ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

JEAN-CLAUDE HERZ

Contribution à la théorie algébrique des équations aux dérivées partielles

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 71, nº 4 (1954), p. 321-362

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1954_3_71_4_321_0>

CONTRIBUTION

A LA THÉORIE ALGÉBRIQUE

DES

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

PAR M. JEAN-CLAUDE HERZ.

INTRODUCTION

Le présent travail a pour point de départ l'exposé par Goursat (1) de la théorie de l'intégration des systèmes linéaires et homogènes d'équations aux dérivées partielles du premier ordre à une fonction inconnue, d'après le Mémoire fondamental de Clebsch (2) complété par Mayer (3). La théorie avait été amorcée par Jacobi (4) à propos des équations de la dynamique analytique, ainsi que par Bour (5), Boole (6), Collet (7). Elle a été rattachée par Frobenius et Cartan à la théorie des systèmes de Pfaff (8).

Le raisonnement employé est, en grande partie, spécifiquement algébrique. Il était donc intéressant de chercher à l'exprimer en langage moderne. Comme l'indépendance linéaire des premiers membres $X_i f$ intervient d'une manière fondamentale, il était naturel de considérer les symboles de différentiation X

(1) *Cours d'Analyse*, t. II, p. 634-641; *Leçons sur les équations aux dérivées partielles du premier ordre*, p. 46-69. *Cf.* VALIRON, *Équations fonctionnelles*, p. 548-549.
(2) *Journal de Crelle*, t. 65, 1866, p. 257-268.
(3) *Math. Ann.*, t. 4, 1871, p. 88-94; t. 5, 1872, p. 448-470.
(4) *Journal de Crelle*, t. 60, 1861, p. 1-182.
(5) *J. Éc. Polyt.*, t. 39, 1862, p. 149 et suiv.
(6) *Phil. Trans.*, 1863, p. 485-501.
(7) *Ann. Éc. Norm. Sup.*, t. 7, 1870, p. 1-57.
(8) CARTAN, *Leçons sur les invariants intégraux*, p. 99-101.

comme des *vecteurs* sur le corps des coefficients. De plus, la théorie adjoint à un système $X_i f$ les équations $X_i(X_j f) - X_j(X_i f)$ qui sont encore du même type. C'est là une *opération* définie sur l'espace vectoriel précédemment introduit, qui devient ainsi une *algèbre*. On a alors un premier résultat purement algébrique : tout élément de la sous-algèbre engendrée par les symboles X_i annule toute solution du système. La réciproque fait appel à l'analyse et s'énonce : aucun autre symbole de différentiation n'annule à la fois toutes les solutions du système. Le résultat final de la théorie est plus précis : si le nombre des variables est n et la dimension de la sous-algèbre q, l'intégrale générale est une fonction arbitraire de $n-q$ fonctions indépendantes. On trouvera cet exposé au chapitre V (§ 6).

Un pas décisif dans l'algébrisation de cette théorie a pu être fait grâce aux remarquables travaux de Ritt, le fondateur de l'*Algèbre différentielle*. Le théorème des zéros de Hilbert, étendu par lui aux équations différentielles et aux dérivées partielles algébriques [9], m'a permis en effet de donner une démonstration purement algébrique de la réciproque énoncée plus haut. La question est traitée au chapitre V (§ 1 à 5).

L'étude de l'opération $X_iX_j - X_jX_i$, que je note $\{X_i, X_j\}$, fait l'objet des chapitres I à IV. On voit immédiatement qu'elle est *quasi commutative* et *distributive* pour l'addition, et qu'elle vérifie *l'identité de Jacobi*. Elle n'est pas linéaire, mais on a

$$\{X_i, \lambda X_j\} = \lambda\{X_i, X_j\} + \alpha X_j,$$

α ne dépendant que de X_i et λ (en fait, $\alpha = X_i\lambda$). On peut donc la qualifier, suivant Jacobson [10], de *pseudo-linéaire*. Inversement, ces quatre propriétés, prises comme axiomes, définissent sur un espace vectoriel une certaine structure d'algèbre. Vu la similitude de ces axiomes avec ceux des algèbres de Lie, j'ai appelé cette structure « pseudo-algèbre de Lie ».

Le chapitre I donne quelques propriétés générales des pseudo-algèbres de Lie, ainsi que des exemples. Le chapitre II traite le cas où le corps de base n'est pas commutatif. Le chapitre III étudie le cas commutatif. Le chapitre IV étend aux pseudo-algèbres de Lie un raisonnement appliqué par G. Birkhoff aux algèbres de Lie. Enfin un appendice rassemble différentes questions non résolues.

Dans le cours du texte, les références en chiffres romains désignent les chapitres, celles en chiffres arabes les paragraphes.

---

(9) *Differential Algebra* (*Amer. Math. Soc. Colloq. Public.*, t. 33, 1950, p. 27 et 166).
(10) *Pseudo-linear transformations* (*Ann. Math.*, t. 38, 1937, p. 485).

CHAPITRE I.

DÉFINITIONS ET PROPRIÉTÉS IMMÉDIATES DES PSEUDO-ALGÈBRES DE LIE.

1. Définition. — Soit K un corps quelconque (commutatif ou non) dont nous désignerons les éléments par des lettres grecques minuscules. Rappelons qu'une dérivation D de K est une application de K dans lui-même vérifiant les deux propriétés

$$D(\alpha+\beta)=D\alpha+D\beta, \qquad D(\alpha\beta)=D\alpha.\beta+\alpha.D\beta.$$

Soit E un espace vectoriel à gauche sur K, de dimension finie ou infinie, dont nous noterons les éléments par des minuscules ordinaires.

Nous dirons que E est une *pseudo-algèbre de Lie* sur K si E est de plus muni d'une opération notée $\{\,,\}$ (opération « accolade ») vérifiant les axiomes suivants :

I. $\{u, v\}=-\{v, u\}$ (*antisymétrie*);

II. $\{u, v+w\}=\{u, v\}+\{u, w\}$ (*distributivité*);

III. $\{u, \lambda v\}=\lambda\{u, v\}+\alpha v$, α étant un élément de K qui ne dépend que de u et de λ (*pseudo-linéarité*);

IV. $\{u, \{v, w\}\}+\{v, \{w, u\}\}+\{w, \{u, v\}\}=0$ (*identité de Jacobi*).

La dimension de E sera supposée désormais non nulle.

Une pseudo-algèbre de Lie sera dite *abélienne* si $\{u, v\}=0$ pour tout couple d'éléments u, v.

Nous appellerons *sous-pseudo-algèbre de Lie* de E un sous-espace vectoriel de E fermé pour l'opération $\{\,,\}$. Une sous-pseudo-algèbre de Lie de E sera dite *invariante* si elle est permise dans E pour l'opération $\{\,,\}$, c'est-à-dire si elle contient, avec un élément u, tout élément de la forme $\{u, v\}$.

2. Conséquences immédiates des axiomes. — *a*. Si K n'est pas de caractéristique 2, on a $\{u, u\}=0$ (axiome I).

b. $\{u, 0\}=0$ (axiome II).

c. L'axiome III associe à un vecteur u et à un scalaire λ un scalaire $\alpha(u, \lambda)$ que nous noterons $u\lambda$. E devient ainsi un domaine d'opérateurs *à gauche* pour K. En vertu de l'axiome I, on a la relation plus générale

$$\{\lambda u, \mu v\}=\mu\lambda\{u, v\}+[(\lambda u)\mu]v-\mu(v\lambda)u. \tag{1}$$

L'opérateur u est une dérivation de K. En effet,

$$\begin{aligned}\{u, (\lambda+\mu)v\}=\{u, \lambda v+\mu v\}&=\{u, \lambda v\}+\{u, \mu v\}\\ &=[\lambda\{u, v\}+(u\lambda)v]+[\mu\{u, v\}+(u\mu)v]\\ &=(\lambda+\mu)\{u, v\}+(u\lambda+u\mu)v,\end{aligned}$$

d'où

$$u(\lambda+\mu)=u\lambda+u\mu,$$

et

$$\{u,\lambda\mu v\}=\{u,\lambda(\mu v)\}=\lambda\{u,\mu v\}+(u\lambda)\mu v=\lambda[\mu\{u,v\}+(u\mu)v]+(u\lambda)\mu v$$
$$=\lambda\mu\{u,v\}+[\lambda(u\mu)+(u\lambda)\mu]v,$$

d'où

$$u(\lambda\mu)=(u\lambda)\mu+\lambda(u\mu).$$

d. L'axiome IV nous donne une relation importante entre les dérivations u, v et $\{u, v\}$:

$$\begin{aligned}
0 &= \{u,\{v,\lambda w\}\}+\{v,\{\lambda w,u\}\}+\{\lambda w,\{u,v\}\}\\
&= \{u,\lambda\{v,w\}+(v\lambda)w\}+\{v,\lambda\{w,u\}-(u\lambda)w\}+\lambda\{w,\{u,v\}\}-(\{u,v\}\lambda)w\\
&= \lambda\{u,\{v,w\}\}+(u\lambda)\{v,w\}+(v\lambda)\{u,w\}+[u(v\lambda)]w+\lambda\{v,\{w,u\}\}\\
&\quad +(v\lambda)\{w,u\}-(u\lambda)\{v,w\}-[v(u\lambda)]w+\lambda\{w,\{u,v\}\}-(\{u,v\}\lambda)w\\
&= [u(v\lambda)-v(u\lambda)-\{u,v\}\lambda]w,
\end{aligned}$$

d'où

$$\{u,v\}\lambda=u(v\lambda)-v(u\lambda).$$

e. En utilisant les axiomes II et III, on a immédiatement

$$(u+v)\lambda=u\lambda+v\lambda. \tag{2}$$

Il s'ensuit que l'opérateur $u=0$ est la dérivation nulle, et que, si μ appartient au sous-corps premier de K,

$$(\lambda u)\mu=\lambda(u\mu).$$

3. Exemples. — *a.* Toute *algèbre de Lie* est une pseudo-algèbre de Lie ($\alpha\equiv 0$ dans l'axiome III). En particulier, toute algèbre de Lie *abélienne* est une pseudo-algèbre de Lie abélienne (et réciproquement).

b. Si E est l'espace des *dérivations* d'un corps K commutatif, on en fait une pseudo-algèbre de Lie sur K en posant $\{u, v\}=u\circ v-v\circ u$.

c. Si K est un corps de fonctions réelles de deux variables réelles x, y admettant toutes des dérivées appartenant à K, K est espace vectoriel sur lui-même et devient une pseudo-algèbre de Lie quand on pose $\{f, g\}=f'_x g'_y-f'_y g'_x$.

d. Si V est un espace vectoriel sur un corps commutatif K, on appelle [11] *transformation différentielle* de V toute application T de V dans lui-même vérifiant

$$\mathrm{T}(x+y)=\mathrm{T}x+\mathrm{T}y,$$
$$\mathrm{T}(\alpha x)=\alpha(\mathrm{T}x)+\alpha_{\mathrm{T}}x \qquad (\alpha_{\mathrm{T}}\in\mathrm{K} \text{ ne dépendant que de } \alpha \text{ et T}).$$

On voit facilement que l'application $\alpha\to\alpha_{\mathrm{T}}$ est une dérivation de K.

---

[11] N. Jacobson, *Ann. Math.*, t. 38, 1937, p. 485.

L'ensemble des transformations différentielles de V devient un espace vectoriel E sur K si l'on pose

$$(T + T')x = Tx + T'x \qquad \text{et} \qquad (\lambda T)x = \lambda(Tx),$$

comme on le vérifie aisément.

L'espace E deviendra une pseudo-algèbre de Lie sur K si l'on pose

$$\{T, T'\} = T \circ T' - T' \circ T,$$

car on vérifie sans peine que la transformation du second membre est une transformation différentielle et que les axiomes I à IV sont remplis.

e. Un corps gauche K, considéré comme espace vectoriel sur lui-même, devient une pseudo-algèbre de Lie A_K quand on pose $\{\alpha, \beta\} = \alpha\beta - \beta\alpha$.

4. Sous-pseudo-algèbres de Lie. — Proposition 1. — *Soit* V *un sous-espace de* E, *de dimension finie ou infinie*, $(u_i)_{i\in I}$ *un système de générateurs de* V. *Pour que* V *soit une sous-pseudo-algèbre de Lie de* E, *il faut et il suffit que* $\{u_i, u_j\} \in V$ *pour tout* $i, j \in I$.

La condition est évidemment nécessaire. Montrons qu'elle est suffisante : soient $u = \sum \alpha_i u_i$, $v = \sum \beta_j u_j$ deux éléments de V. On a

$$\begin{aligned}\{u, v\} &= \left\{\sum \alpha_i u_i, \sum \beta_j u_j\right\} = \sum_i \sum_j \{\alpha_i u_i, \beta_j u_j\}\\ &= \sum_i \sum_j [\beta_j \alpha_i \{u_i, u_j\} + [(\alpha_i u_i)\beta_j] u_j - \beta_j (u_j \alpha_i) u_i] \quad \text{d'après (1)}.\end{aligned}$$

Si $\{u_i, u_j\} \in V$ pour tout $i, j \in I$, il s'ensuit que $\{u, v\} \in V$ et que par conséquent V est une sous-pseudo-algèbre de Lie de E.

Corollaire. — *Tout sous-espace de* E *de dimension* 1 *est une sous-pseudo-algèbre de Lie.*

Proposition 2. — *La sous-pseudo-algèbre de Lie* V *engendrée par des vecteurs* $(u_i)_{i\in I}$ *est le sous-espace vectoriel* V_1 *engendré par les vecteurs*

$$v_j = \{u_{j_1}, \{u_{j_2}, \ldots, \{u_{j_{q-1}}, u_{j_q}\} \ldots\}\},$$

où q *est un entier quelconque et* $j_k \in I$.

En effet, tous ces vecteurs appartiennent à V. En vertu de la proposition 1 il suffit donc de montrer que $\{v_i, v_j\} \in V$ pour tout i, j. Désignons par $v_{(q)}$ un vecteur v_j défini par q accolades. Je dis que $\{v_{(q)}, v_{(r)}\}$ est égal à une combinaison linéaire de $v_{(h)}$ avec $h \leqq q + r$.

Cette proposition est vraie pour $q = 1$. Supposons-la vraie pour $\{v_{(q-1)}, v_{(r)}\}$.

Nous avons, en utilisant l'axiome IV,

$$\begin{aligned}\{v_{(q)}, v_{(r)}\} &= \{\{u_i, v_{(q-1)}\}, v_{(r+1)}\}\\ &= -\{\{v_{(q-1)}, v_{(r)}\}, u_i\} - \{\{v_{(r)}, u_i\}, v_{(q-1)}\},\end{aligned}$$

d'où, d'après l'hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned}\{v_{(q)}, v_{(r)}\} &= \left\{u_i, \sum \lambda v_{(h)}\right\} - \{v_{(q-1)}, v_{(r+1)}\}\\ &= \sum \lambda \{u_i, v_{(h)}\} + \sum (u_i\lambda) v_{(h)} - \sum \mu v_{(h')}\\ &= \sum \lambda v_{(h+1)} + \sum (u_i\lambda) v_{(h)} - \sum \mu v_{(h')}\end{aligned}$$

avec $h \leqq q - 1 + r$, $h' \leqq q - 1 + r + 1$, d'où la proposition.

CHAPITRE II.

ÉTUDE DU CAS NON COMMUTATIF.

1. Pseudo-algèbres de Lie de dimension supérieure à 1 sur un corps gauche. — De l'axiome I et de la relation (1) (I, 2, c), on tire

$$(\mu\lambda - \lambda\mu)\{u, v\} + [(\lambda u)\mu - \lambda(u\mu)]v + [(\mu v)\lambda - \mu(v\lambda)]u = 0. \tag{1}$$

K étant supposé non commutatif, nous voyons que $\{u, v\}$ appartient au sous-espace engendré par u et v. Donc *les sous-pseudo-algèbres de Lie de* E *ne sont autres que ses sous-espaces.*

Plaçons-nous désormais dans le cas où E est de dimension > 1. Si $u = 0$, on a, d'après la relation (2) (I, 2, e), $u\lambda = 0$, d'où

$$(\lambda u)\mu - \lambda(u\mu) = 0.$$

Si $u \neq 0$, il existe un vecteur v linéairement indépendant de u, et la formule (1) donne les composantes du vecteur $(\lambda\mu - \mu\lambda)\{u, v\}$ relativement à la base u, v. Lorsque u et v sont fixés, et par conséquent aussi $\{u, v\}$, ces composantes varient proportionnellement à $\lambda\mu - \mu\lambda$. En particulier, on a

$$(\lambda u)\mu - \lambda(u\mu) = (\lambda\mu - \mu\lambda)\varphi(u),$$

$\varphi(u) \in$ K ne dépendant que de u. Cette relation s'étend au cas $u = 0$, auquel correspond $\varphi(u) = 0$. La formule (1) s'écrit

$$\{u, v\} = \varphi(u)v - \varphi(v)u. \tag{2}$$

Étudions les propriétés de l'application φ de E dans K. Nous pouvons fixer λ et μ, que nous choisirons non permutables,

$$\varphi(u + v) = (\lambda\mu - \mu\lambda)^{-1}[(\lambda u + \lambda v)\mu - \lambda(u\mu + v\mu)],$$

ou

$$(3)\qquad \varphi(u+v)=\varphi(u)+\varphi(v),$$

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha u) &= (\lambda\mu-\mu\lambda)^{-1}[(\lambda\alpha u)\mu-\lambda([\alpha u]\mu)]\\ &= (\lambda\mu-\mu\lambda)^{-1}[(\lambda\alpha u)\mu-\lambda\alpha(u\mu)-\lambda([\alpha u]\mu-\alpha[u\mu])]\\ &= (\lambda\mu-\mu\lambda)^{-1}[(\lambda\alpha\mu-\mu\lambda\alpha)\varphi(u)-\lambda(\alpha\mu-\mu\alpha)\varphi(u)],\end{aligned}$$

ou

$$(4)\qquad \varphi(\alpha u)=\alpha\varphi(u).$$

Les relations (3) et (4) expriment que *l'application* φ *est linéaire*. Cherchons maintenant une expression de $u\lambda$:

$$\begin{aligned}\{u, \lambda v\} &= \varphi(u)\lambda v-\varphi(\lambda v)u=\varphi(u)\lambda v-\lambda\varphi(v)u\\ &= \lambda\{u, v\}+(u\lambda)v=\lambda\varphi(u)v-\lambda\varphi(v)u+(u\lambda)v,\end{aligned}$$

d'où

$$(5)\qquad u\lambda=\varphi(u)\lambda-\lambda\varphi(u).$$

On a, en vertu de (2) et de la linéarité,

$$\varphi(\{u, v\})=\varphi(u)\varphi(v)-\varphi(v)\varphi(u).$$

Par conséquent l'application φ est un *homomorphisme de pseudo-algèbres de Lie de* E *dans* $A_K(I, 3, e)$.

