ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

MAURICE FRÉCHET

Les surfaces dérivables relativement à une règle de multiplication

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 71, no 1 (1954), p. 29-85
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1954_3_71_1_29_0>

LES SURFACES DÉRIVABLES
RELATIVEMENT A UNE RÈGLE DE MULTIPLICATION

PAR M. MAURICE FRÉCHET

INTRODUCTION

Dans une série de Notes et de Mémoires commencée en 1952, nous avons utilisé la notion de nombres hypercomplexes pour donner une définition générale (1) de la dérivabilité (à distinguer de la différentiabilité) des fonctions hypercomplexes à n dimensions d'une variable hypercomplexe à n dimensions.

Ces fonctions dérivables possèdent un certain nombre de propriétés (2) des fonctions analytiques classiques à deux dimensions d'une variable complexe à deux dimensions. Le nombre de ces propriétés communes s'est accru quand nous avons distingué parmi les fonctions dérivables, les fonctions que nous avons appelées « paraanalytiques » (2).

Tout ceci était basé sur la règle classique de multiplication hypercomplexe où n'interviennent que des nombres hypercomplexes *à un même nombre* de dimensions.

Or les résultats obtenus nous ont encouragé à considérer plus généralement le cas où le nombre n de dimensions de la fonction hypercomplexe $\Phi(w)$ est

---

(1) *Les fonctions paraanalytiques à n dimensions* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 236, 1953, p. 1832-1834).

(2) *Propriétés des fonctions paraanalytiques à n dimensions* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 236, 1953, p. 2191-2194); *Formes canoniques des fonctions paraanalytiques à deux et à trois dimensions* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 236, 1953, p. 2364-2366).

Les Notes précédentes ont été développées dans trois Mémoires :

Determinado de la plej ĝeneralaj planaj paraanalitikaj funkcioj (*Annali di Matematica*, t. XXXV, 1953, p. 255-258).

La paraanalitikaj funkcioj en n dimensioj (*J. Reine u. Angew. Math.*, 1954).

La kanonaj formoj de la 2, 3, 4 dimensiaj paraanalitikaj funkcioj (rédigé, à paraître).

différent du nombre de dimensions de la variable hypercomplexe w. Ce qui conduit naturellement à une règle de multiplication hypercomplexe plus générale que la règle classique.

Il y avait un intérêt analytique évident à s'assurer si au moins quelques-unes des propriétés obtenues quand $n=p$ subsistent sans trop de modification quand $n\neq p$. Et, malgré la disparition de certaines propriétés, c'est ce que l'on constate en effet. Mais — au moins dans le présent Mémoire — nous nous sommes surtout intéressé à l'*interprétation géométrique* des résultats, interprétation notablement différente quand $n=p$ et quand $n\neq p$.

On peut employer, dans le cas général, un *langage* géométrique emprunté à la théorie des espaces à n et à p dimensions. Mais le cas de beaucoup le plus intéressant est celui où $n=3$ et $p=2$, cas où *toute fonction hypercomplexe correspond à une représentation paramétrique d'une surface de la géométrie classique*. C'est donc ce cas que nous avons examiné plus particulièrement au cours de deux Mémoires (3) dont celui-ci est le second.

Afin d'en rendre la lecture indépendante du Mémoire préliminaire (4), nous rappellerons dans la suite les résultats de celui-ci.

Le présent Mémoire est divisé en deux parties : *Exposé analytique, Interprétation géométrique*.

PREMIÈRE PARTIE

Exposé analytique.

Fonction hypercomplexe dérivable relativement à une règle de multiplication.

Notation. — La généralisation au cas où n et p sont des entiers quelconques, de notre définition antérieurement donnée dans le cas où $n=p$, est immédiate.

Soient $e_1, e_2, \ldots, e_p$ des vecteurs unitaires portés sur p axes ; $f_1, f_2, \ldots, f_n$ des vecteurs unitaires portés sur n axes.

$$w = x_1 e_1 + \ldots + x_p e_p, \tag{1}$$

$$W = X_1 f_1 + \ldots + X_n f_n. \tag{2}$$

W sera une fonction $\Phi(w)$ de w quand $X_1, \ldots, X_n$ seront des fonctions de $x_1, \ldots, x_p$.

---

(3) Ces deux Mémoires sont le développement des deux Notes suivantes :

Les fonctions hypercomplexes à n dimensions d'une variable hypercomplexe à p dimensions (*C. R. Acad. Sc.*, t. 237, 1953, p. 1053-1055).

Sur les surfaces dérivables relativement à une règle de multiplication hypercomplexe (*C. R. Acad. Sc.*, t. 238, 1954, p. 633-636).

(4) *Les surfaces dérivables relativement à une règle de multiplication* (en deux Mémoires). Mémoire préliminaire : *Sur certains systèmes d'équation aux dérivées partielles et sur certaines familles de surfaces* (*Verhandelingen koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen*, 1954).

Nous allons *distinguer les notions de dérivabilité et de différentiabilité* de la manière suivante.

DIFFÉRENTIABILITÉ. — Conformément à notre définition générale de la différentiabilité dans les espaces de Banach-Wiener-Hahn [1], nous dirons que $\Phi(w)$ *est différentiable pour*

$$w = w_0 = \sum_r x_{r_0} e_r$$

s'il existe une fonctionnelle linéaire $\mathcal{L}(\Delta w)$ de Δw (dans le même espace que $\Phi(w)$, c'est-à-dire que

$$\mathcal{L}(\Delta w) = \sum_k \mathcal{L}_k(\Delta w) f_k,$$

où $\mathcal{L}_k(\Delta w)$ est une fonctionnelle linéaire de Δw), telle que

$$\boxed{\Delta\Phi(w) - \mathcal{L}(\Delta w) = \|\Delta w\| \varepsilon,} \tag{3}$$

où $\|\Delta w\|$ est une norme de Δw, par exemple :

$$\|\Delta w\| = \sqrt{\sum_r (\Delta x_r)^2},$$

ou

$$\|\Delta w\| = \sum_r |\Delta x_r|,$$

ou

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et où

$$\|\varepsilon\| \to 0, \qquad \text{avec} \quad \|\Delta w\|.$$

Et alors nous dirons que $\mathcal{L}(\Delta w)$, *est la différentielle* $d\Phi$ de $\Phi(w)$ pour $w = w_0$.

Le premier membre de (3) est de la forme

$$\Sigma[\Delta X_k - \mathcal{L}_k(\Delta w)] f_k,$$

Donc

$$\varepsilon = \Sigma\, \varepsilon_k f_k,$$

avec

$$\left\{\begin{array}{l} \Delta X_k - \mathcal{L}_k(\Delta w) = \varepsilon_k \|\Delta w\| \\ \text{où} \quad \lim\limits_{\|\Delta w\| \to 0} \varepsilon_k = 0 \\ \text{et où } \mathcal{L}_k \text{ est une fonctionnelle linéaire de } \Delta w. \end{array}\right. \tag{4}$$

C'est dire que chacun des $X_k(x_1, \ldots, x_p)$ est différentiable pour

[1] *La notice de différentielle dans l'Analyse générale* (*Ann. Éc. Norm. Sup.*, 42, 1925, p. 297-301).

$x_1 = x_{10}, \ldots, x_p = x_{p0}$, mais différentiable au sens de Stolz-Young, qui par les relations (4) impose à $X_k(x_1, \ldots, x_p)$ *une condition plus forte* que l'existence de ses dérivées partielles au point considéré.

C'est dire aussi que

$$\mathcal{L}_k(\Delta w) = dX_k$$

et que, par suite,

$$d\Phi = \sum_k dX_k f_k.$$

La réciproque est vraie. On peut donc dire : pour que $\Phi(w) = \Sigma X_k f_k$ soit différentiable pour $w = w_0$, il faut et il suffit que chaque $X_k(x_1, \ldots, x_p)$ soit différentiable (au sens de Stolz-Young) pour $w = w_0$. Et alors

$$d\Phi = \sum_k dX_k f_k. \tag{5}$$

Dérivabilité relativement a une règle de multiplication hypercomplexe. — Partons du cas des fonctions analytiques classiques. On dit généralement qu'une fonction complexe

$$F(z) = P(x, y) + i\,Q(x, y)$$

de la variable complexe $z = x + iy$ est dérivable (*ou monogène*) pour $z = z_0 = x_0 + iy_0$, si le rapport $\frac{\Delta F(z)}{\Delta z}$ [où $\Delta z = (x - x_0) + i(y - y_0)$] converge vers une limite quand $\Delta z \to 0$. Et cette limite est appelée la dérivée $F'(z_0)$ de $F(z)$ pour $z = z_0$.

Pour la généralisation que nous avons en vue, cette définition n'est pas commode. Mais nous avons fait autrefois observer ([5]) que cette définition *est équivalente à la suivante :*

$F(z)$ est dérivable pour $z = z_0$ si

1° $F(z)$ est différentiable pour $z = z_0$, c'est-à-dire que $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ sont différentiables au sens de Stolz-Young [rappelé plus haut par (4)] pour $x = x_0$, $y = y_0$;

2° le rapport $\frac{dF(z)}{dz}$ est indépendant de dz, pour $z = z_0$.

Et la valeur de ce rapport est appelée la dérivée de $F(z)$ pour $z = z_0$.

La condition 2° revient à dire qu'il existe un nombre complexe $L + iM$ tel qu'on ait

$$dP + i\,dQ = (L + iM)\,(dx + i\,dy)$$

quand on applique *la règle de multiplication* des nombres complexes.

([5]) *Sur les conditions pour qu'une fonction* $P(x, y) + i\,Q(x, y)$, *soit monogène* (*Nouv. Ann. Math.*, t. 19, 1919, p. 215-219).

La définition formulée de cette manière se trouvera sous une forme immédiatement généralisable et applicable à $\Phi(w)$ pourvu que nous fassions intervenir une règle de multiplication généralisée.

Nous introduirons donc une *règle de multiplication* suivant laquelle on aura en général

$$\left(\sum_{k} \xi_k f_k\right)\left(\sum_{r} x_r e_r\right)=\sum_{k}\sum_{r} \xi_k x_r (f_k . e_r),$$

avec

$$\boxed{\mathrm{R}:\quad f_k . e_r = \sum_{k} a_{krh} f_h,}$$

où les a_{krh} sont des constantes (réelles) arbitrairement choisies. (On voit la différence avec la règle classique où $n=p$ et $f_k \equiv e_k$).

Nous dirons alors que *la fonction* hypercomplexe

(6) $$\Phi(w) \equiv X_1(x_1, \ldots, x_p) f_1 + \ldots + X_n(x_1, \ldots, x_p) f_n$$

de la variable hypercomplexe

(7) $$w = x_1 e_1 + \ldots + x_p e_p$$

est « dérivable pour $w = w_0 = x_{10} e_1 + \ldots + x_{p0} e_p$ *relativement à la règle de multiplication* R » si :

1° $d\Phi \equiv \Sigma\, dX_k f_k$ *est différentiable pour* $w = w_0$;

2° $\dfrac{d\Phi}{dw}$ est, pour $w = w_0$, indépendant de dw, c'est-à-dire *s'il existe un nombre hypercomplexe*

$$\Phi'(w_0) = \Sigma \Phi'_k(w_0) f_k$$

indépendant de dw, *et un seul tel que*

(8) $$d\Phi(w) = \Phi'(w_0)\, dw$$

pour $w = w_0$, *la multiplication étant effectuée suivant la règle* R.

Et alors $\Phi'(w_0)$ est appelée *la dérivée* de $\Phi(w)$, pour $w = w_0$, *relativement à la règle* R. Si $\Phi(w)$ est dérivable près de w, sa dérivée $\Phi'(w)$ est donc aussi une fonction hypercomplexe de w. Si elle est dérivable pour $w = w_0$ relativement à R, sa dérivée $\Phi''(w)$ sera appelée la dérivée seconde de $\Phi(w)$ pour $w = w_0$ relativement à R, etc.

Nous dirons que $\Phi(w) = \sum_k X_k f_k$ est une fonction *paraanalytique* de w pour $w = w_0$ relativement à R, si $\Phi(w)$ est dérivable *indéfiniment* relativement à R près de $w = w_0$.

Changements de variables. — Nous appellerons ainsi, *pour abréger*, toute transformation *linéaire et biunivoque* de $X_1, X_2, X_3, \ldots$ en $X'_1, X'_2, X'_3, \ldots$ ou de x_1, x_2, ... en x'_1, x'_2, ... Il s'agit donc de transformations *plus générales* que les changements d'axes.

Soient deux telles transformations,

(9) $$X'_k = \sum_h \mu_{kh} X_h + a_k, \qquad x'_j = \sum_r \beta_{jr} x_r + b_i,$$

d'où

$$X_i = \sum_k \lambda_{ik} X'_k + a'_i, \qquad x_r = \sum_j \alpha_{rj} x'_j + b'_r.$$

L'identité (8) ou

(8 *bis*) $$\sum_h dX_h f_h = \left(\sum_p \Phi'_p f_p\right)\left(\sum_r (dx_r e_r)\right)$$

deviendra

$$\sum_k dX'_k \left(\sum_h \lambda_{hk} f_h\right) = \left(\sum_p \Phi'_p f_p\right)\left[\sum_j (dx'_j)\left(\sum_r \alpha_{rj} e_r\right)\right]$$

que l'on pourra écrire

$$\sum_k dX'_k f'_k = \left(\sum_h \varphi_h f'_h\right)\left[\sum_j (dx'_j)\, e'_j\right]$$

en posant

(10) $$f'_k = \sum_h \lambda_{hk} f_h, \qquad e'_j = \sum_r \alpha_{rj} e_r,$$

$$\Phi'_p = \sum_h \varphi_h \lambda_{hp}.$$

D'ailleurs, le déterminant des λ_{hk} étant $\neq 0$, on pourra résoudre (10) sous la forme

(11) $$f_h = \sum_k \nu_{kh} f'_k \qquad \text{et, de même,} \qquad e_r = \sum_j \rho_{jr} e'_j.$$

On voit alors que

$$\Phi(w) \equiv \sum_h X_h f_h \equiv \sum_k X'_k f'_k$$

est une fonction hypercomplexe de

$$w = \sum_r x_r e_r = \sum_j x'_j e'$$

qui est dérivable relativement à la règle R′ définie par

(12) $$f'_k . e'_j = \sum_h \sum_r \lambda_{hk} \alpha_{rj} f_h . e_r = \sum_p \left(\sum_h \sum_r \lambda_{hk} \alpha_{rj} a_{hrp}\right)\left[\sum_q \nu_{qp} f'_q\right] = \sum_q b_{kjq} f'_q.$$

Ainsi une fonction hypercomplexe $\Phi(w)$ dérivable relativement à une règle R est transformée par deux changements de variables (9) en une fonction encore dérivable, mais relativement à une nouvelle règle R′.

