ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

SHAFIK DOSS

Sur la convergence stochastique dans les espaces uniformes

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 71, nº 1 (1954), p. 87-100

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1954_3_71_1_87_0>

SUR LA

CONVERGENCE STOCHASTIQUE DANS LES ESPACES UNIFORMES

PAR SHAFIK DOSS.

1. INTRODUCTION. — Il est bien connu que les espaces uniformes ([1], chap. II) (1) constituent une généralisation naturelle des espaces métriques.

Plusieurs notions et propriétés attachées aux variables aléatoires numériques, la convergence stochastique notamment, ont été récemment étendues aux variables aléatoires prenant leurs valeurs dans un espace métrique arbitraire [2], [3].

Nous montrons, dans le présent article, que la convergence stochastique peut être, d'une manière naturelle, définie pour les variables aléatoires prenant leurs valeurs dans un espace uniforme.

On introduira :

(i) *la convergence au sens de Bernoulli ou convergence légale;*
(ii) *la convergence en probabilité;*
(iii) *la convergence forte en probabilité;*
(iv) *la convergence presque certaine ou convergence avec la probabilité* 1.

Ces définitions seront données, comme on le fait dans les espaces uniformes, pour une famille arbitraire de variables aléatoires et selon un *filtre*.

On verra que (iii) implique (ii), que (ii) implique (i) mais que, contrairement à ce qui a lieu pour les variables aléatoires numériques, on doit, en général, distinguer entre (iii) et (iv). Deux théorèmes, du type de ceux établis par Kozakiewicz [5], seront donnés pour (ii) et (iii). Le Mémoire se termine

(1) Les nombres entre crochets renvoient à la Bibliographie placée à la fin du Mémoire.

par une généralisation du théorème bien connu selon lequel une suite de variables aléatoires numériques indépendantes diverge avec la probabilité 1 ou converge avec la probabilité 1 vers une constante.

2. Définitions et notations. — On considère une famille de variables aléatoires $X_\tau (= X_{\xi,\tau})$ où X_τ est un élément d'un espace uniforme E, τ un élément d'un ensemble F et ξ un élément de l'ensemble G des *événements élémentaires* [4] sur lequel une mesure (probabilité) P est donnée.

$\mathcal{F}$ désignera un filtre sur F, C un élément du filtre $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}$ sera toujours donné par une famille d'éléments C de $\mathcal{F}$ constituant une base.

L'espace uniforme E sera défini par une famille d'entourages *symétriques* V constituant une base pour le filtre des entourages dans l'espace produit $E \times E$.

Si M est un ensemble quelconque de points de E, son complément par rapport à E sera désigné par M'. Un point de l'espace $E \times E$ sera désigné par (x, y).

$\underset{\xi}{E}(R)$ désignera l'ensemble des valeurs de ξ pour lesquelles la propriété R est vraie. Le symbole $\bigwedge$ signifiera « *pour tout* » et $\bigvee$ signifiera « *il existe* ».

Nous écrivons dans le langage habituel du calcul des probabilités, mais nous utilisons parfois, pour une plus claire compréhension, les notations précédentes.

(i) *Convergence au sens de Bernoulli ou convergence légale.* — La variable X_τ sera dite convergente au sens de Bernoulli vers X, selon le filtre $\mathcal{F}$, si pour tout ensemble A de *continuité* pour la fonction de distribution de X et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $C \in \mathcal{F}$ tel que

$$\tau \in C \quad \text{implique} \quad |P(X_\tau \in A) - P(X \in A)| < \varepsilon.$$

Un ensemble A sera dit *ensemble de continuité* pour la fonction de distribution de X si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entourage V tel que

$$P\{X \in V(A)\} - P\{X \in A\} < \varepsilon \quad \text{et} \quad P\{X \in V(A')\} - P\{X \in A'\} < \varepsilon.$$

Cette définition des ensembles de continuité sera justifiée plus loin (dans 4).

(ii) *Convergence en probabilité.* — On dira que X_τ converge en probabilité vers X, selon le filtre $\mathcal{F}$, si pour tout V et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $C \in \mathcal{F}$ tel que

$$\tau \in C \quad \text{implique} \quad P\{(X, X_\tau) \in V\} > 1 - \varepsilon.$$

On dira que X est la *limite en probabilité* de X_τ, selon le filtre $\mathcal{F}$.

(iii) *Convergence forte en probabilité.* — On dira que X_τ converge fortement en probabilité vers X, selon le filtre $\mathcal{F}$, si pour tout V et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $C \in \mathcal{F}$ tel que

$$P\{X, X_\tau) \in V \text{ pour tout } \tau \in C\} > 1 - \varepsilon.$$

Ceci peut encore s'écrire

$$(\wedge V)(\wedge \varepsilon)(\vee C)\left[\underset{\xi}{\mathrm{PE}}\{(X_\xi, X_{\xi,\tau}) \in V \text{ pour tout } \tau \in C\} > 1 - \varepsilon\right].$$

Il est clair que (iii) implique (ii).