Réciproquement, soit K un corps quelconque, E un espace vectoriel sur K, de dimension quelconque, φ une application linéaire de E dans K. L'opération

$$(2)\qquad \{u, v\}=\varphi(u)v-\varphi(v)u$$

vérifie les axiomes I à IV.

Nous avons donc déterminé *toutes les pseudo-algèbres de Lie de dimension* >1 *sur un corps gauche* K. En vertu de (5), ce sont des algèbres de Lie sur le centre de K.

Remarque. — L'axiome IV est, dans ce cas, automatiquement vérifié dès que le sont les axiomes I à III.

2. Pseudo-algèbres de Lie de dimension 1 sur un corps gauche. — Le résultat précédent n'est plus nécessairement vrai si E est de dimension 1.

La relation (1) permet seulement d'écrire

$$(\mu\lambda-\lambda\mu)\{u, u\}+[(\lambda u)\mu-\lambda(u\mu)+(\mu u)\lambda-\mu(u\lambda)]u=0,$$

d'où, *dans le cas où* K *n'est pas de caractéristique* 2,

$$(6)\qquad (\lambda u)\mu+(\mu u)\lambda=\lambda(u\mu)+\mu(u\lambda) \quad [12].$$

[12] Cette formule est encore valable dans le cas commutatif, pour une caractéristique quelconque (*cf.* chap. III).

La formule (2), où $\varphi(u)$ est une application linéaire de E dans K, définit encore une pseudo-algèbre de Lie, mais il peut exister d'autres formes de pseudo-algèbres de Lie.

E étant de dimension 1, tout élément u est de la forme λu_0 (u_0 fixe, $\lambda \in K$), et l'application $u \to \varphi(u)$ est définie par une transformation $\lambda \to \varphi(\lambda)$ de K telle que

$$\varphi(\alpha\lambda) = \alpha\varphi(\lambda),$$

donc

$$\varphi(\alpha) = \alpha\varphi(1) = \alpha\theta_0,$$

$\theta_0 = \varphi(1)$ est un élément fixe de K.

On a alors

$$\{\lambda u_0, \mu u_0\} = (\lambda\theta_0\mu - \mu\theta_0\lambda)u_0.$$

Si $\theta_0 = 0$, E est abélienne. Si $\theta_0 \neq 0$, posons $u_1 = \theta_0^{-1} u_0$. Nous obtenons

$$\{\lambda u_1, \mu u_1\} = (\lambda\theta_0^{-1}\theta_0\mu\theta_0^{-1} - \mu\theta_0^{-1}\theta_0\lambda\theta_0^{-1})u_0 = (\lambda\mu - \mu\lambda)u_1.$$

Nous voyons que E est alors isomorphe à la pseudo-algèbre de Lie $A_K(I, 3, e)$.

Nous allons étudier les pseudo-algèbres de Lie sur le corps K des *quaternions rationnels*. K est l'ensemble des éléments $a + b\omega_1 + c\omega_2 + d\omega_3$, a, b, c, d étant des nombres rationnels et $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ vérifiant les règles de multiplication bien connues.

Étudions d'abord les dérivations de K. Une telle dérivation est définie par son effet sur ω_1, ω_2 et ω_3 :

$$\omega_i' = p_i + q_i\omega_i + r_i\omega_{i+1} + s_i\omega_{i-1},$$

où i est un entier défini modulo 3.

De $\omega_i^2 = -1$, on déduit

$$\omega_i'\omega_i + \omega_i\omega_i' = 0$$

et par conséquent $p_i = q_i = 0$.

De $\omega_i\omega_{i+1} = \omega_{i-1}$, on déduit

$$\omega_i'\omega_{i+1} + \omega_i\omega_{i+1}' = \omega_{i-1}'$$

ou

$$r_{i-1}\omega_i + s_{i-1}\omega_{i+1} - r_i - s_i\omega_i - r_{i+1}\omega_{i+1} - s_{i+1} = r_{i-1}\omega_i + s_{i-1}\omega_{i+1}$$

d'où

$$r_i = -s_{i+1}.$$

Toute dérivation de K est donc définie par des relations de la forme

$$\omega_i' = a_{i-1}\omega_{i+1} - a_{i+1}\omega_{i-1}.$$

Soit maintenant E une pseudo-algèbre de Lie de dimension 1 sur K, u un élément non nul de E. E est définie par la donnée des scalaires $u\omega_i$ et $(\omega_i u)\omega_j$

(i, j entiers modulo 3). En effet,

$$\{\alpha u, \beta u\} = [(\alpha u)\beta - \beta(u\alpha)]u \qquad (\alpha, \beta \in \mathrm{K}).$$

Si $\alpha = a + b\omega_1 + c\omega_2 + d\omega_3$, on a

$$u\alpha = b(u\omega_1) + c(u\omega_2) + d(u\omega_3)$$

et

$$(\alpha u)\beta = a(u\beta) + b[(\omega_1 u)\beta] + c[(\omega_2 u)\beta] + d[(\omega_3 u)\beta] \quad (\text{I}, 2, e).$$

Par conséquent $u\alpha$ et $(\alpha u)\beta$ sont connus dès que le sont les $u\omega_i$ et les $(\omega_i u)\omega_j$.

D'après ce qui précède, les $u\omega_i$ et les $(\omega_i u)\omega_j$ sont de la forme

$$u\omega_i = a_{i-1}\omega_{i+1} - a_{i+1}\omega_{i-1},$$
$$(\omega_i u)\omega_j = b_{i,j-1}\omega_{j+1} - b_{i,j+1}\omega_{j-1}.$$

Les b_{ij} sont liés, en vertu de la relation (6), par

$$(\omega_i u)\omega_{i+1} + (\omega_{i+1} u)\omega_i = \omega_i(u\omega_{i+1}) + \omega_{i+1}(u\omega_i)$$

ou

$$b_{ii}\omega_{i-1} - b_{i,i+1}\omega_i + b_{i+1,i-1}\omega_{i+1} - b_{i+1,i+1}\omega_{i-1} = -a_i\omega_{i+1} - a_{i+1}\omega_i,$$

ce qui nous donne

$$\begin{aligned} b_{ii} &= b_{i+1,i+1}, \\ b_{i,i-1} &= a_{i+1}, \\ b_{i+1,i-1} &= -a_i. \end{aligned}$$

Posons alors

$$b = b_{11} = b_{22} = b_{33} \qquad \text{et} \qquad \theta = \frac{b + a_1\omega_1 + a_2\omega_2 + a_3\omega_3}{2}.$$

Nous avons alors

$$\theta\omega_i - \omega_i\theta = a_{i-1}\omega_{i+1} - a_{i+1}\omega_{i-1} = u\omega_i,$$
$$\omega_i\theta\omega_{i+1} - \omega_{i+1}\theta\omega_i = a_{i-1} + b\omega_{i-1} = (\omega_i u)\omega_{i+1} - \omega_{i+1}(u\omega_i)$$

et par conséquent

$$\{u, \omega_i u\} = (\theta\omega_i - \omega_i\theta)u$$

et

$$\{\omega_i u, \omega_{i+1} u\} = (\omega_i\theta\omega_{i+1} - \omega_{i+1}\theta\omega_i)u.$$

En vertu de la double distributivité (pour l'addition) de l'opération accolade et de l'opération $\lambda, \mu \to \lambda\theta\mu - \mu\theta\lambda$, il s'ensuit qu'on a la relation générale

$$\{\lambda u, \mu u\} = (\lambda\theta\mu - \mu\theta\lambda)u.$$

Nous avons ainsi démontré qu'il n'existait sur le corps K des quaternions rationnels que des pseudo-algèbres de Lie abéliennes ou isomorphes à A_K.

De telles pseudo-algèbres de Lie seront dites *triviales*.

Cas particulier important : le corps K n'admet que des *dérivations intérieures*.

Rappelons qu'une dérivation D d'un corps gauche K est dite *intérieure* [13] s'il existe un élément θ_D de K tel que $D\alpha = \theta_D\alpha - \alpha\theta_D$ pour tout $\alpha \in K$. Toute dérivation intérieure de K annule son centre Z. L'ensemble des θ_D vérifiant la condition ci-dessus pour une dérivation donnée D est une classe modulo Z. Si V est un sous-espace supplémentaire de Z (K et Z étant considérés comme espaces sur Z), θ_D admet une forme canonique unique dans V.

Soit E une pseudo-algèbre de Lie *de dimension* 1 sur un corps gauche K de caractéristique $\neq 2$, *sans dérivations non intérieures*, Z le centre de K, u_0 un élément non nul de E. Quel que soit $\lambda \in K$, l'application $\alpha \to (\lambda u_0)\alpha$ est une dérivation de K. A λ correspond ainsi un élément $\bar{\lambda}$ d'un espace V. Cette application φ de K dans V est *linéaire*. En effet, d'une part

$$\overline{\lambda + \mu} = \bar{\lambda} + \bar{\mu}$$

d'après la relation (2) (I, 2, *e*); d'autre part, soit a un élément de Z; nous avons d'après la formule (6) [14]

$$(a\lambda u_0)\alpha + (\alpha\lambda u_0)a = a[(\lambda u_0)\alpha] + \alpha[(\lambda u_0)a]$$

ou

$$(a\lambda u_0)\alpha = a[(\lambda u_0)\alpha],$$

donc

$$\overline{a\lambda} = a\bar{\lambda}.$$

Supposons maintenant que K soit de dimension finie $n+1$ sur Z. V est de dimension n. L'image de K dans V par l'application $\varphi(\lambda \to \bar{\lambda})$ est de dimension $m \leq n$. Le sous-espace des λ tels que $\bar{\lambda} = 0$ est donc de dimension $n + 1 - m \geq 1$. Autrement dit il existe un élément non nul $u = \lambda u_0$ de E tel que $u\alpha = 0$ pour tout $\alpha \in K$. Prenons pour u_0 cet élément u. L'opération accolade dans E est alors définie par

$$\{\lambda u, \mu u\} = [(\lambda u)\mu]u = (\theta_\lambda \mu - \mu\theta_\lambda)u.$$

Soit $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ une base de V sur Z. L'application φ transforme l'élément $\lambda = \sum a_i\omega_i + b$ de K ($a_i, b \in Z$) en l'élément $\bar{\lambda} = \sum a_i\bar{\omega}_i$ de V.

Posons

$$\bar{\omega}_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}\omega_j \qquad (p_{ij} \in Z)$$

nous avons, en vertu de (6),

$$(\omega_1 u)\omega_1 = \bar{\omega}_1\omega_1 - \omega_1\bar{\omega}_1 = \sum_{j=1}^{n} p_{1j}(\omega_j\omega_1 - \omega_1\omega_j) = 0.$$

---

[13] N. Jacobson, *Pseudo-linear transformations* (*Ann. Math.*, t. 38, 1937, p. 487).

[14] Rappelons que cette formule a été établie en supposant la caractéristique du corps K différente de 2.

Supposons que les $n-1$ quantités $\omega_j\omega_1 - \omega_1\omega_j$ $(j=2, \ldots, n)$ soient *linéairement indépendantes* sur Z. Il en résulte que $p_{1j}=0$ pour $j\neq 1$. La relation (6) donne encore pour $k\neq 1$,

$$(\omega_1 u)\omega_k + (\omega_k u)\omega_1 = \bar\omega_1\omega_k - \omega_k\bar\omega_1 + \bar\omega_k\omega_1 - \omega_1\bar\omega_k = 0,$$

ou

$$\sum_{j=1}^{n} p_{1j}(\omega_j\omega_k - \omega_k\omega_j) + \sum_{j=2}^{n} p_{kj}(\omega_j\omega_1 - \omega_1\omega_j) = 0,$$

d'où, puisque $p_{1j}=0$ pour $j\neq 1$,

$$(p_{kk}-p_{11})(\omega_k\omega_1 - \omega_1\omega_k) + \sum_{j\neq 1,\, k} p_{kj}(\omega_j\omega_1 - \omega_1\omega_j) = 0,$$

ce qui entraîne, grâce à la propriété d'indépendance,

$$p_{kk}=p_{11}, \qquad p_{kj}=0 \quad \text{pour tout } j\neq 1, k.$$

Enfin $(\omega_k u)\omega_k = 0$ donne

$$\bar\omega_k\omega_k - \omega_k\bar\omega_k = 0,$$

qui se réduit à

$$p_{k1}(\omega_1\omega_k - \omega_k\omega_1) = 0,$$

ce qui exige $p_{k1}=0$.

Posons $p_{11}=p_{22}=\ldots=p_{nn}=a$. Nous aurons finalement

$$\bar\omega_i = a\omega_i \quad \text{quel que soit } i;$$

donc, quel que soit $\lambda\in K$,

$$\bar\lambda \equiv a\lambda(Z) \qquad \text{et} \qquad \{\lambda u, \mu u\} = a(\lambda\mu - \mu\lambda)u.$$

Si $a=0$, E est abélienne, Si $a\neq 0$, posons $a^{-1}u=v$. Il vient

$$\{\lambda v, \mu v\} = (\lambda\mu - \mu\lambda)v.$$

Nous avons ainsi obtenu le

Théorème. — *Si* K *est un corps gauche de caractéristique* $\neq 2$, *de dimension finie sur son centre* Z, *dont toutes les dérivations sont intérieures, et possédant une base* $\omega_0=1, \omega_1, \ldots, \omega_n$ *sur* Z *telles que les* $n-1$ *quantités* $\omega_1\omega_i - \omega_i\omega_1$ $(i>1)$ *soient linéairement indépendantes sur* Z. *toute pseudo-algèbre de Lie de dimension* 1 *sur* K *est triviale.*

Remarque. — 1. Ce théorème s'applique en particulier au cas des quaternions rationnels, d'où le résultat du début de ce paragraphe.

2. On peut s'affranchir de la condition d'indépendance dans le cas où $n\leqq 3$, car sa négation entraînerait l'existence dans K d'une extension commutative de Z. Cela nous amène à faire la *conjecture* suivante : si K est à dérivations intérieures, toute pseudo-algèbre de Lie de dimension 1 sur K est triviale.

3. Inversement, l'existence de dérivations non intérieures pour K n'entraîne pas l'existence de pseudo-algèbres de Lie non triviales sur K. C'est ce que montre l'exemple suivant :

Soit Γ le corps des rationnels, x une indéterminée, K le corps des quaternions sur $\Gamma(x)$.

Les relations $\omega_i^2 = -1$ et $\omega_i \omega_{i+1} = \omega_{i-1}$ étant toujours valables, toute dérivation D de K vérifie des relations de la forme

$$\mathrm{D}\omega_i = a_{i-1}\omega_{i+1} - a_{i+1}\omega_{i-1} \tag{7}$$

D'autre part, toute dérivation d'un corps gauche K applique son centre Z dans lui-même, car si $a \in \mathrm{Z}$ et $\lambda \in \mathrm{K}$, on a

$$\mathrm{D}(a\lambda) = \mathrm{D}(\lambda a) = \mathrm{D}a.\lambda + a.\mathrm{D}\lambda = \mathrm{D}\lambda.a + \lambda.\mathrm{D}a,$$

d'où

$$\mathrm{D}a.\lambda = \lambda.\mathrm{D}a, \qquad \text{donc} \quad \mathrm{D}a \in \mathrm{Z}.$$

Enfin si nous désignons par a' la dérivée usuelle de $a \in \Gamma(x)$, nous avons

$$\mathrm{D}a = a'.\mathrm{D}x.$$

L'application $a + b\omega_1 + c\omega_2 + d\omega_3 \to a' + b'\omega_1 + c'\omega_2 + d'\omega_3$ est une dérivation de K, comme on le vérifie aisément. Elle n'est pas intérieure puisqu'elle n'annule pas $\Gamma(x)$. Cherchons maintenant les pseudo-algèbres de Lie de dimension 1 sur K. Soit u un élément quelconque d'une telle pseudo-algèbre de Lie E. La relation (6) donne

$$(\omega_i u)x + (xu)\omega_i = \omega_i(ux) + x(u\omega_i).$$

$(\omega_i u)x$ et ux appartiennent à $\Gamma(x)$. $(xu)\omega_i$ et $x(u\omega_i)$ sont de la forme $p\omega_{i-1} + q\omega_{i+1}$. Cela nécessite $(\omega_i u)x = ux = 0$, d'où

$$ua = a'(ux) = 0 \quad \text{pour tout } a \in \Gamma(x).$$

Il s'ensuit que tout élément de E annule $\Gamma(x)$. Par conséquent, la recherche des pseudo-algèbres de Lie sur K donne lieu aux mêmes calculs que dans le cas des quaternions rationnels. On trouve encore qu'il n'existe que des pseudo-algèbres de Lie triviales.