CHANGEMENTS D'UNITÉS DE BASE. — Inversement, supposons qu'à partir d'une règle R on effectue un changement linéaire et biunivoque (10) quelconque sur les f_h et un autre (10) sur les e_r. Il en résultera une règle R′ analogue à R et définie par (12). Alors la relation (8 *bis*) deviendra

$$\sum_p \left[d\left(\sum_h \nu_{ph} X_h\right)\right] f'_p = \left[\sum_q \left(\sum_k \nu_{qk} \Phi'_k\right) f'_q\right] \left\{ \sum_l \left[d\left(\sum_r \rho_{lr} x_r\right)\right] e'_l \right\},$$

c'est-à-dire une relation

$$\sum_p (dX'_p) f'_p = \left(\sum_q \varphi_q f'_q\right)\left[\sum_l (dx'_l)\, e'_l\right],$$

de même forme que (8 *bis*), où les X, Φ'_p et x ont été remplacés par les X′, φ'_p et x', obtenus par des transformations linéaires et biunivoques (les mêmes pour les X_h et les Φ'_k)

$$X'_p = \sum_h \nu_{ph} X_h, \qquad \varphi'_q = \sum_k \nu_{qk} \Phi'_k, \qquad x'_l = \sum_r \rho_{lr} x_r.$$

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU PREMIER ORDRE. — Quand

$$\Phi(w) = \sum_k X_k f_k$$

est, pour w voisin de w_0, une fonction hypercomplexe dérivable relativement à la règle R, on déduit de l'identité (8 *bis*) que l'on a

$$\frac{\partial X_h}{\partial x_r} = \sum_k a_{krh} \Phi'_k. \tag{13}$$

Quand la règle R est « normale » c'est-à-dire quand l'un, au moins, des déterminants d'ordre n formé avec les a_{krh} est $\neq 0$ les n équations correspondantes déterminent les Φ'_k en fonction de $x_1, \ldots, x_p$ au voisinage de $x_{10}, \ldots, x_{p_0}$: la dérivée $\Phi'(w)$ est unique.

Au contraire, supposons tous ces déterminants nuls. Si l'un de leurs mineurs d'ordre $n-1$ est $\neq 0$, les équations correspondantes sont équivalentes à tout le système (13) et l'on voit qu'on peut déterminer $n-1$ des quantités Φ'_k en fonction de $x_1, \ldots, x_p$ et de la $n^{\text{ième}}$ quantité Φ'_k : il y a une infinité de déterminations de la dérivée Φ'. Il en serait de même *a fortiori* si tous les mineurs d'ordre $n-1$ étaient nuls.

Ainsi *aucune* fonction hypercomplexe $\Phi(w)$ ne peut être — pour quelque valeur de w que ce soit — dérivable relativement à une règle R si les coefficients a_{krh} de cette règle ne sont pas tels que l'un au moins des déterminants d'ordre n des a_{krh} est $\neq 0$.

Mais dans ce cas, non seulement on peut tirer un système et un seul des Φ'_k de n des np relations (13), mais encore on voit en portant ces valeurs dans les $np - n = n(p-1)$ autres équations, que : *pour toute fonction hypercomplexe*

$$\Phi(w) = \Sigma X_h f_h$$

dérivable relativement à une règle R (*nécessairement normale*) *au voisinage de* w_0, *les « composantes »* $X_1, \ldots, X_n$ *de cette fonction vérifient dans ce voisinage un système de* $n(p-1)$ *équations aux dérivées partielles du premier ordre, linéaires, homogènes, à coefficients constants et résolues par rapport à* $n(p-1)$ *des np quantités* $\frac{\partial X_h}{\partial x_r}$. (Nous obtenons ici la généralisation des conditions de Cauchy-Riemann.)

On pourra donc écrire ce système sous la forme

$$\sigma : \quad \frac{\partial X_h}{\partial x_r} = \sum_{j=1}^{n} b_{jrh} \frac{\partial X_{h_j}}{\partial x_{r_j}}, \tag{14}$$

où les b_{jrh} sont constants et où les n couples (h_j, r_j) et les $n(p-1)$ couples (h, r) doivent être distincts (avec $1 \leqq (h \text{ et } h_j) \leqq n$; $1 \leqq (r \text{ et } r_j) \leqq p$).

C'est donc un système d'équations aux dérivées partielles que nous pourrons appeler *un système d'équations linéairement indépendantes* en ce sens qu'elles deviennent un système d'équations linéaires linéairement indépendantes lorsqu'on y remplace les *np* dérivées partielles par des variables indépendantes.

Autrement dit, l'un des déterminants d'ordre $n(p-1)$ formés avec les coefficients est $\neq 0$, (à savoir ici) celui qui est formé des coefficients 1 et 0 des $\frac{\partial X_h}{\partial x_r}$ dans les premiers membres.

Rappel de résultats du Mémoire préliminaire.

FORMES CANONIQUES DES FONCTIONS DÉRIVABLES. — On a vu (p. 34) que des « changements de variables » au sens précis indiqué page 33, transforment une fonction hypercomplexe dérivable relativement à une règle R en une fonction encore dérivable, mais relativement à une règle R′, en général différente de R, quoique de même forme. On peut donc espérer, en choisissant convenablement ces changements, simplifier à la fois cette fonction et cette règle et obtenir ainsi des formes canoniques simples.

C'est ce que nous avons fait ailleurs, d'abord pour $n = p = 2, 3, 4$ [6], puis, dans notre Mémoire préliminaire [7] pour $n = 3, p = 2$, cas particulièrement intéressant au point de vue géométrique.

Dans la suite, nous appellerons S la surface correspondant à la fonction

$$\Phi(w) = X(u, v) f_1 + Y(u, v) f_2 + Z(u, v) f_3$$

par la représentation paramétrique

$$X = X(u, v), \qquad Y = Y(u, v), \qquad Z = Z(u, v). \tag{15}$$

Quand nous dirons que S est plane ou cylindrique, cela voudra dire qu'elle

(6) *Voir* note (2) de la page 29.
(7) *Voir* note (4) de la page 30.

est située sur un plan ou un cylindre, qu'elle occupe totalement *ou partiellement*.

CAS DE $n=3$, $p=2$: QUELQUES FORMES CANONIQUES DES FONCTIONS DÉRIVABLES. — Nous avons indiqué ailleurs ([8]) les formes canoniques simples auxquelles on peut réduire les fonctions dérivables à trois dimensions d'une variable à trois dimensions relativement à une règle de multiplication. Pour une telle fonction

$$\Phi(w) = X_1(x_1, x_2, x_3)f_1 + \ldots + X_3(x_1, x_2, x_3)f_3,$$

on doit avoir une identité de la forme

$$(16) \qquad dX_1 f_1 + \ldots + dX_3 f_3 = \left[\sum_{k=1}^{3} L_k(x_1, x_2, x_3) f_k\right]\left[\sum_{j=1}^{3} dx_j e_j\right].$$

Si l'on y suppose x_3 constant, on obtient une identité de la forme (8 *bis*) avec $n=3$, $p=2$. Et puisque e_3 est le coefficient de dx_3 dans cette relation, il ne jouera plus aucun rôle quand on fera $dx_3=0$, de sorte que la règle de multiplication se réduit à la règle (R) ci-dessus, écrite aussi pour $n=3$, $p=2$.

Nous obtenons ainsi par une méthode indirecte mais sans nouveau calcul, *des* solutions simples de notre problème actuel en annulant l'une des trois variables dans chacune des formes canoniques signalées dans la dernière Note citée plus haut, page 29, et démontrée dans un Mémoire ultérieur, cité en note, page 29.

En se reportant à ce Mémoire, on obtient ainsi les solutions suivantes.

La surface S considérée peut :

1° se réduire à une courbe

$$X_h = f_h(x_1) \qquad (h=1, 2, 3);$$

2° être plane

$$X_1 = \text{const.}, \qquad X_2 = \ldots, \qquad X_3 = \ldots;$$

3° être cylindrique

$$X_1 = A(x_1), \qquad X_2 = B(x_1), \qquad X_3 = \ldots;$$

4° avoir la représentation paramétrique

$$X_1 = A(x_1), \qquad X_2 = x_2 A'(x_2) + B(x_1), \qquad X_3 = \frac{1}{2} x_2^2 A''(x_1) + x_2 B'(x_1) + C(x_1).$$

Il faudrait, pour justifier ces formules, reproduire ici les formes canoniques données dans ce Mémoire. Nous ne le ferons pas pour abréger, car nous retrouverons plus loin, par une autre méthode, les résultats obtenus ainsi. Celle-ci

---

([8]) *Voir* note ([2]) de la page 29.

nous permettra de retrouver ces solutions *et d'autres encore* et de montrer que *toute solution peut se ramener à un nombre fini de formes canoniques.*

Système complet de formes canoniques des fonctions dérivables. — Nous allons maintenant rappeler ceux des résultats obtenus dans notre Mémoire préliminaire qui peuvent nous être utiles dans la suite.

Ce Mémoire avait été écrit sans faire appel à la notion de nombre hypercomplexe ce qui avait l'avantage de dispenser de la connaissance de la théorie de ces nombres, et, en outre, le faire mieux apparaître comme l'étude de certains systèmes particuliers d'équations aux dérivées partielles et de leur application à la théorie des surfaces.

Nous allons en reproduire les tableaux, mais en les interprétant dans la notation des fonctions hypercomplexes, en y substituant souvent aux notations X_1, X_2, X_3, x_1, x_2, les notations usuelles de la théorie des surfaces X, Y, Z, u, v et en remplaçant Φ'_1, Φ'_2, Φ'_3 par L_1, L_2, L_3 ou par L, M, N.

Théorème. — *Toute fonction hypercomplexe*

$$\Phi(w) = \Phi(u\,e_1 + v\,e_2) = X(u, v)f_1 + Y(u, v)f_2 + Z(u, v)f_3$$

qui est dérivable au voisinage de $w_0 = u_0 e_2 + v_0 e_1$, *relativement à une règle de multiplication* R, *peut être ramenée au moyen de transformations linéaires et biunivoques effectuées sur* X, Y, Z *d'une part, sur* u, v *d'autre part, à l'une des formes canoniques du tableau* I *qui suit.*

Tableau I.

I. S est *plane*. $\begin{cases} \mathrm{I}_a : \Phi(w) = cf_1 + \dfrac{\partial G(u, v)}{\partial u} f_2 + \dfrac{\partial G(u, v)}{\partial v} f_3; \\ \mathrm{I}_b : \Phi(w) = cf_1 + A(u)f_2 + D(u, v)f_3; \end{cases}$

II. S est *cylindrique*. $\Phi(w) = A(u)f_1 + B(u)f_2 + \begin{cases} \mathrm{II}_a : C(v)f_3; \\ \mathrm{II}_b : [vA'(u) + C(u)]f_3; \\ \mathrm{II}_c : C(u)f_3;\ \text{ici S est curviligne}; \end{cases}$

III. $\Phi(w) = A(u)f_1 + B(v)f_2 + C(u + v)f_3;$

IV. $\Phi(w) = A(u)f_1 + [vA'(u) + B(u)]f_2 + C(v)f_3;$

V. $\Phi(w) = A(u)f_1 + [vA'(u) + B(u)]f_2 + \left[\dfrac{1}{2}A''(u)v^2 + B'(u)v + C(u)\right]f_3;$

VI. $\begin{cases} \Phi(w) = A(u)f_1 + P(u, v)f_2 + Q(u, v)f_3, \\ \text{où } P + iQ = f(u + iv),\ f(u + iv) \text{ étant} \\ \text{une fonction de } u + iv \text{ analytique pour } u + iv = u_0 + iv_0; \end{cases}$

VII. $\Phi(w) = (cu + c_1)f_1 + (cv + c_2)f_2 + H(u, v)f_3.$

Dans ce tableau, c, c_1, c_2 sont des constantes et chacune des fonctions $\dfrac{\partial G(u, v)}{\partial u}$, ..., $C(u)$, ..., $D(u, v)$, $H(u, v)$ est une fonction différentiable au voisinage de u_0, v_0.

THÉORÈME. — *Le système σ d'équations aux dérivées partielles du premier ordre auquel sont soumises les composantes d'une fonction hypercomplexe $\Phi(w)$ dérivable près de w_0, relativement à une règle* R, *prend pour chaque forme canonique de $\Phi(w)$ figurant dans le tableau* I, *la forme canonique correspondante du tableau* II *qui suit.*

Réciproquement, chaque forme du tableau I détermine la solution générale du système correspondant du tableau II.

La vérification de ce théorème, par comparaison des formules correspondantes des tableaux I et II est immédiate.