(iv) *Convergence presque certaine ou avec la probabilité* 1. — On dira que X_τ converge avec la probabilité 1 vers X, selon le filtre $\mathcal{F}$, si la probabilité de la convergence (au sens de l'Analyse) de X_τ vers X est égale à 1. Ceci peut s'exprimer comme suit

$$\underset{\xi}{\mathrm{PE}}\{(\wedge V)(\vee C_{\xi,V})[(X_\xi, X_{\xi,\tau}) \in V \text{ pour tout } \tau \in C_{\xi,V}]\} = 1.$$

3. Égalité en probabilité (ou en mesure). — Si X et Y sont tous les deux limites en probabilité de X_τ, selon le filtre $\mathcal{F}$, alors étant donnés V et $\varepsilon > 0$, il existe C' et $C'' \in \mathcal{F}$ tels que

$$\begin{array}{lll} \tau \in C' & \text{implique} & P\{(X, X_\tau) \in V\} > 1 - \varepsilon, \\ \tau \in C'' & \text{implique} & P\{(Y, X_\tau) \in V\} > 1 - \varepsilon. \end{array}$$

Pour $C''' \subset C' \cap C''$, on aura

$$\tau \in C''' \quad \text{implique} \quad P\{(X, Y) \in V^2\} > 1 - 2\varepsilon.$$

ε étant arbitraire, X et Y étant indépendants de τ et les V^2 formant une base pour le filtre des entourages, on en déduit

$$(\wedge V) \quad P\{(X, Y) \in V\} = 1. \tag{3.1}$$

Deux variables X et Y liées par la relation (3.1) seront dites *égales en probabilité ou en mesure*.

Si l'espace uniforme E peut être défini au moyen d'une base dénombrable d'entourages (il est alors métrisable); on peut déduire de (3.1)

$$P\{(\wedge V)[(X, Y) \in V]\} = 1. \tag{3.2}$$

Comme on a affaire à des espaces uniformes *séparés*, on déduit de (3.2) que X et Y sont égaux avec une probabilité égale à 1 ou égaux presque partout. C'est un résultat connu pour les variables aléatoires numériques et pour les variables aléatoires prenant leurs valeurs dans un espace métrique.

Dans le cas général, l'égalité presque partout est une propriété plus stricte que l'égalité en mesure.

4. La convergence en probabilité implique la convergence au sens de Bernoulli [(ii) implique (i)]. On a

$$\{(X_\tau \in A) \cap [(X, X_\tau) \in V]\} \subset [X \in V(A)]$$

et, par suite,

$$P\{X \in V(A)\} \geqq P\{(X_\tau \in A) \cap [(X, X_\tau) \in V]\}.$$

On en déduit

$$P\{X \in V(A)\} \geqq P\{X_\tau \in A\} + P\{(X, X_\tau) \in V\} - 1.$$

Or, si $\varepsilon > 0$ est donné, il existe $C \in \mathcal{F}$ tel que

$$\tau \in C \quad \text{implique} \quad P\{(X, \dot{X}_\tau) \in V\} > 1 - \varepsilon$$

et, par suite,

$$\tau \in C \quad \text{implique} \quad P\{X \in V(A)\} \geqq P\{X_\tau \in A\} - \varepsilon.$$

De même,

$$\tau \in C \quad \text{implique} \quad P\{X \in V(A')\} \geqq P\{X_\tau \in A'\} - \varepsilon.$$

Des deux dernières implications on déduit

$$(4.1) \quad \tau \in C \quad \text{implique} \quad 1 - P\{X \in V(A')\} - \varepsilon \leqq P\{X_\tau \in A\} \leqq P\{X \in V(A)\} + \varepsilon.$$

Si maintenant A est un ensemble de continuité pour la fonction de distribution de X et si V est choisi de telle sorte que

$$\begin{aligned} &P\{X \in V(A)\} < P\{X \in A\} + \varepsilon, \\ &P\{X \in V(A')\} < P\{X \in A'\} + \varepsilon = 1 - P\{X \in A\} + \varepsilon, \end{aligned}$$

on tire de (4.1)

$$\tau \in C \quad \text{implique} \quad P\{X \in A\} - 2\varepsilon \leqq P\{X_\tau \in A\} \leqq P\{X \in A\} + 2\varepsilon.$$

Ceci est bien la convergence au sens de Bernoulli.

Remarques. — 1. $\overline{M}$ designant la fermeture de M, on tire de

$$\overline{A} = \bigcap_V V(A) \quad ([1], \text{chap. II, p. } 94),$$

$$P\{X \in \overline{A}\} \leqq \underset{V}{\text{Borne inf.}}\, P\{X \in V(A)\}.$$

Si A est un ensemble de continuité au sens défini ci-dessus, cette inégalité implique

$$(4.2) \qquad P\{X \in \overline{A}\} = P\{X \in A\}, \qquad P\{X \in \overline{A'}\} = P\{X \in A'\}$$

qui équivaut à

$$(4.3) \qquad P\{X \in i\} = P\{X \in A\} = 1 - P\{X \in j\},$$

où i désigne l'intérieur de A et j l'extérieur de A. L'égalité (4.3) est la définition de la continuité, donnée par Fréchet, pour le cas des variables aléatoires prenant leurs valeurs dans un espace métrique ([3], p. 277).