CHAPITRE III.

ÉTUDE DU CAS COMMUTATIF.

1. Représentation canonique des pseudo-algèbres de Lie de dimension supérieure a 1 sur un corps commutatif. — La relation (1)(II, 1) donne, dans le cas commutatif,

$$[(\lambda u)\mu - \lambda(u\mu)]v + [(\mu v)\lambda - \mu(v\lambda)]u = 0,$$

d'où, lorsque E est de dimension >1,

$$(\lambda u)\mu = \lambda(u\mu). \tag{1}$$

Nous appellerons *noyau* de E l'ensemble N des $u \in E$ tels que $u\lambda = 0$ pour tout $\lambda \in K$; c'est, en vertu de la propriété (I, 2, e), un sous-module de E, et ce sous-module est permis dans E pour l'opération $\{\ ,\ \}$ (I, 2, d). Lorsqu'on a, de plus, la relation (1), N est sous-espace vectoriel de E, donc sous-pseudo-algèbre de Lie invariante (I, 1) de E. C'est de plus une algèbre de Lie sur K.

La relation d'équivalence $u' - u \in N$ est régulière pour l'opération $\{\ ,\ \}$. En effet, si $u' - u \in N$ et $v' - v \in N$, il en résulte que

$$\{u', v'\} - \{u, v\} = \{u' - u, v'\} + \{u, v' - v\} \in N.$$

L'espace-quotient, $\overline{E} = E/N$ a par suite une structure de pseudo-algèbre de Lie. Si $\bar{u} \in \overline{E}$, $\bar{u}\lambda = 0$ pour tout $\lambda \in K$ entraîne $\bar{u} = 0$. $\overline{E}$ est donc isomorphe à une sous-pseudo-algèbre de Lie de la pseudo-algèbre de Lie des dérivations de K (I, 3, b).

Si V est une sous-pseudo-algèbre de Lie invariante de E, et si $u \in E$, $v \in V$ et $\lambda \in K$, on a $\{u, v\} \in V$ et $\{\lambda u, v\} \in V$, d'où $(v\lambda)u \in V$; u étant quelconque, si $V \neq E$, on a nécessairement $v\lambda = 0$, d'où $V \subseteq N$.

Enfin, toute algèbre de Lie sur K contenue dans E est évidemment contenue dans N (I, 3, a). En résumé,

Théorème 1. — *Si* E *est une pseudo-algèbre de Lie de dimension* >1 *sur un corps commutatif* K, *toute sous-pseudo-algèbre de Lie invariante de* E *distincte de* E *est une algèbre de Lie sur* K *contenue dans* E, *et réciproquement. Parmi ces algèbres de Lie, il en existe une maximum* N *appelée noyau de* E, *et* E/N *est isomorphe à une sous-pseudo-algèbre de Lie de la pseudo-algèbre de Lie des dérivations de* K.

L'homomorphisme $E \xrightarrow{\theta} \overline{E}$ sera appelé *représentation canonique de* E.

2. Constantes de structure. — Un espace vectoriel E sur un corps commutatif donné K est défini par la donnée d'une base $(e_i)_{i\in I}$, I étant un ensemble, fini ou infini, d'indices. Cherchons comment l'on peut définir sur E une structure de pseudo-algèbre de Lie sur K. Nous supposerons E de dimension supérieure à 1.

Soient $u = \sum \alpha_i e_i$, $v = \sum \beta_j e_j$ deux éléments de E. Nous aurons

$$\begin{aligned}\{u, v\} &= \left\{\sum \alpha_i e_i, \sum \beta_j e_j\right\} = \sum_i \sum_j \{\alpha_i e_i, \beta_j e_j\} \\ &= \sum_i \sum_j [\alpha_i\beta_j\{e_i, e_j\} + (\alpha_i e_i \beta_j)e_j - (\beta_j e_j \alpha_i)e_i].\end{aligned} \tag{2}$$

Pour connaître $\{u, v\}$, il suffit donc de connaître :

1° $\{e_i, e_j\} = \sum_k \gamma_{ijk} e_k$ pour tous les indices $i, j \in \mathrm{I}$;

2° les valeurs des éléments $e_i\lambda$ pour tout $i \in \mathrm{I}$, tout $\lambda \in \mathrm{K}$, autrement dit les *dérivations* de $\mathrm{K}(\lambda \to e_i\lambda)$ pour tout $i \in \mathrm{I}$.

Nous appellerons les éléments γ_{ijk} *constantes de structure* de E. Ces constantes, ainsi que les dérivations e_i, vérifieront certaines conditions, déduites des axiomes I à IV, que nous allons établir.

L'axiome I exige

$$(\mathrm{A}) \qquad \{e_i, e_j\} = -\{e_j, e_i\} \quad \text{quels que soient } i \text{ et } j \in \mathrm{I}.$$

Réciproquement, la formule (2) assure, à partir de ces conditions, la validité de l'axiome I.

L'axiome II est vérifié sans condition supplémentaire.

La formule (2) donne d'autre part

$$\{u, \lambda v\} = \sum_i \sum_j \{\alpha_i e_i, \lambda\beta_j e_j\} = \sum_i \sum_j [\alpha_i \lambda \beta_j \{e_i, e_j\} + [\alpha_i e_i(\lambda\beta_j)] e_j - (\lambda\beta_j e_j \alpha_i) e_i].$$

L'application $\lambda \to e_i\lambda$ étant une dérivation, on en déduit

$$\{u, \lambda v\} = \lambda\{u, v\} + \left[\sum_i \alpha_i(e_i\lambda)\right] v,$$

et l'axiome III est vérifié sans condition supplémentaire.

L'axiome IV exige

$$(\mathrm{B}) \qquad \{\{e_i, e_j\}, e_k\} + \{\{e_j, e_k\}, e_i\} + \{\{e_k, e_i\}, e_j\} = 0.$$

Par suite de la distributivité, l'axiome IV sera vérifié dès que le sera la condition

$$\{\{\alpha_i e_i, \beta_j e_j\}, \gamma_k e_k\} + \{\{\beta_j e_j, \gamma_k e_k\}, \alpha_i e_i\} + \{\{\gamma_k \alpha_k, \alpha_i e_i\}, \beta_j e_j\} = 0.$$

Or

$$\begin{aligned}\{\{\alpha_i e_i, \beta_j e_j\}, \gamma_k e_k\} &= \{\alpha_i\beta_j\{e_i, e_j\} + (\alpha_i e_i \beta_j) e_j - (\beta_j e_j \alpha_i) e_i, \gamma_k e_k\} \\ &= \alpha_i\beta_j\gamma_k\{\{e_i, e_j\}, e_k\} + \alpha_i\beta_j(\{e_i, e_j\}\gamma_k) e_k - \gamma_k e_k(\alpha_i\beta_j)\{e_i, e_j\} \\ &\quad + (\alpha_i e_i \beta_j)\gamma_k\{e_j, e_k\} + (\alpha_i e_i\beta_j)(e_i\gamma_k) e_k - [\gamma_k e_k(\alpha_i e_i \beta_j)] e_j \\ &\quad - (\beta_j e_j \alpha_i)\gamma_k\{e_i, e_k\} - [(\beta_j e_j \alpha_i) e_i \gamma_k] e_k + [\gamma_k e_k(\beta_j e_j \alpha_i)] e_i.\end{aligned}$$

La sommation par permutation circulaire fait disparaître, grâce à (B), les doubles accolades. On obtient, comme coefficient du terme en $\{e_i, e_j\}$,

$$-\gamma_k e_k(\alpha_i\beta_j) + (\gamma_k e_k \alpha_i)\beta_j + (\gamma_k e_k \beta_j)\alpha_i,$$

qui est nul puisque e_k est une dérivation.

Le coefficient du terme en e_k est

$$\begin{aligned}&\alpha_i\beta_j(\{e_i, e_j\}\gamma_k) + (\alpha_i e_i \beta_j)(e_j\gamma_k) - \alpha_i e_i(\beta_j e_j \gamma_k) - (\beta_j e_j \alpha_i) e_i \gamma_k + \beta_j e_j(\alpha_i e_i \gamma_k) \\ &\qquad = \alpha_i\beta_j[\{e_i, e_j\}\gamma_k - e_i(e_j\gamma_k) + e_j(e_i\gamma_k)].\end{aligned}$$

Nous obtenons ainsi une troisième et dernière condition :

$$\text{(C)} \qquad \{e_i, e_j\}\lambda = e_i(e_j\lambda) - e_j(e_i\lambda) \quad \text{tout } i, j \in \mathrm{I}, \text{ tout } \lambda \in \mathrm{K}.$$

En résumé,

THÉORÈME 2. — *Une pseudo-algèbre de Lie de dimension* >1 *sur un corps* K *commutatif est définie par la donnée d'une base* $(e_i)_{i\in \mathrm{I}}$, *des valeurs des accolades* $\{e_i, e_j\}$ *et des dérivations* $\lambda \to e_i\lambda$ *de* K, *qui doivent satisfaire aux conditions :*

$$\text{(A)} \qquad \{e_i, e_j\} = -\{e_j, e_i\},$$

$$\text{(B)} \qquad \{\{e_i, e_j\}, e_k\} + \{\{e_j, e_k\}, e_i\} + \{\{e_k, e_i\}, e_j\} = 0,$$

$$\text{(C)} \qquad \{e_i, e_j\}\lambda = e_i(e_j\lambda) - e_j(e_i\lambda)$$

pour tout $i, j, k \in \mathrm{I}$.

3. PSEUDO-ALGÈBRE DE LIE DE DIMENSION 1 SUR UN CORPS COMMUTATIF. — Quand E est de dimension 1, la relation

$$(1) \qquad (\lambda u)\mu = \lambda(u\mu)$$

n'est plus automatiquement vérifiée. Les éléments de E sont tous de la forme λu, u étant fixe $\neq 0$. On a, quelle que soit la caractéristique de K,

$$\{\lambda u, \mu u\} = \mu\lambda\{u, u\} + [(\lambda u)\mu - \mu(u\lambda)]u$$

et

$$\{\mu u, \lambda u\} = \lambda\mu\{u, u\} + [(\mu u)\lambda - \lambda(u\mu)]u,$$

d'où

$$(\mu\lambda + \lambda\mu)\{u, u\} + [(\lambda u)\mu - \lambda(u\mu) + (\mu u)\lambda - \mu(u\lambda)]u = 0.$$

Si K est de caractéristique 2, $\lambda\mu + \mu\lambda = 0$; si K n'est pas de caractéristique 2, $\{u, u\} = 0$. On a donc toujours

$$(3) \qquad (\lambda u)\mu + (\mu u)\lambda = \lambda(u\mu) + \mu(u\lambda) \quad ([15]).$$

En particulier

$$2(\lambda u)\lambda = 2\lambda(u\lambda),$$

et *si* K *est de caractéristique* $\neq 2$, ce que nous supposerons désormais,

$$(4) \qquad (\lambda u)\lambda = \lambda(u\lambda).$$

On a de plus, puisque $\mu \to (\lambda u)\mu$ est une dérivation,

$$\begin{aligned}(\lambda u)\lambda^2 &= [(\lambda u)\lambda]\lambda + \lambda[(\lambda u)\lambda] = 2\lambda[(\lambda u)\lambda]\\ &= 2\lambda^2(u\lambda) \quad \text{d'après (4)}\\ &= \lambda[(u\lambda)\lambda + \lambda(u\lambda)] = \lambda(u\lambda^2),\end{aligned}$$

et par récurrence

$$(\lambda u)\lambda^n = \lambda(u\lambda^n).$$

([15]) *Cf.* chap. II, formule (6).

En posant dans (3) $\mu = \lambda^n$, nous en déduisons

$$(\lambda^n u)\lambda = \lambda^n(u\lambda).$$

Si μ est un polynome en λ dont les coefficients sont des *constantes relativement à* E ([16]), on a

$$\begin{aligned}(\lambda u)\mu &= (\lambda u)\left(\sum \alpha_i\lambda^i\right) = \sum \alpha_i[(\lambda u)\lambda^i] = \sum \alpha_i[\lambda(u\lambda^i)] = \lambda\left[\sum \alpha_i(u\lambda^i)\right]\\ &= \lambda\left[u\left(\sum \alpha_i\lambda^i\right)\right] = \lambda(u\mu) \qquad (\alpha_i \in \mathrm{K}_0).\end{aligned}$$

Supposons maintenant que μ soit une fraction rationnelle en λ (toujours à coefficients constants) : $\mu = \frac{\alpha}{\beta}$ avec α et β polynomes en λ à coefficients dans le corps des constantes K_0, $\beta \neq 0$. Nous avons

$$(\lambda u)\alpha = \lambda(u\alpha),$$

c'est-à-dire

$$(\lambda u)\beta . \mu + \beta(\lambda u)\mu = \lambda[(u\beta)\mu + \beta(u\mu)],$$

d'où, puisque $(\lambda u)\beta = \lambda(u\beta)$ et $\beta \neq 0$,

$$(\lambda u)\mu = \lambda(u\mu).$$

Examinons maintenant le cas où μ est algébrique séparable sur $\mathrm{K}_0(\lambda)$. μ est zéro d'un polynome

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}) = \beta_0 + \beta_1\mathrm{X} + \ldots + \beta_r\mathrm{X}^r \qquad [\beta_i \in \mathrm{K}_0(\lambda)],$$

mais non du polynome dérivé

$$\mathrm{P}'(\mathrm{X}) = \beta_1 + \ldots + r\beta_r\mathrm{X}^{r-1}.$$

Posons

$$\mathrm{P}_u(\mathrm{X}) = u\beta_0 + (u\beta_1)\mathrm{X} + \ldots + (u\beta_r)\mathrm{X}^r.$$

Nous pouvons écrire

$$0 = u[\mathrm{P}(\mu)] = \mathrm{P}_u(\mu) + \mathrm{P}'(\mu)u\mu$$

et

$$0 = (\lambda u)[\mathrm{P}(\mu)] = \mathrm{P}_{\lambda u}(\mu) + \mathrm{P}'(\mu)(\lambda u)\mu.$$

Or, puisque $\beta_i \in \mathrm{K}_0(\lambda)$,

$$\mathrm{P}_{\lambda u}(\mathrm{X}) = \lambda\mathrm{P}_u(\mathrm{X}),$$

et comme $\mathrm{P}'(\mu)$ n'est pas nul, nous en déduisons

$$(1) \qquad \lambda(u\mu) = (\lambda u)\mu.$$

Nous avons ainsi obtenu le

([16]) C'est-à-dire des éléments α_i de K tels que $v\alpha_i = 0$ quel que soit $v \in \mathrm{E}$. Ils forment un sous-corps K_0 qui contient le sous-corps premier de K, II.

THÉORÈME 3. — *Si* E *est une pseudo-algèbre de Lie de dimension* 1 *sur un corps commutatif de caractéristique* $\neq 2$, *et si* K_0 *est le sous-corps des constantes, on a la relation* $(\lambda u)\mu = \lambda(u\mu)$ *chaque fois que* μ *est algébrique séparable sur* $K_0(\lambda)$.

COROLLAIRE. — *Dans les mêmes conditions, on a la relation* $(\mu u)\lambda = \mu(u\lambda)$.
C'est une conséquence immédiate de la relation (3).

Nous allons voir que la relation (1) n'est pas nécessairement vérifiée quels que soient λ et μ. Nous allons en effet résoudre le problème suivant :

Trouver toutes les pseudo-algèbres de Lie de dimension 1 *sur un corps commutatif* K, *de caractéristique quelconque, de dimension finie sur son sous-corps premier* Π *et séparablement engendré sur* Π.

Nous supposons donc que K possède n éléments $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ algébriquement indépendants sur Π et est algébrique séparable sur $\Pi(\xi_1, \ldots, \xi_n)$. K possède n dérivations indépendantes $D_1, \ldots, D_n$ telles que $D_i\xi_j = \delta_{ij}$, et si D est une dérivation de K, on a

$$D\lambda = \sum_i D\xi_i . D_i\lambda \quad (^{17}).$$

Soit E une pseudo-algèbre de Lie de dimension 1 sur K, u un élément non nul de E. Posons

$$u\xi_i = \alpha_i; \qquad (\xi_i u)\xi_j = \beta_{ij}; \qquad \{u, u\} = \gamma u.$$

Je dis que *la donnée des* α_i, *des* β_{ij} *et de* γ *détermine* E.