TABLEAU II.

$$
\frac{\partial X}{\partial v}=0
\left\{
\begin{array}{ll}
\mathrm{I.} & \dfrac{\partial X}{\partial u}=0 \left\{ \begin{array}{ll} \mathrm{I}_a : & \dfrac{\partial Y}{\partial v}-\dfrac{\partial Z}{\partial u}=0; \\ \mathrm{I}_b : & \dfrac{\partial Y}{\partial v}=0; \end{array}\right. \\
\mathrm{II.} & \dfrac{\partial Y}{\partial v}=0 \left\{ \begin{array}{ll} \mathrm{II}_a : & \dfrac{\partial Z}{\partial u}=0; \\ \mathrm{II}_b : & \dfrac{\partial Z}{\partial v}-\dfrac{\partial X}{\partial u}=0; \\ \mathrm{II}_c : & \dfrac{\partial Z}{\partial v}=0; \end{array}\right. \\
\mathrm{III.} & \dfrac{\partial Y}{\partial u}=\dfrac{\partial Z}{\partial u}-\dfrac{\partial Z}{\partial v}=0; \\
\mathrm{IV.} & \dfrac{\partial Z}{\partial u}=\dfrac{\partial Y}{\partial v}-\dfrac{\partial X}{\partial u}=0; \\
\mathrm{V.} & \dfrac{\partial Y}{\partial v}-\dfrac{\partial X}{\partial u}=\dfrac{\partial Z}{\partial v}-\dfrac{\partial Y}{\partial u}=0; \\
\mathrm{VI.} & \dfrac{\partial Y}{\partial u}+\dfrac{\partial Z}{\partial v}=\dfrac{\partial Y}{\partial u}-\dfrac{\partial Z}{\partial v}=0; \\
\mathrm{VII.} & \dfrac{\partial Y}{\partial u}=\dfrac{\partial X}{\partial u}-\dfrac{\partial Y}{\partial v}=0.
\end{array}
\right.
$$

Remarque. — Représentons par $E_1=0$, $E_2=0$, $E_3=0$ les équations du système σ dans le tableau II. On a dans les cas I et VII les relations respectives

$$\frac{\partial E_1}{\partial u}-\frac{\partial E_2}{\partial v}\equiv 0,$$
$$\frac{\partial^2 E_1}{\partial u^2}-\frac{\partial^2 E_2}{\partial v^2}-\frac{\partial^2 E_3}{\partial u\,\partial v}\equiv 0.$$

Les systèmes σ des types I et VII rentrent donc dans la catégorie générale des systèmes d'équations aux dérivées partielles

$$E_1=0, \qquad \ldots, \qquad E_q=0$$

qui sont « *dépendantes* » (à distinguer de « linéairement dépendantes ») au sens de Maurice Janet, c'est-à-dire tels qu'il existe des opérateurs différentiels $\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_q$ pour lesquels la relation

$$\mathcal{D}_1 E_1 + \ldots + \mathcal{D}_q E_q = 0$$

devient une identité.

On vérifie dans le cas particulier actuel une proposition générale de Janet d'après laquelle les solutions du système σ ne peuvent dépendre de fonctions arbitraires (à la différentiabilité près) de *deux* variables que si ses équations sont dépendantes.

Le tableau I montre, en effet, que c'est seulement dans les cas I et VII que la solution de σ dépend de fonctions arbitraires (à la différentiabilité près) de deux variables.

Fonctions ordinaires. — C'est un premier exemple d'*un comportement différent* des deux groupements formés de fonctions des types I et VII d'une part, II à VI d'autre part. Un second exemple va suivre et on en trouvera d'autres plus loin. C'est pourquoi nous les distinguerons en appelant « *fonctions ordinaires* », les fonctions hypercomplexes qui se ramènent par « changement de variables » à l'un des types II et VI.

Formes canoniques de la règle de multiplication. — Cherchons à déterminer des règles de multiplication grâces auxquelles une fonction dérivable relativement à l'une de ces règles soit une des fonctions canoniques du tableau I.

Une méthode. — La méthode qui va suivre ne suppose pas que n et p aient des valeurs particulières.

Pour la commodité des calculs, nous reviendrons pour les variables à la notation avec indices : $X_1, \ldots, x_p$.

Nous avons vu que si $\Phi = \sum_h X_h f_h$ est dérivable, on a des relations de la forme

$$\frac{\partial X_h}{\partial x_r} = \sum_j b_{jrh} \frac{\partial X_{h_j}}{\partial x_{r_j}}, \tag{14}$$

où

$$b_{jr_k h_k} = \delta_{jk}, \qquad 1 \leqq (r, r_j) \leqq p, \qquad 1 \leqq (h, h_j) \leqq n. \tag{17}$$

Inversement, si l'on se donne arbitrairement les b_{jrh} pourvu que (14) soit vérifié, on aura quelles que soient les unités f_j, e_r :

$$\sum_n dX_h f_h = \sum_j \sum_r \left(\sum_h b_{jrh} f_h \right) \frac{\partial X_{h_j}}{\partial x_{r_j}} dx_r.$$

Si donc on adopte la règle de multiplication

$$f_j . e_r = \sum_h b_{jrh} f_h, \tag{18}$$

on pourra écrire

$$\sum_{n} d\mathrm{X}_h f_h = \left(\sum_{j} \frac{\partial \mathrm{X}_{h_j}}{\partial x_{r_j}} f_j\right)\left(\sum_{r} dx_r\, e_r\right)$$

et par suite : 1° $\Phi \equiv \Sigma \mathrm{X}_h f_h$ sera dérivable relativement à la règle (18) précisée ci-dessus et 2° on pourra prendre pour dérivée de Φ

$$\sum_{j} \frac{\partial \mathrm{X}_{h_j}}{\partial x_{r_j}} f_j,$$

c'est-à-dire qu'en posant

$$d\Phi = \Phi'\, dw \qquad \text{et} \qquad \Phi' = \sum_{j} \mathrm{L}_j f_j,$$

on aura

$$\mathrm{L}_j = \frac{\partial \mathrm{X}_{h_j}}{\partial x_{r_j}}.$$

On pourra appliquer ces remarques pour obtenir pour chacune des familles dérivables ci-dessus, les formes correspondantes de la règle R et de la dérivée, en se reportant au tableau II.

Cette même méthode nous prouve en outre, que plusieurs règles peuvent donner les mêmes fonctions canoniques (mais avec des dérivées en général différentes). Car si $m_1, m_2, \ldots, m_n$ est une permutation des nombres $1, 2, \ldots, n$, la règle (18) donnera les mêmes fonctions que la règle

$$f_j \cdot e_r = \sum_{h} b_{m_j r h} f_h.$$

Application de la méthode précédente. — Revenons au cas où $n = 3$, $p = 2$ et appliquons ce qui précède aux tableaux I et II traduit dans la notation $\mathrm{X}_1, \ldots, x_2$.

I_a. On peut prendre encore

$$\mathrm{L}_1 = \frac{\partial \mathrm{X}_2}{\partial x_1}, \qquad \mathrm{L}_2 = \frac{\partial \mathrm{X}_2}{\partial x_1}, \qquad \mathrm{L}_3 = \frac{\partial \mathrm{X}_3}{\partial x_2},$$

d'où encore

$$b_{j12} = \delta_{j1}, \qquad b_{j13} = \delta_{j2}, \qquad b_{j13} = \delta_{j3}$$

et

$$b_{j11} = b_{j21} = 0, \qquad \text{mais} \quad b_{j22} = \delta_{j2}.$$

D'où

$$f_j \cdot e_1 = \delta_{j1} f_2 + \delta_{j2} f_3, \qquad f_j \cdot e_2 = \delta_{j2} f_2 + \delta_{j3} f_3;$$

$$\boxed{\mathrm{I}_a : \begin{cases} f_1 \cdot e_1 = f_2, & f_2 \cdot e_1 = f_3, & f_3 \cdot e_1 = \mathcal{O}; \\ f_1 \cdot e_2 = \mathcal{O}, & f_2 \cdot e_2 = f_2, & f_3 \cdot e_2 = f_3 \end{cases}}$$

en représentant par $\mathcal{O}$ le nombre hypercomplexe $0 f_1 + 0 f_2 + 0 f_3$.

I_b. On peut prendre

$$\mathrm{L}_1 = \frac{\partial \mathrm{X}_2}{\partial x_1}, \qquad \mathrm{L}_2 = \frac{\partial \mathrm{X}_3}{\partial x_1}, \qquad \mathrm{L}_3 = \frac{\partial \mathrm{X}_3}{\partial x_2}.$$

D'où

$$b_{j12}=\delta_{j1},\qquad b_{j13}=\delta_{j2},\qquad b_{j23}=\delta_{j3},$$
$$b_{j11}=b_{j21}=b_{j22}=0,$$
$$f_j.e_1=\delta_{j1}f_2+\delta_{j2}f_3,\qquad f_j.e_2=\delta_{j2}f_2+\delta_{j3}f_3;$$

$$\boxed{\mathrm{I}_b:\begin{cases} f_1.e_1=f_2, & f_2.e_1=f_3, \quad f_3.e_1=\mathcal{O};\\ f_1.e_2=\mathcal{O}, & f_2.e_2=\mathcal{O}, \quad f_3.e_2=f_3.\end{cases}}$$

II$_a$. Soient

$$\mathrm{L}_1=\frac{\partial \mathrm{X}_1}{\partial x_1},\qquad \mathrm{L}_2=\frac{\partial \mathrm{X}_2}{\partial x_1},\qquad \mathrm{L}_3=\frac{\partial \mathrm{X}_3}{\partial x_2}.$$

Alors

$$b_{j11}=\delta_{j1},\qquad b_{j12}=\delta_{j2},\qquad b_{j23}=\delta_{j3},$$
$$b_{j21}=b_{j22}=b_{j13}=0;$$

$$\boxed{\mathrm{II}_a:\begin{cases} f_1.e_1=f_1, & f_2.e_1=f_2, \quad f_3.e_1=\mathcal{O};\\ f_1.e_2=\mathcal{O}, & f_2.e_2=\mathcal{O}, \quad f_3.e_2=f_3.\end{cases}}$$

II$_b$. On peut prendre

$$\mathrm{L}_1=\frac{\partial \mathrm{X}_1}{\partial x_1},\qquad \mathrm{L}_2=\frac{\partial \mathrm{X}_2}{\partial x_1},\qquad \mathrm{L}_3=\frac{\partial \mathrm{X}_3}{\partial x_1}.$$

D'où

$$b_{j1k}=\delta_{jk},\qquad b_{j21}=b_{j22}=0,\qquad b_{j23}=\delta_{j1},$$
$$f_j.e_1=\delta_{j1}f_1+\delta_{j2}f_2+\delta_{j3}f_3,\qquad f_j.e_2=\delta_{j1}f_3;$$

$$\boxed{\mathrm{II}_b:\begin{cases} f_j.e_1=f_j;\\ f_1.e_2=f_3, \quad f_2.e_2=\mathcal{O}, \quad f_3.e_2=\mathcal{O}.\end{cases}}$$

II$_c$. Soient

$$\mathrm{L}_k=\frac{\partial \mathrm{X}_k}{\partial x_1}.$$

Alors

$$b_{j1k}=\delta_{jk},\qquad b_{j2k}=0;$$

$$\boxed{\mathrm{II}_c:\begin{cases} f_j.e_1=f_j;\\ f_j.e_2=\mathcal{O}.\end{cases}}$$

III. On a, en posant

$$\mathrm{L}_1=\frac{\partial \mathrm{X}_1}{\partial x_1},\qquad \mathrm{L}_2=\frac{\partial \mathrm{X}_2}{\partial x_2},\qquad \mathrm{L}_3=\frac{\partial \mathrm{X}_3}{\partial x_1};$$
$$b_{j12}=0,\qquad b_{j23}=\delta_{j3};\qquad b_{j21}=0,\qquad b_{j11}=\delta_{j1};\qquad b_{j13}=\delta_{j3},\qquad b_{j22}=\delta_{j2}.$$

D'où :

$$f_j.e_1=\delta_{j1}f_1+\delta_{j3}f_3,\qquad f_j.e_2=\delta_{j2}f_2+\delta_{j3}f_3,$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\mathrm{III}:\begin{cases} f_1.e_1=f_1, & f_2.e_1=\mathcal{O}, \quad f_3.e_1=f_3;\\ f_1.e_2=\mathcal{O}, & f_2.e_2=f_2, \quad f_3.e_2=f_3.\end{cases}}$$

IV. On a, en posant

$$L_1 = \frac{\partial X_1}{\partial x_1}, \qquad L_2 = \frac{\partial X_2}{\partial x_1}, \qquad L_3 = \frac{\partial X_3}{\partial x_2};$$
$$b_{j21} = b_{j13} = 0, \qquad b_{j22} = \delta_{j1},$$
$$b_{j11} = \delta_{j1}, \qquad b_{j12} = \delta_{j2}, \qquad b_{j23} = \delta_{j3}.$$

D'où

$$f_j . e_1 = \delta_{j1} f_1 + \delta_{j2} f_2, \qquad f_j . e_2 = \delta_{j1} f_2 + \delta_{j3} f_3,$$

soit

$$\boxed{\mathrm{IV} : \begin{cases} f_1 . e_1 = f_1, & f_2 . e_1 = f_2, & f_3 . e_1 = \mathcal{O}; \\ f_1 . e_2 = f_2, & f_2 . e_2 = \mathcal{O}, & f_3 . e_2 = f_3. \end{cases}}$$

V. Soient

$$L_1 = \frac{\partial X_1}{\partial x_1}, \qquad L_2 = \frac{\partial X_2}{\partial x_1}, \qquad L_3 = \frac{\partial X_3}{\partial x_1}.$$