Inversement, pour tout espace uniforme E dont la structure peut être définie au moyen d'un système dénombrable d'entourages, (4.3) ou (4.2) implique notre définition de la continuité. En effet, il existe dans ce cas un système $V_1 \supset V_2 \supset V_3 \supset \ldots$ d'entourages tels que

$$\overline{A} = \bigcap_n V_n(A)$$

et, par suite, en vertu de l'axiome de continuité de Kolmogoroff [4] ou axiome d'additivité complète,

$$P\{X \in \overline{A}\} = \lim_{n \to \infty} P\{X \in V_n(A)\}.$$

Étant donné $\varepsilon > 0$, il existe donc V_n tel que

$$P\{X \in \bar{A}\} > P\{X \in V_n(A)\} - \varepsilon$$

et l'on déduit de (4.2)

$$P\{X \in V_n(A)\} < P\{X \in A\} + \varepsilon$$

et, de même,

$$P\{X \in V_n(A')\} < P\{X \in A'\} + \varepsilon.$$

2. Si l'on veut que le théorème précédent d'après lequel la convergence en probabilité implique la convergence légale, reste vrai, alors notre définition de la continuité est la plus large possible.

Nous allons montrer, en effet, que si A est tel qu'il existe ε tel que pour tout V,

$$P\{X \in V(A)\} > P\{X \in A\} + \varepsilon;$$

alors il existe un ensemble F, une famille de variables aléatoires X_τ et un filtre $\mathcal{F}$ tels que X_τ converge en probabilité vers X, selon le filtre $\mathcal{F}$ et que l'on ait cependant

$$(\wedge\tau) \quad P\{X_\tau \in A\} > P\{X \in A\} + \varepsilon.$$

L'ensemble F aura pour éléments tous les entourages symétriques V. Soit X une variable aléatoire donnée :

Si $X \in A$, on posera $X_V = X$ pour tout V;

Si $X \bar{\in} A$, on considère V et alors,

— si $X \in V(A)$, on prendra $X_V \in A$ et tel que $(X, X_V) \in V$;

— si $X \bar{\in} V(A)$, on prendra $X_V = X$.

Observons que si $V' \subset V$ et $X \in V'(A)$, on aura $(X, X_{V'}) \in V'$ et, par suite, $(X, X_{V'}) \in V$; de sorte que l'on a toujours

$$V' \subset V \quad \text{implique} \quad (X, X_{V'}) \in V$$

Considérons maintenant le filtre $\mathcal{F}$ dont la base est constituée par les ensembles C_V de points V' satisfaisant à $V' \subset V$. Si V est donné, on aura $(X, X_{V'}) \in V$ pour $V' \subset V$ et, par suite,

$$P\left\{\bigcap_{V' \in C_V} [(X, X_{V'}) \in V]\right\} = 1;$$

on aura donc *a fortiori*,

$$V' \in C_V \quad \text{implique} \quad P\{(X, X_{V'})\} = 1$$

et X_V converge donc en probabilité vers X selon le filtre $\mathcal{F}$.

Par ailleurs, comme on a pour tout V

$$X \in V(A) \quad \text{implique} \quad X_V \in A,$$

on aura

$$P\{X_V \in A\} \geqq P\{X \in V(A)\} > P\{X \in A\} + \varepsilon$$

et l'on n'a pas de convergence, au sens de Bernoulli, selon le filtre $\mathcal{F}$.

5. Critère de Cauchy pour la convergence en probabilité. — Si X_τ converge en probabilité vers X, selon le filtre $\mathcal{F}$, alors étant donnés V et $\varepsilon > 0$, il existe $C \in \mathcal{F}$ tel que

$$(5.1) \qquad \tau \in C \quad \text{implique} \quad P\{(X, X_\tau) \in V\} > 1 - \varepsilon,$$

d'où l'on déduit

$$\tau, \tau' \in C \quad \text{impliquent} \quad P\{(X_\tau, X_{\tau'}) \in V^2\} > 1 - 2\varepsilon.$$

Comme les V^2 forment une base du filtre des entourages, on en déduit qu'étant donnés V et $\varepsilon > 0$ il existe $C \in \mathcal{F}$ tel que

$$(5.2) \qquad \tau, \tau' \in C \quad \text{impliquent} \quad P\{(X_\tau, X_{\tau'}) \in V\} > 1 - \varepsilon.$$

Nous allons montrer maintenant que *si* E *est complet et possède une base dénombrable d'entourages*, alors, *inversement*, (5.2) *implique* (5.1). Ce résultat est connu pour une *suite* X_n de variables aléatoires dans un espace métrique complet ([3], p. 267).

Choisissons une base $V_1, V_2, \ldots$ pour le filtre des entourages satisfaisant à $V_n^2 \subset V_{n-1}$ et une suite $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ de nombres positifs décroissants satisfaisant à $\Sigma\varepsilon_i < \infty$.

Soient $C_1, C_2, \ldots$ des éléments du filtre $\mathcal{F}$ satisfaisant à $C_n \subset C_{n-1}$ et tels que

$$\tau, \tau' \in C_n \quad \text{impliquent} \quad P\{(X_\tau, X_{\tau'}) \in V_n\} > 1 - \varepsilon_n \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

et soit $\tau_n \in C_n$ pour $n = 1, 2, \ldots$. Considérons l'événement

$$Q_n = \bigcap_{s \geqq n} \{(X_{\tau_s}, X_{\tau_{s+1}}) \in V_s\}.$$

On aura

$$P(Q_n) > 1 - \eta_n, \qquad \text{où} \quad \eta_n = \sum_{s \geqq n} \varepsilon_s.$$

Soit $Q_0 = \bigcup_n Q_n$. On aura $P(Q_0) = 1$.