En effet, on a (*en supprimant les signes de sommation*, selon l'usage courant),

$$(\lambda u)\mu = (\lambda u)\xi_i . D_i\mu.$$

Or, d'après (3),

$$\begin{aligned}(\lambda u)\xi_i &= \lambda(u\xi_i) + \xi_i(u\lambda) - (\xi_i u)\lambda \\ &= \lambda\alpha_i + \xi_i(u\xi_j)D_j\lambda - (\xi_i u)\xi_j . D_j\lambda \\ &= \lambda\alpha_i + [\xi_i(u\xi_j) - (\xi_i u)\xi_j]D_j\lambda.\end{aligned}$$

Posons $\omega_{ij} = \xi_i(u\xi_j) - (\xi_i u)\xi_j = \xi_i\alpha_j - \beta_{ij}$: la donnée des ω_{ij} et des α_i équivaut à celle des β_{ij} et des α_i. Nous obtenons

$$(\lambda u)\xi_i = \lambda\alpha_i + \omega_{ij} . D_j\lambda,$$

d'où

$$(\lambda u)\mu = \lambda\alpha_i . D_i\mu + \omega_{ij} . D_j\lambda . D_i\mu.$$

On en déduit d'une part

$$\begin{aligned}\{\lambda u, \mu u\} &= \lambda\mu\{u, u\} + [(\lambda u)\mu - \mu(u\lambda)]u \\ &= [\gamma\lambda\mu + \lambda\alpha_i . D_i\mu + \omega_{ij} . D_j\lambda . D_i\mu - \mu\alpha_i D_i\lambda]u\end{aligned}$$

([17]) *Cf.* WEIL, *Fondations of Algebraic Geometry*, p. 12.

ou

$$\{\lambda u,\ \mu u\} = [\gamma\lambda\mu + \alpha_i(\lambda\,\mathrm{D}_i\mu - \mu\,\mathrm{D}_i\lambda) + \omega_{ij}\,\mathrm{D}_j\lambda.\ \mathrm{D}_i\mu]u, \tag{5}$$

et d'autre part

$$(\lambda u)\mu - \lambda(u\mu) = \omega_{ij}.\mathrm{D}_j\lambda.\mathrm{D}_i\mu,$$

et, si $v = \theta u$,

$$(\lambda v)\mu - \lambda(v\mu) = \theta\omega_{ij}.\mathrm{D}_j\lambda.\mathrm{D}_i\mu. \tag{5'}$$

Les ω_{ij}, les α_i et γ peuvent-ils être donnés arbitrairement? Voyons à quelles conditions l'opération (5) vérifie les axiomes I à IV.

Axiome I :

$$\gamma\lambda\mu + \alpha_i(\lambda\mathrm{D}_i\mu - \mu\mathrm{D}_i\lambda) + \omega_{ij}\mathrm{D}_j\lambda.\mathrm{D}_i\mu = -\gamma\lambda\mu - \alpha_i(\mu\mathrm{D}_i\lambda - \lambda\mathrm{D}_i\mu) - \omega_{ij}\mathrm{D}_j\mu.\mathrm{D}_i\lambda.$$

ou

$$2\gamma\lambda\mu + \omega_{ij}(\mathrm{D}_j\lambda.\mathrm{D}_i\mu + \mathrm{D}_j\mu.\mathrm{D}_i\lambda) = 0 \quad \text{quels que soient } \lambda \text{ et } \mu$$

Faisons $\lambda = \mu = 1$: nous trouvons

$$2\gamma = 0, \tag{6}$$

ce que nous savions déjà (I, 2, *a*).

Faisons $\lambda = \xi_k$, $\mu = \xi_l$: nous trouvons

$$\omega_{kl} + \omega_{lk} = 0, \tag{7}$$

qui d'ailleurs découle immédiatement de la relation (3) et de la définition de ω_{ik}.

Réciproquement, si les relations (6) et (7) sont vérifiées, l'axiome I l'est aussi.

Axiome II : si $\mu = \mu_1 + \mu_2$, la formule (5) donne immédiatement

$$\{\lambda u,\ \mu u\} = \{\lambda u,\ \mu_1 u\} + \{\lambda u,\ \mu_2 u\}.$$

Pas de condition supplémentaire.

Axiome III : si $\mu = \mu_1\mu_2$, la formule (5) donne

$$\begin{aligned}\{\lambda u, \mu u\} &= [\gamma\lambda\mu_1\mu_2 + \alpha_i(\lambda\mu.\mathrm{D}_i\mu_2 + \lambda\mu_2.\mathrm{D}_i\mu_1 - \mu_1\mu_2.\mathrm{D}_i\lambda) + \omega_{ij}.\mathrm{D}_j\lambda(\mu_1.\mathrm{D}_i\mu_2 + \mu_2.\mathrm{D}_i\mu_1)]u \\ &= \mu_1\{\lambda u,\ \mu u\} + \theta\mu_2 u \qquad (\text{avec } \theta \text{ indépendant de } \mu_2).\end{aligned}$$

Pas de condition supplémentaire.

Axiome IV : Calculons $v = \{\{\lambda u,\ \mu u\},\ \nu u\} = \zeta u$:

$$\zeta = \gamma\theta\nu + \alpha_i(\theta.\mathrm{D}_i\nu - \nu.\mathrm{D}_i\theta) + \omega_{ij}.\mathrm{D}_j\theta.\mathrm{D}_i\nu,$$

avec

$$\theta = \gamma\lambda\mu + \alpha_k(\lambda.\mathrm{D}_k\mu - \mu.\mathrm{D}_k\lambda) + \omega_{kl}.\mathrm{D}_l\lambda.\mathrm{D}_k\mu.$$

Nous avons donc

$$\begin{aligned}
\zeta = {} & \gamma^2\lambda\mu\nu + \gamma\nu\alpha_k(\lambda.D_k\mu - \mu.D_k\lambda) + \gamma\nu\omega_{kl}.D_l\lambda.D_k\mu \\
& + \alpha_i D_i\nu.\gamma\lambda\mu + \alpha_i.D_i\nu.\alpha_k(\lambda.D_k\mu - \mu.D_k\lambda) + \alpha_i.D_i\nu.\omega_{kl}.D_l\lambda.D_k\mu \\
& - \alpha_i\nu.D_i\gamma.\lambda\mu - \alpha_i\nu\gamma.D_i\lambda.\mu - \alpha_i\nu\gamma\lambda.D_i\mu - \alpha_i\nu.D_i\alpha_k(\lambda.D_k\mu - \mu.D_k\lambda) \\
& - \alpha_i\nu\alpha_k(D_i\lambda.D_k\mu - D_i\mu.D_k\lambda) - \alpha_i\nu\alpha_k(\lambda.D_i.D_k\mu - \mu D_i.D_k\lambda) \\
& - \alpha_i\nu.D_i\omega_{kl}.D_l\lambda.D_k\mu - \alpha_i\nu\omega_{kl}.D_i.D_l\lambda.D_k\mu - \alpha_i\nu\omega_{kl}.D_l\lambda.D_i.D_k\mu \\
& + \omega_{ij}.D_i\nu.D_j\gamma.\lambda\mu + \omega_{ij}.D_i\nu.\gamma.D_j\lambda.\mu + \omega_{ij}.D_i\nu.\gamma\lambda.D_j\mu \\
& + \omega_{ij}.D_i\nu.D_j\alpha_k(\lambda.D_k\mu - \mu.D_k\lambda) + \omega_{ij}.D_i\nu.\alpha_k(D_j\lambda.D_k\mu - D_j\mu.D_k\lambda) \\
& + \omega_{ij}.D_i\nu.\alpha_k(\lambda.D_j.D_k\mu - \mu.D_j.D_k\lambda) + \omega_{ij}.D_i\nu.D_j\omega_{kl}.D_l\lambda.D_k\mu \\
& + \omega_{ij}.D_i\nu.\omega_{kl}.D_j.D_l\lambda.D_k\mu + \omega_{ij}.D_i\nu.\omega_{kl}.D_l\lambda.D_jD_k\mu.
\end{aligned}$$

Désignons par le signe $\mathfrak{S}$ une sommation par permutation circulaire sur λ, μ, ν. L'identité de Jacobi s'écrit

$$\mathfrak{S}\{\{\lambda u, \mu u\}, \nu u\} = \mathfrak{S}\,\nu = 0,$$

$$\mathfrak{S}\,\zeta = 0 \quad \text{quels que soient } \lambda, \mu, \nu.$$

Or, compte tenu de la relation (7) et de $D_iD_j = D_jD_i$,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{S}\,\zeta = {} & (\gamma^2 - \alpha_i.D_i\gamma)\,\mathfrak{S}\,\lambda\mu\nu + (\omega_{ij}.D_j\gamma - \gamma\alpha_i)\,\mathfrak{S}\,\lambda\mu.D_i\nu \\
& + (-\gamma\omega_{ij} + \alpha_k.D_k\omega_{ij} + \omega_{jk}.D_k\alpha_i - \omega_{ik}.D_k\alpha_j)\,\mathfrak{S}\,D_i\lambda.D_j\mu.\nu \\
& + (\alpha_k\omega_{ij} - \omega_{kl}.D_l\omega_{ij})\,\mathfrak{S}\,D_i\lambda.D_j\mu.D_k\nu
\end{aligned}$$

Si nous faisons successivement

$$\begin{aligned}
&\lambda = \mu = \nu = 1\,; \\
&\lambda = \mu = 1, \qquad \nu = \xi_i\,; \\
&\lambda = \xi_i, \qquad \mu = \xi_j, \qquad \nu = 1\,: \\
&\lambda = \xi_i, \qquad \mu = \xi_j, \qquad \nu = \xi_k\,;
\end{aligned}$$

nous obtenons

$$(8) \qquad \left\{\begin{aligned}
3(\gamma^2 - \alpha_i.D_i\gamma) = 0. \\
\omega_{ij}.D_j\gamma - \gamma\alpha_i = 0, \\
-\gamma\omega_{ij} + \alpha_k.D_k\omega_{ij} + \omega_{jk}.D_k\alpha_i - \omega_{ik}.D_k\alpha_j = 0, \\
\mathfrak{S}_{ijk}(\alpha_k\omega_{ij} - \omega_{kl}.D_l\omega_{ij}) = 0.
\end{aligned}\right.$$

Réciproquement, les conditions (8) assurent la validité de l'axiome IV.

Dans le cas où K est de caractéristique $p \neq 2$, les conditions (6), (7), (8) se réduisent à

$$(9) \qquad \left\{\begin{aligned}
\gamma = 0, \\
\omega_{ij} + \omega_{ji} = 0, \\
\alpha_k.D_k\omega_{ij} + \omega_{jk}.D_k\alpha_i - \omega_{ik}.D_k\alpha_j = 0. \\
\mathfrak{S}_{ijk}(\alpha_k\omega_{ij} - \omega_{kl}.D_l\omega_{ij}) = 0,
\end{aligned}\right.$$

Dans le cas où $p=2$, elles se réduisent à

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} \omega_{ij}&=\omega_{ji},\\ \gamma^2+\alpha_i.D_i\gamma&=0,\\ \omega_{ij}.D_j\gamma+\gamma\alpha_i&=0,\\ \gamma\omega_{ij}+\alpha_k.D_k\omega_{ij}+\omega_{jk}.D_k\alpha_i+\omega_{ik}.D_k\alpha_j&=0,\\ \mathop{\mathrm{S}}_{ijk}(\alpha_k\omega_{ij}+\omega_{kl}.D_l\omega_{ij})&=0.\end{aligned}\right.$$

Examinons quelques *cas particuliers*.

1° $p\neq 2$, $n=1$: $\omega_{11}=0$ est la seule condition. On a donc toujours $(\lambda\nu)\mu=\lambda(\nu\mu)$, d'après (5′).

Si $\alpha_1=0$, on a $\{\lambda u, \mu u\}=0$ quels que soient λ et μ : E est abélienne.

Si $\alpha_1\neq 0$, posons $u_1=\frac{u}{\alpha_1}\cdot$ Nous trouvons, en vertu de (5),

$$\{\lambda u_1, \mu u_1\}=(\lambda.D_1\mu-\mu.D_1\lambda)u_1,$$

ce qui montre que E est isomorphe à la pseudo-algèbre de Lie des dérivations de K.

2° $p\neq 2, n=2$: On doit avoir $\omega_{11}=\omega_{22}=0$, $\omega_{12}=-\omega_{21}$. Posons $\omega_{12}=\omega$: les conditions (9) se réduisent à

$$(11)\qquad \alpha_1.D_1\omega+\alpha_2.D_2\omega=\omega(D_1\alpha_1+D_2\alpha_2).$$

On peut y satisfaire en prenant $\omega=0$, d'où, d'après (5′),

$$(\lambda\nu)\mu=\lambda(\nu\mu)\quad\text{quels que soient } \nu,\ \lambda \text{ et } \mu.$$

Si $\alpha_1=\alpha_2=0$, E est abélienne. Si α_1 ou α_2 est $\neq 0$, et si l'on pose alors $D=\alpha_1 D_1+\alpha_2 D_2$, on voit que E est isomorphe à la sous-pseudo-algèbre de Lie engendrée par D de la pseudo-algèbre de Lie des dérivations de K.

Supposons maintenant $\omega\neq 0$. Pour que $(\lambda\nu)\mu=\lambda(\nu\mu)$, il faut et il suffit, d'après (5′), que

$$D_2\lambda.D_1\mu-D_1\lambda.D_2\mu=0\qquad\text{(condition indépendante de } \nu),$$

donc que λ *et* μ *soient algébriquement liés sur* Π.

La condition (11) peut s'écrire

$$(12)\qquad D_1\left(\frac{\alpha_1}{\omega}\right)+D_2\left(\frac{\alpha_2}{\omega}\right)=0.$$

Une solution de (12) est $\alpha_1=\alpha_2=0$, $\omega=1$, qui donne

$$\{\lambda u, \mu u\}=(D_2\lambda.D_1\mu-D_1\lambda.D_2\mu)u=[(\lambda u)\mu]u\ (cf.\ \text{I, 3, } c).$$

On a alors $(\lambda u)\mu=0$ si et seulement si λ et μ sont algébriquement liés sur Π.

Le *noyau* de E est donc formé par les éléments θu, où θ est algébrique sur Π. Il n'est fermé que pour l'addition, non pour l'opération $\{,\}$ ni pour la multiplication par un scalaire (ce qui était évident puisque E n'a pas de sous-espace vectoriel véritable).

Des conclusions analogues peuvent être tirées pour le système général (9), qui admet la solution particulière $\alpha_i = 0$, $\omega_{ij} = 1 (i < j)$.

Remarque. — Ce qui précède établit *l'indépendance de l'axiome IV*.

3° $p = 2$, $n = 1$: Les conditions (10) donnent

$$(13)\qquad \left\{\begin{aligned} \gamma^2 + \alpha_1 . D_1\gamma &= 0, \\ \omega_{11} . D_1\gamma + \gamma\alpha_1 &= 0, \\ \gamma\omega_1 + \alpha_1 . D_1\omega_{11} &= 0, \\ \alpha_1\omega_{11} + \omega_{11} . D_1\omega_{11} &= 0. \end{aligned}\right.$$

Le système (13) admet deux groupes de solutions :

1° $\omega_{11} = \gamma = 0$, α_1 quelconque. On a alors *toujours* $(\lambda v)\mu = \lambda(v\mu)$, $\{\lambda u, \lambda u\} = 0$; on rentre dans le cas 1°.

2° $\omega_{11} \neq 0$ quelconque, $\alpha_1 = D_1\omega_{11}$, $\gamma = \dfrac{(D_1\omega_{11})^2}{\omega_{11}}$. On a alors $(\lambda v)\mu = \lambda(v\mu)$ si et seulement si $D_1\lambda . D_1\mu = 0$, c'est-à-dire si λ *ou* μ *est une constante*. En particulier $(\lambda u)\lambda = \lambda(u\lambda)$ seulement si λ est une constante. Enfin, $\{\lambda u, \lambda u\} = 0$ si et seulement si $\lambda\omega_{11}$ est une constante.

Posons $v = \dfrac{u}{\omega_{11}}$. La formule (5) devient

$$\{\lambda v, \mu v\} = D_1\lambda . D_1\mu . v,$$

ce qui montre que toutes les pseudo-algèbres de Lie ainsi construites se déduisent les unes des autres par homothétie.

CHAPITRE IV

Immersion d'une pseudo-algèbre de Lie dans un système associatif.

1. Introduction. — Les exemples b et c de (I, 3) présentent des pseudo-algèbres de Lie construites à partir d'une opération associative $u \star v$ au moyen de la formule $\{u, v\} = u \star v - v \star u$.

De même (II, 1), toute pseudo-algèbre de Lie E de dimension > 1 sur un corps gauche K peut être considérée comme déduite pareillement de l'espace vectoriel E muni de l'opération

$$u \star v = \varphi(u)\, v, \qquad [\varphi(u) \text{ application linéaire de E dans K}],$$

dont on vérifie immédiatement l'associativité.

Le présent chapitre adapte aux pseudo-algèbres de Lie de dimension >1 sur un corps commutatif K de caractéristique $\neq 2$ le raisonnement que G. Birkhoff ([18]) applique aux algèbres de Lie, et montre qu'une telle pseudo-algèbre de Lie peut être déduite de la même façon d'un espace vectoriel muni d'une opération associative. Cette opération est distributive pour l'addition, mais non linéaire. On peut donc appeler ce système associatif une *pseudo-algèbre* sur K.

2. L'ANNEAU $\mathcal{A}$. — Soit E une pseudo-algèbre de Lie de dimension quelconque >1 sur un corps commutatif K de caractéristique $\neq 2$. Nous la supposons donnée par une base $(e_i)_{i\in I}$, les relations $\{e_i, e_j\} = \sum_k \gamma_{ijk} e_k$ et les dérivations de K $\lambda \to e_i\lambda$, ces données étant soumises aux conditions énoncées plus haut (III, 2). Nous supposerons *totalement ordonné* l'ensemble I qui indexe la base, ce à quoi nous autorise l'axiome du choix.