On aura :

$$b_{j21} = 0, \qquad b_{j22} = \delta_{j1}, \qquad b_{j23} = \delta_{j2},$$
$$b_{j11} = \delta_{j1}, \qquad b_{j12} = \delta_{j2}, \qquad b_{j13} = \delta_{j3};$$
$$f_j . e_1 = \delta_{j1} f_1 + \delta_{j2} f_2 + \delta_{j3} f_3, \qquad f_j . e_2 = \delta_{j1} f_2 + \delta_{j2} f_3,$$

soit

$$\boxed{\mathrm{V} : \begin{cases} f_j . e_1 = f_j; & & \\ f_1 . e_2 = f_2, & f_2 . e_2 = f_3, & f_3 . e_2 = \mathcal{O}. \end{cases}}$$

VI. Soit

$$L_1 = \frac{\partial X_1}{\partial x_1}, \qquad L_2 = \frac{\partial X_2}{\partial x_1}, \qquad L_3 = \frac{\partial X_3}{\partial x_1},$$

donc

$$b_{j1h} = \delta_{jh}, \qquad b_{j21} = 0, \qquad b_{j23} = \delta_{j2}, \qquad b_{j22} = -\delta_{j3};$$

soit

$$f_j . e_1 = \Sigma \delta_{jh} f_h, \qquad f_j . e_2 = -\delta_{j3} f_2 + \delta_{j2} f_3,$$

$$\boxed{\mathrm{VI} : \begin{cases} f_j . e_1 = f_j; & & \\ f_1 . e_2 = \mathcal{O}, & f_2 . e_2 = f_3, & f_3 . e_2 = -f_2. \end{cases}}$$

VII. Prenons

$$L_1 = \frac{\partial X_2}{\partial x_2}, \qquad L_2 = \frac{\partial X_3}{\partial x_1}, \qquad L_3 = \frac{\partial X_3}{\partial x_2}.$$

D'où

$$b_{j22} = \delta_{j1}, \qquad b_{j13} = \delta_{j2}, \qquad b_{j23} = \delta_{j3},$$
$$b_{j21} = 0, \qquad b_{j12} = 0, \qquad b_{j11} = \delta_{j1},$$

d'où

$$\boxed{\mathrm{VII} : \begin{cases} f_1 . e_1 = f_1, & f_2 . e_1 = f_3, & f_3 . e_1 = \mathcal{O}; \\ f_1 . e_2 = f_2, & f_2 . e_2 = \mathcal{O}, & f_3 . e_2 = f_3. \end{cases}}$$

Remarque. — On peut dire qu'une règle, de la forme générale (R) a une *unité principale* s'il existe un nombre hypercomplexe $e'_1 = ae_1 + be_2$ tel que

$$f_j . e'_1 = f_j \qquad \text{pour} \quad j = 1, 2, 3.$$

Il suffit de se reporter aux formes ci-dessus des règles II_b, II_c, V, VI pour constater que, pour chacune de ces règles, e_1 est unité principale. On voit aussi immédiatement que la règle II_a a $e_1 + e_2$ pour unité principale. Enfin des calculs très simples montrent que les autres régles (soient I_a, I_b, III, IV et VII) n'ont pas d'unité principale.

Fonctions dérivées des fonctions dérivables canoniques. — Quand e_1 est unité principale, on a

$$f_j = f_j . e_1 = \sum_h b_{j1h} f_h, \qquad \text{donc} \quad b_{j1h} = \delta_{jh}$$

et comme

$$\frac{\partial X_h}{\partial x_1} = \sum_j b_{j1h} L_j,$$

on a

$$\frac{\partial X_h}{\partial x_1} = \sum_j \delta_{jh} L_j = L_h.$$

Donc la dévivée de

$$\Phi(w) = \Phi(x_1 e_1 + x_2 e_2) = \sum_h X_h f_h$$

est

$$\Phi'(w) = \sum L_h f_h = \sum_h \frac{\partial X_h}{\partial x_1} f_h,$$

ce qui peut s'écrire

$$\Phi'(w) = \frac{\partial}{\partial x_1} \Phi(w).$$

Ceci permet d'écrire immédiatement les expressions de Φ'_w pour les cas II_b, II_c, V et VI.

Mais, de toute façon, les expressions de $\Phi'(w)$ se déduisent immédiatement de la vérification à laquelle nous allons procéder, à savoir que : *pour chacune des règles canoniques de multiplication que nous venons d'établir, les fonctions dérivables correspondantes sont bien celles du tableau* I.

Vérification. — Dans chaque cas, il suffit d'écrire que $\sum_h dX_h f_h$ est égal à l'expression développée de $(\Sigma L_k f_k)(\Sigma\, dx_r e_r)$ qui résulte de la règle canonique correspondante, laquelle figure aux pages oo et oo.

Des identités obtenues, on obtient par des intégrations et dérivations toujours immédiates, non seulement les expressions de X_1, X_2, X_3, mais aussi celles de L_1, L_2, L_3, donc non seulement celle de $\Phi(w)$, mais aussi celle de sa dérivée $\Phi'(w)$ relativement à R.

I_a :

$$L_1\,dx_1 f_2 + L_2\,dx_1 f_3 + L_2\,dx_2 f_2 + L_3\,dx_2 f_3 = \Sigma\,dX_h f_h;$$
$$dX_1 = 0,\qquad dX_2 = L_1\,dx_1 + L_2\,dx_2,\qquad dX_3 = L_2\,dx_1 + L_3\,dx_2;$$
$$\frac{\partial X_2}{\partial x_2} = L_2 = \frac{\partial X_3}{\partial x_1},\qquad L_1 = \frac{\partial X_2}{\partial x_1},\qquad L_3 = \frac{\partial X_3}{\partial x_2};$$
$$X_1 = \text{const.},\qquad X_2 = \frac{\partial G}{\partial x_1},\qquad X_3 = \frac{\partial G}{\partial x_2};$$
$$L_1 = \frac{\partial^2 G}{\partial x_1^2},\qquad L_2 = \frac{\partial^2 G}{\partial x_1\,\partial x_2},\qquad L_3 = \frac{\partial^2 G}{\partial x_2^2}.$$

I_b :

$$L_1\,dx_1 f_2 + L_2\,dx_1 f_3 + L_3\,dx_2 f_3 = \Sigma\,dX_h f_h;$$
$$dX_1 = 0,\qquad dX_2 = L_1\,dx_1,\qquad dX_3 = L_2\,dx_1 + L_3\,dx_2;$$
$$L_1 = \frac{\partial X_2}{\partial x_1},\qquad L_2 = \frac{\partial X_3}{\partial x_1},\qquad L_3 = \frac{\partial X_3}{\partial x_2};$$
$$X_1 = \text{const.},\qquad X_2 = A(x_1),\qquad X_3 = D(x_1, x_2);$$
$$L_1 = A'(x_1),\qquad L_2 = \frac{\partial D}{\partial x_1},\qquad L_3 = \frac{\partial D}{\partial x_2}.$$

II_a :

$$L_1\,dx_1 f_1 + L_2\,dx_1 f_2 + L_3\,dx_2 f_3 = \Sigma\,dX_h f_h;$$
$$dX_1 = L_1\,dx_1,\qquad dX_2 = L_2\,dx_1,\qquad dX_3 = L_3\,dx_2;$$
$$X_1 = A(x_1),\qquad X_2 = B(x_1),\qquad X_3 = C(x_2);$$
$$L_1 = A'(x_1),\qquad L_2 = B'(x_1),\qquad L_3 = C'(x_2).$$

II_b :

$$L_1\,dx_1 f_1 + L_2\,dx_1 f_2 + L_3\,dx_1 f_3 + L_1\,dx_2 f_3 = \Sigma\,dX_h f_h;$$
$$dX_1 = L_1\,dx_1,\qquad dX_2 = L_2\,dx_1,\qquad dX_3 = L_1\,dx_2 + L_3\,dx_1;$$
$$X_1 = A(x_1),\qquad X_2 = B(x_1),\qquad \frac{\partial X_3}{\partial x_2} = A',\qquad X_3 = x_2 A' + C(x_1);$$
$$L_1 = A'(x_1),\qquad L_2 = B'(x_1),\qquad L_3 = x_2 A'' + C'.$$

II_c :

$$\Sigma L_j\,dx_1 f_j = \Sigma\,dX_h f_h;$$
$$dX_j = L_j\,dx_1;$$
$$X_1 = A(x_1),\qquad X_2 = B(x_1),\qquad X_3 = C(x_1);$$
$$L_1 = A'(x_1),\qquad L_2 = B'(x_1),\qquad X_3 = C'(x_1).$$

III :

$$L_1\,dx_1 f_1 + L_3\,dx_1 f_3 + L_2\,dx_2 f_2 + L_3\,dx_2 f_3 = \Sigma\,dX_h f_h;$$
$$dX_1 = L_1\,dx_1,\qquad dX_2 = L_2\,dx_2,\qquad dX_3 = L_3(dx_1 + dx_2);$$
$$X_1 = A(x_1),\qquad X_2 = B(x_2),\qquad X_3 = C(x_1 + x_2);$$
$$L_1 = A'(x_1),\qquad L_2 = B'(x_2),\qquad L_3 = C'(x_1 + x_2).$$

IV :

$$L_1\,dx_1 f_1 + L_2\,dx_1 f_2 + L_1\,dx_2 f_2 + L_3\,dx_2 f_3 = \Sigma\,dX_h f_h;$$
$$dX_1 = L_1\,dx_1,\qquad dX_2 = L_2\,dx_1 + L_1\,dx_2,\qquad dX_3 = L_2\,dx_2;$$
$$X_1 = A(x_1),\qquad X_2 = x_2 A'(x_1) + B(x_1),\qquad X_3 = C(x_2);$$
$$L_1 = A'(x_1),\qquad L_2 = x_2 A''(x_1) + B'(x_1),\qquad L_3 = C'(x_2).$$

V :

$$\Sigma L_j\,dx_1 f_j + L_1\,dx_2 f_2 + L_2\,dx_2 f_3 = dX_h f_h;$$
$$dX_1 = L_1\,dx_1,\qquad dX_2 = L_2\,dx_1 + L_1\,dx_2,\qquad dX_3 = L_3\,dx_1 + L_2\,dx_2;$$
$$X_1 = A(x_1),\qquad X_2 = x_2 A'(x_1) + B(x_1),\qquad X_3 = \frac{x_2^2}{2} A''(x_1) + x_2 B'(x_1) + C(x_1);$$
$$L_1 = A'(x_1),\qquad L_2 = x_2 A''(x_1) + B'(x_1),\qquad L_3 = \frac{x_2^2}{2} A'''(x_1) + x_2 B''(x_1) + C'(x_1);$$

VI : $$\Sigma \mathrm{L}_j \, dx_1 f_j + \mathrm{L}_2 \, dx_2 f_3 + \mathrm{L}_3 \, dx_2 (-f_2) = \Sigma \, d\mathrm{X}_h f_h;$$

$$d\mathrm{X}_1 = \mathrm{L}_1 \, dx_1, \qquad d\mathrm{X}_2 = \mathrm{L}_2 \, dx_1 - \mathrm{L}_3 \, dx_2, \qquad d\mathrm{X}_3 = \mathrm{L}_3 dx_1 + \mathrm{L}_2 \, dx_2;$$

$$\mathrm{X}_1 = \mathrm{A}(x_1), \qquad d(\mathrm{X}_2 + i\mathrm{X}_3) = \mathrm{L}_2(dx_1 + i\,dx_2) + i\mathrm{L}_3(dx_1 + i\,dx_2) = (\mathrm{L}_2 + i\mathrm{L}_3)(dx_1 + i\,dx_2);$$

$$\mathrm{X}_1 = \mathrm{A}(x_1),$$

$$\mathrm{X}_2 + i\mathrm{X}_3 = f(x_1 + ix_2), \quad \text{fonction monogène de } x_1 + ix_2;$$

$$\mathrm{L}_1 = \mathrm{A}'(x_1),$$

$$\mathrm{L}_2 + i\mathrm{L}_3 = f'(x_1 + ix_2), \quad \text{fonction monogène de } x_1 + ix_2.$$

VII : $$\mathrm{L}_1 \, dx_1 f_1 + \mathrm{L}_2 \, dx_1 f_3 + \mathrm{L}_1 \, dx_2 f_2 + \mathrm{L}_3 \, dx_2 f_3 = \Sigma \, d\mathrm{X}_h f_h;$$

$$d\mathrm{X}_1 = \mathrm{L}_1 \, dx_1, \qquad d\mathrm{X}_2 = \mathrm{L}_1 \, dx_2, \qquad d\mathrm{X}_3 = \mathrm{L}_2 \, dx_1 + \mathrm{L}_3 \, dx_2;$$

$$\mathrm{X}_1 = \mathrm{A}(x_1), \qquad \mathrm{X}_2 = \mathrm{B}(x_2), \qquad \text{avec} \quad \mathrm{A}'(x_1) = \mathrm{L}_1 = \mathrm{B}'(x_2),$$

$$\text{donc} \qquad = \text{const.} = a;$$

$$\mathrm{X}_1 = ax_1 + a_1, \qquad \mathrm{X}_2 = ax_2 + a_2, \qquad \mathrm{X}_3 = \mathrm{H}(x_1, x_2);$$

$$\mathrm{L}_1 = a, \qquad \mathrm{L}_2 = \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x_1}, \qquad \mathrm{L}_3 = \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x_2}.$$

Remarque. — En se reportant à la discussion précédente, on voit que pour chacune des règles *ordinaires* (c'est-à-dire sauf pour I et VII), L_1, L_2, L_3 *ont la même forme que* X_1, X_2, X_3.

Il n'en résulte pas immédiatement que si $\Phi(w)$ est dérivable relativement à une règle ordinaire, il en est de même pour sa dérivée. Car les conditions de dérivabilité des fonctions d'une variable A, B, C, ... qui entrent dans le tableau I pour les fonctions dérivables ordinaires étant supposées satisfaites au voisinage de x_{10}, x_{20}, il n'en résulte pas qu'elles seront nécessairement satisfaites pour les fonctions A′, B′, C′, ... qui les remplacent dans l'expression de $\Phi'(w)$. Pour que $\Phi'(w)$ soit aussi dérivable [et, d'après la discussion précédente, $\Phi'(w)$ sera alors dérivable relativement à la *même* règle ordinaire que $\Phi''(w)$], il faudra donc supposer que les fonctions A, B, C, ... qui entre dans le tableau I soient différentiables deux fois au voisinage de x_{10}, x_{20}. Alors la dérivée $\Phi''(w)$ existera aussi et aura la même forme que $\Phi(w)$, mais la même objection se présentera. Et ainsi de suite.

