{D}$. La conclusion 2° ci-dessus généralise bien la propriété des ordres signalée au paragraphe 1.1 : en effet, un ordre dénombrable est homogène seulement s'il est dense, sans premier ni dernier élément (6.3).

8.2. *Si* R *est une relation homogène, la classe* Γ_R (1.4) *vérifie* $\mathcal{D}$.

Preuve. — Soient A, B deux relations de bases finies, appartenant à Γ_R. On peut les considérer comme étant deux restrictions $A = R|F$ et $B = R|G$ (où F et G sont finis). Soit ξ un isomorphisme de $A|F' = R|F'$ ($F' \subset F$) sur une restriction de B. Remplaçons $\mathcal{D}$ par la condition équivalente $\mathcal{D}'$ (7.1); il suffit de montrer que ξ peut être prolongé en une application biunivoque $\bar{\xi}$ telle que $\bar{\xi}(A)$ et B aient un prolongement commun C parmi les restrictions de R.

Par hypothèse, ξ peut être prolongé en un automorphisme Φ de R. Prenons pour $\bar{\xi}$ l'application Φ restreinte à F; la relation $\bar{\xi}(A)$ est une restriction de $\Phi(R) = R$; donc $\bar{\xi}(A)$ et B ont pour prolongement commun la relation $C = R|\bar{\xi}(F) \cup G$. L'énoncé est démontré.

8.3. *Si* K *est une classe* Γ *vérifiant* $\mathcal{D}$, *on peut en extraire une suite finie ou dénombrable de relations* $R_1, \ldots, R_p, \ldots$ *de bases finies, vérifiant les conditions suivantes :*

1° *Chaque* R_p *est un prolongement des précédentes.*

2° *Pour toute relation* A *de* K *définie sur p éléments au plus, on a* $A < R_p$.

3° *Étant donnée une relation* A *de* K *définie sur p éléments au plus et l'une de ses restrictions* A', *tout isomorphisme de* A' *sur une restriction de* R_{p-1} *peut etre prolongé en un isomorphisme de* A *sur une restriction de* R_p.

Preuve. — Démontrons d'abord qu'il existe une relation R_1 vérifiant la conclusion 2° pour $p = 1$.

Les types des relations de K définies sur un seul élément sont en nombre fini (2.1, 1°). Prenons, dans chacun de ces types, une représentante A. La classe K, restreinte à ses relations de bases finies, est une γ : elle vérifie $\mathcal{C}_2$ (théorème II). Par application itérée de $\mathcal{C}_2$, on voit qu'il existe dans K une relation R_1 telle qu'on ait $R_1 > A$ pour chaque A.

Supposons obtenues les relations $R_1, \ldots, R_{p-1}$ $(p > 1)$ vérifiant les conclusions 1° à 3° ci-dessus, et définissons comme suit leur prolongement R_p.

Les relations de K définies sur p éléments au plus appartiennent à un nombre fini de types. Soit $\{A_i\}$ une suite finie contenant une représentante de chacun de ces types. A chaque A_i associons tous les isomorphismes ξ_{ij}, en nombre fini, qui transforment une restriction de A_i définie sur $p-1$ éléments au plus en une restriction de R_{p-1}. Appliquons la proposition 7.4 en y remplaçant R par R_{p-1} et en répétant chaque A_i autant de fois qu'il lui correspond d'isomorphismes ξ_{ij}. Chaque ξ_{ij} peut être prolongé en $\overline{\xi}_{ij}$, de sorte que les relations $\overline{\xi}_{ij}(A_i)$ et R_{p-1} aient un prolongement commun extrait de K : ce sera la relation R_p.

R_p vérifie évidemment les conclusions 1° et 3° de l'énoncé. Elle vérifie aussi le 2°. En effet, étant donnée l'une des A_i, définie sur q éléments $(q \leqq p)$, ou bien $q \leqq p-1$: la conclusion 2°, supposée vraie pour $p-1$, donne alors $A_i < R_{p-1} < R_p$; ou bien $q = p > 1$; il existe alors au moins une restriction A' de A_i définie sur $p-1$ éléments, donc vérifiant $A' < R_{p-1}$; par conséquent l'un au moins des isomorphismes ξ_{ij} transformant A' en une restriction de R_{p-1}, existe; la relation $\overline{\xi}_{ij}(A_i)$ existe et R_p en est un prolongement : on a bien $A_i < R_p$.