Nous allons construire un espace vectoriel $\mathcal{A}$ muni d'une multiplication associative et distributive pour l'addition. Sa base sera constituée par tous les *mots* de la forme $e_{i_1}e_{i_2}\ldots e_{i_r}$ (r entier positif quelconque, *degré* du mot, $i_p \in I$ pour tout p), donc sera en correspondance biunivoque avec l'ensemble des arrangements finis avec répétitions d'éléments de I. Soit $(w_j)_{j\in J}$ cette base. Les éléments de $\mathcal{A}$ s'écriront donc $z = \sum \lambda_j w_j (j \in J)$.

Nous définirons sur les mots w_j une multiplication associative en associant aux mots w_j et w_k le mot $w_j w_k$. Nous étendrons cette multiplication à tous les éléments de $\mathcal{A}$ de la manière suivante :

$$e_k\left(\sum_j \lambda_j w_j\right) = \sum_j [(e_k\lambda_j)\, w_j + \lambda_j(e_k w_j)], \tag{1}$$

$$(e_{k_1}e_{k_2}\ldots e_{k_s})\left(\sum_j \lambda_j w_j\right) = e_{k_1}\left[(e_{k_2}e_{k_3}\ldots e_{k_s})\left(\sum_j \lambda_j w_j\right)\right], \tag{2}$$

$$\left(\sum_k \mu_k w_k\right)\left(\sum_j \lambda_j w_j\right) = \sum_k \mu_k\left[w_k\left(\sum_j \lambda_j w_j\right)\right]. \tag{3}$$

Cette opération est définie d'une manière unique et possède les propriétés suivantes :

a. Distributivité pour l'addition : à gauche d'après (3) ; à droite d'après (3), (2), (1) et la relation $e_k(\lambda + \mu) = e_k\lambda + e_k\mu$.

b. Linéarité à gauche : $(\alpha z_1)z_2 = \alpha(z_1 z_2)$ pour $\alpha \in K$, z_1 et $z_2 \in \mathcal{A}$, d'après (3).

([18]) *Ann. Math.*, t. 38, 1937, p. 526-532.

c. $e_k(\mu z) = (e_k \mu) z + \mu(e_k z)$ pour $\mu \in K$, $z \in \mathfrak{A}$. En effet,

$$e_k\left[\mu\left(\sum_i \lambda_i w_i\right)\right] = e_k\left[\sum_i (\mu\lambda_i)\, w_i\right] = \sum_i \{[e_k(\mu\lambda_i)]\, w_i + (\mu\lambda_i)\,(e_k w_i)\} \quad \text{d'après (1)}$$

$$= \sum_i \{[(e_k\mu)\lambda_i + \mu(e_k\lambda_i)]\, w_i + (\mu\lambda_i)(e_k w_i)\}$$

$$= (e_k\mu)\left(\sum_i \lambda_i w_i\right) + \mu \sum_i [(e_k\lambda_i)\, w_i + \lambda_i(e_k w_i)]$$

$$= (e_k\mu)\left(\sum_i \lambda_i w_i\right) + \mu\left[e_k\left(\sum_i \lambda_i w_i\right)\right] \quad \text{d'après (1),} \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

d. Associativité : on a d'abord, si w et w' sont deux mots, et λ et μ deux éléments de K,

$$\begin{aligned}
e_k[(\mu w')\,(\lambda w)] &= e_k\{\mu[w'(\lambda w)]\} && \text{d'après (3)}\\
&= (e_k\mu)\,[w'(\lambda w)] + \mu\{e_k[w'(\lambda w)]\} && \text{»} \quad c\\
&= [(e_k\mu)\, w']\,(\lambda w) + \mu\{e_k[w'(\lambda w)]\} && \text{»} \quad (3)\\
&= [(e_k\mu)\, w']\,(\lambda w) + \mu[(e_k w')\,(\lambda w)] && \text{»} \quad (2)\\
&= [(e_k\mu)\, w']\,(\lambda w) + [\mu(e_k w')]\,(\lambda w) && \text{»} \quad (3)\\
&= [(e_k\mu)\, w' + \mu(e_k w')]\,(\lambda w) && \text{»} \quad a\\
&= [e_k(\mu w')]\,(\lambda w) && \text{»} \quad (1).
\end{aligned}$$

Ensuite, par récurrence sur le degré du mot w'',

$$\begin{aligned}
(e_k w'')\,[(\mu w')\,(\lambda w)] &= e_k\{w''[(\mu w')\,(\lambda w)]\} \quad \text{d'après (2)}\\
&= e_k\{[w''(\mu w')]\,(\lambda w)\} \quad \text{d'après l'hypothèse de récurrence}\\
&= e_k\left[\left(\sum_i \nu_i w_i\right)(\lambda w)\right] = \sum_i \{e_k[(\nu_i w_i)\,(\lambda w)]\} \quad \text{d'après } a\\
&= \sum_i \{[e_k(\nu_i w_i)]\}\,(\lambda w) \quad \text{d'après ce qui précède,}\\
&= \left\{\sum_i [e_k(\nu_i w_i)]\right\}(\lambda w) = \left[e_k\left(\sum_i \nu_i w_i\right)\right](\lambda w) \quad \text{d'après } a\\
&= \{e_k[w''\,(\mu w')]\}\,(\lambda w) = [(e_k w'')\,(\mu w')]\,(\lambda w) \quad \text{d'après (2).}
\end{aligned}$$

Enfin, d'après (3),

$$(\nu w'')\,[(\mu w')\,(\lambda w)] = [(\nu w'')\,(\mu w')]\,(\lambda w),$$

et par suite de la distributivité :

$$z''(z'z) = (z''z')\,z \quad \text{pour tout } z,\ z',\ z'' \in \mathfrak{A}, \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Nous adjoindrons à $\mathfrak{A}$, pour la commodité, un élément neutre pour la multiplication e et ses multiples $\lambda e (\lambda \in K)$. e pourra être considéré comme un mot de degré zéro. Les règles de calcul précédentes s'étendent immédiatement au nouvel ensemble $\mathfrak{A}'$, qui est donc à la fois *espace vectoriel* contenant E et *anneau unitaire*.

2. L'idéal $\mathcal{J}$. — Dans l'anneau $\mathfrak{A}'$, nous allons considérer *l'idéal bilatère $\mathcal{J}$* engendré par tous les éléments de la forme

$$z_{ij} = e_i e_j - e_j e_i - \{e_i, e_j\} \qquad (i, j \in \mathrm{I})$$

et l'*anneau quotient* $\mathfrak{A}'' = \mathfrak{A}'/\mathcal{J}$. $\mathfrak{A}''$ aura une structure d'*espace vectoriel* : en effet, si $z \in \mathcal{J}$, $\lambda z = (\lambda e) z \in \mathcal{J}$.

Lemme 1. — *z_{ij} étant l'élément de $\mathfrak{A}'$ défini plus haut, on a*

$$z_{ij}(\lambda w) = \lambda z_{ij} w.$$

En effet,

$$\begin{aligned} z_{ij}(\lambda w) &= (e_i e_j)(\lambda w) - (e_j e_i)(\lambda w) - \{e_i, e_j\}(\lambda w) = e_i[e_j(\lambda w)] - e_j[e_i(\lambda w)] - \{e_i, e_j\}(\lambda w) \\ &= [e_i(e_j \lambda)] w + (e_j \lambda)(e_j w) + \lambda(e_i e_j w) + (e_j \lambda)(e_i w) \\ &\quad - \{[e_j(e_i \lambda)] w + (e_j \lambda)(e_i w) + \lambda(e_j e_i w) + (e_i \lambda)(e_j w)\} - [\{e_i, e_j\} \lambda] w - \lambda \{e_i, e_j\} w \\ &= [e_i(e_j \lambda) - e_j(e_i \lambda) - \{e_i, e_j\} \lambda] w + \lambda [e_i e_j w - e_j e_i w - \{e_i, e_j\} w] \\ &= \lambda z_i w \quad \text{puisque le premier crochet est nul.} \end{aligned}$$

Proposition 1. — *L'idéal $\mathcal{J}$ coïncide avec l'ensemble $\mathcal{J}_1$ des sommes finies $\sum \lambda w z_{ij} w'$ ($\lambda \in \mathrm{K}$, w et w' mots quelconques de degré $\geqq 0$).*

En effet, $\mathcal{J}_1$ est un module; les termes $\lambda w z_{ij} w'$ appartiennent à l'idéal bilatère $\mathcal{J}$, donc $\mathcal{J}_1 \subseteq \mathcal{J}$.

D'autre part $\mathcal{J}_1$ est un idéal, car si $z \in \mathfrak{A}'$,

$$\begin{aligned} z(\lambda w z_{ij} w') &= z[(\lambda e)(w z_{ij} w')] = [z(\lambda e)](w z_{ij} w') \\ &= \left(\sum_k \mu_k w_k\right)(w z_{ij} w') = \sum_k \mu_k (w_k w) z_{ij} w' \in \mathcal{J}_1 \end{aligned}$$

et

$$(\lambda w z_{ij} w') z = \lambda w z_{ij}(w' z) = \lambda w z_{ij}\left(\sum_q \nu_q w_q\right) = \sum_q \lambda w (\nu_q z_{ij} w_q)$$

(d'après le lemme 1)

$$= \sum_q \lambda w [(\nu_q e) z_{ij} w_q] = \sum_q \{[\lambda w (\nu_q e)] z_{ij} w_q\} = \sum_q \sum_r \xi_{qr} w_r z_{ij} w_q \in \mathcal{J}_1.$$

3. Éléments canoniques de $\mathfrak{A}'$. — L'ensemble d'indices I a été supposé totalement ordonné. Parmi les mots $w_j = e_{j_1} e_{j_2} \ldots e_{j_r}$, distinguons ceux où la suite des indices j_p est *non décroissante*. Soit $\overline{w}_j$ un tel mot, $\overline{z}$ un élément de $\mathfrak{A}'$ dont l'expression ne comporte que des $\overline{w}_j$ et e. Je dis que dans toute classe de $\mathfrak{A}'$ modulo $\mathcal{J}$ existe un $\overline{z}$ et un seul. Nous appellerons $\overline{z}$ *élément canonique*.

a. Existence de la forme canonique. — Pour montrer l'existence d'un $\overline{z}$ congru à un z donné, il suffit de montrer l'existence d'un $\overline{z}$ congru à un mot w donné. Nous procéderons par récurrence sur le degré de w et sur le nombre d'inversions de sa suite d'indices. La proposition est évidente pour w de degré 1 et pour w sans inversions. Supposons que dans w deux indices consécutifs présentent une inversion :

$$w = e_{j_1} \ldots e_{j_{p-1}} e_{j_p} e_{j_{p+1}} e_{j_{p+2}} \ldots e_{j_r} \qquad (j_p > j_{p+1}).$$

Nous avons modulo $\mathcal{J}$,

$$w \equiv e_{j_1} \ldots e_{j_{p-1}} e_{j_{p+1}} e_{j_p} e_{j_{p+2}} \ldots e_{j_r} + e_{j_1} \ldots e_{j_{p-1}} \{e_{j_p}, e_{j_{p+1}}\} e_{j_{p+2}} \ldots e_{j_r}.$$

L'expression du second terme développé suivant les règles (1), (2), (3) ne comporte que des mots de degré inférieur à r, et le premier présente une inversion de moins que w; la proposition est donc démontrée.

b. Univocité du procédé de construction. — La démonstration ci-dessus contient le processus de réduction d'un élément quelconque z à une forme canonique $\bar{z}$: chacun des monômes non canoniques w composant z est remplacé par une somme de monômes dont le degré est inférieur à celui de w, ou de même degré et présentant moins d'inversions; on recommence sur chacun des monômes non canoniques, et l'on aboutit ainsi, au moyen d'un nombre fini d'opérations, à un ensemble de monômes canoniques dont la somme est la forme canonique cherchée $\bar{z}$.

Si l'on interrompt le processus à un stade quelconque, on obtient un élément z_0 intermédiaire entre z et $\bar{z}$. Nous écrirons symboliquement $z \rightarrowtail z_0 \rightarrowtail \bar{z}$, et nous énoncerons : « *z donne z_0* (qui donne $\bar{z}$) ».

Ce processus n'est pas unique. Nous allons montrer cependant que la forme canonique $\bar{z}$ obtenue est indépendante de la suite d'opérations employée. Il suffit évidemment de le montrer pour tout mot w.

La proposition est vraie pour tout mot de degré 1, ainsi que pour tout mot sans inversion d'indices; nous la supposerons vraie pour tout mot de degré $< r$ ainsi que pour tout mot de degré r présentant moins de q inversions, et nous le démontrerons pour un mot w de degré r présentant q inversions.

La première opération du processus mène de w à un élément z somme de monômes vérifiant les conditions de l'hypothèse de récurrence; on aboutit donc de z à une forme canonique unique $\bar{z}$. Si donc deux processus différents coïncident quant à leur première opération, ils donnent de w la même forme canonique. En écartant ce cas, on a à examiner l'effet de deux processus $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{T}'$ différant dès leur première opération. Il se présente alors deux cas :

(A) $$w = w_1 e_i e_j w_2 e_{i'} e_{j'} w_3 \qquad (i > j,\ i' > j';\ w_1,\ w_2,\ w_3 \text{ sont des mots}).$$

La première opération de $\mathfrak{T}$ supprime l'inversion i, j.
La première opération de $\mathfrak{T}'$ supprime l'inversion i', j'.

(B) $$w = w_1 e_i e_j e_k w_2 \qquad (i > j > k).$$

La première opération de $\mathfrak{T}$ supprime l'inversion i, j.
La première opération de $\mathfrak{T}'$ supprime l'inversion j, k.

Lemme 2. — *Tout élément de $\mathfrak{J}$ admet une forme canonique nulle.*

Un tel élément est, d'après la proposition 1, une somme de termes $\lambda w z_{ij} w'$, w et w' étant des mots. Chacun d'eux est de la forme

$$\lambda w z_{ij} w' = \lambda w e_i e_j w' - \lambda w e_j e_i w' - \lambda w \{ e_i, e_j \} w'.$$

Supposons, pour fixer les idées, $i > j$; le premier terme $\lambda w e_i e_j w'$ donne alors $\lambda w e_j e_i w' + \lambda w \{ e_i, e_j \} w'$, donc $\lambda w z_{ij} w'$ donne zéro, d'où le lemme.

Lemme 3. — *Si $i > j$, si $\lambda \in \mathrm{K}$ et si z_1 et z_2 sont deux éléments quelconques de $\mathfrak{A}'$, on peut passer de $z_1(\lambda e_i e_j) z_2$ à $z_1(\lambda e_j e_i) z_2 + z_1(\lambda \{ e_i, e_j \}) z_2$.*

En effet, posons $z_1(\lambda e) = z_3$. Nous aurons

$$z_1(\lambda e_i e_j) z_2 = z_3 e_i e_j z_2 = z_3 e_j e_i z_2 + z_3 \{ e_i, e_j \} z_2 + z_3 z_{ij} z_2.$$

Le dernier terme, d'après le lemme 2, donne zéro, d'où le résultat.

$$\text{(A)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} w \rightarrowtail z = w_1 e_j e_i w_2 e_{i'} e_{j'} w_3 + w_1 \{ e_i, e_j \} w_2 e_{i'} e_{j'} w_3 = w_4 + z_1, \\ w \rightarrowtail z' = w_1 e_i e_j w_2 e_{j'} e_{i'} w_3 + w_1 e_i e_j w_2 \{ e_{i'}, e_{j'} \} w_3 = w' + z'_1. \end{array} \right.$$

z et z' donnent, d'après l'hypothèse de récurrence, des formes canoniques uniques $\bar{z}$ et $\bar{z}'$.

Or

$$w_4 \rightarrowtail z_2 = w_1 e_j e_i w_2 e_{j'} e_{i'} w_3 + w_1 e_j e_i w_2 \{ e_{i'}, e_{j'} \} w_3 = w_5 + z_3$$

et, d'après le lemme 3,

$$z_1 \rightarrowtail w_1 \{ e_i, e_j \} w_2 e_{j'} e_{i'} w_3 + w_1 \{ e_i, e_j \} w_2 \{ e_{i'}, e_{j'} \} w_3 = z_4 + z_5.$$

D'où

$$z \rightarrowtail w_5 + z_3 + z_4 + z_5 = z_0.$$

D'autre part,

$$w' \rightarrowtail w_1 e_j e_i w_2 e_{j'} e_{i'} w_3 + w_1 \{ e_i, e_j \} w_2 e_{j'} e_{i'} w_3 = w_5 + z_4,$$

et, d'après le lemme 3,

$$z'_1 \rightarrowtail z_3 + z_5,$$

d'où

$$z' \rightarrowtail w_5 + z_4 + z_3 + z_5 = z_0.$$

Nous voyons que l'on peut passer de z et de z' au même élément z_0. Il s'ensuit que les éléments canoniques $\bar{z}$ et $\bar{z}'$ sont égaux, et par suite que deux suites d'opérations différentes du type envisagé mènent du mot w au même élément canonique $\bar{z}$.

$$\text{(B)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} w \rightarrowtail z = w_1 e_j e_i e_k w_2 + w_1 \{ e_i, e_j \} e_k w_2; \\ w \rightarrowtail z' = w_1 e_i e_k e_j w_2 + w_1 e_i \{ e_j, e_k \} w_2. \end{array} \right.$$

D'après l'hypothèse de récurrence, tous les procédés de réduction mènent de z et z' à des éléments canoniques uniques $\bar{z}$ et $\bar{z}'$.