Au contraire, si nous supposons *seulement* que les fonctions A, B, C qui se présentent dans le tableau I sont indéfiniment différentiables près de x_{10}, x_{20}, $\Phi(w)$ sera indéfiniment dérivable au voisinage de w_0 relativement à la même règle ordinaire que $\Phi(w)$.

Fonctions paraanalytiques. — Nous dirons qu'une fonction hypercomplexe $\Phi(w)$ est *paraanalytique pour* $w = w_0$, *relativement à la règle* R si elle est, au voisinage de w_0, dérivable indéfiniment relativement à cette même règle R.

Si une fonction $\Phi(w)$ est paraanalytique pour $w = w_0$, relativement à une règle R, ses dérivées successives relativement à R, sont aussi paraanalytiques relativement à R près de w_0.

Théorème. — I. *Pour qu'une fonction* $\Phi(w)$ *hypercomplexe soit* paraanalytique *en* w_0 *relativement à* R, *il faut :* 1° *qu'elle soit indéfiniment différentiable près de* w_0 *;* 2° *qu'elle soit dérivable près de* w_0 *relativement à* R.

II. *Ces conditions sont suffisantes quand $\Phi(w)$ est une fonction « ordinaire ».*

Elles ne le sont pas dans les autres cas : les cas I et VII que nous allons examiner.

Cas des familles I et VII. — Pour ces deux familles, les fonctions

$$\Phi(w) = X_1 f_1 + X_2 f_2 + X_3 f_3$$
$$\Phi'(w) = L_1 f_1 + L_2 f_2 + L_3 f_3$$

n'ont pas en général la même forme, comme il résulte des pages 45 à 46. On peut alors chercher quelles sont, parmi les fonctions de chacune de ces familles, celles dont la dérivée appartient aussi à la même famille (9).

On obtiendra ainsi, *en particulier*, toutes les fonctions paraanalytiques de la même famille.

I_a. D'après la page 45,

$$X_1 = c, \qquad X_2 = \frac{\partial G(x_1, x_2)}{\partial x_1}, \qquad X_3 = \frac{\partial G(x_1, x_2)}{\partial x_2},$$
$$L_1 = \frac{\partial X_2}{\partial x_1}, \qquad L_2 = \frac{\partial X_2}{\partial x_2}, \qquad L_3 = \frac{\partial X_3}{\partial x_2}.$$

Pour que $\Phi'(w) = \Sigma L_k f_k$ soit aussi du type I_a, il faut que $L_1 = \text{const.}$, d'où

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x_1^2} = \text{const.} = a,$$
$$G = \frac{a}{2} x_1^2 + x_1 B(x_2) + D(x_2)$$

d'où en posant $C(x_2) \equiv D'(x_2)$:

$$(20) \qquad \begin{cases} X_1 = c, & X_2 = a x_1 + B(x_2), & X_3 = x_1 B'(x_2) + C(x_2); \\ L_1 = a, & L_2 = B'(x_2), & L_3 = x_1 B''(x_2) + C'(x_2); \end{cases}$$
$$\Phi'(w) = a f_1 + B'(x_2) f_2 + [x_1 B''(x_2) + C'(x_2)] f_3.$$

Cette fois, il suffit bien que B'' et C' soient dérivables près de x_{20} pour que $\Phi'(w)$ soit aussi dérivable relativement à R.

On aura alors

$$\Phi''(w) = B''(x_2) f_2 + [x_1 B'''(x_2) + C''(x_2)] f_3$$

et, en général, si B et C sont suffisamment dérivables :

$$\Phi^{(n+2)}(w) = B^{(n+2)}(x_2) f_2 + [x_1 B^{(n+3)}(x_2) + C^{(n+2)}(x_2)] f_3.$$

Pour que $\Phi(w)$ soit paraanalytique et du type I_a, pour $w = w_0$, il faut et il suffit donc :

(9) C'est surtout quand nous passerons à l'interprétation géométrique que l'on verra l'intérêt de ce problème.

1° que $\Phi(w)$ soit de la forme

$$\Phi(w) = cf_1 + [ax_1 + B(x_2)]f_2 + [x_1 B'(x_2) + C(x_2)]f_3 \tag{21}$$

et 2° que $B(x_2)$ et $C(x_2)$ soient indéfiniment dérivables pour $x_2 = x_{20}$.

Ou encore : que $\Phi(w)$ soit indéfiniment différentiables près de w_0 et soit dérivable *deux* fois relativement à la règle du type I_a près de w_0 :

I_b. D'après les formules et les notations de la page 45, pour que $\Phi'(w)$ soit aussi dérivable relativement à la règle I_b, il faut que

$$L_1 = \text{const.}, \qquad \frac{\partial L_2}{\partial x_2} = 0,$$

c'est-à-dire :

$$A'(x_1) = \text{const.} = a, \qquad \frac{\partial^2 D}{\partial x_1 \partial x_2} = 0;$$
$$D(x_1, x_2) = N(x_1) + M(x_2);$$
$$X_1 = \text{const.} = c, \qquad X_2 = ax_1 + a_1, \qquad X_3 = N(x_1) + M(x_2);$$
$$L_1 = a, \qquad L_2 = N'(x_1), \qquad L_3 = M'(x_2),$$

où $N(x_1)$ et $M(x_2)$ doivent être deux fois différentiables. Alors

$$\Phi''(w) = \Sigma l_k f_k$$

existe relativement à la même règle, et on a

$$l_1 = N''(x_1), \qquad l_2 = 0, \qquad l_3 = M''(x_2).$$

Pour que $\Phi''(w)$ soit dérivable relativement à I_b, il faut encore que

$$N''(x_1) = l_1 = \text{const.} = 2b$$

et que $M(x_2)$ soit trois fois dérivable. Alors,

$$X_1 = \text{const.}, \qquad X_2 = ax_1 + a_1, \qquad X_3 = bx_1^2 + b_1 x + M(x_2) \tag{22}$$

et si $\Phi'''(w) = \Sigma_{mk} f_k$:

$$m_1 = 0, \qquad m_2 = 0, \qquad m_3 = M'''(x_2).$$

Ainsi la forme la plus générale des fonctions hypercomplexes du type I_b qui sont dérivables successivement trois fois relativement à la règle I_b pour $w = w_0$ est la forme (22) où $M(x_2)$ est une fonction arbitraire différentiable trois fois près de $x_2 = x_{20}$. Mais, on voit immédiatement qu'alors, si $M(x_2)$ est dérivable indéfiniment près de x_{20}, $\Phi(w)$ sera paraanalytique relativement à I_b pour $w = x_1 e_2 + x_{20} e_2$ quel que soit x_1 et qu'on aura

$$\Phi^{(n+2)}(w) = M^{(n+2)}(x_2) f_3.$$

Ainsi pour qu'une fonction hypercomplexe dérivable relativement à I_b près de w_0, soit paraanalytique relativement à I_b pour $w = w_0$, il faut et il suffit qu'elle soit indéfiniment différentiable près de w_0 et qu'elle soit dérivable *trois* fois relativement à I_b près de w_0.

VII. D'après les formules et notations de la page 46, pour que $\Phi'(w)$ soit dérivable relativement à VII comme $\Phi(w)$, il faut que L_1 et L_2 soient différentiables et que

$$0 = \frac{\partial L_1}{\partial x_2} = \frac{\partial L_2}{\partial x_1} = \frac{\partial L_1}{\partial x_1} - \frac{\partial L_2}{\partial x_2} = 0,$$

c'est-à-dire ici

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x_1^2} = -\frac{\partial^2 H}{\partial x_1 \partial x_2} = 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{\partial H}{\partial x_1} = \text{const.} = b, \qquad H = bx_1 + M(x_2).$$

Alors

$$L_1 = a, \qquad L_2 = b, \qquad L_3 = M'(x_2);$$

$M(x_2)$ doit être différentiable deux fois et cela suffit. On a alors

$$\Phi''(w) = M''(x_2) f_3.$$

La forme la plus générale des fonctions hypercomplexes $\Phi(w)$ dérivables deux fois relativement à la règle VII près de w_0 est donc

$$\Phi(w) = (ax_1 + a_1) f_1 + (ax_2 + a_2) f_2 + [bx_1 + M(x_2)] f_3, \tag{23}$$

où $M(x_2)$ est dérivable deux fois près de x_{20}.

Mais on observe que pour que $\Phi^{(n+1)}(w)$ existe pour $w = w_0$, il faut et il suffit que $M(x_2)$ soit $n+1$ fois dérivable près de $x_2 = x_{20}$; on aura alors

$$\Phi^{(n+1)}(w) = M^{(n+1)}(x_2) f_3.$$

Dès lors : la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction hypercomplexe $\Phi(w)$ soit paraanalytique relativement à la règle du type III, pour $w = w_0$, est que : 1° $\Phi(w)$ soit indéfiniment différentiable près de w_0; 2° que $\Phi(w)$ soit dérivable *deux* fois relativement à VII près de w_0.

Il résulte de l'ensemble de cette discussion la proposition suivante :

THÉORÈME. — *Pour qu'une fonction hypercomplexe* $\Phi(w)$ *soit paraanalytique relativement à une règle* R *quelconque pour* $w = w_0$, *il faut et il suffit à* 1° *que* $\Phi(w)$ *soit indéfiniment différentiable près de* w_0 ; 2° *que* $\Phi(w)$ *soit dérivable trois fois relativement à* R *près de* $w = w_0$.

[Quand R se ramène à I ou VII, il suffit de deux fois ; quand R est une règle ordinaire — donc de II à VI — il suffit d'une fois].

Pour le tableau qui suit, nous revenons aux notations X, Y, ..., v.

TABLEAU III.

Formes canoniques des fonctions hypercomplexes paraanalytiques et de leurs dérivées.

$$
\mathrm{I.}\left\{
\begin{array}{ll}
\mathrm{I}_{ap}. & \left\{
\begin{aligned}
\Phi(w) &= cf_1 + [au + \mathrm{B}(v)]f_2 + [u\mathrm{B}'(v) + \mathrm{C}(v)]f_3,\\
\Phi'(w) &= af_1 + \mathrm{B}'(v)f_2 + [u\mathrm{B}''(v) + \mathrm{C}'(v)]f_3,\\
\Phi^{(n+1)}(w) &= \mathrm{B}^{(n+1)}(v)f_2 + [u\,\mathrm{B}^{(n+2)}(v) + \mathrm{C}^{(n+1)}(v)]f_3;
\end{aligned}\right.\\
\mathrm{I}_{b_p} & \left\{
\begin{aligned}
\Phi(w) &= cf_1 + (au + a_1)f_2 + [bu^2 + b_1 u + \mathrm{M}(v)]f_3,\\
\Phi'(w) &= af_1 + (2\,bu + b_1)f_2 + \mathrm{M}'(v)f_3,\\
\Phi''(w) &= 2\,bf_1 + \mathrm{M}''(v)f_3,\\
\Phi^{(n+2)}(w) &= \mathrm{M}^{(n+2)}(v)f_3;
\end{aligned}\right.
\end{array}\right.
$$

$$
\mathrm{II.}\left\{
\begin{array}{ll}
\mathrm{II}_a. & \left\{
\begin{aligned}
\Phi(w) &= \mathrm{A}(u)f_1 + \mathrm{B}(u)f_2 + \mathrm{C}(v)f_3,\\
\Phi^{(n)}(w) &= \mathrm{A}^{(n)}(u)f_1 + \mathrm{B}^{(n)}(u)f_2 + \mathrm{C}^{(n)}(v)f_3;
\end{aligned}\right.\\
\mathrm{II}_b. & \left\{
\begin{aligned}
\Phi(w) &= \mathrm{A}(u)f_1 + \mathrm{B}(u)f_2 + [v\mathrm{A}'(u) + \mathrm{C}(u)]f_3,\\
\Phi^{(n)}(w) &= \mathrm{A}^{(n)}(u)f_1 + \mathrm{B}^{(n)}(u)f_2 + [v\mathrm{A}^{(n+1)}(u) + \mathrm{C}^{(n)}(u)]f_3;
\end{aligned}\right.\\
\mathrm{II}_c. & \left\{
\begin{aligned}
\Phi(w) &= \mathrm{A}(u)f_1 + \mathrm{B}(u)f_2 + \mathrm{C}(u)f_3,\\
\Phi^{(n)}(w) &= \mathrm{A}^{(n)}(u)f_1 + \mathrm{B}^{(n)}(u)f_2 + \mathrm{C}^{(n)}(u)f_3;
\end{aligned}\right.
\end{array}\right.
$$

$$
\mathrm{III.}\left\{
\begin{aligned}
\Phi(w) &= \mathrm{A}(u)f_1 + \mathrm{B}(v)f_2 + \mathrm{C}(u+v)f_3,\\
\Phi^{(n)}(w) &= \mathrm{A}^{(n)}(u)f_1 + \mathrm{B}^{(n)}(v)f_2 + \mathrm{C}^{(n)}(u+v)f_3;
\end{aligned}\right.
$$

$$
\mathrm{IV.}\left\{
\begin{aligned}
\Phi(w) &= \mathrm{A}(u)f_1 + [v\mathrm{A}'(u) + \mathrm{B}(u)]f_2 + \mathrm{C}(v)f_3,\\
\Phi^{(n)}(w) &= \mathrm{A}^{(n)}(u)f_1 + [v\mathrm{A}^{(n+1)}(u) + \mathrm{B}^{(n)}(u)]f_2 + \mathrm{C}^{(n)}(v)f_3;
\end{aligned}\right.
$$

