

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

M.-B. GAMBIER

Trisectrices des angles d'un triangle

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 71, n° 2 (1954), p. 191-212

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1954_3_71_2_191_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1954, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

TRISECTRICES

DES ANGLES D'UN TRIANGLE

PAR M.-B. GAMBIER.

1. DÉFINITIONS. HISTORIQUE. BUT DE CE TRAVAIL⁽¹⁾. — Soit ABC un triangle plan; A, B, C, nombres compris entre 0 et π , sont les mesures des angles, au sens de la géométrie élémentaire; posons

$$A_h = A + 2h\pi, \quad B_k = B + 2k\pi, \quad C_l = C + 2l\pi,$$

h, k, l étant égaux chacun à 0, 1 ou 2. Le vecteur \overrightarrow{AB} tournant autour de A en balayant d'abord l'aire ABC peut s'appliquer sur la demi-droite \overrightarrow{AC} par une rotation de valeur absolue A_h ; la rotation de valeur absolue $\frac{1}{3}A_h$ donne la demi-droite $\alpha_{h,B}$, trisectrice de A_h adjacente à AB et, la rotation double, la demi-droite $\alpha_{h,C}$ trisectrice de A_h , adjacente à AC; par permutations circulaires, on définit de même $(\beta_{k,C})$, $(\beta_{k,A})$, puis $(\gamma_{l,A})$, $(\gamma_{l,B})$. Les trisectrices de B_k, C_l adjacentes à BC se coupent au point M_{kl} qui, suivant les valeurs de k, l peut être sur une demi-droite $(\beta_{k,C}), (\gamma_{l,B})$ ou la demi-droite opposée (la figure 1 fournira l'indication précise).

Le Professeur Frank Morley [1], de l'Université Johns Hopkins, a, vers 1900, dans son Cours oral, montré que *le lieu des foyers des cardioïdes tangentes aux côtés du triangle ABC est constitué de neuf droites, parallèles par groupes de trois aux directions moyennes des côtés du triangle*; Morley explique ensuite qu'en menant d'un point B les tangentes $B\alpha, B\beta, B\gamma$ à une cardioïde de foyer M, on a

$$(B\alpha, BM) + (B\beta, BM) + (B\gamma, BM) = 0 \pmod{\pi},$$

⁽¹⁾ La Bibliographie sera donnée en fin de ce travail.

si BC est tangente double, BA tangente simple, on a

$$2(BC, BM) + (BA, BM) = 0,$$

de sorte que BM est trisectrice adjacente à BC de l'un des angles B_k ; si CA est elle-même tangente, M est intersection des supports de $(\beta_{k,c}), (\gamma_{l,b})$. Il existe 9 points M_{kl} , 9 N_{lh} , 9 P_{hk} , en prenant les trisectrices adjacentes à BC, CA, AB. Ces 27 points sont répartis par groupes de six sur neuf droites que nous appellerons droites de Morley et sont sommets de 27 triangles équilatéraux, dont trois ont pour sommets des points M, trois des points N, trois des points P; neuf autres sont du type $M_{kl}N_{lh}P_{hk}$ avec $h + k + l = 0, 3, 6$ et sont de même sens de rotation que ABC; les neuf derniers correspondent à $h + k + l = 2$ ou 5 et sont de sens opposé à ABC.

Ces résultats, à peine esquissés par Morley, furent indiqués vers 1913 aux Professeurs Glanville Taylor et W. L. Marr [2] d'Edimbourg par divers correspondants; les auteurs anglais en jeu ont, dans trois Mémoires consécutifs, étudié en détail la figure de Morley, se bornant aux propriétés des trisectrices, sans s'occuper des cardioïdes, tandis que Morley a, au contraire, indiqué de nombreuses propriétés de tangentes aux cardioïdes, sans presque se soucier des trisectrices et ce n'est qu'en 1933, dans un traité didactique que Morley donne enfin un énoncé abrégé de son théorème. En 1923, Bricard [3] fait connaître en France le résultat de Morley et donne, tout en signalant l'existence des autres triangles équilatéraux, une démonstration, qualifiée par lui-même d'artificielle, relative au triangle équilatéral formé par les trisectrices intérieures; de 1931 à 1939, le Bulletin corporatif *X-Information* [4] a publié de nombreuses démonstrations relatives au triangle intérieur; la lecture de ces articles m'a fait connaître le théorème de Morley et écrire en 1931 et 1937 des articles pédagogiques dans l'*Enseignement Scientifique* [5]; une démonstration due à M. Sasportes, ingénieur au Corps des Mines, m'avait frappé par son élégance et je l'ai exposée au *Bulletin des Sciences Mathématiques*; l'auteur n'avait pas remarqué que son procédé permet d'étudier non seulement le point M_{00} , mais aussi chacun des neuf points M_{kl} et donne, pour chacun d'eux, non seulement un triangle MNP ayant son sommet M confondu avec M_{kl} , mais aussi un nouveau MN_1P_1 , de même sommet M, avec N_1 sur MP et P_1 sur MN; l'objet de ce travail sera de montrer comment ce procédé permet de développer toute cette théorie. Je citerai encore une petite étude du Professeur Marchand [6] de Lausanne, puis une étude puissante de H. Lebesgue [7] où ce dernier étend les résultats aux n -sectrices. Enfin en 1949 j'ai publié dans *Mathesis* une synthèse des résultats connus jusqu'alors, contenus tous dans les Mémoires de Glanville Taylor et Marr; grâce à un résultat inédit qu'un ancien polytechnicien, H. Martiny (promotion 1903), a bien voulu me communiquer, je pourrai présenter la plupart des résultats complémentaires dus aux auteurs anglais sous forme presque totalement géométrique.

2. DIVISION OU MULTIPLICATION DES ANGLES. — Au lieu de partir d'un triangle ABC donné et de diviser ses angles en trois, il est plus simple de donner les points B, C, de choisir un point M du plan et de multiplier par trois les angles (BC, BM), (CB, CM); les symétriques de BC par rapport à BM et CM se coupent en M'; ensuite la symétrique de BM par rapport à BM', de CM par rapport à CM' se coupent en A et le point M est l'un des points M_{kl} du triangle ABC obtenu; la figure 1 indique, suivant les régions, les valeurs de k, l ; les courbes séparatrices

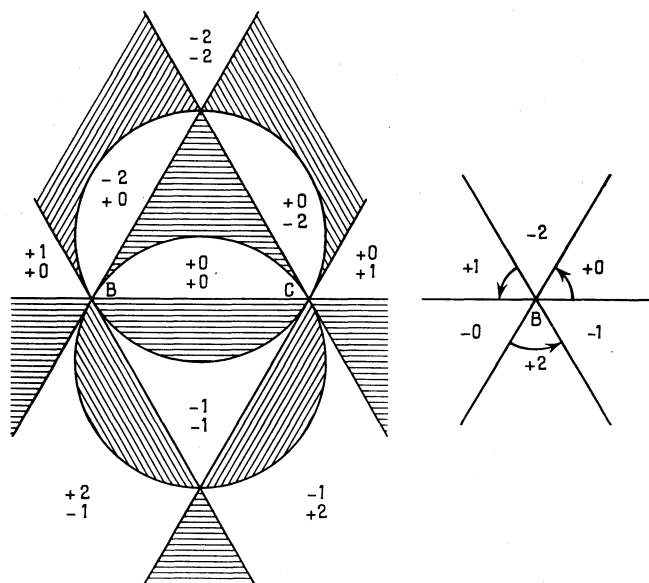


Fig. 1.

sont les cercles issus de B, C, lieux des points d'où le segment BC est vu sous l'angle $\frac{\pi}{3}$ ou $\frac{2\pi}{3}$, et les droites issues de B et C, inclinées sur BC à $\frac{\pi}{3}$ ou $\frac{2\pi}{3}$; si M vient sur l'un des cercles, A est rejeté à l'infini; si M vient sur l'une de ces quatre droites, A est confondu avec B ou C ou indéterminé sur BC. Nous avons figuré BC horizontale, B à gauche de C; les 18 régions obtenues sont deux à deux symétriques par rapport à BC, de sorte que l'on peut se borner aux régions non hachurées; dans chaque région conservée, nous avons indiqué les valeurs de k, l , précédées du signe + (ou -) suivant que M est sur la demi-droite $\beta_{k,c}$ (ou l'opposée) et de même pour $\gamma_{2,A}$ (le nombre k est écrit au-dessus du nombre l); nous avons aussi indiqué à part les trois secteurs balayés par les demi-droites $(\beta_{0,c}), (\beta_{1,c}), (\beta_{2,c})$; quand M est dans l'une des neuf régions conservées, A est dans le demi-plan supérieur et le sens de circulation $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}$ est le sens direct trigonométrique habituel. Pour mémoire, si M est pris sur le cercle de diamètre BC, M' est rejeté à l'infini, mais A est lui aussi sur le

même cercle et cela ne gêne en rien. Nous ferons encore remarquer que la donnée de M , détermine M' , puis A ; le symétrique du vecteur \overrightarrow{BC} par rapport à la droite indéfinie BM donne la direction positive de $\beta_{k,A}$ et le symétrique du vecteur \overrightarrow{BA} par rapport à la droite indéfinie BM' donne la direction positive de $\beta_{k,C}$ sans avoir besoin de recourir à la figure 1.