Or, on peut passer de z à

$$z_1 = w_1 e_j e_k e_i w_2 + w_1 e_j \{e_i, e_k\} w_2 + w_1 \{e_i, e_j\} e_k w_2,$$

puis à

$$\begin{aligned} z_2 &= w_1 e_k e_j e_i w_2 + w_1 \{e_j, e_k\} e_i w_2 + w_1 e_j \{e_i, e_k\} w_2 + w_1 \{e_i, e_j\} e_k w_2 \\ &= w' + z_3 + z_4 + z_5. \end{aligned}$$

D'autre part, on peut passer de z' à

$$z'_1 = w_1 e_k e_i e_j w_2 + w_1 \{e_i, e_k\} e_j w_2 + w_1 e_i \{e_j, e_k\} w_2,$$

puis à

$$\begin{aligned} z'_2 &= w_1 e_k e_j e_i w_2 + w_1 e_k \{e_i, e_j\} w_2 + w_1 \{e_i, e_k\} e_j w_2 + w_1 e_i \{e_j, e_k\} w_2 \\ &= w' + z'_3 + z'_4 + z'_5. \end{aligned}$$

Comparons z_3 et z'_5. Soit

$$(4) \qquad \{e_j, e_k\} = \sum_m \gamma_m e_m.$$

Nous avons

$$\begin{aligned} z_3 &= w_1 \Big(\sum_{m \leqq i} \gamma_m e_m\Big) e_i w_2 + w_1 \Big(\sum_{m' > i} \gamma_{m'} e_{m'}\Big) e_i w_2 \\ &\rightarrowtail w_1 \Big(\sum_{m \leqq i} \gamma_m e_m\Big) e_i w_2 + w_1 \Big(\sum_{m' > i} \gamma_{m'} e_i e_{m'}\Big) w_2 + w_1 \Big(\sum_{m' > i} \gamma_{m'} \{e_{m'}, e_i\}\Big) w_2 = z_6 \end{aligned}$$

d'après le lemme 3, et

$$\begin{aligned} z'_5 &= w_1 e_i \Big(\sum_m \gamma_m e_m\Big) w_2 \\ &= w_1 \Big[\sum_m (e_i \gamma_m) e_m\Big] w_2 + w_1 \Big(\sum_{m \leqq i} \gamma_m e_i e_m\Big) w_2 + w_1 \Big(\sum_{m' > i} \gamma_{m'} e_i e_{m'}\Big) w_2 \\ &\rightarrowtail w_1 \Big[\sum_m (e_i \gamma_m) e_m\Big] w_2 + w_1 \Big(\sum_{m \leqq i} \gamma_m e_m e_i\Big) w_2 \\ &\qquad + w_1 \Big(\sum_{m \leqq i} \gamma_m \{e_i, e_m\}\Big) w_2 + w_1 \Big(\sum_{m' > i} \gamma_{m'} e_i e_{m'}\Big) w_2 \\ &= z_6 + w_1 \Big[\sum_m (e_i \gamma_m) e_m + \sum_{m \leqq i} \gamma_m \{e_i, e_m\} - \sum_{m' > i} \gamma_{m'} \{e_{m'}, e_i\}\Big] w_2. \end{aligned}$$

Or, d'après (4), le crochet n'est autre que $\{e_i, \{e_j, e_k\}\}$, donc

$$z_3 \rightarrowtail z_6 \qquad \text{et} \qquad z'_5 \rightarrowtail z_6 + w_1 \{e_i, \{e_j, e_k\}\} w_2.$$

Deux calculs analogues donneront

$$z_3 \rightarrowtail z_7, \qquad z'_3 \rightarrowtail z_7 + w_1 \{ e_k, \{ e_i, e_j \} \} w_2,$$

et

$$z'_4 \rightarrowtail z_8, \qquad z_4 \rightarrowtail z_8 + w_1 \{ e_j, \{ e_i, e_k \} \} w_2,$$

donc

$$z \rightarrowtail w' + z_6 + z_7 + z_8 + w_1 \{ e_j, \{ e_i, e_k \} \} w_2 = z_0,$$

et

$$z' \rightarrowtail w' + z_6 + z_7 + z_8 + w_1 [\{ e_i, \{ e_j, e_k \} \} + \{ e_k, \{ e_i, e_j \} \}] w_2 = z'_0.$$

En vertu de l'identité de Jacobi, ces deux éléments sont égaux.

Nous avons donc montré l'univocité du procédé de construction.

c. Unicité de la forme canonique. — Cette univocité va nous servir pour montrer qu'il existe au plus un élément canonique congru modulo $\mathcal{J}$ à un élément z donné.

Désignons en effet par $\overline{\overline{z}}$ l'élément canonique obtenu à partir de z par le procédé de construction ci-dessus. Supposons que deux éléments *canoniques* z_1 et z_2 soient congrus à un même élément z. Nous avons $\overline{\overline{z_1}} = z_1$, $\overline{\overline{z_2}} = z_2$ et $z_1 - z_2 \in \mathcal{J}$. D'après le lemme 2, $\overline{\overline{z_1 - z_2}} = 0$. Or, pour deux éléments quelconques y_1 et y_2 de $\mathcal{A}'$, on a $\overline{\overline{y_1 - y_2}} = \overline{\overline{y_1}} - \overline{\overline{y_2}}$. Il s'ensuit que $z_1 = z_2$.

C. Q. F. D.

Si nous remarquons enfin que l'ensemble des éléments canoniques est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}'$, nous pouvons énoncer :

PROPOSITION 2. — *L'ensemble $\mathcal{C}$ des éléments canoniques de $\mathcal{A}'$ est isomorphe à* l'espace *quotient* $\mathcal{A}'' = \mathcal{A}'/\mathcal{J}$.

4. LE THÉORÈME D'IMMERSION. — En introduisant dans $\mathcal{C}$ l'opération $z_1 \star z_2 = \overline{\overline{z_1 z_2}}$, on en fait une pseudo-algèbre associative $\mathcal{C}^\star$ isomorphe à la *pseudo-algèbre* quotient $\mathcal{A}'' = \mathcal{A}'/\mathcal{J}$.

E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\star$, et pour deux quelconques u et v de ses éléments, on a dans $\mathcal{C}^\star$:

$$\{ u, v \} = u \star v - v \star u.$$

Nous avons donc réalisé l'immersion de E dans une pseudo-algèbre associative. Nous énoncerons :

THÉORÈME. — *Toute pseudo-algèbre de Lie de dimension > 1 sur un corps commutatif* K *de caractéristique $\neq 2$ peut être plongée dans un espace vectoriel sur* K *muni d'une opération associative, distributive pour l'addition, telle que, si on la note par le signe $\star$, $\{ u, v \} = u \star v - v \star u$ pour tout couple u, v d'éléments de* E.

CHAPITRE V.

SYSTÈMES LINÉAIRES ET HOMOGÈNES D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU PREMIER ORDRE A UNE INCONNUE.

1. La pseudo-algèbre de Lie fondamentale. — On considère, dans la théorie algébrique des équations aux dérivées partielles ([19]) un corps commutatif K muni de n dérivations (« partielles ») *permutables*. Nous allons étudier systématiquement l'espace engendré par ces dérivations sur K [qui est un sous-espace de la pseudo-algèbre de Lie $\mathcal{D}(K)$ de toutes les dérivations de K].

Soit donc E un sous-espace de $\mathcal{D}(K)$, de dimension finie, et engendré par un système d'éléments $d_1, d_2, \ldots, d_n$ tels que $\{d_i, d_j\} = 0$ pour tout couple d'indices i, j. En vertu de la proposition 1 (I, 4), E est une *sous-pseudo-algèbre de Lie* de $\mathcal{D}(K)$. Nous supposerons de plus qu'il existe des éléments $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ de K tels que $d_i \xi_j = \delta_{ij}$. Il s'ensuit que $d_1, \ldots, d_n$ est une base de E; car si $\sum_i \alpha_i d_i = 0$, $\left(\sum_i \alpha_i d_i\right) \xi_h = \alpha_h = 0$ quel que soit h.

E sera appelée pseudo-algèbre de Lie *fondamentale*.

Définition 1. — Un système $(u_i)_{i \in I}$ d'éléments d'une pseudo-algèbre de Lie E est dit *jacobien* si $\{u_i, u_j\} = 0$ pour tout $i, j \in I$.

Proposition 1. — *Si un sous-espace vectoriel* V *d'une pseudo-algèbre de Lie quelconque* E *a une base jacobienne, c'est une sous-pseudo-algèbre de Lie de* E.

C'est, comme plus haut, une conséquence immédiate de la proposition 1 (I, 4).

Proposition 2. — *Toute sous-pseudo-algèbre de Lie* V *de la pseudo-algèbre de Lie fondamentale* E *possède une base jacobienne.*

Soit en effet $u_1, \ldots, u_p$ une base de V. On peut compléter cette base, au moyen des d_i, en une base de E, par exemple $u_1, \ldots, u_p, d_{p+1}, \ldots, d_n$. E est somme directe de V et du sous-espace F de base $d_{p+1}, \ldots, d_n$ (qui est, d'après la proposition 1, une sous-pseudo-algèbre de Lie). E est aussi somme directe de F et de la sous-pseudo-algèbre de Lie G de base $d_1, \ldots, d_p$.

On a, d'une seule manière, $d_i = v_i + w_i$ avec $v_i \in V$, $w_i \in F$. Les vecteurs $v_1, v_2, \ldots, v_p$ sont *linéairement indépendants*, car $\sum \alpha_i v_i = 0$ entraîne, puisque $E = F \dotplus G$, $\sum \alpha_i d_i = 0$, d'où $\alpha_i = 0$ pour tout $i \leq p$. Ils forment donc une base de V.

([19]) Ritt, *Differential Algebra*, chap. IX.

Je dis que le système $v_1, v_2, \ldots, v_p$ est *jacobien*. En effet,

$$\{v_i, v_j\} = \{w_i, w_j\} - \{d_i, w_j\} + \{d_j, w_i\};$$

w_j est de la forme $\sum_{p+1}^{n} \beta_k d_k$, et par conséquent

$$\{d_i, w_j\} = \sum_{p+1}^{n} (d_i \beta_k)\, d_k \in \mathrm{F}; \qquad \text{de même} \quad \{d_j, w_i\} \in \mathrm{F}.$$

Enfin $\{w_i, w_j\} \in \mathrm{F}$. Donc $\{v_i, v_j\} \in \mathrm{F}$.

D'autre part, V étant une sous-pseudo-algèbre de Lie de E, $\{v_i, v_j\} \in \mathrm{V}$. Donc $\{v_i, v_j\} \in \mathrm{F} \cap \mathrm{V}$, ce qui exige $\{v_i, v_j\} = 0$.

La proposition est démontrée.

2. La pseudo-algèbre associative enveloppante. — E est un ensemble de dérivations, donc de transformations de K. Relativement à l'opération de composition de ces transformations, le plus petit demi-groupe contenant E est l'ensemble $\mathcal{G}$ des produits finis d'éléments de E.

Étant donnés deux transformations T_1, T_2 et un élément λ de K, nous notons selon l'usage $\lambda \mathrm{T}_1$ la transformation T' définie par $\mathrm{T}'\alpha = \lambda(\mathrm{T}_1 \alpha)$ pour tout $\alpha \in \mathrm{K}$, $\mathrm{T}_1 + \mathrm{T}_2$ la transformation T'' définie par $\mathrm{T}''\alpha = \mathrm{T}_1\alpha + \mathrm{T}_2\alpha$. $\mathcal{G}$ engendre ainsi sur K un espace vectoriel de transformations $\mathcal{A}$.

Proposition 3. — *$\mathcal{A}$ est fermé pour l'opération de composition.*

Il nous suffit de montrer que $(\lambda u_1 u_2 \ldots u_p)(\mu v_1 v_2 \ldots v_q)$ appartient à $\mathcal{A}$ ($\lambda, \mu \in \mathrm{K}$; $u_i, v_j \in \mathrm{E}$). Si $p = 1$,

$$(\lambda u_1)(\mu v_1 \ldots v_q) = \lambda (u_1 \mu) v_1 \ldots v_q + \lambda \mu u_1 v_1 \ldots v_q.$$

Par récurrence, nous voyons que $(\lambda u_1 \ldots u_p)(\mu v_1 \ldots v_q)$ est une combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{G}$.

Cette opération est *distributive* pour l'addition, donc $\mathcal{A}$ sera un anneau. Elle n'est pas linéaire, et $\mathcal{A}$ ne sera pas une algèbre sur K. On a cependant, si w et w' sont deux éléments de $\mathcal{A}$,

$$(\lambda w)\, w' = \lambda (w w'), \tag{1}$$

$$w(\lambda w') = (w\lambda)\, w' + w_1 w' \qquad (w_1 \in \mathcal{A}). \tag{2}$$

[En effet, si $u \in \mathrm{E}$,

$$u(\lambda w') = (u\lambda)\, w' + \lambda u w'.$$

Supposons démontré que

$$(u_2 \ldots u_p)(\lambda w') = (u_2 \ldots u_p \lambda)\, w' + w_2 w',$$

on aura

$$\begin{aligned}(u_1 u_2 \dots u_p)(\lambda w') &= u_1[(u_2 \dots u_p \lambda) w' + w_2 w'] \\ &= [(u_1 \dots u_p)\lambda] w' + [(u_2 \dots u_p)\lambda u_1 + u_1 w_2] w' \\ &= [(u_1 \dots u_p)\lambda] w' + w_1 w',\end{aligned}$$

et par distributivité, la relation cherchée].

Nous sommes donc amenés à l'appeler *pseudo-algèbre* associative. Ses éléments seront appelés *dérivations supérieures* de K.

PROPOSITION 4. — *Si* K *est de caractéristique nulle, les vecteurs* $d_1^{\alpha_1} d_2^{\alpha_2} \dots d_n^{\alpha_n}$ *de* $\mathcal{A}$ (α_i *entiers* $\geqq 0$, *non tous nuts*) *sont linéairement indépendants sur* K.

Supposons en effet qu'il existe une relation

$$\sum_\alpha \lambda_\alpha d_1^{\alpha_1} d_2^{\alpha_2} \dots d_n^{\alpha_n} = 0 \qquad (\text{tous les } \lambda_\alpha \text{ étant} \neq 0), \tag{3}$$

et soit $\lambda d_1^{\alpha_1} d_2^{\alpha_2} \dots d_n^{\alpha_n}$ un terme où la somme $\alpha_1 + \dots + \alpha_n$ soit minimum. Dans tout autre terme $\mu d_1^{\beta_1} d_2^{\beta_2} \dots d_n^{\beta_n}$, il existe un indice i tel que $\beta_i > \alpha_i$. Le premier membre de (3) transforme donc l'élément $\xi_1^{\alpha_1} \xi_2^{\alpha_2} \dots \xi_n^{\alpha_n}$ de K en l'élément $\alpha_1 ! \alpha_2 ! \dots \alpha_n ! \lambda$, qui n'est pas nul puisque K est de caractéristique nulle : d'où la proposition.

PROPOSITION 5. — *Ce système* S *d'éléments de* $\mathcal{A}$ *engendre* $\mathcal{A}$.

Il nous suffit de montrer qu'un élément de $\mathcal{G}$, c'est-à-dire une dérivation supérieure de la forme $u_1 u_2 \dots u_q$ avec $u_i \in$ E, est égal à une combinaison linéaire d'éléments de S.

La proposition est vraie pour $q = 1$; supposons que $u_2 u_3 \dots u_q$ soit une combinaison linéaire d'éléments de S, $\sum \lambda_\alpha d_1^{\alpha_1} d_2^{\alpha_2} \dots d_n^{\alpha_n}$, et soit $u_1 = \sum \theta_i d_i$. On a

$$\begin{aligned}(\theta_i d_i)(\lambda_\alpha d_1^{\alpha_1} d_2^{\alpha_2} \dots d_n^{\alpha_n}) &= \theta_i [d_i (\lambda_\alpha d_1^{\alpha_1} d_2^{\alpha_2} \dots d_n^{\alpha_n})] \\ &= \theta_i [(d_i \lambda_\alpha) d_1^{\alpha_1} \dots d_n^{\alpha_n} + \lambda_\alpha d_i d_1^{\alpha_1} d_2^{\alpha_2} \dots d_n^{\alpha_n}] \\ &= \theta_i (d_i \lambda_\alpha) d_1^{\alpha_1} d_2^{\alpha_2} \dots d_i^{\alpha_i} \dots d_n^{\alpha_n} + \theta_i \lambda_\alpha d_1^{\alpha_1} d_2^{\alpha_2} \dots d_i^{\alpha_i + 1} \dots d_n^{\alpha_n},\end{aligned}$$

d'où la proposition (vraie quelle que soit la caractéristique de K).

COROLLAIRE 1. — *Si* K *est de* caractéristique nulle, S *est une base de l'espace* $\mathcal{A}$.