$$
\mathrm{V.}\left\{
\begin{aligned}
\Phi(w) &= \mathrm{A}(u)f_1 + [v\mathrm{A}'(u) + \mathrm{B}(u)]f_2 + \left[\frac{v^2}{2}\mathrm{A}''(u) + v\mathrm{B}'(u) + \mathrm{C}(u)\right]f_3;\\
\Phi^{(n)}(w) &= \mathrm{A}^{(n)}(u)f_1 + [v\mathrm{A}^{(n+1)}(u) + \mathrm{B}^{(n)}(u)]f_2\\
&\quad + \left[\frac{v^2}{2}\mathrm{A}^{(n+2)}(u) + v\mathrm{B}^{(n+1)}(u) + \mathrm{C}^{(n)}(u)\right]f_3;
\end{aligned}\right.
$$

$$
\mathrm{VI.}\left\{
\begin{aligned}
&\Phi(w) = \mathrm{A}(u)f_1 + \mathrm{P}(u, v)f_2 + \mathrm{Q}(u, v)f_3,\\
&\quad \text{où } \mathrm{P} + i\mathrm{Q} = \mathrm{F}(u + iv) \text{ est fonction analytique de } u + iv \text{ près de } u_0 + iv_0;\\
&\Phi^{(n)}(w) = \mathrm{A}^{(n)}(u)f_1 + \mathrm{P}_n(u, v)f_2 + \mathrm{Q}_n(u, v)f_3,\\
&\quad \text{où } \mathrm{P}_n + i\mathrm{Q}_n = \mathrm{F}^{(n)}(u + iv);
\end{aligned}\right.
$$

$$
\mathrm{VII.}\left\{
\begin{aligned}
\Phi(w) &= (au + a_1)f_1 + (av + a_2)f_2 + [bu + \mathrm{M}(v)]f_3,\\
\Phi'(w) &= af_1 + bf_2 + \mathrm{M}'(v)f_3,\\
\Phi^{(n+1)}(w) &= \mathrm{M}^{(n+1)}(v)f_3.
\end{aligned}\right.
$$

Pour que $\Phi(w)$ soit paraanalytique pour $w = w_0$ relativement à une des règles canoniques, il faut et il suffit que dans l'expression correspondante de $\Phi(w)$ figurant au tableau ci-dessus, chacune des fonctions $\mathrm{M}(x_2)$, $\mathrm{A}(x_1)$, ... qui y figurent soit indéfiniment dérivable près de x_{20} (ou x_{10} suivant le cas).

Remarques. — 1° Nous avons placé l'initiale p de « paraanalytique » en indice aux cas I et VII pour rappeler qu'il ne s'agit plus des fonctions dérivables (relativement aux règles I ou VII) les plus générales.

2° Dans le tableau ci-dessus ne figurent plus de fonctions arbitraires (à une condition de différentiabilité près) de *deux* variables. En particulier, ne figure plus la forme générale de VII (du tableau I) qui, au point de vue géométrique est d'une généralité excessive.

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU TROISIÈME ORDRE. — THÉORÈME. — 1° *Les composantes* X, Y, Z *d'une fonction hypercomplexe « ordinaire » vérifient une même équation,* T, *aux dérivées partielles du troisième ordre, linéaire et homogène par rapport à ces dérivées;* 2° *Les composantes d'une fonction canonique « ordinaire » du tableau* I (c'est-à-dire appartenant aux types de II à VI) *vérifient l'équation canonique* T *correspondante du tableau* IV.

On vérifie, *à vue*, 2°, en comparant chaque système, de II à VI, du tableau II avec l'équation T correspondante du tableau III.

Alors, 1° résulte immédiatement de 2°.

Non seulement ce théorème est muet sur les cas I et VII, mais il leur est *inapplicable*. En effet, dans ces cas, l'une au moins des fonctions X, Y, Z dépendent d'une fonction arbitraire (à la différentiabilité près) de *deux variables*. Il est donc *impossible* de la soumettre à une équation aux dérivées partielles, de quelque nature qu'elle soit.

TABLEAU IV.

II. $\dfrac{\partial^3 U}{\partial u\, \partial v^2} = 0.$ (*)

III. $\dfrac{\partial^3 U}{\partial u^2\, \partial v} - \dfrac{\partial^3 U}{\partial u\, \partial v^2} = 0;$

IV. $\dfrac{\partial^3 U}{\partial u\, \partial v^2} = 0$ (la même que pour II);

V. $\dfrac{\partial^3 U}{\partial v^3} = 0;$

VI. $\dfrac{\partial^3 U}{\partial u^2\, \partial v} + \dfrac{\partial^3 U}{\partial v^3} = 0.$

(*) Cette équation, vérifiée dans les trois cas de II, peut être remplacée par une équation d'ordre inférieur dans chacun de ces trois cas : II_a. $\dfrac{\partial^2 U}{\partial u\, \partial v} = 0$; II_b. $\dfrac{\partial^2 U}{\partial v^2} = 0$; II_c. $\dfrac{\partial U}{\partial v} = 0$.

CONFLUENCES DE FAMILLES DE FONCTIONS DÉRIVABLES. — On peut se demander si plusieurs des familles I à VII de fonctions dérivables peuvent être « confluentes », c'est-à-dire s'il existe des fonctions qui sont dérivables à la fois relativement à des règles de multiplication correspondant à des familles distinctes.

La première forme de ce problème qui se pose naturellement à l'esprit est la suivante : chercher s'il existe des systèmes de fonctions X, Y, Z, qui soient chacun à la fois de plusieurs des formes canoniques du tableau I.

Une solution de ce problème sera intéressante en ce sens qu'elle donnera un *exemple* de familles confluentes.

Mais cette forme du problème est trop étroite. En effet, le tableau I n'est que *l'un* — quoique sans doute, l'un des plus simples — des tableaux de dix formes auxquelles on peut nécessairement ramener les fonctions dérivables. On obtiendra le tableau le plus général de ces dix formes en effectuant indépendamment sur chaque forme du tableau I, les « changements de coordonnées » les plus généraux sur X, Y, Z, et sur u, v.

On aura un cas de confluence quand un système de fonctions X, Y, Z appartiendra à la fois à deux des formes canoniques de l'un quelconque de ces tableaux. Cela revient à dire qu'on aura le cas de confluence le plus général quand on pourra passer d'un système canonique de fonctions du tableau I à un système différent de fonctions canoniques du tableau I par un « changement éventuel de coordonnées » sur X, Y, Z et sur u, v.

Dans la suite, nous appellerons $\mathcal{G}_{\text{I}}$, $\mathcal{G}_{\text{II}}$, ..., $\mathcal{G}_{\text{VII}}$ les familles de fonctions qui s'obtiennent par un « changement de variable » respectivement à partir des formes canoniques I, II, ..., VII.

Une solution simple. — Nous avons montré dans notre Mémoire préliminaire et l'on vérifie d'ailleurs aisément, que la fonction

$$\Phi(w) = u^2 f_1 + 2uvf_2 + v^2 f_3 \tag{24}$$

appartient à la fois à $\mathcal{G}_{\text{III}}$, $\mathcal{G}_{\text{IV}}$, $\mathcal{G}_{\text{V}}$, $\mathcal{G}_{\text{VI}}$.

Exemple de solution générale. — Nous avons aussi voulu montrer dans notre Mémoire préliminaire comment on peut résoudre le problème de la confluence de deux des familles $\mathcal{G}_{\ldots}$ en prenant pour exemple $\mathcal{G}_{\text{III}}$ et $\mathcal{G}_{\text{IV}}$.

Nous avons ainsi prouvé que les fonctions communes à $\mathcal{G}_{\text{III}}$ et $\mathcal{G}_{\text{IV}}$ peuvent toutes être ramenées par des « changements de variables » à l'une des formes ci-dessous.

$$\begin{aligned}
\Phi(w) &= u^2 f_1 + 2uvf_2 + v^2 f_3,\\
\Phi(w) &= \mathrm{A}(u) f_1 + vf_2 + uf_3,\\
\Phi(w) &= \mathrm{A}(u) f_1 + \mathrm{B}(v) f_2.
\end{aligned}$$

Fonctions hypercomplexes exponentielles. — Il est naturel d'appeler fonction exponentielle une fonction hypercomplexe dérivable $\mathrm{E}(w)$ identique à sa dérivée. Cette définition laisserait encore dans l'expression de la fonction des constantes arbitraires. On déterminerait, en général, ces constantes en assujettissant $\mathrm{E}(\mathcal{O})$ à être identique à un nombre hypercomplexe donné. Celui-ci devant être de la forme

$$\mathrm{I} = \alpha f_1 + \beta f_2 + \gamma f_3,$$

devrait être tel que $\mathrm{I}.\, w = w$ pour être assimilé comme dans l'Analyse classique à un nombre unité.

Or w est de la forme $x_1 e_1 + x_2 e_2$ et $\mathrm{I}.\, w$ de la forme $\mathrm{X}_1 f_1 + \mathrm{X}_2 f_2 + \mathrm{X}_3 f_3$. Nous laisserons donc de côté cette assimilation. Il restera alors dans $\Phi(w)$ des constantes arbitraires.

On observera aussi que l'égalité classique $e^{w+w'} = e^{w} e^{w'}$ *ne peut se généraliser ici*, puisque $E(w)\,E(w')$ est de la forme $(af_1 + \ldots + cf_3)(a'f_1 + \ldots + c'f_3)$, produit pour lequel aucune règle de multiplication n'a été prévue dans ce qui précède.

En employant la condition $E(w) \equiv E'(w)$ pour chacune des règles canoniques, on obtient par des calculs faciles le tableau suivant où, au moins pour les cas « ordinaires » (de II à VI), les constantes ont pu être choisies de sorte que l'on ait

$$E(\mathcal{O}) = \alpha f_1 + \beta f_2 + \gamma f_3,$$

où $\alpha f_1 + \beta f_2 + \gamma f_3$ est un nombre hypercomplexe à trois dimensions qui est *arbitraire*.

Dans les autres cas : pour I_a, il faut supposer $\alpha = 0$; pour I_b et VII, il faut supposer $\alpha = \beta = 0$.

TABLEAU V.

Fonctions hypercomplexes exponentielles canoniques.

$$\text{I.}\left\{\begin{array}{ll} \mathrm{I}_a : & E(w) = e^{v}[\beta f_2 + (\beta u + \gamma) f_3], \\ \mathrm{I}_b : & E(w) = e^{v} \gamma f_3; \end{array}\right.$$

$$\text{II.}\left\{\begin{array}{ll} \mathrm{II}_a : & E(w) = e^{u}(\alpha f_1 + \beta f_2) + e^{v} \gamma f_3, \\ \mathrm{II}_b : & E(w) = e^{u}[\alpha f_1 + \beta f_2 + (\alpha v + \gamma) f_3]; \\ \mathrm{II}_c : & E(w) = e^{u}(\alpha f_1 + \beta f_2 + \gamma f_3); \end{array}\right.$$

$$\text{III.} \quad E(w) = e^{u} \alpha f_1 + e^{v} \beta f_2 + e^{u+v} \gamma f_3;$$

$$\text{IV.} \quad E(w) = e^{u}[\alpha f_1 + (\alpha v + \beta) f_2] + \gamma e^{v} f_3;$$

$$\text{V.} \quad E(w) = e^{u}\left[\alpha f_1 + (\alpha v + \beta) f_2 + \left(\frac{\alpha}{2} v^2 + \beta v + \gamma\right) f_3\right];$$

$$\text{VI.} \quad E(w) = e^{u}[\alpha f_1 + (\beta \cos v - \gamma \sin v) f_2 + (\beta \sin v + \gamma \cos v) f_3];$$

$$\text{VII.} \quad E(w) = \gamma e^{v} f_3.$$

LES FONCTIONS HYPERCOMPLEXES TRIGONOMÉTRIQUES. — Par analogie avec les fonctions $\cos x$, $\sin x$, nous pouvons définir deux fonctions associées $C(w)$ et $S(w)$ telles qu'elles soient dérivables relativement à la même règle et que l'on ait

$$(25) \qquad C'(w) = -S(w), \qquad S'(w) = \Phi(w).$$

Nous pouvons bien, comme pour la fonction $\sin x$, imposer à $S(w)$ la condition

$$(26) \qquad S(\mathcal{O}) = \mathcal{O}.$$

Mais, comme pour la fonction exponentielle, nous ne pouvons essayer d'imposer à $\Phi(w)$ que la condition

$$(27) \qquad C(\mathcal{O}) = \alpha f_1 + \beta f_2 + \gamma f_3,$$

sans supposer que le second membre soit une « unité principale » au sens strict.

Des calculs faciles permettent alors d'obtenir le tableau suivant des formes canoniques du système C, S correspondant aux différentes règles canoniques.

Pour abréger ce tableau, au lieu d'y détailler C et S, nous avons écrit les expressions de $C + iS$.

On vérifiera que la condition (27) peut être imposée quelles que soient les constantes α, β, γ *dans les cas* ordinaires. Dans les autres cas, il faudra supposer : pour I_a, que $\alpha = 0$; pour I_a et VII, que $\alpha = \beta = 0$.

TABLEAU VI.