Introduisons maintenant, pour la clarté de l'exposé, l'indice ξ, en observant que tout événement est un ensemble de ξ.

Si $\xi \in Q_0$, il existe n tel que $\xi \in Q_n$ et, si V est donné, on peut choisir n de sorte que $V_{n-1} \subset V$. Il s'ensuit, en vertu de $V_s^2 \subset V_{s-1}$,

$$(X_{\xi,\tau_p}, X_{\xi,\tau_q}) \in V_{n-1} \qquad \text{pour} \quad p, q \geqq n.$$

Mais ceci signifie que les *sections* $\mathcal{C}_{\xi,n} = \{X_{\xi,\tau_n}, X_{\xi,\tau_{n+1}}, \ldots\}$ des suites $\{X_{\xi,\tau_1}, X_{\xi,\tau_2}, \ldots\}$ constituent des bases de filtres de Cauchy $\mathcal{C}_\xi$.

L'espace E étant complet, ces filtres de Cauchy ont des points limites X_ξ définis pour $\xi \in Q_0$ et ces points limites sont tels que pour tout V et tout $\xi \in Q_0$, il correspond n (dépendant de V et de ξ) tel que

$$(X_\xi, X_{\xi,\tau_p}) \in V \qquad \text{pour} \quad p > n.$$

On déduit de ceci et de $P(Q_0) = 1$ qu'étant donnés V et ε il existe N_1 tel que

$$P\left\{\bigcap_{p \geqq N_1} [(X, X_{\tau_p}) \in V]\right\} > 1 - \varepsilon$$

et l'on a donc

$$(5.3) \qquad p \geqq N_1 \quad \text{implique} \quad P\{(X, X_{\tau_p}) \in V\} > 1 - \varepsilon.$$

Choisissons maintenant $V_{N_2} \subset V$ et $N > \max(N_1, N_2)$ tel que $\varepsilon_N < \varepsilon$.

On aura

$$(5.4) \qquad \tau, \tau_p \in C_N \quad \text{impliquent} \quad P\{(X_\tau, X_{\tau_p}) \in V_N\} > 1 - \varepsilon_N > 1 - \varepsilon.$$

Or, comme on a

$$\{[(X_\tau, X_{\tau_p}) \in V_N] \cap [(X, X_{\tau_p}) \in V]\} \subset [X, X_\tau) \in V_N V] \subset [(X, X_\tau) \in V^2],$$

on tire de (5.3) et (5.4)

$$\tau \in C_N \quad \text{implique} \quad P\{(X, X_\tau) \in V^2\} > 1 - 2\varepsilon.$$

Mais ceci est bien la convergence en probabilité, selon le filtre $\mathcal{F}$.

6. Relations entre la convergence forte et la convergence presque partout. — En introduisant la variable ξ, la convergence forte s'exprime par

$$(\text{iii}) \qquad (\wedge V)(\wedge \eta)(\vee C_{V,\eta}) \left[\underset{\xi}{PE} \{(X_\xi, X_{\xi,\tau}) \in V \text{ pour tout } \tau \in C_{V,\eta}\} > 1 - \eta \right]$$

et la convergence presque partout par

$$(\text{iv}) \qquad \underset{\xi}{PE} \{(\wedge V)(\vee C_{\xi,V})[(X_\xi, X_{\xi,\tau}) \in V \text{ pour tout } \tau \in C_{\xi,V}]\} = 1.$$

On va montrer que (iii) *implique* (iv) *quand la base du filtre des entourages est dénombrable* et que (iv) *implique* (iii) *quand la base du filtre* $\mathcal{F}$ *est dénombrable*. Ces deux espèces de convergence sont donc équivalentes quand les bases du filtre $\mathcal{F}$ et du filtre des entourages sont dénombrables.

Supposons que (iii) soit réalisé et posons

$$Q_C^{(V)} = \underset{\xi}{E}\{(X_\xi, X_{\xi,\tau}) \in V \text{ pour tout } \tau \in C\},$$

$$Q_0^{(V)} = \bigcup_C Q_C^{(V)}.$$

On aura

$$P(Q_0^{(V)}) = 1.$$

De plus, pour tout $\xi \in Q_0^{(V)}$, on a

$$(X_\xi, X_{\xi,\tau}) \in V \quad \text{pour tout} \quad \tau \in C_{\xi,V}.$$

Si l'on pose $Q_0 = \bigcap_V Q_0^{(V)}$, alors en supposant que le filtre des entourages soit défini par une base dénombrable, on obtient

$$P(Q_0) = 1.$$

Pour $\xi \in Q_0$, on aura

$$(\wedge V) \quad [(X_\xi, X_{\xi,\tau}) \in V \text{ pour tout } \tau \in C_{\xi,V}];$$

mais ceci est bien (iv)

Inversement, si (iv) est vérifié, on aura, avec les notations précédentes,

$$P(Q_0) = 1$$

et, par suite,

$$(\wedge V) \quad P(Q_0^{(V)}) = 1$$

et cela sans supposer une base dénombrable pour le filtre des entourages.

Si maintenant on suppose que la base du filtre $\mathcal{F}$ soit dénombrable on déduit de

$$P(Q_0^{(V)}) = 1 \qquad \text{et} \qquad Q_0^{(V)} = \bigcup_C Q_C^{(V)}.$$

qu'étant donné $\eta > 0$, il existe un C tel que

$$P(Q_C^{(V)}) > 1 - \eta,$$

et ceci est bien (iii).