L'avantage de ce procédé est que, d'un seul coup, nous exposons le procédé de M. Sasportes pour chacun des points M_{kl} , sans avoir besoin, provisoirement,

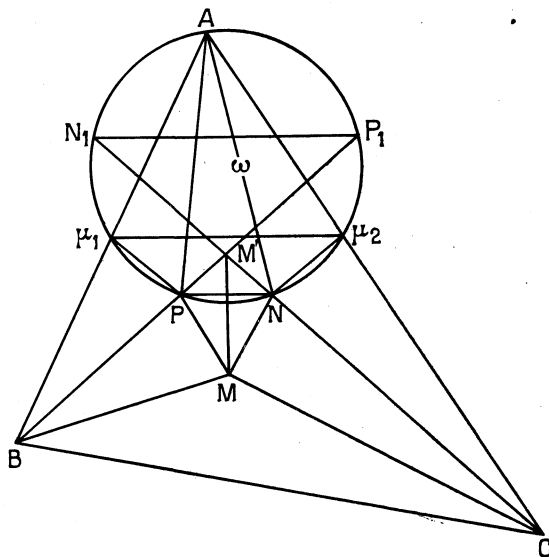


Fig. 2.

d'indiquer la valeur précise des entiers k , l et, qu'au lieu de dessiner une figure contenant les trois points A , B , C , les 27 points M , N , P , les côtés du triangle, les 18 trisectrices, les 9 droites de Morley et un certain nombre de points et droites auxiliaires, nous avons une figure simple ne décourageant pas le lecteur. La figure 2 est dessinée pour le cas où M est $M_{0,0}$, mais le raisonnement reste valable pour l'ensemble des 9 points M_{kl} , grâce au fait que nous employons des droites orientées, donnant des angles définis ($\text{mod } 2\pi$), que nous pourrons ensuite diviser par 2 de façon à obtenir des angles définis ($\text{mod } \pi$). Les notations employées sont celles de Glanville Taylor.

Soit maintenant la remarque essentielle pour ce qui suit : la vraie bissectrice des demi-droites \overrightarrow{BC} , $(\beta_{k,A})$ est le support de $(\beta_{k,C})$ considéré comme droite indéfinie; le cycle de centre M_{kl} et tangent à \overrightarrow{BC} est tangent, non pas à $(\beta_{k,A})$, mais à la demi-droite opposée (résultat qui n'exige pas de savoir si M est sur la demi-droite $\beta_{k,C}$ ou l'opposée); le support de $(\gamma_{l,B})$ est la vraie bissectrice de \overrightarrow{CB}

et $(\gamma_{l,A})$, donc la *fausse bissectrice* de \overrightarrow{BC} et $(\gamma_{l,A})$, de sorte que le cycle en jeu se trouve tangent à $(\gamma_{l,A})$ et à l'opposée de $(\beta_{k,A})$: MM' est la vraie bissectrice de $(\gamma_{l,A})$, $(\beta_{k,A})$. Nous écrivons $(\text{mod } 2\pi)$

$$(1) \quad \begin{cases} (\gamma_{l,A}, \overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{BC}, \beta_{k,A}) = \frac{2}{3}(B_k + C_l), \\ (\gamma_{l,A}, \overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC}, \beta_{k,A}) = (\gamma_{l,A}, \beta_{k,A}) = \pi + \frac{2}{3}(B_k + C_l). \end{cases}$$

En divisant par 2, nous obtenons une égalité $(\text{mod } \pi)$ relative à droites non orientées

$$(2) \quad (\gamma_{l,A}, MM') = (MM', \beta_{k,A}) = \frac{\pi}{2} + \frac{B_k + C_l}{3} \quad (\text{mod } \pi).$$

C'est maintenant que nous faisons la construction indiquée par M. Sasportes (en l'étendant aux deux couples N, P et N_1, P_1 au lieu du seul N, P) : nous menons par M les droites non orientées MNP_1 et MPN_1 définies par

$$(3) \quad (MM', MNP_1) = -\frac{\pi}{6}, \quad (MM', MPN_1) = \frac{\pi}{6} \quad (\text{mod } \pi).$$

La droite MNP_1 rencontre CM' en N et BM' en P_1 ; de même MPN_1 rencontre BM' en P et CM' en N_1 (la suite montre que N, P, N_1, P_1 sont à distance finie). La droite MM' est axe de symétrie pour les droites indéfinies BM', CM' d'une part, puis MNP_1 et MPN_1 de l'autre, pour chacun des couples (P, N) ou (P_1, N_1) ; le triangle MNP est isocèle, et même équilatéral, car on a

$$(4) \quad (\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}) = {}_2(MNP_1, MM') = \frac{\pi}{3} \quad (\text{mod } 2\pi).$$

Ce triangle MNP est de même sens que ABC ; MN_1P_1 est, lui aussi, équilatéral, mais de sens opposé à ABC .

Nous voulons prouver que AN, AP sont les supports de $(\alpha_{h,C}), (\alpha_{h,B})$ où h est un entier à déterminer; de même AN_1, AP_1 les supports de $(\alpha_{h_1,C}), (\alpha_{h_1,B})$, h_1 étant aussi à déterminer.

Le symétrique μ_1 de M par rapport à BM' est sur BA ; les angles $(\mu_1P, \mu_1P_1), (N_1P, N_1P_1)$ sont égaux : le premier est symétrique de (MP, MP_1) , égal à $(\frac{-\pi}{3})$, par rapport à $BPM'P_1$ et le second symétrique du même angle par rapport à la médiatrice de MN_1 ; μ_1, N_1 sont cocycliques avec P, P_1 ; le cercle circonscrit au trapèze isocèle PNP_1N_1 contient μ_1 et aussi μ_2 symétrique de M par rapport à CM' ; $PN, \mu_1\mu_2, N_1P_1$ sont trois cordes parallèles de ce cercle. L'égalité (2), changée de signe, est

$$(2') \quad (BM', MM') = -\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}(B_k + C_l) \quad (\text{mod } \pi)$$

ajoutant (MM', MNP_1) , égal à $\left(\frac{-\pi}{6}\right)$, aux deux membres, on a

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} (BM', MNP_1) &= (P_1P, P_1N) = -\frac{2\pi}{3} - \frac{1}{3}(B + C + 2k\pi + 2l\pi) \pmod{\pi} \\ &= \frac{A}{3} - \frac{2(k+l)\pi}{3} \pmod{\pi}. \end{aligned} \right.$$

Les cordes consécutives μ_1P , PN , $N\mu_2$ sont égales ($\mu_1P = PM$ par symétrie autour de BM' , $N\mu_2 = NM$ par symétrie autour de CM' et MNP est équilatéral); les angles $(P_1\mu_1, P_1P)$, (P_1P, P_1N) , $(P_1N, P_1\mu_2)$ sont égaux et leur somme est égale à A , ou $(A\mu_1, A\mu_2)$, toujours $(\text{mod } \pi)$: donc le point A lui-même est sur le cercle étudié, résultat essentiel. La valeur trouvée pour (P_1P, P_1N) est aussi la valeur commune de $(A\mu_1, AP)$ [ou (AB, AP)], (AP, AN) , $(AN, A\mu_2)$ [ou (AN, AC)], de sorte que AP, AN sont deux trisectrices associées, respectivement adjacentes à AB, AC , d'un certain angle que l'on peut représenter par $A + \lambda\pi$, où λ est un certain entier, indéterminé à un multiple près de 3; on peut donc supposer λ pair, congru $(\text{mod } 1)$ à 0, 2, 4; nous posons $\lambda = 2h$, et nous écrivons

$$(6) \quad (AP, AN) = (P_1P, P_1N) = \frac{A}{3} - \frac{2(k+l)\pi}{3} = \frac{A}{3} + 2h\frac{\pi}{3} \pmod{\pi},$$

d'où résulte que $2(h+k+l)$, donc $h+k+l$, est multiple de 3

$$(7) \quad \boxed{h+k+l \equiv 0 \pmod{3}.}$$

Si, au lieu d'ajouter (MM', MNP_1) aux deux membres de (2'), nous ajoutons (MM', MPN_1) qui est égal à $\left(\frac{\pi}{6}\right)$, on obtient

$$(8) \quad (PP_1, PN_1) = \frac{A}{3} + \frac{\pi}{3} - \frac{2(k+l)\pi}{3}.$$

Les cordes consécutives μ_1P_1 , P_1N_1 , $N_1\mu_2$ sont égales (même raison que précédemment) et puisque A est sur le cercle étudié, on a

$$(A\mu_1, AP_1) = (AP_1, AN_1) = (AN_1, A\mu_2) \pmod{\pi},$$

la valeur commune étant celle de (PP_1, PN_1) ou $\frac{A}{3} + \frac{\pi}{3} - 2(k+l)\frac{\pi}{3}$; la somme de ces angles est égale à $A \pmod{\pi}$, d'où

$$\frac{A}{3} + \frac{\pi}{3} - \frac{2(k+l)\pi}{3} = \frac{A}{3} + 2h_1\frac{\pi}{3};$$

par suite, $2(h_1+k+l) - 1$ est multiple de 3, donc aussi $4(h_1+k+l) - 2$, ou encore $(h_1+k+l) - 2$; on écrit, au lieu de (7),

$$(9) \quad \boxed{h_1+k+l \equiv 2 \pmod{3}.}$$

On voit que l'on peut prendre $h_1 = h + 2 \pmod{3}$.

3. ÉTUDE DES DROITES DE MORLEY. — Le point M étant choisi, la figure 1 indique la valeur des indices k, l ; nous obtenons *rationnellement* d'abord $N_{lh}, P_{hk}, N_{lh_1}, P_{h_1k}$, puis A, puis l'ensemble des points M, N, P restants, puisqu'il suffit de faire tourner chacune des trisectrices déjà connues de $\pm \frac{\pi}{3}$ autour du sommet correspondant.