8.3.1. *La relation* R, *prolongement des* R_p *à la réunion de leurs bases, est homogène, et l'on a* $K = \Gamma_R$.

Preuve. — 1° K, *restreinte à ses relations de bases finies, n'est autre que* γ_R. En effet, toute restriction de R à une base finie est une restriction d'une R_p, donc appartient à K en raison de la condition $\mathcal{C}_1$ (1.5). Inversement, toute relation A de base finie, extraite de K, vérifie la condition $A < R_p$ pour un certain entier p (8.3, 2°) donc vérifie la condition $A < R$.

2° *On a* $K = \Gamma_R$. C'est une conséquence immédiate de l'assertion 1° et du fait que K est par hypothèse une Γ.

3° R *est homogène*. La base de R est finie ou dénombrable; *il suffit de montrer que cette relation vérifie* $\mathcal{H}$ (5.5). Soient A, $\overline{A}$ deux relations de γ_R ($\overline{A}$ étant un prolongement de A) définies respectivement sur r et sur $r+s$ éléments; soit ξ un isomorphisme de A sur une restriction de R. $\xi(A)$ est une restriction des R_p à partir d'une certaine valeur de p; on peut toujours supposer $p \geqq r$. La relation $\overline{A}$ appartient à K d'après l'assertion 1° ci-dessus. Les hypothèses de l'énoncé 8.3 (3°) sont satisfaites en remplaçant A par $\overline{A}$, A' par A et p par $p+s+1$ [on a en effet $p+s+1>r+s$, et $\xi(A)$ est une restriction de R_{p+s}]; ξ peut donc être prolongé en un isomorphisme $\overline{\xi}$ de $\overline{A}$ sur une restriction de R_{p+s+1}, donc sur une restriction de R. Notre énoncé 8.3.1 est démontré.

8.4. *Démontrons le théorème* VI.

1° La condition du théorème VI, 1° est nécessaire d'après l'énoncé 8.2, suffisante d'après les énoncés 8.3 et 8.3.1.

2° La relation R dont parle l'énoncé 8.3.1 est de base finie ou dénombrable; désignons-la par R_0. S'il existe une autre relation R_1 homogène, de base finie ou dénombrable, telle que $K=\Gamma_{R_0}=\Gamma_{R_1}$, on a $R_0 \prec R_1$ et $R_1 \prec R_0$ (1.4); de plus R_0 et R_1 vérifient $\mathcal{H}$ (5.3). D'après l'énoncé 5.4 (2°), R_1 est isomorphe à R_0 : la conclusion 2° du théorème est établie.

3° Soit R une relation homogène telle que $K=\Gamma_R$; appliquons le théorème V (5.1) en remplaçant A par R_0 : la conclusion 3° du théorème VI est établie.

8.5. Des théorèmes V et VI, résulte notre affirmation du paragraphe 4.7 : *Si une* Γ *vérifie la condition* $\mathcal{O}$ (7.1) *elle vérifie la condition* $\mathcal{C}$ (4.7).

En effet, soient K cette Γ, R la relation homogène de base finie ou dénombrable, telle que $K=\Gamma_R$ (théorème VI, 2°); toute relation A de K, définie sur une base finie ou dénombrable, vérifie $A<R$ d'après le théorème V.

9. — Sur quelques classes de relations vérifiant ou non les conditions $\mathcal{O}$ et $\overline{\mathcal{O}}$ de 7.1.

Les classes considérées dans le présent paragraphe sont des Γ (2.7).

9.1. *La classe de toutes les relations à n arguments vérifie* $\overline{\mathcal{O}}$.

En effet, considérons deux de ces relations A, B de bases F, G ayant une restriction commune à $F\cap G$. Toute relation C de base $F\cup G$, prenant sur F les mêmes valeurs que A, et sur G les mêmes valeurs que B, satisfait à la condition $\overline{\mathcal{O}}$.

9.2. *La classe des ordres totaux vérifie* $\overline{\mathcal{O}}$.