7. Condition de Kozakiewicz pour la convergence en probabilité. — On va montrer qu'une condition *nécessaire* pour la convergence en probabilité de X_τ vers X, selon le filtre $\mathcal{F}$ est que quel que soit l'ensemble de continuité A, pour la fonction de distribution de X, on puisse associer à tout $\varepsilon > 0$ un ensemble $C \in \mathcal{F}$ tel que

$$\tau \in C \qquad \text{implique} \quad P\{X \in A\} < P\{(X_\tau \in A) \cap (X \in A)\} + \varepsilon.$$

On montrera aussi que cette condition est *suffisante quand l'espace uniforme est séparable*.

Nécessité. — $\varepsilon > 0$ étant donné et A étant un ensemble de continuité, il existe un V tel que

$$(7.1) \qquad P\{X \in V(A)\} - P\{X \in A\} < \varepsilon.$$

Or on a

$$\{(X_\tau \in A) \cap [(X, X_\tau) \in V]\} \subset \{(X_\tau \in A) \cap [X \in V(A)]\}$$

et, par suite,

$$(7.2) \qquad \begin{aligned} P\{(X_\tau \in A) \cap [X \in V(A)]\} &\geqq P\{(X_\tau \in A) \cap [(X, X_\tau) \in V]\} \\ &\geqq P\{X_\tau \in A\} + P\{(X, X_\tau) \in V\} - 1. \end{aligned}$$

De même,

$$(7.3) \quad \begin{aligned} &P\{(X_\tau \in A) \cap [X \in V(A)]\} \\ &\quad = P\{(X_\tau \in A) \cap (X \in A)\} + P\{(X_\tau \in A) \cap [X \in A' \cap V(A)]\} \\ &\quad \leqq P\{(X_\tau \in A) \cap (X \in A)\} + P\{X \in A' \cap V(A)\} \leqq P\{(X_\tau \in A) \cap (X \in A)\} + \varepsilon \end{aligned}$$

en vertu de (7.1).

On déduit de (7.2) et (7.3)

$$(7.4) \qquad P\{(X_\tau \in A) \cap (X \in A)\} \geqq P\{X_\tau \in A\} + P\{(X, X_\tau) \in V\} - 1 - \varepsilon.$$

De plus, X_τ convergeant en probabilité vers X, selon le filtre $\mathcal{F}$, il existe un $C \in \mathcal{F}$ tel que $\tau \in C$ implique

$$(7.5) \qquad P\{(X, X_\tau) \in V\} > 1 - \varepsilon \quad \text{et} \quad |P\{X_\tau \in A\} - P\{X \in A\}| < \varepsilon;$$

la dernière inégalité étant une conséquence du théorème énoncé dans 6.

On déduit de (7.4) et (7.5)

$$\tau \in C \quad \text{implique} \quad P\{(X_\tau \in A) \cap (X \in A)\} \geqq P\{X \in A\} - 3\varepsilon$$

et ceci démontre la nécessité de la condition énoncée.

Suffisance. — Supposant E séparable, il existe une suite de points $a_1, a_2, \ldots$ tels que

$$(\wedge V) \qquad E = \bigcup_i V(a_i).$$

En remarquant que

$$\{[X \in V(a_i)] \cap [X_\tau \in V(a_i)]\} \subset [(X, X_\tau) \in V^2],$$

on voit que l'on a

$$(7.6) \qquad P\{(X, X_\tau) \in V^2\} \geqq P\left\{\bigcup_{1 \leqq i \leqq r} \left[\big(X \in V(a_i)\big) \cap \big(X_\tau \in V(a_i)\big)\right]\right\}.$$

Si l'on suppose maintenant que V est tel que $V(a_i)$ soit, quel que soit i, un ensemble de continuité pour la fonction de distribution de X et si l'on pose

$$(7.7) \qquad W_1 = V(a_1), \qquad W_2 = V(a_2) \cap W'_1, \qquad W_3 = V(a_3) \cap W'_1 \cap W'_2, \qquad \ldots,$$

les W_i seront disjoints et ils seront aussi ensembles de continuité.

Cela revient, en effet, à montrer que si A et B sont ensembles de continuité, $A \cap B'$ est aussi un tel ensemble. Pour simplifier l'écriture on posera, provisoirement,

$$P(M) = P\{X \in M\}.$$

L'hypothèse étant que

$$\begin{aligned} &P\{V(A)\} - P(A) < \varepsilon, \qquad P\{V(A')\} - P(A') < \varepsilon; \\ &P\{V(B)\} - P(B) < \varepsilon, \qquad P\{V(B')\} - P(B') < \varepsilon, \end{aligned}$$

on va montrer que

$$\begin{aligned} &P\{V(A \cap B')\} - P\{A \cap B'\} < 2\varepsilon, \\ &P\{V(A' \cup B)\} - P\{A' \cup B\} < 2\varepsilon. \end{aligned}$$