Un fait, un peu imprévu, est que h, k, l ne peuvent prendre arbitrairement chacun les valeurs 0, 1, 2 et que nous ne trouvons que 18 triangles équilatéraux, correspondant à $h+k+l=0, 3, 6$ d'une part, $h+k+l=2, 5$ de l'autre. Faisons le tableau des neuf triangles de même sens que ABC :

$$(10) \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{ccc} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{array}$$

Il est clair que la relation $h+k+l$ égale à un multiple de 3 est conservée en augmentant chaque entier h, k, l d'une unité (puis le ramenant éventuellement à l'une des valeurs 0, 1, 2) et c'est ainsi que la seconde, puis la troisième ligne se déduisent de la première, chaque colonne contient une triade de triangles que l'on devra toujours associer entre eux : la suite le prouvera.

On forme, de même, les triangles de sens opposé à ABC

$$(11) \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{array}$$

Les triangles de chaque triade verticale seront aussi à associer ensemble.

Le même procédé réussit pour les triangles non équilatéraux qui seront indispensables à étudier et à répartir entre trois triades de triangles associés :

$$(12) \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 0 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{array}$$

Les 27 points M_{kl}, N_{lh}, P_{hk} sont alignés six par six sur neuf droites, dont deux passent par chaque point. Cette proposition fondamentale s'obtient sans effort : chacun des 27 points est sommet commun de deux triangles équilatéraux de Morley, d'espèce différente, ayant en commun les supports des deux côtés issus de ce point : MNP, MN_1P_1 avec N_1 sur MP et P_1 sur MN, de sorte que l'on obtient déjà les alignements MNP_1 et MN_1P . Nous formons le tableau suivant (on peut permuter A, B, C, les lettres M, N, P ou forcer les indices tous d'une unité) :

$$\begin{array}{ccc|ccc} 0 & N_{00}P_{00}M_{00} & 3 & N_{11}P_{11}M_{11} & 6 & N_{22}P_{22}M_{22} \\ 2 & P_{00}M_{02}N_{20} & 2 & P_{11}M_{10}N_{01} & 5 & P_{22}M_{21}N_{12} \\ 3 & M_{02}N_{21}P_{10} & 3 & M_{10}N_{02}P_{21} & 3 & M_{21}N_{10}P_{02} \\ 5 & N_{21}P_{12}M_{22} & 2 & N_{02}P_{20}M_{00} & 2 & N_{10}P_{10}M_{11} \\ 3 & P_{12}M_{20}N_{01} & 3 & P_{20}M_{01}N_{12} & 3 & P_{01}M_{12}N_{20} \\ 2 & M_{20}N_{00}P_{02} & 2 & M_{01}N_{11}P_{10} & 5 & M_{12}N_{22}P_{21} \\ \hline & N_{00}P_{00}M_{00} & & N_{11}P_{11}M_{11} & & N_{22}P_{22}M_{22} \end{array}$$

Prenons la première colonne et la première ligne : le côté $P_{00}N_{00}$ a donné le triangle $P_{00}N_{00}M_{00}$ et sur le côté $P_{00}N_{00}$ nous trouvons M_{02} , sommet du nouveau triangle $P_{00}M_{02}N_{20}$ de genre opposé à $P_{00}M_{00}N_{00}$; on a forcé de deux unités l'indice de M_{00} ; le même procédé permet de déduire de $P_{00}M_{02}N_{20}$ le sommet N_{21} aligné avec P_{00} et M_{02} : cette fois il faut non plus *augmenter* le second indice du dernier sommet N_{20} de deux unités, mais le *diminuer* de deux unités, ou si l'on veut, l'augmenter d'une unité, ce qui donne $M_{02}N_{21}P_{10}$, N_{21} étant aligné avec les sommets déjà inscrits dans les deux premières colonnes; on continue de même en augmentant ou diminuant de deux unités, alternativement le second indice du dernier sommet marqué sur la ligne déjà obtenue; on obtient $N_{21}P_{12}M_{22}$, puis $P_{12}M_{20}N_{01}$, puis $M_{10}N_{00}P_{02}$, et, si nous continuons on retrouve $N_{00}P_{00}M_{00}$, de sorte que *la suite se reproduirait périodiquement de six en six : l'opération est terminée*; la seconde colonne, puis la troisième s'obtiennent en forçant chaque indice d'une unité. Nous avons, dans la première colonne, obtenu les sommets alignés $N_{00}P_{00}M_{02}N_{21}P_{12}M_{20}$ dans l'ordre des permutations circulaires des lettres M, N, P, mais la figure montrera que la disposition topologique est différente. Nous pouvons maintenant former le tableau complet des droites de Morley en rangeant les lettres M, N, P par couples :

$$\Delta \begin{cases} \delta_0 & M_{02}M_{20}N_{00}N_{21}P_{00}P_{12} \\ \delta_1 & M_{10}M_{01}N_{11}N_{02}P_{11}P_{20} \\ \delta_2 & M_{21}M_{12}N_{22}N_{10}P_{22}P_{01} \end{cases} \quad \Delta' \begin{cases} \delta'_0 & N_{02}N_{20}P_{00}P_{21}M_{00}M_{12} \\ \delta'_1 & N_{10}N_{01}P_{11}P_{02}M_{11}M_{20} \\ \delta'_2 & N_{21}N_{12}P_{22}P_{10}M_{22}M_{01} \end{cases}$$

$$\Delta'' \begin{cases} \delta''_0 & P_{02}P_{20}M_{00}M_{21}N_{00}N_{12} \\ \delta''_1 & P_{10}P_{01}M_{11}M_{02}N_{11}N_{20} \\ \delta''_2 & P_{21}P_{12}M_{22}M_{10}N_{22}N_{00} \end{cases}$$

Nous passons de la colonne Δ , à Δ' , puis à Δ'' en permutant circulairement M, N, P sans toucher aux indices.

Les droites d'une même colonne sont parallèles. — En effet $N_{00}P_{00}$, $N_{11}P_{11}$, $N_{22}P_{22}$ sont perpendiculaires à $M_{00}M'_{00}$, $M_{11}M'_{11}$, $M_{22}M'_{22}$ qui sont les bissectrices de couples de trisectrices associées, issues de B et C, adjacentes à BA et CA; quand l'indice augmente d'une unité, ces trisectrices tournent autour de B et C d'un même angle, mais en sens inverse (il s'agit ici des trisectrices *orientées*), de sorte que la bissectrice conserve la même direction. On remarquera que M'_{00} , M'_{11} , M'_{22} sont sur une même hyperbole équilatère dont le centre est le milieu de BC, contenant ces deux points B et C, dont les asymptotes sont parallèles à $M_{00}M'_{00}$ et à la droite perpendiculaire; les points M_{00} , M_{11} , M_{22} sont sur une hyperbole analogue dont les directions asymptotiques sont parallèles aux bissectrices de l'angle $BM_{00}C$.

En ajoutant aux deux membres de (2), (NP, MM') qui est égal à $\frac{\pi}{2}$, on a

$$(NP, MM') + (MM', \beta_{k,A}) = (NP, \beta_{k,A}) = \frac{B_k + C_l}{3} \pmod{\pi}.$$

Ajoutant encore $(B_{k,A}, BC)$ qui est égal à $\left(-\frac{2B_k}{3}\right)$ et changeant les signes,

$$(13) \quad (BC, N_{lk}P_{hk}) = \frac{B_k - C_l}{3} \pmod{\pi}.$$

Or, pour définir *une direction moyenne* δ de BC, CA, AB, on écrit

$$3(Ox, \delta) = (Ox, BC) + (Ox, CA) + (Ox, AB)$$

et, faisant coïncider Ox avec BC, on a

$$(14) \quad 3(BC, \delta) = (BC, CA) + (BC, AB) = B - C \pmod{\pi}.$$

Donc les directions $\Delta, \Delta', \Delta''$ sont les directions moyennes des côtés du triangle ABC.

4. ÉTUDE DES TRIANGLES DE MORLEY. — En lisant avec soin le tableau $\Delta, \Delta', \Delta''$ nous apercevons *trois triangles équilatéraux formés avec les neuf points M.*

$$(15) \quad \begin{cases} M_{00}M_{12}M_{21} : M_{12}M_{21} \text{ sur } \delta_2, & M_{21}M_{00} \text{ sur } \delta_0'', & M_{00}M_{12} \text{ sur } \delta_0'; \\ M_{11}M_{20}M_{02} : M_{20}M_{02} \text{ sur } \delta_0, & M_{02}M_{11} \text{ sur } \delta_1'', & M_{11}M_{20} \text{ sur } \delta_1'; \\ M_{22}M_{01}M_{10} : M_{01}M_{10} \text{ sur } \delta_1, & M_{10}M_{22} \text{ sur } \delta_2'', & M_{22}M_{01} \text{ sur } \delta_2'. \end{cases}$$

C'était évident *a priori*; car on prend les intersections d'un faisceau de trois droites inclinées à $\frac{\pi}{3}$ les unes sur les autres, issues de B, avec un faisceau analogue issu de C; les sommets tels que M_{00}, M_{12}, M_{21} correspondent à des rayons tournant respectivement autour de B, C, dans le même sens, du même angle et chaque côté du triangle est vu de B, ou C sous le même angle, $\frac{\pi}{3}$, de sorte que l'on a un triangle équilatéral; les trois cercles circonscrits se coupent aussi en B, C sous un angle égal à $\frac{\pi}{3}$; deux quelconques de ces triangles admettent B (ou C) comme pôle d'homologie et aussi comme centre de similitude, l'angle de similitude étant aussi égal à $\frac{\pi}{3}$, de sorte que les côtés des triangles sont parallèles deux à deux et que les triangles sont aussi deux à deux homothétiques (homologie particulière dont l'axe est à l'infini). *On a un exemple curieux de trois triangles deux à deux homologues de trois façons différentes.*