Nous nous placerons *désormais dans ce cas.*

DÉFINITION 2. — Nous appellerons *ordre* d'un élément $d_1^{\alpha_1} \dots d_n^{\alpha_n}$ de S la somme des entiers α_i. L'ordre d'un élément de $\mathcal{A}$ sera l'ordre maximum de ses termes dans son expression au moyen de S. E apparaît donc comme l'ensemble des éléments du premier ordre de $\mathcal{A}$ (mis à part l'élément zéro)

Proposition 6. — *Si w et w' sont deux dérivations supérieures, les termes de plus haut ordre de ww' s'obtiennent en faisant le produit des termes de plus haut ordre de w et w', comme s'il s'agissait de polynomes en $d_1, d_2, \ldots, d_n$.*

En effet $d_i(\mu\, d_1^{\beta_1} d_2^{\beta_2} \ldots d_n^{\beta_n})$ a pour terme de plus haut ordre $\mu\, d_1^{\beta_1} \ldots d_i^{\beta_i+1} \ldots d_n^{\beta_n}$, et, par récurrence, $(\lambda\, d_1^{\alpha_1} \ldots d_n^{\alpha_n})(\mu\, d_1^{\beta_1} \ldots d_n^{\beta_n})$ a pour terme de plus haut ordre $\lambda\mu\, d_1^{\alpha_1+\beta_1} \ldots d_n^{\alpha_n+\beta_n}$. La proposition 6 résulte alors immédiatement de la distributivité.

Corollaire 2. — *Ordre $(ww') =$ ordre $w +$ ordre w'.*

Corollaire 3. — *$w(\lambda w') = \lambda(ww') + z$ avec ordre $z <$ ordre ww'.*

Proposition 7. — *Si p éléments de E, $u_1, u_2, \ldots, u_p$ sont linéairement indépendants, les éléments de $\mathcal{A}$ de la forme $u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2} \ldots u_p^{\alpha_p}$ (α_i non tous nuls) sont linéairement indépendants.*

Nous utiliserons le *lemme* d'algèbre suivant :

Si $Y_1, Y_2, \ldots, Y_p$ sont p formes linéaires indépendantes à n variables $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sur un corps K, et h un entier positif, les polynomes

$$Y_1^{\alpha_1} Y_2^{\alpha_2} \ldots Y_p^{\alpha_p} \left(\sum \alpha_i = h\right)$$

homogènes en $X_1, \ldots, X_n$ sont linéairement indépendants sur K ([20]).

Nous en déduisons, en vertu de la proposition 6, qu'une combinaison linéaire (à coefficients non tous nuls) de « monômes » $u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2} \ldots u_p^{\alpha_p}$ tous d'ordre h ne peut être nulle. Il en est de même pour des monômes d'ordre quelconque, puisque seuls les monômes de plus haut ordre h interviennent dans le calcul des termes d'ordre h du développement suivant la base S. La proposition est donc démontrée.

Proposition 8. — *Si $u_1, \ldots, u_n$ sont n éléments linéairement indépendants de E, les éléments de $\mathcal{A}$ de la forme $u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2} \ldots u_n^{\alpha_n}$ (α_i non tous nuls) forment une base de $\mathcal{A}$.*

On vient de montrer que ces éléments sont linéairement indépendants. Il reste à prouver qu'ils engendrent $\mathcal{A}$. Or, par un raisonnement analogue à celui

---

([20]) N'ayant pas trouvé ce résultat dans la littérature algébrique, j'indique brièvement une démonstration : si $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ sont n formes linéaires (indépendantes ou non) en $X_1, X_2, \ldots, X_n$, de déterminant δ, les coefficients des polynomes homogènes de degré h, $Y_1^{\alpha_1}, Y_2^{\alpha_2}, \ldots, Y_n^{\alpha_n}$ ont pour déterminant $\Delta = \delta^\omega$, ω étant le nombre Γ_{n+1}^{h-1} de combinaisons avec répétitions de $n+1$ objets pris $h-1$ à $h-1$. Cette égalité se démontre aisément au moyen du calcul extérieur, par récurrence sur n et h, en se ramenant par une transformation simple au cas où $Y_1, \ldots, Y_{n-1}$ ne dépendent pas de X_n. En particulier, $\delta \neq 0$ entraîne $\Delta \neq 0$, d'où le lemme.

utilisé dans la démonstration de la proposition 5, on voit facilement que les éléments de $\mathcal{A}$ de la forme $u_{i_1}u_{i_2}\ldots u_{i_q}$, où q est un entier positif quelconque, i_k un entier positif quelconque $\leqq n$, engendrent $\mathcal{A}$.

Soit r le nombre des inversions présentées par la suite $i_1, \ldots, i_q$. Montrons que $w = u_{i_1}\ldots u_{i_q}$ s'exprime comme combinaison linéaire des seuls éléments $u_1^{\alpha_1}u_2^{\alpha_2}\ldots u_n^{\alpha_n}$. C'est vrai pour $q=1$, ainsi que pour $i_1 \leqq i_2 \leqq \ldots \leqq i_q$. Supposons-le démontré pour tout élément d'ordre $\leqq q-1$, et pour tout élément d'ordre q dans lequel la suite $i_1, i_2, \ldots, i_q$ présente $r-1$ inversions.

Il y a dans w deux indices consécutifs i_k, i_{k+1} tels que $i_k > i_{k+1}$. Or nous avons

$$u_{i_k}u_{i_{k+1}} = u_{i_{k+1}}u_{i_k} - \{u_{i_k}, u_{i_{k+1}}\} = u_{i_{k+1}}u_{i_k} - \sum_l \alpha_l u_l,$$

d'où

$$w = u_{i_1}u_{i_2}\ldots u_{i_{k+1}}u_{i_k}\ldots u_{i_q} - \sum_l u_{i_1}\ldots u_{i_{k-1}}(\alpha_l u_l)u_{i_{k+2}}\ldots u_{i_q}.$$

Le premier terme du second membre présente $r-1$ inversions, le reste est une somme de termes $\lambda u_{j_1}\ldots u_{j_s}$ avec $s \leqq q-1$. La proposition est donc démontrée.

DÉFINITION 3. — Une telle base sera dite *base spéciale* de $\mathcal{A}$.

PROPOSITION 9. — *L'ordre est une propriété intrinsèque des éléments de* $\mathcal{A}$.

Cet énoncé doit être précisé dans le sens suivant : *l'ordre* d'un élément w de $\mathcal{A}$ *relatif* à une base $u_1, \ldots, u_n$ de E sera le maximum de la somme $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n$ dans son expression comme combinaison linéaire des monômes $u_1^{\alpha_1}u_2^{\alpha_2}\ldots u_n^{\alpha_n}$. L'invariance de l'ordre relatif découle alors du lemme de la proposition 7, ou encore du fait évident que cet ordre ne peut augmenter lorsqu'on exprime les u_i au moyen d'une autre base (v_j) de E.

DÉFINITION 4. — Une partie de $\mathcal{A}$ qui est à la fois sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}$ et sous-anneau de $\mathcal{A}$ sera appelée *sous-pseudo-algèbre* de $\mathcal{A}$.

PROPOSITION 10. — *L'intersection de toutes les sous-pseudo-algèbres de $\mathcal{A}$ contenant une partie $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ est une sous-pseudo-algèbre de $\mathcal{A}$. C'est l'espace vectoriel engendré par les produits finis des éléments de $\mathcal{B}$.*

DÉFINITION 5. — Cette sous-pseudo-algèbre sera appelée sous-pseudo-algèbre *engendrée par* $\mathcal{B}$, et notée $(\mathcal{B})_{\mathcal{A}}$.

PROPOSITION 11. — *Si* $F \subset E$, $(F)_{\mathcal{A}}$ *contient la sous-pseudo-algèbre de Lie* $(F)_E$ *engendrée par* F.

En effet, si u et v appartiennent à $(F)_{\mathfrak{A}} \cap E$, $u+v$, λu et $\{u, v\} = uv - vu$ appartiennent à $(F)_{\mathfrak{A}} \cap E$, et par conséquent $(F)_{\mathfrak{A}} \cap E$ est une sous-pseudo-algèbre de Lie de E contenant F.

Théorème 1. — *Si* $F \subset E$, $(F)_{\mathfrak{A}} \cap E = (F)_E$.

Soit en effet $u_1, \ldots, u_p$ une base jacobienne de $(F)_E$. $(F)_{\mathfrak{A}}$ est engendrée (proposition 10) par les produits $u_{i_1} u_{i_2} \ldots u_{i_q}$ des u_i, qui se réduisent, en raison de la propriété $u_i u_j = u_j u_i$, aux produits $u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2} \ldots u_p^{\alpha_p}$. En vertu de la proposition 7, ces produits constituent une base de $(F)_{\mathfrak{A}}$, qui peut être complétée en une base spéciale de $\mathfrak{A}$. Un élément du premier ordre de $(F)_{\mathfrak{A}}$ a une seule expression relativement à cette base, et est donc nécessairement de la forme

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_p u_p.$$

C. Q. F. D.

Proposition 12. — *Une partie de $\mathfrak{A}$ qui est à la fois sous-espace vectoriel de $\mathfrak{A}$ et idéal à gauche de l'anneau $\mathfrak{A}$ est une sous-pseudo-algèbre de $\mathfrak{A}$.*

Définition 6. — Une telle sous-pseudo-algèbre de $\mathfrak{A}$ sera dite *invariante à gauche*.

Proposition 13. — *L'intersection de toutes les sous-pseudo-algèbres invariantes à gauche contenant une partie $\mathfrak{B}$ de $\mathfrak{A}$ est une sous-pseudo-algèbre invariante à gauche. C'est le sous-espace engendré par les éléments de la forme z et wz avec $z \in \mathfrak{B}$, $w \in \mathfrak{A}$.*

Cela résulte des relations (1) et (2) du début de ce paragraphe.

Définition 7. — Cette sous-pseudo-algèbre invariante à gauche sera appelée sous-pseudo-algèbre invariante à gauche *engendrée par* $\mathfrak{B}$ et notée $(\mathfrak{B})_{g\mathfrak{A}}$.

Théorème 2. — *Si* $F \subset E$, $(F)_{g\mathfrak{A}} \cap E = (F)_E$.

Soit encore $u_1, \ldots, u_p$ une base jacobienne de $(F)_E$, qu'on peut compléter en une base $u_1, \ldots, u_p, v_{p+1} \ldots v_n$ de E. $(F)_{g\mathfrak{A}} = (u_1, \ldots, u_p)_{g\mathfrak{A}}$ est engendrée par les monômes $v_{p+1}^{\alpha_{p+1}} \ldots v_n^{\alpha_n} u_1^{\beta_1} \ldots u_p^{\beta_p} u_i$, les α et les β étant des entiers $\geqq 0$, donc, en vertu de la commutativité des u_i, par les monômes $v_{p+1}^{\alpha_{p+1}} \ldots v_n^{\alpha_n} u_1^{\beta_1} u_2^{\beta_2} \ldots u_p^{\beta_p}$, où les β ne sont pas tous nuls. Un élément du premier ordre de $(F)_{g\mathfrak{A}}$ a une seule expression au moyen de cette base spéciale, et est donc nécessairement de la forme $\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_p u_p$,

C. Q. F. D.

Corollaire 4. — *Moyennant les hypothèses énoncées au début de ce chapitre, les seules combinaisons $\sum \lambda u_{i_1} u_{i_2} \ldots u_{i_q}$ qui soient des dérivations sont de la forme $\sum \lambda u_{(q)}$, où $u_{(q)}$ est une accolade multiple.*

En effet (I, 4, proposition 2), c'est ainsi qu'est engendrée la sous-pseudo-algèbre de Lie $(F)_E$. On a ainsi obtenu une réciproque de cette proposition : l'accolade de deux dérivations est une dérivation.

3. Pseudo-algèbre enveloppante complète. — Adjoignons à $\mathcal{A}$ la transformation identique e : nous obtenons un espace $\mathcal{A}'$ ayant pour base les monômes $d_1^{\alpha_1} d_2^{\alpha_2} \ldots d_n^{\alpha_n}$ où, cette fois-ci, les α_i peuvent être simultanément nuls. Nous appellerons cette base *canonique*. $\mathcal{A}'$ sera une nouvelle pseudo-algèbre associative, que nous appellerons la *pseudo-algèbre enveloppante complète*. Nous attribuerons évidemment à e l'ordre zéro, moyennant quoi les diverses propriétés de $\mathcal{A}$ s'étendent à $\mathcal{A}'$, leur expression s'en trouvant d'ailleurs souvent simplifiée.

4. Anneau de polynomes différentiels enveloppant. — A tout élément $w_\alpha = d_1^{\alpha_1} d_2^{\alpha_2} \ldots d_n^{\alpha_n}$ de la base canonique de $\mathcal{A}'$, associons une indéterminée, que nous noterons $w_\alpha Y$. L'anneau $K\{Y\}$ des polynomes aux indéterminées $w_\alpha Y$ sur K peut être muni de n dérivations prolongeant les dérivations $d_1, d_2, \ldots, d_n$ de K, au moyen des relations $d_i(w_\alpha Y) = (d_i w_\alpha) Y$ et des axiomes de dérivation d'un anneau. Cet anneau a été introduit par Ritt ([21]). Ses éléments sont les *polynomes différentiels*. $\mathcal{A}'$ apparaît donc comme isomorphe à l'ensemble $\overline{\mathcal{A}'}$ des polynomes linéaires homogènes de $K\{Y\}$, E comme isomorphe à l'ensemble $\overline{E}$ des polynomes linéaires homogènes du premier ordre de $K\{Y\}$. Si $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}'$, nous noterons $\overline{\mathcal{B}}$ l'image de $\mathcal{B}$ dans l'isomorphisme $\mathcal{A}' \xleftrightarrow{\theta} \overline{\mathcal{A}'}$.

Proposition 14. — *Si $(z_i)_{i \in I}$ est une base de $\mathcal{A}'$, tout élément de* $K\{Y\}$ *s'exprime, et d'une seule manière, comme polynome en $z_i Y$.*

En effet, les indéterminées $w_\alpha Y$ s'expriment en fonction (linéaire et homogène) des polynomes différentiels $z_i Y$ comme les dérivations supérieures w_α en fonction des z_i. Reste à montrer que les $z_i Y$ sont algébriquement indépendants sur K. Or, dans une combinaison algébrique

$$G(z_1 Y, z_2 Y, \ldots, z_q Y) = H(w_1 Y, \ldots, w_r Y)$$

des $z_i Y$, les termes de plus haut degré de H sont donnés par les termes de plus haut degré de G. Donc, si H est nul, le polynome $G_h(z_1 Y, \ldots z_q Y)$ formé par les termes de plus haut degré de G est nul. D'après le lemme de la proposition 7, le polynome G_h a tous ses coefficients nuls. Donc G a tous ses coefficients nuls,

C. Q. F. D.

Un *idéal différentiel* ([22]) de $K\{Y\}$ est un idéal contenant, en même temps

---

([21]) *Cf.* note ([19]) du paragraphe 1.
([22]) *Cf.* note ([19]) du paragraphe 1.

que le polynome différentiel A, tout polynome dérivé d_iA. L'intersection de tous les idéaux différentiels contenant une partie $\mathcal{B}$ de $K\{Y\}$ est un idéal différentiel, noté $[\mathcal{B}]$, dont les éléments sont de la forme $\sum A(wB)$ avec $A \in K\{Y\}$, $w \in \mathcal{A}'$, $B \in \mathcal{B}$.

THÉORÈME 3. — *Si* $F \subset E$, $[\overline{F}] \cap \overline{\mathcal{A}'} = (\overline{F})_{g\mathcal{A}}$

En effet, dans la somme $\sum A(wB)$, B est de la forme zY avec $z \in F$. Séparons dans le polynome A le terme de degré zéro : $A = A_1 + \lambda\ (\lambda \in K)$. A_1 est une somme de monômes de degré > 0. La somme $\sum A(wB)$ n'a pas de terme constant et a comme termes du premier degré $\sum(wzY)$. Si elle appartient à $\overline{\mathcal{A}'}$, elle se réduit à ces termes du premier degré, et appartient donc, d'après la proposition 13, à la sous-pseudo-algèbre invariante à gauche $(\overline{F})_{g\mathcal{A}'}$,

C. Q. F. D.

THÉORÈME 4. — *Si* $F \subset E$, $[\overline{F}] \cap \overline{E} = (\overline{F})_E$.

C'est une conséquence immédiate des théorèmes 2 et 3.

THÉORÈME 5. — *Si* $F \subset E$, *l'idéal* $[\overline{F}]$ *est premier*.

Soit $u_1, \ldots, u_p$ une base jacobienne de $(F)_E$. On a

$$[\overline{F}] = [\overline{u_1}, \overline{u_2}, \ldots, \overline{u_p}] = [u_1 Y, u_2 Y, \ldots, u_p Y].$$

Complétons $u_1, \ldots, u_p$ en une base $u_1, \ldots, u_p, v_{p+1}, \ldots, v_n$ de E, à laquelle correspondent une base spéciale de $\mathcal{A}'$, formée des dérivations supérieures $z = v_{p+1}^{\beta_{+1}} \ldots v_n^{\beta_n} u_1^{\alpha_1} \ldots u_p^{\alpha_p}$, et des générateurs algébriquement indépendants zY de l'anneau $K\{Y\}$. Si $A \in [\overline{F}]$, c'est une somme de termes $B(zu_i Y)$ où B est un monôme en zY. Chacun de ces termes a un facteur

$$zu_i Y = v_{p+1}^{\beta_{p+1}} \ldots v_n^{\beta_n} u_1^{\alpha_1} \ldots u_i^{\alpha_{i}+1} \ldots u_p^{\alpha_p} Y = v_{p+1}^{\beta_{p+1}} \ldots v_n^{\beta_n} u_1^{\gamma_1} \ldots u_i^{\gamma_i} \ldots u_p^{\gamma_p} Y,$$

où un des γ au moins n'est pas nul. Réciproquement, une somme de monômes en zY où un facteur au moins possède au moins un γ non nul est un élément de $[\overline{F}]$. Si maintenant $A = A_1 A_2$, l'un des polynomes différentiels A_1 et A_2 au moins possède cette propriété, et par suite appartient à $[\overline{F}]$. $[\overline{F}]$ est donc un idéal premier.