On a bien

$$\begin{aligned} P\{V(A \cap B')\} - P\{A \cap B'\} &= P\{[V(A \cap B')] \cap [A' \cup B]\} \\ &\leqq P\{V(A) \cap V(B') \cap (A' \cup B)\} = P\{[V(A) \cap V(B') \cap A'] \cup [V(A) \cap V(B') \cap B]\} \\ &\leqq P\{V(A) \cap A'\} + P\{V(B') \cap B\} < 2\varepsilon; \end{aligned}$$

et, de même,

$$\begin{aligned}
P\{V(A'\cup B)\} - P\{A'\cup B\} &= P\{[V(A'\cup B)]\cap[A\cap B']\} \\
&= P\{[V(A')\cup V(B)]\cap[A\cap B']\} = P\{[V(A')\cap A\cap B']\cup[V(B)\cap A\cap B']\} \\
&\leqq P\{V(A')\cap A\} + P\{V(B)\cap B'\} < 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

Choisissons maintenant r de telle sorte que

$$P\left\{X\in \bigcup_{1\leqq i\leqq r} V(a_i)\right\}\geqq 1-\varepsilon.$$

On aura, en vertu de (7.6) et (7.7),

$$P\{(X, X_\tau)\in V^2\}\geqq\sum_{i=1}^{r} P\{(X\in W_i)\cap(X_\tau\in W_i)\}$$

Les W_i étant des ensembles de continuité, on peut trouver $C\in\mathcal{F}$ tel que

$$\tau\in C \quad \text{implique} \quad P\{(X\in W_i)\cap(X_\tau\in W_i)\}\geqq P\{X\in W_i\}-\frac{\varepsilon}{r} \quad \text{pour} \quad i=1, 2, \ldots, r.$$

On a donc pour $\tau\in C$:

$$\begin{aligned}
P\{(X, X_\tau)\in V^2\} &\geqq \sum_{i=1}^{r} P\{X\in W_i\} - \varepsilon = P\left\{X\in \bigcup_{1\leqq i\leqq r} W_i\right\} - \varepsilon \\
&= P\left\{X\in \bigcup_{1\leqq i\leqq r} V(a_i)\right\} - \varepsilon \geqq 1-2\varepsilon.
\end{aligned}$$

La démonstration sera donc complète si l'on montre qu'à tout V' il correspond $V\subset V'$ tel que, pour tout i, $V(a_i)$ soit ensemble de continuité.

Pour voir cela, on utilisera le fait qu'un espace uniforme peut être défini par une famille saturée *d'écarts* ([1], chap. IX, p. 5). Un entourage V quelconque est défini par une fonction $f(x, y)$ de deux arguments et par un nombre ε. La fonction $f(x, y)$ est telle que

$$f(x, x)=0, \qquad f(x, y)=f(y, x), \qquad 0\leqq f(x, y)\leqq f(x, z)+f(z, y)$$

et V est défini par l'équivalence

$$(x, y)\in V\equiv f(x, y)<\varepsilon \qquad (\equiv \text{ indique l'équivalence}).$$

Soit donc V' défini par f et ε'. On a

$$X\in V'(a_k)\equiv f(a_k, X)<\varepsilon'.$$

De plus, $P\{f(a_k, X)<\varepsilon\}$ étant une fonction non décroissante de ε, il existe, au plus, une infinité dénombrable de valeurs de ε pour lesquelles elle est discontinue. Il y a donc $\eta<\varepsilon'$ tel que

(7.8) $\qquad P\{f(a_k, X)<\varepsilon\}$ est continu pour $\varepsilon=\eta$ quel que soit k.

Si maintenant on définit V par f et η, c'est-à-dire par

$$(x, y)\in V\equiv f(x, y)<\eta,$$

on aura évidemment $V \subset V'$. On va montrer que $V(a_k)$ est un ensemble de continuité quel que soit k.

Il faut montrer qu'étant donné $\lambda > 0$, il existe W tel que

$$P\{X \in WV(a_k)\} - P\{X \in V(a_k)\} < \lambda, \tag{7.9}$$

$$P\Big\{X \in W\big([V(a_k)]'\big)\Big\} - P\{X \in [V(a_k)]'\} < \lambda. \tag{7.10}$$

Définissons W par f et μ. On aura

$$\begin{aligned} X \in WV(a_k) &\equiv (\vee y)[y \in V(a_k) \text{ et } X \in W(y)] \\ &\equiv (\vee y)[f(a_k, y) < \eta \text{ et } f(y, X) < \mu] \end{aligned}$$

et ce dernier événement implique

$$f(a_k, X) < \eta + \mu.$$

On a donc

$$P\{X \in WV(a_k)\} - P\{X \in V(a_k)\} \leqq P\{f(a_k, X) < \eta + \mu\} - P\{f(a_k, X) < \eta\}.$$

Par ailleurs,

$$X \in W\big([V(a_k)]'\big) \equiv (\vee y)[f(a_k, y) \geqq \eta \text{ et } f(y, X) < \mu],$$

et si $\mu < \eta$, ce dernier événement implique $f(a_k, X) > \eta - \mu$ et l'on a

$$P\Big\{X \in W\big([V(a_k)]'\big)\Big\} - P\{X \in [V(a_k)]'\} \leqq P\{f(a_k, X) > \eta - \mu\} - P\{f(a_k, X) \geqq \eta\}.$$

On voit donc, en vertu de (7.8), que si μ est pris suffisamment petit, les conditions (7.9) et (7.10) seront satisfaites.