Preuve. — Soient A, B deux ordres finis de bases F, G; désignons par $a_1, \ldots, a_p$ la suite des éléments de $F\cap G$ dans l'ordre, supposé commun, induit par A et par B. Ordonnons les éléments de $F\cup G$ en plaçant d'abord les éléments de F antérieurs à a_1, dans l'ordre induit par A, puis ceux de G antérieurs à a_1, dans l'ordre induit par B; ensuite nous plaçons a_1, puis les éléments de F et de G compris entre a_1 et a_2, dans les ordres induits par A et par B; on continue ainsi jusqu'aux éléments de F et de G postérieurs à a_p. L'ordre obtenu C vérifie $\overline{\mathcal{D}}$.

9.3. *La classe des ordres partiels vérifie* $\overline{\mathcal{D}}$.

Preuve. — A et B sont ici deux ordres partiels. Désignons par H l'intersection de leurs bases F, G, et définissons comme suit la relation C sur $F \cup G$:

Si $a, b \in F \cup G$:

ou bien $a, b \in F$: on pose $C(a, b) = A(a, b)$;

ou bien $a, b \in G$: on pose $C(a, b) = B(a, b)$;

ou bien $a \in F - H$ et $b \in G - H$: on pose alors $C(a, b) = +$ si, et seulement s'il existe un x de H tel que

$$A(a, x) = B(x, b) = +;$$

de même $C(b, a) = +$ si et seulement s'il existe un y de H tel que

$$B(b, y) = A(y, a) = +.$$

La relation C *est évidemment réflexive. Elle est transitive*, ainsi qu'on le voit en considérant trois éléments a, b, c disposés de toutes les façons possibles dans H, F — H et G — H et en utilisant la transitivité de A et de B.

Étant donnés deux éléments distincts a, b *de* $F \cup G$, *on ne peut avoir*

$$C(a, b) = C(b, a) = +.$$

C'est évident si $a, b \in F$ ou si $a, b \in G$. Dans le cas où $a \in F - H$ et $b \in G - H$, il faut qu'il existe un x et un y de H tels que

$$A(a, x) = B(x, b) = B(b, y) = A(y, a) = +.$$

D'après la transitivité de A et de B, on a $A(y, x) = B(x, y) = +$ et,

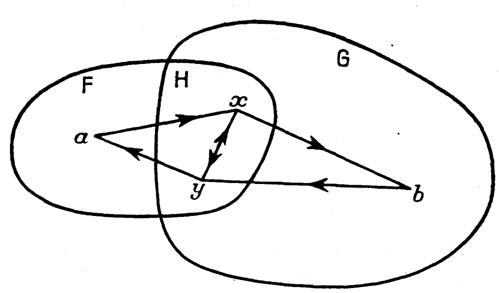

Fig. 1.

puisque A et B se confondent par hypothèse sur H, on a

$$A(y, x) = A(x, y) = + \quad (\textit{fig. } 1).$$

On en déduit $x = y$, $A(a, x) = A(x, a) = +$ et par conséquent $a = x$, ce qui est contradictoire.

C est bien un ordre partiel prolongement de A et de B, donc vérifiant $\overline{\mathcal{D}}$.

9.4. *La classe des ordres ramifiés* (1.4) *ne vérifie pas* $\mathcal{D}$.

Preuve. — Soient a, b, c, d, e cinq éléments; posons

$$F = \{a, b, c, d\}, \qquad G = \{a, b, c, e\}, \qquad H = \{a, b, c\}.$$

Soit A l'ordre ramifié défini sur F, dans lequel a, b, c sont incomparables, d étant antérieur à a et à b, mais incomparable à c; soit B l'ordre défini de même sur G, en échangeant a et c, d et e (*fig.* 2).

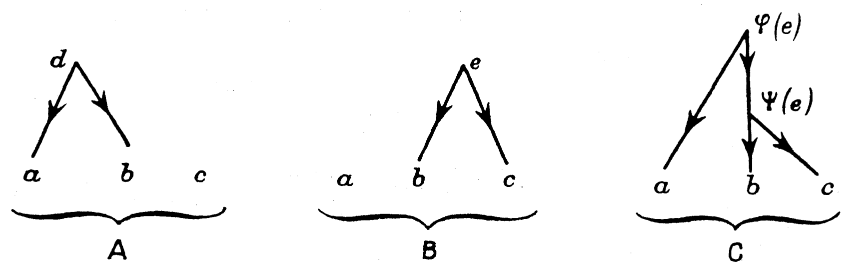

Fig. 2.