5. LE THÉORÈME FONDAMENTAL. — La théorie de Ritt nous permet alors d'énoncer le

THÉORÈME 6. — *Pour que deux systèmes d'équations aux dérivés partielles linéaires et homogènes du premier ordre sur le corps différentiel* K *précédemment défini* *admettent les mêmes solutions, il faut et il suffit que les sous-pseudo-algèbres de Lie engendrées par les premiers membres soient identiques.*

Soient

$$u_i Y = 0 \qquad (i \in I,\ u_i \in E), \tag{4}$$

$$v_j Y = 0 \qquad (j \in J,\ v_j \in E), \tag{5}$$

ces deux systèmes.

La condition est suffisante : soit η une solution de (4), c'est-à-dire un élément d'un surcorps différentiel de K tel que $u_i\eta = 0$ pour tout $i \in I$. Par hypothèse, et d'après la proposition 2 (I, 4), v_j est une combinaison linéaire d'éléments $u_{(q)}$, $u_{(q)}$ étant une accolade multiple d'ordre q d'éléments u_i. On voit, par récurrence sur q, que $u_{(q)}\eta = 0$. En effet ([23]),

$$u_{(q)}\eta = \{ u_i,\ u_{(q-1)} \}\eta = u_i[u_{(q-1)}\eta] - u_{(q-1)}(u_i\eta) = u_i 0 - u_{(q-1)} 0 = 0.$$

Donc $v_j\eta = 0$ pour tout $j \in J$.

La condition est nécessaire : d'après le théorème des zéros ([24]), les systèmes $(u_i Y)_{i\in I}$ et $(v_j)_{j\in J}$ engendrent le même idéal parfait $\mathfrak{J}$. Or, l'idéal différentiel engendré par $(u_i Y)_{i\in I}$ est premier (théorème 5), il est donc *a fortiori* parfait; d'autre part, la sous-pseudo-algèbre de Lie engendrée par $(u_i)_{i\in I}$ est $\mathfrak{J} \cap E$ (théorème 4). D'où le théorème.

6. Méthode classique d'intégration. — Le théorème général ci-dessus est remplacé par un énoncé plus précis dans le cas où K est un corps de fonctions réelles. Nous allons reprendre ici l'exposé classique des méthodes d'intégration des systèmes linéaires et homogènes d'équations aux dérivées partielles du premier ordre, que nous simplifierons grâce à la théorie des pseudo-algèbres de Lie.

a. Définitions. — Un système S linéaire et homogène d'équations aux dérivées partielles du premier ordre est constitué par p équations

$$X_i f = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, p)$$

où f est une fonction inconnue de n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et les X_i des symboles de transformation infinitésimale à n variables :

$$X_i = \sum \alpha_{ih} \frac{\partial}{\partial x_h}.$$

Les coefficients α_{ih} sont des fonctions données des n variables x_h définies

---

([23]) Nous utilisons ici la relation $\{u, v\}\lambda = u(v\lambda) - v(u\lambda)$ dans le cas où λ appartient, non plus à K, mais à un surcorps de K. Mais elle résulte immédiatement de la définition de l'opération $\{,\}$: $\{u, v\} = u \circ v - v \circ u$.

([24]) Ritt, *Diff. Alg.*, II. 6 et IX. 8.

dans un domaine D. Nous supposerons qu'ils appartiennent à un corps à dérivées partielles K (c'est-à-dire un corps contenant, en même temps qu'une fonction λ, toutes ses dérivées partielles par rapport aux x_h).

Les symboles X_i appartiennent donc à la *pseudo-algèbre de Lie* sur K qui a pour base le système $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}$. Désignons-la par E. Si

$$X = \sum \alpha_h \frac{\partial}{\partial x_h} \quad \text{et} \quad Y = \sum \beta_h \frac{\partial}{\partial x_h},$$

on a

$$\{X, Y\} = \sum_h (X\beta_h - Y\alpha_h) \frac{\partial}{\partial x_h}. \tag{6}$$

Un système S admet toujours la *solution banale* $f =$ const.

Un système S sera dit *libre* si les X_i sont linéairement indépendants sur K. Il sera dit *complet* [25] s'il est libre et si le sous-espace vectoriel $(X_1, X_2, \ldots, X_p)$ est une sous-pseudo-algèbre de Lie. Il sera dit *jacobien* [26] s'il est libre et si $\{X_i, X_j\} = 0$ quels que soient i et j. Deux systèmes S et S′ seront dits *linéairement équivalents* si les sous-espaces vectoriels $(X_1, X_2, \ldots, X_p)$ et $(X'_1, \ldots, X'_q)$ sont identiques, *équivalents* s'ils ont les mêmes solutions.

Les propositions suivantes sont immédiates :

— Tout système jacobien est complet.

— Deux systèmes linéairement équivalents sont équivalents.

— Un sytème libre comporte au plus n équations

— Un système libre de n équations est *complet* et n'admet que la solution banale.

— Un système libre linéairement équivalent à un système complet est lui-même complet.

b. Changement de variables. — Un changement de variables est défini par une transformation biunivoque T du domaine D, qui fait passer du point $M = (x_1, \ldots, x_n)$ au point $M' = (x'_1, \ldots, x'_n)$, ce que nous noterons $M' = TM$. T est donné par les n fonctions $x'_i = \varphi_i(x_1, \ldots, x_n) = \varphi_i(M)$. La transformation inverse sera notée T^{-1}.

La *transformée* par T d'une *fonction f* sera notée Tf et définie par

$$Tf(TM) = f(M) \quad \text{pour tout M.}$$

On a les propriétés suivantes :

$$T(f+g) = Tf + Tg,$$
$$T(fg) = Tf.Tg,$$
$$T^{-1}(Tf) = T(T^{-1}f) = f.$$

---

[25] Clebsch, *Journal de Crelle*, t. 65, 1866, p. 258.

[26] *Ibid.* p. 259.

En outre, la formule de dérivation d'une fonction composée s'écrit

$$\mathrm{T}\frac{\partial f}{\partial x_i}=\sum_h \frac{\partial(\mathrm{T}f)}{\partial x_h}\mathrm{T}\frac{\partial \varphi_h}{\partial x_i}. \tag{7}$$

Le *transformé* par T d'un *symbole* X sera noté TX et défini par

$$\mathrm{TX}=\sum_h \mathrm{T}(\mathrm{X}\varphi_h)\frac{\partial}{\partial x_h}.$$

Les fonctions $\mathrm{T}(\mathrm{X}\varphi_h)$ seront supposées *appartenir à* K,

On a les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \mathrm{T}(\mathrm{X}+\mathrm{Y}) &= \mathrm{TX}+\mathrm{TY},\\ \mathrm{T}(f\mathrm{X}) &= \mathrm{T}f.\mathrm{TX}\\ \mathrm{T}(\mathrm{X}f) &= \mathrm{TX}.\mathrm{T}f \quad \text{d'après la relation (7)},\\ \mathrm{T}^{-1}(\mathrm{TX}) &= \mathrm{T}(\mathrm{T}^{-1}\mathrm{X})=\mathrm{X}. \end{aligned} \tag{8}$$

En effet, si T^{-1} est définie par les n fonctions φ_i, on a

$$\begin{aligned} \mathrm{T}^{-1}(\mathrm{TX}) &= \sum_h \mathrm{T}^{-1}[(\mathrm{TX})\psi_h]\frac{\partial}{\partial x_h}=\sum_h \mathrm{T}^{-1}[(\mathrm{TX})\,\mathrm{T}(\mathrm{T}^{-1}\psi_h)]\frac{\partial}{\partial x_h}\\ &= \sum_h \mathrm{T}^{-1}[\mathrm{T}(\mathrm{X}.\mathrm{T}^{-1}\psi_h)]\frac{\partial}{\partial x_h}=\sum_h (\mathrm{X}.\mathrm{T}^{-1}\psi_h)\frac{\partial}{\partial x_h}\\ &= \sum_h (\mathrm{X}\xi_h)\frac{\partial}{\partial x_h}=\mathrm{X}, \end{aligned}$$

si l'on désigne par ξ_h la $h^{\text{ième}}$ fonction coordonnée.

Enfin,

$$\mathrm{T}\{\mathrm{X},\mathrm{Y}\}=\{\mathrm{TX},\mathrm{TY}\}.$$

En effet,

$$\begin{aligned} \{\mathrm{TX},\mathrm{TY}\} &= \sum_h [(\mathrm{TX})(\mathrm{T}.\mathrm{Y}\varphi_h)-(\mathrm{TY})(\mathrm{T}.\mathrm{X}\varphi_h)]\frac{\partial}{\partial x_h} \quad \text{d'après (6)}\\ &= \sum_h \mathrm{T}[\mathrm{X}(\mathrm{Y}\varphi_h)-\mathrm{Y}(\mathrm{X}\varphi_h)]\frac{\partial}{\partial x_h} \quad \text{d'après (8)}\\ &= \sum_h \mathrm{T}[\{\mathrm{X},\mathrm{Y}\}\varphi_h]\frac{\partial}{\partial x_h}=\mathrm{T}\{\mathrm{X},\mathrm{Y}\}. \end{aligned}$$

Le *transformé* par T d'un *système* S sera par définition le système TS des équations $(\mathrm{TX}_i)f=0$ $(i=1, 2, \ldots, p)$.

L'intérêt des considérations précédentes réside dans le fait que :

1° les solutions du système TS sont les transformées par T des solutions de S; cela résulte de la relation (8);

2° le transformé d'un système libre est un système libre; en effet, $\sum \beta_k(TX_k) = 0$ entraîne $T^{-1}\left[\sum \beta_k(TX_k)\right] = 0$ ou $\sum_k (T^{-1}\beta_k)X_k = 0$, ce qui exige $T^{-1}\beta_k = 0$, donc $\beta_k = 0$;

3° le transformé d'un système complet est un système complet; en effet,

$$\{TX_i, TX_j\} = T\{X_i, X_j\} = T\left(\sum \alpha_k X_k\right) = \sum (T\alpha_k)\, TX_k$$

appartient bien au sous-espace vectoriel $(TX_1, \ldots, TX_p)$;

4° le transformé d'un système jacobien est un système jacobien; en effet, si $\{X_i, X_j\} = 0$,

$$\{TX_i, TX_j\} = T\{X_i, X_j\} = T.0 = 0.$$

c. Intégration des systèmes.

THÉORÈME 7. — *L'intégration d'un système quelconque* S *se ramène immédiatement à celle d'un système jacobien.*

En effet, soit $Y_1, \ldots, Y_q$ une base jacobienne (proposition 2) de la sous-pseudo-algèbre de Lie engendrée par $X_1, \ldots, X_p$. Tout X_i est de la forme $\sum \lambda_{ij} Y_j$, donc toute solution du système S : $Y_j f = 0$ $(j = 1, \ldots, q)$ est solution du système S.

THÉORÈME 8. — *L'intégrale générale d'un système jacobien de q équations à n variables est une fonction arbitraire de $n - q$ fonctions indépendantes.*

Le théorème est vrai pour $q = 1$, d'après la théorie classique des équations aux dérivées partielles linéaires et homogènes.

Supposons-le vrai pour tout système de $q - 1$ équations, et soit $X_i f = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, q)$ un système jacobien. L'équation $X_i f = 0$ possède $n - 1$ intégrales indépendantes $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$. Soit φ_n une fonction telle que $X_q \varphi_n \neq 0$. Les fonctions $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}, \varphi_n$ sont indépendantes et par suite définissent dans un certain domaine une transformation biunivoque $T : x'_i = \varphi_i(M)$. Considérons le système transformé TS. TX_q se réduit à $(T.\ X_q\varphi_n)\dfrac{\partial}{\partial x_n}$, ce qui montre que toute intégrale de TS est indépendante de x_n.

D'après $b(4°)$, TS est jacobien. Si $TX_i = \sum_{h=1}^{n} \beta_{ih}\dfrac{\partial}{\partial x_h}$ $(i < q)$, $\{TX_i, TX_q\} = 0$ exige $\dfrac{\partial \beta_{ih}}{\partial x_n} = 0$ $(h = 1, 2, \ldots, n-1)$, ce qui montre que les $n - 1$ premières coordonnées de tout $TX_k (k \leqq q)$ sont indépendantes de x_n.

Posons

$$Z_i = TX_i - \beta_{in}\frac{\partial}{\partial x_n} = \sum_{h=1}^{n-1}\beta_{ih}\frac{\partial}{\partial x_h} \qquad (i = 1, 2, \ldots, q-1)$$

$$Z_q = TX_q = \beta_{qn}\frac{\partial}{\partial x_n}.$$

Le système S_2 : $Z_k f = 0$ $(k = 1, 2, \ldots, q)$ est linéairement équivalent à ST. Il est donc complet (*a, fin*), Ses $q-1$ premières équations constituent un système S′ de $q-1$ équations à $n-1$ variables.

Pour étudier ce système, appelons K_n l'ensemble des fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ seules qui appartiennent à K. K_n est un sous-corps différentiel de K. Désignons respectivement par $(A_1, \ldots, A_r)_K$ et $(A_1, \ldots, A_r)_{K_n}$ les sous-espaces engendrés sur K et sur K_n par des éléments A_j de E, et posons

$$E_n = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_{n-1}}\right)_{K_n}, \qquad E'_n = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_{n-1}}\right)_K.$$

E_n est pseudo-algèbre de Lie sur K_n.

S′ est un système libre sur K, donc *a fortiori* sur K_n. On a de plus, pour $i, j \leqq q-1$, $Z_i \in E_n$, $Z_j \in E_n$, donc $\{Z_i, Z_j\} \in E_n \subset E'_n$. D'autre part, S_2 étant complet,

$$\{Z_i, Z_j\} \in (Z_1, \ldots, Z_{q-1}, Z_q)_K = \left(Z_1, \ldots, Z_{q-1}, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)_K.$$

$\{Z_i, Z_j\}$ a donc les deux expressions

$$\{Z_i, Z_j\} = \sum \theta_m \frac{\partial}{\partial x_m} \qquad (m \leqq n-1;\ \theta_m \in K_n),$$

$$\{Z_i, Z_j\} = \sum_k \lambda_k Z_k + \mu\frac{\partial}{\partial x_n} \qquad (k \leqq q-1;\ \lambda_k, \mu \in K).$$

En exprimant les Z_k en fonction de $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_{n-1}}$, on voit que $\mu = 0$, donc

$$\{Z_i, Z_j\} \in (Z_1, \ldots, Z_{q-1})_K.$$

Je vais montrer que $\{Z_i, Z_j\} \in (Z_1, \ldots, Z_{q-1})_{K_n}$, et par suite que S′ est un système complet à $n-1$ variables.

On a en effet

$$\theta_m = \sum_{k=1}^{q-1}\lambda_k\beta_{km} \qquad (\text{avec } \theta_m, \beta_{km} \in K_n,\ m \leqq n-1;\ \lambda_k \in K).$$

Ce système, définissant d'une manière unique les $q-1$ quantités λ_k, est nécessairement de rang $q-1$, et ces quantités s'expriment rationnellement en fonction des θ_m et β_{km} et par suite appartiennent à K_n,

C. Q. F. D.

S′, système complet de $q-1$ équations à $n-1$ variables est équivalent à un système jacobien de $q-1$ équations à $n-1$ variables [obtenu en prenant dans E_n une base jacobienne de la sous-pseudo-algèbre de Lie $(Z_1, \ldots Z_{q-1})_{K_n}$], et par suite son intégrale générale, d'après l'hypothèse de récurrence, est une fonction arbitraire de $n-q$ fonctions indépendantes des $n-1$ variables $x_1, \ldots, x_{n-1}$. Elle vérifie l'équation $Z_q f = 0$, et par conséquent le système S, et réciproquement. C'est donc l'intégrale générale du système TS, linéairement équivalent à S_2. Il s'ensuit que le système S a pour intégrale générale une fonction arbitraire de $n-q$ fonctions indépendantes.

La théorie ci-dessus fait immédiatement apparaître le procédé pratique classique d'intégration.

APPENDICE.

QUESTIONS A ÉTUDIER.

Tout au long de la théorie des pseudo-algèbres de Lie qui vient d'être exposée se présentent diverses questions dont l'étude serait intéressante.

1. Étude de la structure obtenue en remplaçant l'axiome IV par l'axiome IV *bis* : $\{u, v\}\lambda = u(v\lambda) - v(u\lambda)$.

2. Détermination de toutes les pseudo-algèbres de Lie de dimension 1 sur un corps gauche. Exemples non triviaux.

3. Étant donné un corps commutatif K, une algèbre de Lie N et une sous-pseudo-algèbre de Lie $\overline{E}$ de la pseudo-algèbre de Lie $\mathcal{D}(K)$ des dérivations de K, existe-t-il une pseudo-algèbre de Lie E sur K telle que $E/N \leftarrow\ominus\rightarrow \overline{E}$?

Réponse affirmative pour N de dimension 0 ou 1.

4. Détermination des pseudo-algèbres de Lie de dimension 1 dans le cas inséparable; sur un corps commutatif quelconque.

5. Étude du cas où la caractéristique de K est 2.

6. Étude de la pseudo-algèbre de Lie des transformations différentielles d'un espace vectoriel. Représentation d'une pseudo-algèbre de Lie par des transformations différentielles.