Nous devons chercher les axes des homologies. — Pour cela, prenons les deux derniers triangles et écrivons les sommets les uns au-dessus des autres de la façon suivante :

$$(16) \quad \begin{cases} M_{11}M_{20}M_{02}, & M_{11}M_{20}M_{02}, & M_{11}M_{20}M_{02}; \\ M_{22}M_{01}M_{10}, & M_{01}M_{10}M_{22}, & M_{10}M_{22}M_{01}. \end{cases}$$

La première colonne correspond à l'homothétie; pour passer de la première colonne à la seconde, on décale, d'un rang vers la gauche, la seconde ligne

supposée reproduisant périodiquement $M_{22}M_{01}M_{10}M_{22}, \dots$, de sorte que l'on obtient $M_{01}M_{10}M_{22}$; de même pour la troisième colonne, le décalage étant fait cette fois vers la droite. Le tableau $\Delta, \Delta', \Delta''$ fournit alors l'indication des points où se coupent les côtés homologues; ainsi la seconde colonne donne :

$$P_{12} \begin{cases} \delta_0 : M_{20}M_{02}, \\ \delta_2' : M_{10}M_{22}; \end{cases} \quad P_{10} \begin{cases} \delta_1' : M_{02}M_{11}, \\ \delta_2 : M_{22}M_{01}; \end{cases} \quad P_{11} \begin{cases} \delta_1' : M_{11}M_{20}, \\ \delta_1 : M_{01}M_{10}. \end{cases}$$

On a donc l'homologie de pôle C, car le second indice des lettres M est conservé; l'axe est la trisectrice $\alpha_{1,B}$, issue de A, adjacente à AB, relative à l'angle A_1 , puisque le premier indice des P est le même, égal à l'unité.

La dernière association donne :

$$N_{21} \begin{cases} \delta_0 : M_{20}M_{02}, \\ \delta_2' : M_{22}M_{01}; \end{cases} \quad N_{11} \begin{cases} \delta_1' : M_{02}M_{11}, \\ \delta_1 : M_{01}M_{10}; \end{cases} \quad N_{01} \begin{cases} \delta_1' : M_{11}M_{20}, \\ \delta_2' : M_{10}M_{22}. \end{cases}$$

C'est l'homologie de pôle B, d'axe $\alpha_{1,C}$ trisectrice relative à A_1 , mais adjacente à AC.

Nous avons vu que l'on peut forcer tous les indices d'une unité; donc, les triangles $M_{22}M_{01}M_{10}$, $M_{00}M_{12}M_{20}$ admettent B pour pôle d'homologie, avec axe $\alpha_{2,C}$ et C pour pôle, avec axe $\alpha_{2,B}$; les triangles $M_{00}M_{12}M_{20}$ et $M_{11}M_{20}M_{02}$ ont B pour pôle, avec axe $\alpha_{0,C}$, et C pour pôle, avec axe $\alpha_{0,B}$. On fera ensuite les permutations circulaires sur A, B, C, M, N, P sans toucher aux indices.

Nous illustrons cette théorie par une figure d'ensemble (fig. 3) dont les éléments ont été calculés par la trigonométrie; il suffit de donner les résultats suivants se rapportant aux hypothèses : $8R = 10$ (R, rayon du cercle circonscrit), $A = 45^\circ$, $B = 60^\circ$, $C = 75^\circ$. On trouve, avec une table de logarithmes à cinq décimales, sans interpolation

$$\begin{array}{lll} M_{22}P_{21} = 3,291 & M_{22}N_{01} = 3,994 & M_{22}M_{10} = 5,915 \\ M_{22}P_{12} = 6,937 & M_{22}N_{22} = 9,476 & M_{22}N_1 = 4,020 \\ M_{22}P_{10} = 4,517. & & \end{array}$$

J'ai donné ces résultats dans le Mémoire de Mathesis. Il est facile de voir que la disposition topologique des neuf droites de Morley et des 27 points correspondants est toujours la même, avec cette restriction que l'un des points M, N ou P peut changer de côté par rapport à une trisectrice. On peut, en effet, supposer B, C fixes et A variant dans le demi-plan limité par BC et tel que ABC soit parcouru dans le sens direct; A ne doit pas venir sur BC, ne doit pas s'éloigner à l'infini; chacun des points M_{kl} reste dans la région (kl) indiquée par la figure 1, sans jamais venir sur l'une des courbes frontières; l'ensemble des neuf points M_{kl} conserve la même disposition topologique, ainsi que l'ensemble des neuf droites de Morley, puisque par chaque point M_{kl} passent deux de ces droites et que chaque droite contient deux points M; pour la même raison, l'ensemble des neuf points N (ou des neuf points P) conserve la même

disposition; il est impossible qu'un point M, N ou P vienne se confondre avec un point d'espèce différente : en effet, si un point N se confondait avec un point P, on aurait

$$(AP, AN) = 0 = \frac{A}{3} + \lambda \frac{\pi}{3} \pmod{\pi},$$

quels que puissent être les indices l, h du point N, les indices h_1, k_1 du point P

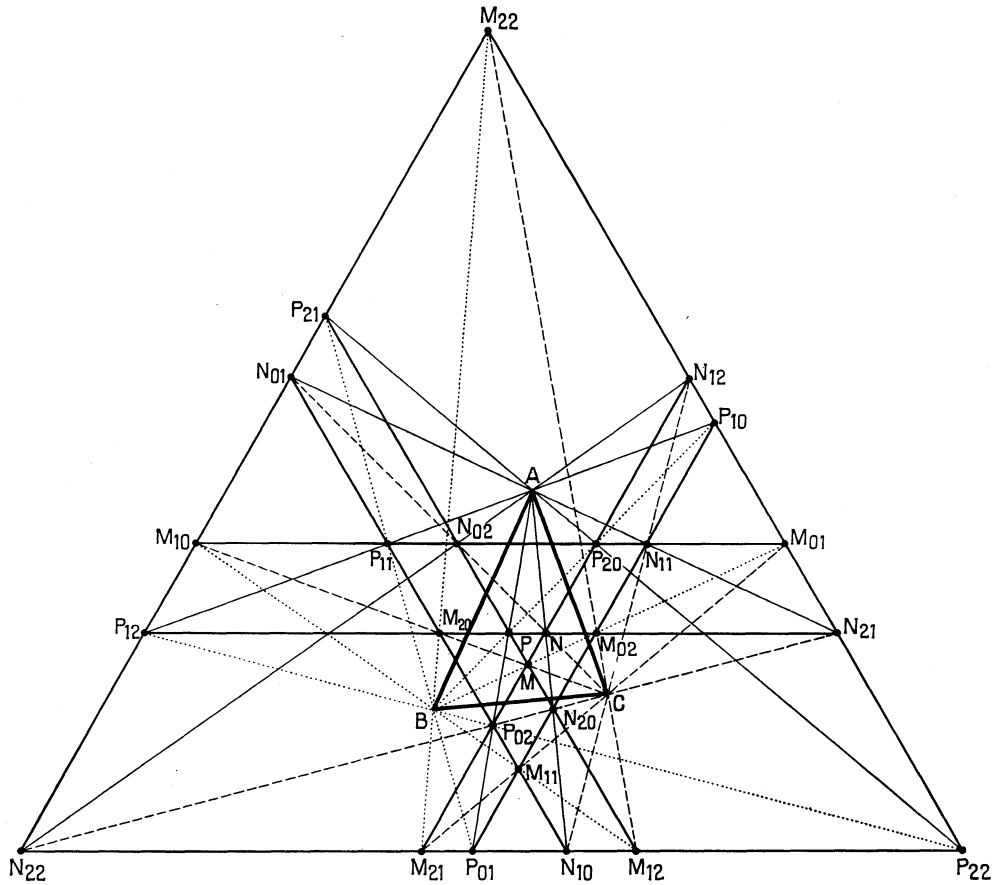


Fig. 3.

en jeu; or $0 < \frac{A}{3} < \frac{\pi}{3}$ sans égalité, de sorte que $\frac{A}{3} + \lambda \frac{\pi}{3}$ ne peut être multiple de $\frac{\pi}{3}$, *a fortiori* de π . Cette discussion n'écarte pas la possibilité pour certaines trisectrices de contenir, accidentellement, un point de Morley autre que les trois qu'elle porte normalement : ainsi, sur la figure 3 que nous avons tracée, la trisectrice $CN_{20}N_{21}N_{22}$ coupe la droite de Morley $N_{12}P_{20}N_{00}M_{00}P_{02}M_{21}$ en un point ν tel que

$$N_{00}\nu = 2, 136, \quad N_{00}P_{02} = 2, 154,$$

de sorte que ν et P_{02} , tout en étant distincts, sont, à l'échelle du dessin, *pratiquement* confondus; si l'on prend toujours $8R = 10$, $A = 45^\circ$, ces deux points ν et P_{02} coïncident si $\hat{C} = 74^\circ 42'$ au lieu de 75° . La disposition du triangle ABC par rapport à l'ensemble des trisectrices change si l'un des angles devient droit; pour $A = \frac{\pi}{2}$, AC, AB sont les supports des trisectrices $(\alpha_{2,B})$, $(\alpha_{2,C})$; pour $A < \frac{\pi}{2}$, les supports de ces trisectrices ne traversent pas l'intérieur de ABC; si $A > \frac{\pi}{2}$, elles le traversent; on voit de même que les supports des trisectrices $(\alpha_{1,B})$, $(\alpha_{1,C})$ ne traversent pas le triangle ABC.