Supposons qu'il existe un ordre ramifié C et deux isomorphismes φ, ψ de A et de B sur deux restrictions de C, avec $\varphi(x) = \psi(x)$ pour $x \in H$. Nous pouvons toujours supposer que φ et ψ se réduisent à l'identité sur H. $\varphi(d)$ et $\psi(e)$ doivent être antérieurs, dans C, à $\varphi(b) = \psi(b) = b$. L'un des deux éléments $\varphi(d)$, $\psi(e)$ est donc antérieur ou confondu avec l'autre; supposons $\varphi(d) \leqq \psi(e)$ dans C; nous avons $\psi(e) < \psi(c) = c$ donc $\varphi(d) < c = \varphi(c)$. Cela est impossible, puisque l'isomorphisme φ doit transformer les deux éléments incomparables c et d de A en deux éléments incomparables de C. La proposition est démontrée.

9.5. Désignons par K_1, K_2, K_3 et K_4 la classe des relations à n arguments, celle des ordres totaux, celle des ordres partiels et celle des ordres ramifiés. Compte tenu de ce que $\overline{\mathcal{D}}$ entraîne $\mathcal{D}$ (7.3), le théorème VI (8.1) démontre l'existence de relations homogènes R_i ($i = 1, 2, 3$) de K_i, telles que $K_i = \Gamma_{R_i}$ (autrement dit, telles que toute relation de base finie, extraite de K_i, est isomorphe à une restriction de R_i). La conclusion 2° du théorème montre qu'une R_1, une R_2 (qui est l'ordre η) et une R_3 seulement sont de base dénombrable. Par contre, il n'existe aucun ordre ramifié homogène R vérifiant $K_4 = \Gamma_R$ (c'est-à-dire ayant des restrictions isomorphes à tout ordre ramifié fini).

En raison de ce que nous avons dit au paragraphe 8.5, les classes K_1, K_2 et K_3 vérifient la condition $\mathcal{C}$ du paragraphe 4.7. Nous ignorons si la classe des ordres ramifiés vérifie $\mathcal{C}$.

10. — Application à la logique mathématique. Problèmes.

10.1. A l'aide d'un théorème dû à L. Henkin [9], on déduit immédiatement, des théorèmes III et IV (1.5), la conséquence suivante :

Tout type arithmétique K *au sens de* A. Tarski [10] (classe de relations vérifiant les mêmes formules du calcul logique du premier ordre) *satisfait à la condition* $\mathcal{C}_2$ *et plus généralement à l'énoncé du théorème* IV.

10.2. Les questions suivantes restent ouvertes :

1° Étant donnés une relation R et un entier p, soit K la classe des relations dont toute restriction à p éléments au plus est isomorphe à une restriction de R; la classe K est-elle une Γ ? [11]

2° Quelle est la puissance de l'ensemble des Γ qui vérifient $\mathcal{D}$ (7.1) ? Même question pour $\overline{\mathcal{D}}$.

3° Dans la définition de la relation homogène à n arguments (5.1), supposons que F soit astreinte à avoir n éléments au plus; la définition obtenue équivaut-elle à la définition initiale ?

4° Étendons ainsi la définition de la relation homogène :

« Quelle que soit la partie finie F de E, il existe une partie finie G ($F \subset G \subset E$) telle que tout isomorphisme de $R \mid G$ sur une restriction de R peut être prolongé en un automorphisme de R ».

Étant donnée une Γ que nous désignons par K, existe-t-il une relation R de base finie ou dénombrable, et une seule (avec ses isomorphes), vérifiant $K = \Gamma_R$ et répondant à la définition ainsi modifiée ?

---

(9) L. Henkin, *Some interconnections between modern algebra and mathematical logic* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 74, 1953, p. 414).

(10) A. Tarski, *Some notions and methods on the borderline of algebra and metamathematics* (*Proc. Intern. Congr. Math.*, 1950, p. 712).

(11) Réponse négative obtenue depuis la rédaction de l'article.