8. Condition de Kozakiewicz pour la convergence forte. — X_C désignant l'ensemble des valeurs de X_τ pour $\tau \in C$, on va montrer qu'une condition *nécessaire* pour la convergence forte de X_τ vers X, selon le filtre $\mathcal{F}$, est que

$$(\wedge V)(\wedge A)(\wedge \varepsilon)(\vee C)[P\{(X \in A) \cap [X_C \subset V(A)]\} > P\{X \in A\} - \varepsilon]$$

et que, *si l'espace* E *est séparable, cette condition est aussi suffisante.*

Nécessité. — Comme

$$\{(X \in A) \cap [(X, X_\tau) \in V \text{ pour tout } \tau \in C]\} \subset \{(X \in A) \cap [X_C \subset V(A)]\},$$

on aura

$$\begin{aligned} P\{(X \in A) \cap [X_C \subset V(A)]\} &\geqq P\{(X \in A) \cap [(X, X_\tau) \in V \text{ pour tout } \tau \in C]\} \\ &\geqq P\{X \in A\} + P\{(X, X_\tau) \in V \text{ pour tout } \tau \in C\} - 1 \geqq P\{X \in A\} - \varepsilon \end{aligned}$$

si C est tel que (iii) soit vérifié.

Ceci montre que la condition est nécessaire.

Suffisance. — L'espace E étant séparable, soit $a_1, a_2, \ldots$ une suite de points partout dense dans E. On aura

$$(\wedge V) \quad E = \bigcup_i V(a_i).$$

Introduisons maintenant les W_i définis par (7.7) et considérons les événements

$$S_k \equiv [X \in V(a_k)] \cap [X_\tau \in V^2(a_k) \text{ pour tout } \tau \in C] \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$
$$\Sigma_k \equiv [X \in W_k] \cap [X_\tau \in V(W_k) \quad \text{pour tout } \tau \in C] \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Les W_k sont disjoints, les Σ_k sont incompatibles et $\Sigma_k \subset S_k$. De plus,

$$\bigcup_{1 \leq k \leq n} S_k \subset \{(X, X_\tau) \in V^3 \text{ pour tout } \tau \in C\}$$

et l'on peut, à tout $\varepsilon > 0$, faire correspondre n de telle sorte que

$$P\left\{X \in \bigcup_{1 \leq k \leq n} W_k\right\} > 1 - \varepsilon.$$

On aura

$$P\{(X, X_\tau) \in V^3 \text{ pour tout } \tau \in C\} \geq P\left\{\bigcup_{1 \leq k \leq n} S_k\right\} \geq P\left\{\bigcup_{1 \leq k \leq n} \Sigma_k\right\} = \sum_{k=1}^{n} P(\Sigma_k).$$

Mais il existe, par hypothèse, $C \in \mathcal{F}$ tel que

$$\sum_{k=1}^{n} P(\Sigma_k) > \sum_{k=1}^{n} P\{X \in W_k\} - \varepsilon = P\left\{X \in \bigcup_{1 \leq k \leq n} W_k\right\} - \varepsilon > 1 - 2\varepsilon.$$

Comme les V^3 constituent un système fondamental d'entourages, on voit que la condition est suffisante.

Remarques. — 1. Quand $\mathcal{F}$ est le *filtre de Fréchet*, c'est-à-dire quand on a affaire à une *suite* de variables aléatoires, la condition donnée s'écrit

$$(\wedge V)(\wedge A) \lim_{n \to \infty} \lim_{m \to \infty} P\{(X \in A) \cap [X_s \in V(A) \text{ pour } n \leq s \leq m]\} = P\{X \in A\}.$$

2. La convergence forte et la convergence presque partout étant équivalentes quand le filtre des entourages et le filtre $\mathcal{F}$ ont des bases dénombrables, on obtient, dans ce cas, une condition nécessaire et, dans certains cas, suffisante pour la convergence presque partout.

9. Un théorème sur la convergence d'une suite de variables aléatoires indépendantes. — Si E est *séparable* et *complet* et si $\{X_n\}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes alors l'un des deux cas suivants, qui s'excluent mutuellement, doit avoir lieu :

(A) $$(\vee V)\left[\underset{\xi}{PE}\{(\vee N_\xi)[(X_{\xi,n}, X_{\xi,m}) \in V \text{ pour tous les } n, m > N_\xi]\} = 0\right],$$

(B) $$(\vee b)(\wedge V)\left[\underset{\xi}{PE}\{(\vee N_\xi)[(b, X_{\xi,n}) \in V \text{ pour tout } n > N_\xi\} = 1\right].$$

Le cas (A) implique la divergence presque partout. On l'appellera *divergence forte*. Le cas (B) est équivalent à la *convergence forte* de X_n vers l'élément constant b. On peut donc énoncer le théorème comme suit :

X_n *diverge fortement ou bien il converge fortement vers une constante.*

Quand la base du filtre des entourages est dénombrable, (B) est équivalent à la convergence presque partout vers une constante. On obtient, dans ce cas, une généralisation directe d'un théorème connu dans la théorie des variables aléatoires numériques ([2], p. 268). Cette généralisation n'avait pas encore été donnée pour les variables aléatoires situées dans un espace métrique.

Démonstration. — La constante a et l'entourage V étant donnés, les événements $(a, X_n) \in V$ sont indépendants et, par suite,

$$P\{(\vee N)[(a, X_n) \in V \text{ pour tout } n > N]\} = 0 \text{ ou } 1,$$

d'après le théorème de Borel-Cantelli.