5. LES 27 CERCLES DE M. MARTINY. — La démonstration donnée par M. Sasportes nous a fait étudier pour chaque point M le cercle passant par A et les sommets N, P, N_1 , P_1 des deux triangles de Morley ayant M pour sommet commun. A peu près à la même date, M. Martiny a eu l'idée d'envisager, d'un point de vue différent, l'ensemble des 27 cercles analogues, un pour chaque point M_{kl} , N_{lh} , P_{hk} ; chacun de ces cercles sera désigné pour abrégé par M_{kl} ou N_{lh} ou P_{hk} .

Les neuf cercles qui passent en A sont tangents, par groupes de trois, à trois droites inclinées les unes sur les autres à 60° .

Les six cercles correspondant aux points M, N, P d'une même droite de Morley ont un point commun et, si l'on prend les trois droites de Morley parallèles, les trois points correspondants sont alignés.

Ces points sont les pôles d'homologie d'une triade de triangles non équilatéraux fournis par le tableau (12). On a ainsi trois alignements dont les supports sont concourants.

Un calcul simple, emprunté au travail de Taylor et Marr montrera que ce point de concours est le point de Lemoine du triangle ABC (point inverse du centre de gravité, en adoptant la terminologie de la géométrie du triangle).

Nous avons vu (*fig. 2*) que PN, P_1N_1 , $\mu_1\mu_2$ sont parallèles: la tangente en A au cercle M est antiparallèle, par rapport à AB, AC, de cette direction commune qui est l'une des directions moyennes de BC, CA, AB; donc puisque M_{kl} , $M_{k+1,l+1}$, $M_{k+2,l+2}$ donnent la même direction pour le côté PN correspondant, les cercles correspondants sont tangents entre eux au point A; chaque groupe de trois cercles associés donne la même tangente inclinée à $\pm \frac{\pi}{3}$ sur chacune des deux autres tangentes communes.

D'après la méthode constamment suivie ici, il suffit de raisonner pour une droite de Morley, ensuite de forcer chaque indice d'une unité, et enfin d'effectuer une permutation circulaire. Raisonçons sur (δ_2) qui, située en bordure de

la figure 3, a l'avantage de rendre la lecture plus aisée. Prouvons que N_{10} , N_{22} et P_{22} , P_{01} ont un point commun. L'inversion de pôle M_{11} et de puissance

$$\overline{M_{11}B} \cdot \overline{M_{11}M_{12}} = \overline{M_{11}C} \cdot \overline{M_{11}M_{21}}$$

(car les points $M_{00}M_{12}M_{21}$ sont cocycliques avec B, C), donne les échanges suivants :

N_{10}	ou cercle	$BP_{02}M_{11}P_{01}M_{21}$,	droite CM_{12} qui passe en M_{22} ;
N_{22}	ou cercle	$BP_{21}M_{22}P_{22}M_{12}$,	lui-même; passe en M_{22} ;
P_{01}	ou cercle	$CN_{10}M_{11}N_{20}M_{12}$,	droite BM_{21} qui passe en M_{22} ;
P_{22}	ou cercle	$CM_{21}N_{22}M_{22}N_{12}$,	lui même; passe en M_{22} .

Par conséquent, les quatre cercles en jeu ont en commun un point que nous appellerons provisoirement X_2 , déterminé sur la droite $M_{11}M_{22}$ par les relations

$$(17) \quad \begin{cases} \overline{M_{11}M_{22}} \cdot \overline{M_{11}X_2} = \overline{M_{11}B} \cdot \overline{M_{11}M_{12}} = \overline{M_{11}C} \cdot \overline{M_{11}M_{21}}, \\ \overline{M_{22}M_{11}} \cdot \overline{M_{22}X_2} = \overline{M_{22}B} \cdot \overline{M_{22}M_{21}} = \overline{M_{22}C} \cdot \overline{M_{22}M_{12}}. \end{cases}$$

La seconde ligne (17) est obtenue en prenant l'inversion de pôle M_{22} , dont la puissance est représentée par le second ou troisième membre des égalités en jeu : les cercles qui étaient transformés en droites sont, cette fois, transformés en eux-mêmes, tandis que les deux autres sont transformés en droites, tous les éléments transformés passant par M_{11} .

Nous prenons ensuite les cercles P_{01} , P_{22} et M_{12} , M_{21} et les traitons par le procédé semblable au moyen des inversions de pôle N_{20} et puissance

$$\overline{N_{20}A} \cdot \overline{N_{20}N_{10}} = \overline{N_{20}C} \cdot \overline{N_{20}N_{22}},$$

ou de pôle N_{12} et puissance

$$\overline{N_{12}A} \cdot \overline{N_{12}N_{22}} = \overline{N_{12}C} \cdot \overline{N_{12}N_{10}},$$

les cercles transformés passent tous soit en N_{12} dans le premier cas, soit en N_{20} dans le second; donc les cercles primitifs ont aussi un point commun à eux quatre, qui ne peut être que X_2 déjà obtenu par P_{01} , P_{22} et l'on a ainsi

$$(18) \quad \begin{cases} \overline{N_{12}N_{20}} \cdot \overline{N_{12}X_2} = \overline{N_{12}C} \cdot \overline{N_{12}N_{10}} = \overline{N_{12}A} \cdot \overline{N_{12}N_{22}}, \\ \overline{N_{20}N_{12}} \cdot \overline{N_{20}X_2} = \overline{N_{20}C} \cdot \overline{N_{20}N_{22}} = \overline{N_{20}A} \cdot \overline{N_{20}N_{10}}. \end{cases}$$

L'existence du point X_2 commun aux six cercles est donc démontrée; mais en considérant M_{12} , M_{21} puis N_{10} , N_{22} , nous avons les inversions nouvelles de pôles P_{02} , P_{21} et les égalités

$$(19) \quad \begin{cases} \overline{P_{02}P_{21}} \cdot \overline{P_{02}X_2} = \overline{P_{02}A} \cdot \overline{P_{02}P_{01}} = \overline{P_{02}B} \cdot \overline{P_{02}P_{22}}, \\ \overline{P_{21}P_{02}} \cdot \overline{P_{21}X_2} = \overline{P_{21}A} \cdot \overline{P_{21}P_{22}} = \overline{P_{21}B} \cdot \overline{P_{21}P_{01}}. \end{cases}$$

Les résultats obtenus prouvent que les triangles $M_{11}N_{12}P_{21}$ et $M_{22}N_{20}P_{02}$ sont homologues, X_2 étant centre d'homologie. Ce sont justement deux triangles du

type $M_{kl}N_{lh}P_{hk}$ avec $h + k + l \equiv 1 \pmod{3}$, qui ne sont pas équilatéraux, dont les côtés n'ont pas les droites de Morley pour supports.

En forçant les indices d'une unité, nous dressons le tableau

$$(20) \quad \begin{cases} \delta_0 & M_{02}M_{20}N_{00}N_{21}P_{00}P_{12} & X_0 & M_{11}N_{12}P_{21}; \\ \delta_1 & M_{10}M_{01}N_{11}N_{02}P_{11}P_{20} & X_1 & M_{22}N_{20}P_{02}; \\ \delta_2 & M_{21}M_{12}N_{22}N_{10}P_{22}P_{01} & X_2 & M_{00}N_{01}P_{10}. \end{cases}$$

La première colonne indique trois droites de Morley parallèles; la seconde donne les cercles correspondant aux points M, N, P portés par cette droite; la troisième colonne indique le nom du point commun aux cercles de cette ligne; enfin chaque point X_0, X_1 ou X_2 , est le pôle d'homologie des deux triangles indiqués sur les deux autres lignes.

Il s'agit maintenant de prouver que X_0, X_1, X_2 sont alignés; remarquons que les deux triangles $P_{21}P_{02}N_{01}$ et $N_{12}N_{20}P_{10}$ sont homologues, l'axe d'homologie étant $M_{11}X_2M_{22}$, car $P_{21}P_{02}$ et $N_{12}N_{20}$ se coupent en X_2 , tandis que $P_{21}N_{01}$ et $N_{12}P_{10}$ portés par δ_2'' et δ_2' , se coupent en M_{22} ; de même, $P_{02}N_{01}$ et $N_{20}P_{10}$, portés par δ_1' et δ_1'' , se coupent en M_{11} ; or X_2, M_{11}, M_{22} sont alignés. Par conséquent, les triangles $P_{21}P_{02}P_{10}, N_{12}N_{20}N_{01}$ sont aussi homologues, le centre d'homologie étant le même que pour les deux triangles auxiliaires $P_{21}P_{02}N_{01}$ et $N_{12}N_{20}P_{10}$ que nous venons d'introduire; or, d'après le tableau (20), $P_{02}P_{10}$ et $N_{20}N_{01}$ concourent en X_0 , $P_{10}P_{21}$ et $N_{01}N_{12}$ en X_1 , $P_{21}P_{02}$ et $N_{12}N_{20}$ en X_2 : donc X_0, X_1, X_2 sont alignés sur une droite qui est l'axe d'homologie des trois triangles $M_{11}M_{22}M_{00}, N_{12}N_{20}N_{21}$ et $P_{21}P_{02}P_{10}$.

On a ici un exemple d'un tableau carré

$$(21) \quad \begin{array}{|ccc|c} \hline A & B & C & X \\ \hline A' & B' & C' & X' \\ \hline A'' & B'' & C'' & X'' \\ \hline \alpha & \beta & \gamma & \\ \hline \end{array}$$

tel que deux triangles donnés par deux lignes horizontales soient homologues, le pôle d'homologie étant mis en regard de l'horizontale non utilisée, les points X, X', X'' étant alignés; il en résulte que deux verticales donnent aussi deux triangles homologues, le pôle étant marqué au bas de la verticale non utilisée et alors α, β, γ sont eux-mêmes alignés; la droite $XX'X''$ est l'axe d'homologie commun aux couples de triangles verticaux et la droite $\alpha\beta\gamma$ l'axe commun aux triangles horizontaux.