Formes canoniques des systèmes C, S *de fonctions hypercomplexes trigonométriques associées.*

$$C(w) + iS(w) =$$

$$\text{I.}\left\{\begin{array}{ll} I_a: & e^{iv}[\beta(f_2 + iuf_3) + \gamma f_3], \\ I_b: & e^{iv}\gamma f_3; \end{array}\right.$$

$$\text{II.}\left\{\begin{array}{ll} II_a: & e^{iu}[\alpha f_1 + \beta f_2] + e^{iv}\gamma f_3, \\ II_b: & e^{iu}[\alpha(f_1 + vif_3) + \beta f_2 + \gamma f_3], \\ II_c: & e^{iu}[\alpha f_1 + \beta f_2 + \gamma f_3]; \end{array}\right.$$

$$\text{III.}\qquad e^{iu}\alpha f_1 + e^{iv}\beta f_2 + e^{i(u+v)}\gamma f_3;$$

$$\text{IV.}\qquad e^{iu}[\alpha(f_1 + ivf_2) + \beta f_2] + e^{iv}\gamma f_3;$$

$$\text{V.}\qquad e^{iu}\left[\alpha\left(f_1 + ivf_2 - \frac{v^2}{2}f_3\right) + \beta(f_2 + ivf_3) + \gamma f_3\right];$$

$$\text{VI.}\qquad e^{iu}[\alpha f_1 + \beta(\operatorname{ch} v f_2 + i \operatorname{sh} v f_3) + \gamma(-i \operatorname{sh} v f_2 + \operatorname{ch} v f_3)];$$

$$\text{VII.}\qquad e^{iv}\gamma f_3.$$

DEUXIÈME PARTIE.

INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE.

UNE RESTRICTION. — On peut définir de bien des manières ce qu'on entend par surface. Pour la commodité de ce qui suit, nous nous limiterons à la considération de la famille (pourtant très générale) des surfaces telles que chacune d'elles possède *au moins une* représentation paramétrique

$$X = X(u, v), \qquad Y = Y(u, v), \qquad Z = Z(u, v),$$

où X, Y, Z sont trois fonctions de u, v qui sont *différentiables* [10] en tout point (u, v) du domaine $\mathcal{D}$ (fini ou infini) de définition de la surface dans le plan des u, v.

---

[10] Au sens de Stolz-Young, précisé page 31.

Définition des surfaces dérivables relativement a une règle de multiplication. — Soit une règle R de multiplication hypercomplexe de la forme

$$\mathrm{R}\left\{\begin{array}{l} f_k . e_r = \sum_k a_{krh} f_h, \\ (k, h = 1, 2, 3;\ r = 1, 2). \end{array}\right.$$

Nous dirons qu'une surface S est *dérivable relativement à la règle* R s'il existe au moins une représentation paramétrique de cette surface, soit

$$X = X(u, v), \qquad Y = Y(u, v), \qquad Z = Z(u, v)$$

[où le point de coordonnées u, v varie dans un domaine déterminé, $\mathcal{D}$, fini ou infini], telle que la fonction hypercomplexe correspondante

$$(28) \qquad \left\{\begin{array}{l} \Phi(w) \equiv \Phi(u\, e_1 + v\, e_2) \\ \qquad\quad \equiv X(u, v) f_1 + Y(u, v) f_2 + Z(u, v) f_3 \end{array}\right.$$

soit *dérivable relativement à la règle de multiplication* R. C'est-à-dire, rappelons-le, que $X(u, v)$, $Y(u, v)$ $Z(u, v)$ sont *différentiables* dans le domaine $\mathcal{D}$ et qu'*il existe une fonction hypercomplexe* et *une seule* désignée par la notation $\Phi'(w)$, soit

$$(28\ bis) \qquad \Phi'(w) \equiv L(u, v) f_1 + M(u, v) f_2 + N(u, v) f_3$$

indépendante de dw et telle que

$$(29) \qquad d\Phi(w) = \Phi'(w)\, dw$$

dans le domaine $\mathcal{D}$ de définition de Φ, la multiplication dans (29) étant effectuée suivant la règle R.

Surfaces dérivables ordinaires. — Quand une au moins des représentations paramétriques d'une surface S correspond à une fonction hypercomplexe dérivable *ordinaire*, c'est-à-dire de l'un des types II à VI du tableau I de la page 38, nous dirons que S est une surface dérivable ordinaire.

Rappel de résultats du Mémoire préliminaire.

Formes canoniques des équations des surfaces dérivables. — En éliminant les paramètres u, v dans les relations égalant à X, Y, Z les composantes des fonctions dérivables canoniques rappelées au tableau I de la page 38, on trouve les formes canoniques des équations des surfaces dérivables, formes rassemblées dans le tableau ci-après. La déduction de ces équations est généralement immédiate et, en tout cas, figure dans notre Mémoire préliminaire.

TABLEAU VII.

Formes canoniques des équations des surfaces dérivables relativement à une règle R.

I.		$Z = 0$	plan;
II.	II_a, II_b :	$F(X, Y) = 0$	cylindre,
	II_c :	$F(X, Y) = 0, \quad G(Y, Z) = 0,$	courbe;
III.		$a(X) + b(Y) = c(Z)$, où $a(X)$, ni $b(Y)$, ni $c(Z)$ ne sont constants;	
VI.		$Z = \beta(Y)\alpha(X) + \gamma(X)$, où $\alpha(X) \not\equiv 0$, $\beta'(Y) \not\equiv 0$;	
V.		$Z = \alpha(X)Y^2 + \beta(X)Y + \gamma(X)$, lieu de paraboles parallèles à YOZ, avec axes parallèles à OZ;	
VI.		$a(Z) = U(X, Y)$, où $\dfrac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \dfrac{\partial^2 U}{\partial Y^2} = 0$;	
VII.		$Z = K(X, Y)$.	

Pour avoir des notations plus familières, on a plusieurs fois opéré des permutations de coordonnées dans les équations qui résultent directement du tableau I.

Remarques. — 1° Les fonctions qui figurent dans ce tableau *ne sont pas nécessairement uniformes*. Par exemple, si la fonction

$$\Phi(w) = A(u)f_1 + B(v)f_2 + C(u+v)f_3$$

du type III du tableau I a la forme particulière

$$\Phi(w) = u^2 f_1 + v^2 f_2 + (u+v)^2 f^3,$$

on aura pour équation de la surface dérivable correspondante, la forme III du tableau VII, mais avec

$$a(X) = \pm\sqrt{X}, \qquad b(Y) = \pm\sqrt{Y}, \qquad c(Z) = \pm\sqrt{Z}.$$

2° Les surfaces du type VII sont peu intéressantes, car elles sont trop générales. K(X, Y) doit être univalente et différentiable dans son domaine de définition. C'est-à-dire que, pour ce type, la surface S n'est assujettie qu'à n'être rencontrée qu'en un seul point, au plus, par une droite parallèle à une droite fixe Δ et à avoir en chaque point un plan tangent non parallèle à Δ (ici OZ).

On pourrait alors se demander s'il y a lieu de considérer les autres cas I, II, ..., où l'on aurait des surfaces, cas particuliers du type VII. Mais il ne faut pas oublier qu'elles sont dérivables relativement à d'*autres* règles.

ÉQUIVALENCE D'ÉQUATIONS D'UNE MÊME SURFACE DÉRIVABLE. — Il peut arriver qu'une même surface canonique dérivable puisse être représentée par plusieurs équations distinctes quoique équivalentes, rapportées aux mêmes axes et d'une même forme canonique du tableau I.

Dans notre Mémoire préliminaire, nous avons obtenu les formes *les plus générales* de ces équivalences :

Dans le cas III, on peut remplacer $a(X)$, $b(Y)$, $c(Z)$ du tableau I par

$$\lambda a(X) + \mu, \quad \lambda b(Y) + \mu', \quad \lambda c(Z) + \mu + \mu' \qquad (\lambda \neq 0.$$

Dans le cas IV, on peut remplacer α, β, γ par

$$\frac{\alpha(X)}{\lambda}, \quad \lambda\beta(Y) + \mu, \quad \gamma(X) - \frac{\mu}{\lambda}\alpha(X) \qquad (\lambda \neq 0).$$

Dans le cas VI, on peut remplacer a et U par

$$\lambda \bar{a}(Z) + \mu, \quad \lambda U(X, Y) + \mu \qquad (\lambda \neq 0).$$

Dans les cas V et VII, il n'y a pas de changement possible.

On voit que dans tous ces changements les fonctions figurant dans le tableau ne peuvent être remplacées que par des fonctions *linéaires* (et non plus générales) de ces fonctions.

Équation aux dérivées partielles du troisième ordre entre les coordonnées d'un point d'une surface dérivable. — Soit S une surface dérivable relativement à une règle R. Par des changements linéaires et biunivoques de coordonnées, on peut toujours ramener son équation à la forme

$$Z = \varphi(X, Y).$$

Nous avons démontré les deux théorèmes suivants dans notre Mémoire préliminaire.

Théorème. — Soit

$$Z = \varphi(X, Y)$$

l'équation d'une surface S *dérivable « ordinaire », Dans le cas où* $\varphi(X, Y)$ *est trois fois différentiable dans son domaine de définition, cette fonction* φ *vérifie une équation aux dérivées partielles du troisième ordre, linéaire par rapport à ces dérivées du troisième ordre et à coefficients polynomiaux par rapport aux dérivée du premier et du deuxième ordre.*

Dans le cas où S est un plan

$$Z = aX + bY + c,$$

on aura

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial X^3 \partial Y} = 0$$

et, par suite, on aura par exemple

$$\frac{\partial^3 Z}{\partial X^2 \partial Y} = 0.$$

Dans le cas où S est un cylindre, on a

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial X^2}\frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2} - \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial X\,\partial Y}\right)^2 = 0$$

et en dérivant en X ou en Y, on aura bien une équation du troisième ordre du type annoncé.

Dans le cas de la famille VII, l'équation de S dépend d'une fonction de deux variables qui est arbitraire, à des conditions près de différentiabilité près. Par conséquent, elle ne peut être soumise à aucune équation aux dérivées partielles.

Le théorème précédent se déduit d'ailleurs immédiatement du théorème suivant :

Théorème. — *Toute surface dérivable « ordinaire » dont l'équation a l'une des formes canoniques* III *à* VI *du tableau* I *et telle que* Z *soit différentiable trois fois dans le domaine de définition, vérifie l'équation aux dérivées partielles correspondante du tableau* VIII *ci-après.*

Pour écrire plus brièvement ce tableau, nous poserons comme d'habitude

$$P = \frac{\partial Z}{\partial X}, \qquad \ldots, \qquad T = \frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2}$$

et, en outre,

$$\lambda = \frac{\partial^3 Z}{\partial X^3}, \qquad \mu = \frac{\partial^3 Z}{\partial X^2 \partial Y}, \qquad \nu = \frac{\partial^3 Z}{\partial X\,\partial Y^2}, \qquad \rho = \frac{\partial^3 Z}{\partial Y^3}.$$

Tableau VIII.

Équations canoniques aux dérivées partielles des surfaces dérivables.

III. $(\mu Q - \nu P) PQ = S(RQ^2 - TP^2)$;

IV. $\nu Q = TS$;

V. $\rho = 0$;

VI. $[(\lambda + \nu) Q - (\mu + \rho) P](P^2 + Q^2) = 2(R + T)\{PQ(R - T) + S(Q^2 - P^2)\}$.

Les familles $\mathcal{H}$. — Soit S une surface dérivable relativement à R; elle possède une représentation paramétrique déterminée par une fonction hypercomplexe dérivable relativement à R. Cette dernière peut par des « changements de variables » convenables être amenée à prendre une forme canonique du tableau I. C'est dire qu'en effectuant préalablement une transformation linéaire et biunivoque des coordonnées X, Y, Z (et en gardant les mêmes axes), on transforme la surface S en une surface S_1 possédant une représentation paramétrique déterminée par une des fonctions canoniques du tableau I. Selon que cette fonction est du type I_a, I_b, ..., VII, on dira que S_1 *et* S appartiennent à la famille de surfaces $\mathcal{H}_{I_a}$, ..., $\mathcal{H}_{VII}$.

Les surfaces que nous avons appelées surfaces dérivables *ordinaires* sont les surfaces appartenant aux familles de $\mathcal{H}_{II}$ à $\mathcal{H}_{VI}$.

CONFLUENCE DES FAMILLES DE SURFACES DÉRIVABLES. — On peut poser pour les surfaces dérivables un problème analogue au problème de la confluence des familles de fonctions dérivables.

I. Sous une première forme restreinte de ce problème, on peut demander s'il existe des surfaces pouvant être également représentées par des équations appartenant à plusieurs types différents dans le tableau VII.

Il est facile de donner des exemples simples qui permettent de répondre par l'affirmative.

Par exemple, a surface

$$Z = \alpha(X)\beta(Y) \tag{30}$$

est évidemment un cas particulier du type IV du tableau VII. Et quand on prend les logarithmes des valeurs absolues des deux membres de (30), on obtient une équation du type III.

Mais on peut se proposer de trouver, non un exemple, mais toutes les surfaces représentables par deux équations équivalentes des types canoniques respectifs distincts.

Il est curieux de noter qu'un tel problème ait pu être posé et résolu (pour la confluence des types III et VI) sans référence ni au tableau VII, ni à la notion de surface dérivable, par deux auteurs agissant indépendamment et pour des raisons distinctes.

En réalité, ce n'était pas le problème lui-même, mais un problème analytique équivalent qui a été considéré d'abord par Bouligand (11), puis par H. Martin (12).

Il s'agissait pour eux de trouver deux fonctions d'une seule variable : $a(X)$ et $b(Y)$ telles qu'il existe une fonction $F(X, Y)$ pour laquelle la fonction

$$U(X, Y) = F[a(X) + b(Y)]$$

soit harmonique. Alors on voit que quelle que soit la fonction $A(Z)$, la surface ayant pour équation

$$A(Z) = U(X, Y) \tag{31}$$

et qui sera, par conséquent, du type VI du tableau VII, aura aussi pour équation

$$A(Z) = F[a(X) + b(Y)] \qquad \text{ou} \qquad c(Z) = a(X) + b(Y)$$

qui est du type III. Et réciproquement, toute surface dont l'équation peut se mettre aussi bien sous la forme III que sous la forme VI, correspond à une solution du problème de Bouligand et de Martin.