S'il existe V tel que cette probabilité soit nulle quel que soit a, on est dans le cas (A).

En effet, si (A) n'était pas satisfait, on aurait

$$(\wedge V)\Big[\underset{\xi}{PE}\{(\vee N_\xi)[(X_{\xi,n}, X_{\xi,m}) \in V \text{ pour tous les } n, m > N_\xi]\} = \omega_V > 0\Big]$$

et, par suite,

$$(9.1) \qquad (\wedge V)(\vee N)\Big[\underset{\xi}{PE}\{(X_{\xi,n}, X_{\xi,m}) \in V \text{ pour tous les } n, m > N\} = \omega'_V > 0\Big],$$

où $N(=N_V)$ est indépendant de ξ.

Nous allons montrer qu'il existe alors a_V tel que

$$(9.2) \qquad (\wedge V)\Big[\underset{\xi}{PE}\{(\vee N_\xi)[(a_V, X_{\xi,p}) \in V \text{ pour tout } p > N_\xi]\} > 0\Big],$$

ce qui contredit l'hypothèse faite ci-dessus.

Soit donc $\{a_i\}$ une suite de points partout dense dans E, on aura

$$(\wedge V) \quad E = \bigcup V(a_i).$$

Si l'on fixe $n > N$ dans la formule (9.1), on peut trouver a_{i_ξ} tel que

$$(a_{i_\xi}, X_{\xi,n}) \in V$$

et l'on aura $P(Q_0) = \omega' \geqq \omega'_V > 0$, où

$$(9.3) \qquad Q_0 = \underset{\xi}{E}\{(a_{i_\xi}, X_{\xi,m}) \in V^2 \text{ pour tout } m > N\}.$$

De plus, si l'on considère

$$Q_i = \underset{\xi}{E}\{(a_i, X_{\xi,m}) \in V^2 \text{ pour tout } m > N\},$$

alors, comme tout a_{i_ξ} est un a_i, on voit que tout $\xi \in Q_0$ appartient à un Q_i et, par suite, l'un des Q_i, au moins, a une mesure positive et (9.2) est, par suite, vérifiée. On est bien dans le cas (A).

On sera dans le cas (B) si l'hypothèse faite ci-dessus n'est pas satisfaite, c'est-à-dire si

$$(9.4) \qquad (\wedge V)(\vee a_V)\Big[\underset{\xi}{\mathrm{PE}}\{(\vee N_\xi)[(a_V, X_{\xi,n}) \in V \text{ pour tout } n > N_\xi]\} = 1\Big].$$

Or, si $a_{V'}$ et $a_{V''}$ correspondent, par (9.4), à $V' \subset V$ et $V'' \subset V$ respectivement, il y aura $X_{\xi,n}$ tel que $(a_{V'}, X_{\xi,n}) \in V'$ et $(a_{V''}, X_{\xi,n}) \in V''$ et, par suite,

$$(a_{V'}, a_{V''}) \in V^2.$$

Utilisons maintenant l'hypothèse que E soit complet et considérons le filtre $\mathcal{F}$ dont la base est composée des ensembles C_V formés des éléments $a_{V'}$ où $V' \subset V$. Ces ensembles forment bien la base d'un filtre, car $C_{V_1 \cap V_2} \subset C_{V_1} \cap C_{V_2}$.

Comme $(a_{V'}, a_{V''}) \in V^2$ pour $V' \subset V$ et $V'' \subset V$, on a $C_V \times C_V \subset V^2$, ce qui veut dire que $\mathcal{F}$ est un filtre de Cauchy. Il a, par conséquent, un point limite b. Ce point est tel que pour tout V il existe $C_{V'} \subset V(b)$ et l'on a, par suite, $(b, a_{V'}) \in V$. On peut toujours prendre $V' \subset V$ et comme

$$\underset{\xi}{\mathrm{PE}}\{(\vee N_\xi)[(a_{V'}, X_{\xi,n}) \in V' \text{ pour tout } n > N_\xi]\} = 1,$$

on en tire

$$\underset{\xi}{\mathrm{PE}}\{(\vee N_\xi)[(b, X_{\xi,n}) \in V^2 \text{ pour tout } n > N_\xi]\} = 1,$$

et enfin, les V^2 formant une base,

$$(\vee b)(\wedge V)\Big[\underset{\xi}{\mathrm{PE}}\{(\vee N_\xi)[(b, X_{\xi,n}) \in V \text{ pour tout } n > N_\xi]\} = 1\Big].$$

Ceci est bien (B) et la démonstration est ainsi achevée.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Bourbaki, *Les structures fondamentales de l'analyse*, t. 3; *Topologie générale*, Paris, Hermann, 1940.

[2] M. Fréchet, *Généralités sur les Probabilités. Éléments aléatoires*, 2e éd., Paris, Gauthier-Villars, 1950.

[3] M. Fréchet, *Les éléments aléatoires de nature quelconque dans un espace distancié* (*Ann. Inst. H. Poincaré*, t. X, vol. IV, p. 215-320).

[4] A. Kolmogoroff, *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Berlin, Springer, 1933.

[5] Kozakiewicz, *Sur les conditions nécessaires et suffisantes pour la convergence stochastique* (*Fund. Math.*, t. XXXI, 1938, p. 160-178).