Par permutations circulaires, nous formons donc le tableau donnant la répartition en triades des neuf triangles MNP non équilatéraux :

$$(22) \quad \begin{array}{|ccc|} \hline M_{00} & N_{01} & P_{10} \\ \hline M_{11} & N_{12} & P_{21} \\ \hline M_{22} & N_{20} & P_{02} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|ccc|} \hline N_{00} & P_{01} & M_{10} \\ \hline N_{11} & P_{12} & M_{21} \\ \hline N_{22} & P_{20} & M_{02} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|ccc|} \hline P_{00} & M_{01} & N_{10} \\ \hline P_{11} & M_{12} & N_{21} \\ \hline P_{22} & M_{20} & N_{02} \\ \hline \end{array}$$

et les points (auxquels nous avons donné des noms provisoires) communs aux droites mises en regard

$$(23) \quad \begin{matrix} \left\{ \begin{matrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{matrix} \right. & \left\{ \begin{matrix} M_{22} M_{00}, \\ N_{20} N_{01}, \\ P_{02} P_{10}; \end{matrix} \right. & \left\{ \begin{matrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{matrix} \right. & \left\{ \begin{matrix} M_{00} M_{11}, \\ N_{01} N_{12}, \\ P_{10} P_{21}; \end{matrix} \right. & \left\{ \begin{matrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{matrix} \right. & \left\{ \begin{matrix} M_{11} M_{22}, \\ N_{12} N_{20}, \\ P_{21} P_{02}; \end{matrix} \right. \\ & \left\{ \begin{matrix} N_{22} N_{00}, \\ P_{20} P_{01}, \\ M_{02} M_{10}; \end{matrix} \right. & \left\{ \begin{matrix} N_{00} N_{11}, \\ P_{01} P_{12}, \\ M_{10} M_{21}; \end{matrix} \right. & \left\{ \begin{matrix} N_{11} N_{22}, \\ P_{12} P_{20}, \\ M_{21} M_{02}; \end{matrix} \right. \\ & \left\{ \begin{matrix} P_{22} P_{00}, \\ M_{20} M_{01}, \\ N_{02} N_{10}; \end{matrix} \right. & \left\{ \begin{matrix} P_{00} P_{11}, \\ M_{01} M_{12}, \\ N_{10} N_{21}; \end{matrix} \right. & \left\{ \begin{matrix} P_{11} P_{22}, \\ M_{12} M_{20}, \\ N_{21} N_{02}. \end{matrix} \right. \end{matrix}$$

Les points $(X_0 X_1 X_2)$, $(Y_0 Y_1 Y_2)$, $(Z_0 Z_1 Z_2)$ sont alignés dans chaque groupe; nous devons remarquer que les droites (M_{hl}) $(M_{k+1, l+1})$ au nombre de neuf ont été toutes obtenues une seule fois; de même les neuf droites (N_{lh}) $(N_{l+1, h+1})$ et les neuf droites (P_{hk}) $(P_{h+1, k+1})$.

Le concours des trois droites $(X_0 X_1 X_2)$, $(Y_0 Y_1 Y_2)$, $(Z_0 Z_1 Z_2)$ sera démontré au paragraphe suivant par un procédé dû à Glanville Taylor.

6. TRIADES DE TRIANGLES HOMOLOGIQUES. — Il est nécessaire d'adopter les notations abrégées indiquées par Taylor : le triangle $M_{hl} N_{lh} P_{hk}$ est défini sans ambiguïté par la notation $[hkl]$; les trois triangles $[hkl]$, $[h+1, k+1, l+1]$, $[h+2, k+2, l+2]$ forment une triade que nous pouvons, sans ambiguïté, représenter par $[\overline{hkl}]$, car augmenter h, k, l d'une unité revient à prendre les mêmes triangles dans un ordre différent. Nous venons de prouver que si $h+k+l$ est égal à 1 ou 4 (autrement dit congru à 1 suivant le module 3) la triade $[\overline{hkl}]$ se compose de trois triangles deux à deux homologues, donnant trois pôles d'homologie alignés, un axe d'homologie commun.

Cette même propriété est évidente si $h+k+l$ est congru à 0 ou 2 suivant le module 3, car nous avons reconnu que les supports de $N_{lh} P_{hk}$, $N_{l+1, h+1} P_{h+1, k+1}$, $N_{l+2, h+2} P_{h+2, k+2}$ sont trois droites de Morley parallèles si $h+k+l$ a la valeur 0, 3, 6, 2, 5, de sorte que nous avons dans la triade trois triangles équilatéraux de côtés respectivement parallèles : l'axe d'homologie commun étant la droite de l'infini, d'où résulte l'alignement des pôles.

Ces considérations simples nous conduisent à étudier les neuf droites $M_{hl} M_{k+1, l+1}$ et les neuf droites analogues pour N ou pour P, car chacune contient trois pôles d'homologie, suivant que le nombre h est choisi de sorte que $h+k+l$ soit congru à 0, 2 ou 1. Pour cela, déterminons les coordonnées trilineaires de M_{hl} et de $M_{k+1, l+1}$ par rapport à ABC, le système étant choisi de sorte que le centre du cercle inscrit ait pour coordonnées (1, 1, 1).

Les coordonnées x, z de M_{kl} sont, en grandeur et signe, proportionnelles à $(\sin \frac{B_k}{3}, \sin \frac{2B_k}{3})$ ou $(1, 2 \cos \frac{B_k}{3})$; pour abrégier, nous posons

$$\alpha_h = \frac{A_h}{3}, \quad \beta_k = \frac{B_k}{3}, \quad \gamma_l = \frac{C_l}{3};$$

pour la valeur absolue du rapport, c'est évident; pour le signe, cela résulte de ce que nous avons expliqué en fin du paragraphe 4 sur la situation de chaque trisectrice par rapport aux côtés correspondants de A, B, C. Nous pouvons donc adopter pour coordonnées x, y, z de M_{kl} les valeurs $(1, 2 \cos \gamma_l, 2 \cos \beta_k)$ et pour coordonnées de M'_{kl} , point inverse de M_{kl} , les valeurs $(2 \cos \beta_k \cos \gamma_l, \cos \beta_k, \cos \gamma_l)$; ceci suffit à prouver que les droites $AM'_{kl}, BN'_{lk}, CP'_{hk}$ concourent en un point de coordonnées $(\cos \alpha_h, \cos \beta_k, \cos \gamma_l)$ que nous représenterons sans ambiguïté par le symbole (hkl) ; le symbole (\overline{hkl}) représentera sans ambiguïté la triade correspondant à h, k, l puis $h+1, k+1, l+1$, et enfin $h+2, k+2, l+2$. Le résultat est que la triade (\overline{hkl}) représente, dans un certain ordre, l'ensemble des pôles d'homologie alignés de la triade $[\overline{hkl}]$.

Ces propriétés sont simples à démontrer si l'on remarque que la nullité des déterminants

$$\begin{vmatrix} \cos \lambda & \cos \mu & \cos \nu \\ \cos \lambda & \cos \mu & \cos \nu \\ \sin \lambda & \sin \mu & \sin \nu \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} \sin \lambda & \sin \mu & \sin \nu \\ \cos \lambda & \cos \mu & \cos \nu \\ \sin \lambda & \sin \mu & \sin \nu \end{vmatrix}$$

prouve que la droite d'équation

$$x \sin(\mu - \nu) + y \sin(\nu - \lambda) + z \sin(\lambda - \mu) = 0$$

est celle qui réunit les points $(\cos \lambda, \cos \mu, \cos \nu)$, $(\sin \lambda, \sin \mu, \sin \nu)$; le point général de cette droite peut être représenté par les coordonnées paramétriques $[\cos(\lambda + t), \cos(\mu + t), \cos(\nu + t)]$ ou $[\sin(\lambda + t'), \sin(\mu + t'), \sin(\nu + t')]$ (il suffit de remplacer t par $t' + \frac{\pi}{2}$ pour obtenir les nouvelles expressions); deux valeurs de t différentes (non congrues suivant le module π suffisent pour indiquer la droite correspondant à λ, μ, ν).

D'après leur définition, chaque droite AM'_{kl} contient les trois points (h, k, l) , $(h+1, k, l)$, $(h+2, k, l)$: les neuf droites obtenues en faisant varier k, l épuisent l'ensemble des 27 points; même remarque pour BN'_{lk}, CP'_{hk} .

Considérons maintenant les neuf droites $M_{kl}, M_{k+1, l+1}$ que les triades $[\overline{hkl}]$ nous ont conduit à étudier. On peut prendre pour coordonnées de M_{kl} , $[\cos(\frac{-\pi}{3}), \cos \gamma_l, \cos \beta_k]$ et pour celles de $M_{k+1, l+1}$, $[\cos(\frac{\pi}{3}), \cos(\gamma_l + \frac{2\pi}{3}), \cos(\beta_k + \frac{2\pi}{3})]$, de sorte que l'on a augmenté chaque angle relatif à M_{kl} de la

quantité $\frac{2\pi}{3}$ pour passer de M_{kl} à $M_{k+1, l+1}$; dans ces conditions l'équation de la droite $M_{kl}M_{k+1, l+1}$ est $\left[\lambda, \mu, \nu \text{ étant remplacés par } \left(-\frac{\pi}{3}, \gamma_l, \beta_k \right) \right]$

$$(24) \quad x \sin(\gamma_l - \beta_k) + y \sin\left(\beta_k + \frac{\pi}{3}\right) - z \sin\left(\gamma_l + \frac{\pi}{3}\right) = 0.$$

Le point général de cette droite a pour coordonnées, avec une arbitraire t , $\left[\cos\left(\frac{-\pi}{3} + t\right), \cos(\gamma_l + t), \cos(\beta_k + t) \right]$ puisque M_{kl} s'obtient pour $t = 0$, et $M_{k+1, l+1}$ pour $t = \frac{2\pi}{3}$. Montrons que l'on peut choisir les entiers λ, μ, ν et t de sorte que le point général mis en évidence coïncide avec le point $(\cos \alpha_\lambda, \cos \beta_\mu, \cos \gamma_\nu)$ il *suffit* pour cela que l'on ait

$$-\frac{\pi}{3} + t = \alpha_\lambda, \quad \gamma_l + t = -\beta_\mu, \quad \beta_k + t = -\gamma_\nu$$

et ces relations donnent

$$t = \alpha_0 + \frac{\pi}{3} + \frac{2\lambda\pi}{3} = -\beta_0 - \gamma_0 - (l + \mu) \frac{2\pi}{3} = -\beta_0 - \gamma_0 - (k + \nu) \frac{2\pi}{3}.$$

Les membres extrêmes sont égaux si l'on a

$$(25) \quad l + \mu = k + \nu.$$

En remplaçant $\beta_0 + \gamma_0$ par $\frac{\pi}{3} - \alpha_0$, il reste la relation indépendante de t ,

$$(26) \quad 1 + l + \lambda + \mu = 0.$$

On voit que si k, l sont donnés et si λ augmente d'une unité, μ, ν diminueront chacun d'une unité. On en déduit que la droite $M_{kl}M_{k+1, l+1}$ contient les trois points :

$$\boxed{M_{kl}M_{k+1, l+1} : (1, 4-l, 4-k), (2, 3-l, 3-k), (0, 2-l, 2-k).}$$

Par permutations circulaires sur M, N, P et (h, k, l) , on voit les points situés sur les droites suivantes :

$$\boxed{N_{lh}N_{l+1, h+1} : (4-l, 1, 4-h), (3-l, 2, 3-h), (2-l, 0, 2-h),}$$

$$\boxed{P_{hk}P_{h+1, k+1} : (4-k, 4-h, 1), (3-k, 3-h, 1), (2-k, 2-h, 0).}$$

On en déduit le tableau des 27 droites $M_{kl}M_{k+1, l+1}$ ou $N_{lh}N_{l+1, h+1}$ ou $P_{hk}P_{h+1, k+1}$,

tableau qui permet d'obtenir aisément les pôles d'homologie des triangles $[hkl]$ et $[h+1, k+1, l+1]$:

$$(24) \quad \left\{ \begin{array}{lll} M_{00}M_{11} : (111)(200)(022) & N_{00}N_{11} : (111)(020)(202) & P_{00}P_{11} : (111)(002)(220) \\ M_{11}M_{22} : (222)(011)(100) & N_{11}N_{22} : (222)(101)(010) & P_{11}P_{22} : (222)(110)(001) \\ M_{22}M_{00} : (000)(122)(211) & N_{22}N_{00} : (000)(212)(121) & P_{22}P_{00} : (000)(221)(112) \\ M_{01}M_{12} : (101)(220)(012) & N_{01}N_{12} : (110)(022)(201) & P_{01}P_{12} : (011)(202)(120) \\ M_{12}M_{20} : (212)(001)(120) & N_{12}N_{20} : (221)(100)(012) & P_{12}P_{20} : (122)(010)(201) \\ M_{20}M_{01} : (020)(112)(201) & N_{20}N_{01} : (002)(211)(120) & P_{20}P_{01} : (200)(121)(012) \\ M_{02}M_{10} : (121)(210)(002) & N_{02}N_{10} : (112)(021)(200) & P_{02}P_{10} : (211)(102)(020) \\ M_{10}M_{21} : (202)(021)(110) & N_{10}N_{21} : (220)(102)(011) & P_{10}P_{21} : (022)(210)(101) \\ M_{21}M_{02} : (010)(102)(221) & N_{21}N_{02} : (001)(210)(122) & P_{21}P_{02} : (100)(021)(212) \end{array} \right.$$

Avec ce tableau, la détermination du pôle d'homologie des deux triangles $M_{kl}N_{lh}P_{hk}$, $M_{k+1, l+1}N_{l+1, h+1}P_{h+1, k+1}$ se fait en comparant les points associés dans le tableau précédent aux couples M, N, P donnés par ces triangles : un seul point est commun, c'est le pôle. Nous obtenons ainsi pour les triangles non équilatéraux le tableau

$$(25) \quad \left\{ \begin{array}{lll} (100) [100] & (001) [001] & (202) [202] \\ (211) [211] & (112) [112] & (010) [010] \\ (022) [022] & (220) [220] & (121) [121] \end{array} \right.$$

Ici l'indication (hkl) donne le pôle d'homologie des deux triangles indiqués sur les deux autres lignes de la même colonne; pour les deux triangles $M_{11}N_{12}P_{21}$ et $M_{22}N_{20}P_{02}$ représentés par $[211]$ et $[022]$, il suffit de prendre dans le tableau (24) les indicatifs placés en regard de $M_{11}M_{22}$, $N_{12}N_{20}$, $P_{21}P_{02}$ et de voir qu'il n'y a que (100) qui soit commun : la méthode suivie au paragraphe précédent avait permis, géométriquement, de trouver le pôle d'homologie sans préciser les coordonnées; elle n'indiquait pas non plus que les droites joignant ce pôle à A, B, C respectivement sont les droites AM'_{00} , BN'_{01} , CP'_{10} .

On remarquera que dans le tableau (25) les deux symboles (hkl) , $[hkl]$ sont placés côte à côte de sorte que les deux triades (\overline{hkl}) et $[\overline{hkl}]$ ont le même indicatif.

Prenons maintenant les triangles équilatéraux de même sens que ABC, en respectant les triades associées; on trouve par le même procédé le tableau :

$$(26) \quad \left\{ \begin{array}{lll} (222) [000] & (120) [201] & (021) [102] \\ (000) [111] & (201) [012] & (102) [210] \\ (111) [222] & (012) [120] & (210) [021] \end{array} \right.$$

Cette fois-ci les symboles (hkl) et $[hkl]$ sont décalés d'une ligne, tout en restant les mêmes dans leur ensemble.

Pour les triangles équilatéraux de sens opposé à ABC, on trouve un tableau analogue, où le *décalage entre les lignes* (hkl) et $[hkl]$ est fait en sens inverse :

$$(27) \quad \left\{ \begin{array}{lll} (011) & [200] & (212) & [101] & (110) & [002] \\ (122) & [011] & (020) & [212] & (221) & [110] \\ (200) & [122] & (101) & [020] & (002) & [221] \end{array} \right.$$

Finalement nous arrivons à cette conclusion : *chaque triade* $[\overline{hkl}]$ *donne lieu à la triade* (\overline{hkl}) *de pôles d'homologie*. D'après ce qui a été dit plus haut, les trois pôles (hkl) d'une même triade sont alignés sur la droite d'équation

$$(28) \quad x \sin(\beta_k - \gamma_l) + y \sin(\gamma_l - \alpha_h) + z \sin(\alpha_h - \beta_k) = 0.$$

Or, toujours en vertu de la nullité de l'expression

$$\sin \lambda \sin(\mu - \nu) + \sin \mu \sin(\nu - \lambda) + \sin \nu \sin(\lambda - \mu),$$

la droite d'équation

$$x \sin \lambda + y \sin \mu + z \sin \nu = 0$$

passé par le point $[\sin(\mu - \nu), \sin(\nu - \lambda), \sin(\lambda - \mu)]$. Voyons ce que donne ce procédé ici :

$$\begin{aligned} (\gamma_l - \alpha_h) - (\alpha_h - \beta_k) &= \beta_k + \gamma_l - 2\alpha_h = (\beta_k + \gamma_l + \alpha_h) - 3\alpha_h, \\ \sin[(\beta_k + \gamma_l + \alpha_h) - 3\alpha_h] &= \sin[\beta_k + \gamma_l + \alpha_h - A] = \sin\left[\frac{\pi}{3} - A + \frac{2\pi}{3}(h + k + l)\right]. \end{aligned}$$

Si $h + k + l$ prend des valeurs congrues suivant le module 3, ce qui arrive pour les trois triades correspondant à un même tableau (25), (26) ou (27), nous obtenons ce résultat que les trois droites portant les pôles d'homologie relatifs successivement à chaque triade de ce tableau passent toutes les trois par le point de coordonnées

$$\begin{aligned} \sin\left[\frac{\pi}{3} - A + \frac{2\pi}{3}(h + k + l)\right], \quad \sin\left[\frac{\pi}{3} - B + \frac{2\pi}{3}(h + k + l)\right], \\ \sin\left[\frac{\pi}{3} - C + \frac{2\pi}{3}(h + k + l)\right]. \end{aligned}$$

Prenons d'abord les triangles non équilatéraux :

$$h + k + l \equiv 1 \pmod{3};$$

le point de concours obtenu est le point $(\sin A, \sin B, \sin C)$, point de Lemoine qui est le point inverse du centre de gravité du triangle ABC (rappelons que le centre de gravité a des coordonnées que l'on peut prendre égales aux hauteurs issues de A, B, C, c'est-à-dire $2R \sin B \sin C$, $2R \sin C \sin A$, $2R \sin A \sin B$ et que les inverses de ces coordonnées sont proportionnelles à $\sin A, \sin B, \sin C$).

Les triangles équilatéraux de même sens que ABC :

$$h + k + l \equiv 0 \pmod{3},$$

fournissent le point $\left[\sin\left(A + \frac{2\pi}{3}\right), \sin\left(B + \frac{2\pi}{3}\right), \sin\left(C + \frac{2\pi}{3}\right) \right]$ qui est le point négatif de Hesse; les triangles équilatéraux de sens opposé à ABC,

$$h + k + l \equiv 2 \pmod{3},$$

fournissent le point positif de Hesse $\left[\sin\left(A + \frac{4\pi}{3}\right), \sin\left(B + \frac{4\pi}{3}\right), \sin\left(C + \frac{4\pi}{3}\right) \right]$.

Rappelons pour mémoire que les points de Hesse sont obtenus ainsi : les bissectrices de A coupent BC en deux points (a, a') ; on définit de même (b, b') , puis (c, c') ; les cercles de diamètre aa' , ou bb' , ou cc' ont leurs centres à l'intersection de chaque côté avec la tangente au cercle circonscrit au sommet opposé; ces trois cercles sont orthogonaux au cercle circonscrit, ont leurs centres alignés et se coupent tous trois en deux points alignés avec le centre du cercle circonscrit, inverses par rapport à ce cercle; le point négatif de Hesse est celui qui est extérieur au cercle circonscrit, le point positif celui qui est intérieur; à titre de vérification, si ABC est équilatéral, le point positif coïncide avec le centre du triangle et le point négatif est rejeté à l'infini. D'ailleurs, dans le cas du triangle équilatéral, les trois points (000) , (111) , (222) coïncident avec le centre du triangle.

Les triangles équilatéraux de même sens que ABC ont fourni les trois droites concourantes

$$(29) \quad \begin{cases} x \sin(\beta_0 - \gamma_0) + y \sin(\gamma_0 - \alpha_0) + z \sin(\alpha_0 - \beta_0) = 0, \\ x \sin(\beta_0 - \gamma_1) + y \sin(\gamma_1 - \alpha_2) + z \sin(\alpha_2 - \beta_0) = 0, \\ x \sin(\beta_0 - \gamma_2) + y \sin(\gamma_2 - \alpha_1) + z \sin(\alpha_1 - \beta_0) = 0, \end{cases}$$

inclinaées les unes sur les autres à $+\frac{\pi}{3}$.

Même propriété pour les droites concourantes fournies par les triangles équilatéraux de sens opposé à ABC

$$(30) \quad \begin{cases} x \sin(\beta_0 - \gamma_0) + y \sin(\gamma_0 - \alpha_2) + z \sin(\alpha_2 - \beta_0) = 0, \\ x \sin(\beta_0 - \gamma_1) + y \sin(\gamma_1 - \alpha_1) + z \sin(\alpha_1 - \beta_0) = 0, \\ x \sin(\beta_0 - \gamma_2) + y \sin(\gamma_2 - \alpha_0) + z \sin(\alpha_0 - \beta_0) = 0. \end{cases}$$

Nous avons déjà signalé que u, v, w étant des nombres fixes et t un paramètre variable, le point variable $\sin(u + t), \sin(v + t), \sin(w + t)$ décrit une droite, car ses coordonnées peuvent s'écrire sous la forme $(\sin u + \cos u \operatorname{tg} t, \sin v + \cos v \operatorname{tg} t, \sin w + \cos w \operatorname{tg} t)$ et dépendent alors linéairement du paramètre $\operatorname{tg} t$; la droite en jeu a pour équation

$$x \sin(v - w) + y \sin(w - u) + z \sin(u - v) = 0;$$

donc les trois points trouvés plus haut (Lemoine, Hesse positif ou négatif) sont tous trois sur la droite

$$x \sin(B - C) + y \sin(C - A) + z \sin(A - B) = 0$$

qui contient le centre du cercle circonscrit, lequel est $(\cos A, \cos B, \cos C)$ ou encore $\left[\sin\left(A + \frac{\pi}{2}\right), \sin\left(B + \frac{\pi}{2}\right), \sin\left(C + \frac{\pi}{2}\right) \right]$.

Nous retrouvons ainsi une propriété connue de l'axe de Hesse; la méthode suivie ici montre aussi que le centre du cercle circonscrit et le point de Lemoine sont conjugués par rapport aux deux points de Hesse; en effet les coordonnées de ces points correspondent aux expressions $\left[\sin\left(A + \frac{\pi}{2}\right), \sin\left(B + \frac{\pi}{2}\right), \sin\left(C + \frac{\pi}{2}\right) \right]$, $[\sin A, \sin B, \sin C]$, $\left[\sin\left(A + \frac{2\pi}{3}\right), \sin\left(B + \frac{2\pi}{3}\right), \sin\left(C + \frac{2\pi}{3}\right) \right]$ et $\left[\sin\left(A + \frac{4\pi}{3}\right), \sin\left(B + \frac{4\pi}{3}\right), \sin\left(C + \frac{4\pi}{3}\right) \right]$. Si l'on met ces coordonnées sous la forme $(\sin A + t \cos A, \sin B + t \cos B, \sin C + t \cos C)$ les valeurs de t sont $\left(\infty, 0, \operatorname{tg} \frac{2\pi}{3}, \operatorname{tg} \frac{-2\pi}{3} \right)$, ce qui prouve le résultat.

Nous avons trouvé déjà divers alignements pour les points (hkl) : chaque droite AM'_{kl} porte trois de ces points; de même, chaque droite BN'_{lh} ou CP'_{hk} . Nous avons vu que chaque droite $M_{kl}M_{k+1, l+1}$ contient trois de ces points, et en associant les triangles de la triade $[\overline{hkl}]$, nous avons obtenu des groupes intéressants de points alignés. Nous allons maintenant considérer les trois triangles obtenus par les lignes horizontales du tableau carré

M_{00}	M_{12}	M_{21}
M_{11}	M_{20}	M_{02}
M_{22}	M_{01}	M_{10}

Ces triangles ont leurs côtés correspondants parallèles, de sorte que l'axe d'homologie commun est la droite de l'infini et que les centres de similitude sont alignés; nous avons vu que si nous prenons les triangles obtenus par les colonnes, ils sont deux à deux homologues, les pôles étant alignés sur la droite de l'infini et l'axe d'homologie commun étant la droite contenant les centres de similitude des triangles horizontaux.

Or cette droite est évidemment la médiatrice de BC, car chacun des triangles équilatéraux que nous considérons est inscrit dans un cercle issu de B et C; le centre d'homothétie de deux de ces triangles est en même temps l'un des centres de similitude des cercles circonscrits, et ceci suffit à prouver le résultat.

Pour terminer, donnons l'énumération des divers alignements formés avec trois des 27 points (hkl) :

1° 9 droites AM'_{kl} : sur chacune k, l sont fixes et h prend les valeurs 0, 1, 2; on a ensuite 9 droites BN'_{lh} et 9 droites CP'_{hk} ;

2° 9 droites $M_{kl}M_{k+1, l+1}$ qui interviennent dans l'homologie des triangles de la triade $[\overline{hkl}]$; k, l restant fixes, h prend les valeurs 0, 1, 2; 9 droites analogues $N_{lh}N_{l+1, h+1}$ et 9 droites $P_{hk}P_{h+1, k+1}$;

3° 3 droites portant les pôles d'homologie des triangles de la triade $[hkl]$, avec $h + k + l \equiv 0$; 3 droites analogues avec $h + k + l \equiv 2$; 3 droites analogues avec $h + k + l \equiv 1$ (les congruences sont relatives au module 3). Les 3 droites d'une même série concourent (points de Hesse, points de Lemoine).

Cela fait un total de 63 alignements.

Faisons aussi remarquer qu'avec les notations de Taylor et Marr une droite $ux + vy + wz = 0$ ne peut avoir son équation réduite à la forme

$$x \sin(\mu - \nu) + y \sin(\nu - \lambda) + z \sin(\lambda - \mu) = 0,$$

où λ , μ , ν ne sont des arguments réels que si cette droite ne passe par aucun des centres des cercles tangents aux côtés du triangle ABC et en contient un nombre pair ou nul de chaque côté par rapport à elle.

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] F. MORLEY, *Metric of the plane n-line* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 1, 1900, p. 97-115; t. 8, 1907, p. 14-24).
F. et F. V. MORLEY, *Inversive Geometry*, p. 243.
- [2] F. GLANVILLE TAYLOR et W. L. MARR, *The six trisectors of each of the angles of a triangle* (*Proc. Edinburgh Math. Soc.*, t. 32, 1913, p. 119-132).
F. GLANVILLE TAYLOR, *The relation of Morley's theorem to the Hessian Axis and Circumcentre* (*Ibid.*, t. 32, 1913, p. 132-136).
W. L. MARR, *Morley's trisection theorem, an extension and its relation to the Circles of Apollonius* (*Ibid.*, t. 32, 1913, p. 136-150).
- [3] R. BRICARD, *Nouv. Ann. Math.*, (5), t. 1, 1922, p. 254-258; t. 2, 1923, p. 241-254.
- [4] *X-Information*, avril 1931, mai 1931, mai 1937.
- [5] B. GAMBIER, *Ens. scient.*, juillet 1931, janvier 1932, juillet 1937; *Bull. Sc. Math.*, t. 61, 1937, p. 360-369; *Mathesis*, t. 58, 1949, p. 174-215.
- [6] J. MARCHAND, *Ens. math.*, t. 29, 1930, p. 289-299.
- [7] H. LEBESGUE, *Ens. math.*, t. 38, 1940, p. 39-58.