II. Mais, en réalité, le problème de la confluence, posée sous la première

---

(11) Dans le numéro de juillet 1949 de la *Revue de Mathématiques spéciales*, Vuibert, Paris, ce problème est proposé à titre d'exercice avec indications sur la solution.

(12) *Journal of rational Mechanics and Analysis*, vol. II, n° 2.

forme, est trop restreint. Car le tableau I n'est que l'un, quoique sans doute l'un des plus simples, des tableaux équivalents de formes canoniques pour chacun desquels se poserait le problème sous sa première forme.

Le vrai problème de la confluence consiste à chercher s'il y a des surfaces qui appartiennent à la fois à plusieurs des familles $\mathcal{H}_{\text{I}}, \ldots, \mathcal{H}_{\text{VII}}$ définies à la page 58.

Il faut d'ailleurs observer que le problème est tout résolu quand on veut chercher les surfaces communes à $\mathcal{H}_{\text{VII}}$ et à l'une des autres familles. Car les surfaces

$$Z = K(X, Y)$$

sont si générales qu'il y en a de cette forme dans chacune des autres familles $\mathcal{H}$.

Méthode indirecte. — Observons d'abord que toute forme confluente de fonctions hypercomplexe dérivable donne lieu à une solution du problème actuel. Mais la réciproque n'est pas vraie. Nous en donnons plus loin un exemple.

Un exemple. — Nous nous contenterons d'indiquer comment se pose le problème pour les types III et IV.

Tout d'abord, notons que les trois formes de la page 52 nous fournissent toutes les solutions qu'on peut obtenir par la méthode indirecte, à savoir :

le cône du second degré : $Y^2 = 4XZ$;
le cylindre : $X = A(Z)$;
le plan : $Z = 0$;

ainsi que les surfaces qui dérivent de celles-ci par une transformation linéaire et biunivoque de X, Y, Z.

Mais, nous avons déjà signalé (p. 59), des surfaces beaucoup plus générales, à savoir les surfaces

$$Z = \alpha(X)\beta(Y)$$

auxquelles on peut ajouter celles qui s'en déduisent par une transformation linéaire et biunivoque de X, Y, Z.

Pour chercher toutes les surfaces communes à $\mathcal{H}_{\text{III}}$ et $\mathcal{H}_{\text{IV}}$, on observera que si deux transformations linéaires et biunivoques de X, Y, Z ramènent son équation, l'une à la forme canonique III, l'autre à la forme canonique IV du tableau, alors il y a une transformation analogue

$$(32)\qquad \begin{cases} X_1 = lX + mY + nZ + p; \\ Y_1 = l'X + m'Y + n'Z + p'; \\ Z_1 = l''X + m''Y + n''Z + p'', \end{cases}$$

menant d'une des équations

$$(33)\qquad a(X_1) + b(Y_1) = c(Z_1)$$

du type III à une équation

$$Z = \alpha(X)\beta(Y) + \gamma(X) \tag{33 bis}$$

du type IV. Il faut donc chercher s'il existe des fonctions a, b, c, α, β, γ et des constantes l, m', ..., n'' (avec déterminant des coefficients de X_1, Y_1, Z_1 différent de zéro) telles qu'on ait l'identité

$$\begin{aligned} &a(lX + mY + n[\alpha(X)\beta(Y) + \gamma(X)] + p) \\ &\quad + b(l'X + m'Y + n'[\alpha(X)\beta(Y) + \gamma(X)] + p') \\ &\quad \equiv c(l''X + m''Y + n''[\alpha(X)\beta(Y) + \gamma(X)] + p''). \end{aligned}$$

Ou encore on peut tirer de (33)

$$X_1 = A(u), \qquad Y_1 = B(v), \qquad Z_1 = C(u+v)$$

et de (32)

$$X = \lambda X_1 + \mu Y_1 + \nu Z_1 + \rho, \qquad \ldots, \qquad Z = \lambda'' X_1 + \ldots + \rho''. \tag{34}$$

Et il faudra trouver des fonctions A, B, C, α, β, γ et des constantes λ, μ, ..., ρ'', telles que l'on ait l'identité

$$\begin{aligned} &\lambda'' A(u) + \mu'' B(v) + \nu'' C(u+v)\rho \\ &\quad \equiv \alpha(\lambda A + \mu B + \nu C + \rho)\,\beta(\lambda' A + \mu' B + \nu' C + \rho') + \gamma(\lambda A + \mu B + \nu C + \rho), \end{aligned}$$

avec un déterminant des coefficients de X_1, Y_1, Z_1, dans (34) qui soit $\neq 0$. Des problèmes analogues se présentent pour toutes les combinaisons analogues des types canoniques deux à deux.

Il faudrait ainsi résoudre une dizaine d'équations fonctionnelles pour traiter complètement un problème qui n'est plus d'importance fondamentale à partir du moment où des exemples simples ont suffit à prouver que les confluences sont possibles.

Nous laisserons à de jeunes mathématiciens le soin de s'y exercer.

Surfaces dérivées relativement à une règle de multiplication.

Introduction. — La définition des surfaces dérivables nous a déjà conduit à une classification des surfaces qui nous paraît intéressante. *Elle fait découler d'une conception commune des familles de surfaces dont les équations canoniques, figurant au tableau* VII *paraissent, au premier abord, sans lien l'une avec l'autre.*

Il vaudrait d'ailleurs la peine de chercher si l'on peut exprimer sous forme purement géométrique la définition d'une surface dérivable (que nous avons donnée ici sous forme d'une condition *analytique* imposée à l'une de ses représentations paramétriques).

On va maintenant déduire de notre définition la notion de *surfaces dérivées d'une surface donnée,* notion qui nous paraît *plus particulièrement nouvelle et intéressante.*

Définition. — Soit S une surface dérivable relativement à une règle R. Elle a une représentation paramétrique correspondant à une fonction $\Phi(w)$ dérivable relativement à R. De même que $\Phi(w)$ détermine une surface S, de même sa dérivée $\Phi'(w)$ détermine une surface S′ qu'il sera naturel d'appeler une *surface dérivée de* S *relativement* à la règle R.

Nous disons *une* surface dérivée de S et non *la* surface dérivée de S.

En effet, nous avons montré, dans notre Mémoire préliminaire, qu'une surface S dérivable relativement à R possède une infinité de représentations paramétriques définies par des fonctions $\Psi(w)$ distinctes de $\Phi(w)$ et pourtant encore dérivables relativement à R. Chaque dérivée $\Psi'(w)$ définira une représentation paramétrique distincte, en général, de celle définie par Φ et correspondant à une surface T. *dérivée de* S *relativement* à R. Ces surfaces T seront en général, *distinctes* de S′.

Surfaces dérivées d'une même surface. — Nous avons démontré dans notre Mémoire préliminaire que si pour une surface S dérivable relativement à une règle R, u, v et u_1, v_1 déterminent un même point de S dans deux représentations paramétriques de S correspondant à deux fonctions dérivables relativement à R, $\Phi(w)$, $\Psi(w_1)$, et si S n'est pas une surface cylindrique (en particulier n'est ni plane, ni curviligne), la relation entre u, v et u_1, v_1 est nécessairement de la forme

$$u = \beta u_1 + \beta_1, \qquad v = \beta v_1 + \beta_2, \qquad (\beta \neq 0).$$

En posant

$$\Psi(w_1) = \xi(u_1, v_1) f_1 + \eta(u_1, v_1) f_2 + \varphi(u_1, v_1) f_3,$$

comme

$$\Psi(w_1) \equiv \Psi(u_1 e_1 + v_1 e_2) = \Phi[(\beta u_1 + \beta_1) e_1 + (\beta v_1 + \beta_2) e_2] = \Phi(\beta w_1 + \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2),$$
$$dw = \beta(du_1 e_1 + dv_1 e_2) = \beta\, dw_1,$$

on aura :

$$\Psi'\, dw_1 = d\Psi(w_1) = d\Phi(w) = \Phi' \beta\, dw_1 = \beta \Phi'\, dw_1.$$

Donc $\Psi'(w_1) = \beta \Phi'(w)$ qui s'explicite sous la forme

$$l f_1 + m f_2 + n f_3 = \beta(\mathrm{L} f_1 + \mathrm{M} f_2 + \mathrm{N} f_3).$$

La surface T dérivée de S par l'intermédiaire de Ψ aura donc, pour chaque point, des coordonnées

$$l = \beta \mathrm{L}, \qquad m = \beta \mathrm{M}, \qquad n = \beta \mathrm{N} \qquad (\beta \neq 0)$$

proportionnelles aux coordonnées L, M, N d'un point de la surface S′ dérivée de S par l'intermédiaire de Φ.

On obtient ainsi des surfaces dérivées toutes homothétiques de l'une d'entre elles.

TRANSLATIONS. — Observons que l'équation de définition

$$dXf_1 + \ldots = [Lf_1 + \ldots](du\,e_1 + dv\,e_2)$$

reste vérifiée quand X, Y, Z sont remplacés par $X + a$, $Y + b$, $Z + c$, sans changer L, M, N, u, v, ni la règle R de multiplication.

Par conséquent, si la surface S restant fixe, on opère une translation des axes, aux équations

$$X_1 = a + X(u, v), \qquad \ldots, \qquad Z_1 = c + Z(u, v)$$

qui par rapport aux nouveaux axes, définissent la même surface S, s'adjoindront des équations

$$X_1 = L(u, v), \qquad Y_1 = M(u, v), \qquad Z_1 = N(u, v)$$

qui par rapport aux nouveaux axes définissent une surface dérivée de S, relativement à la même règle R, obtenue par translation de la surface dérivée S′. De même, la surface T_1 obtenue par translation de T sera une surface dérivée de S relativement à la même règle R. T_1 sera une surface homothétique de S′ mais par rapport à un point, en général distinct de l'origine.

Autrement dit : *toutes les surfaces dérivées d'une même surface dérivable non réduite à une surface cylindrique* (ou plane ou curviligne), *sont homothétiques de l'une d'entre elles* ([13]). *Et réciproquement.*

Non seulement la démonstration ne s'applique pas aux surfaces dérivables cylindriques, mais l'énoncé lui-même ne s'y applique pas. Plus précisément, chacune de telles surfaces aura bien pour dérivées au moins les homothétiques de l'une de ces surfaces dérivées, mais il pourra y en avoir d'autres. C'est ce que va montrer l'exemple suivant.

Exemple. — Prenons, par exemple, la surface du type II b

$$X = u, \qquad Y = e^u, \qquad Z = v. \tag{35}$$

C'est le cylindre

$$Y = e^X. \tag{36}$$

Si on le représente sous la forme générale du même type IIb

$$X = \xi(u_1), \qquad Y = \eta(u_1), \qquad Z = v_1\,\xi'(u_1) + \varphi(u_1), \tag{37}$$

il suffit, pour avoir le même cylindre, que l'on ait

$$\eta(u_1) = e^{\xi(u_1)}. \tag{36 bis}$$

Or la surface S'_0 dérivée de S par la représentation (35) est d'après (   )

$$L = 1, \qquad M = e^u, \qquad N = 0;$$

([13]) Ceci dit en abrégé, en considérant une translation comme une homothétie dont le centre est à l'infini.

elle est réduite à la droite

$$L = 1, \qquad N = 0.$$

La surface S′ dérivée de S par la représentation (37) est :

$$l = \xi'(u_1), \qquad m = \eta'(u_1), \qquad n = v_1 \xi''(u_1) + \varphi'(u_1).$$

Elle est cylindrique. Si elle était homothétique de S'_0, dans le rapport p, on aurait

$$l = pL + a, \qquad n = pN + b,$$

d'où

$$(38) \qquad \xi'(u_1) = p + a, \qquad v_1 \xi''(u_1) + \varphi'(u_1) = b.$$

Or si l'on a soin de déterminer $\eta(u_1)$ par la relation (36 *bis*) connaissant $\xi(u_1)$, la représentation (37) donnera le même cylindre (36) quelle que soit la fonction $\xi(u_1)$. On n'aura donc pas nécessairement (38) : les dérivées S′ ne sont pas nécessairement homothétiques de S'_0.

. — D'autre part, considérons une surface U, homothétique d'une surface S dérivable relativement à R. Si S correspond à $\Phi(w)$, U correspondra à

$$\Psi(w) = \beta\Phi(w) + w_0.$$

On aura

$$d\Psi(w) = \beta\, d\Phi(w) = [\beta\Phi'(w)]\, dw.$$

Donc $\Psi(w)$ est dérivable relativement à R et

$$(39) \qquad \Psi'(w) = \beta\Phi'(w).$$

$\Psi'(w)$ correspond à une surface U′ dérivée de U relativement à R et l'on voit d'après (39) que U′ est homothétique de S′. D'après ce qui précède, U′ est donc aussi une surface dérivée de S relativement à R.

Finalement nous voyons qu'*il n'y a pas*, au point de vue géométrique, *correspondance* entre une surface S non cylindrique dérivable relativement à R et *sa* surface dérivée S′ relativement à R, mais *seulement correspondance* entre :

la famille des surfaces U (nécessairement dérivables relativement à R) homothétiques d'une surface S dérivable relativement à R,

et la famille des surfaces U′ (nécessairement dérivées de toutes les surfaces U, relativement à R) homothétiques de l'une, S′, des surfaces dérivées de S, relativement à R.

On peut encore dire que toute surface U′ de la seconde famille est une surface dérivée relativement à R (à une homothétie près) de toute surface S de la première famille.

Surfaces paraanalytiques. — Nous dirons qu'une surface est *paraanalytique relativement à une règle* R si l'une au moins de ses représentations paramétriques correspond à une fonction hypercomplexe paraanalytique relativement à la règle R (c'est-à-dire une fonction hypercomplexe dérivable indéfiniment relativement à R dans le domaine $\mathcal{D}$ de définition de la surface S).

Il est clair que les dérivées successives de S relativement à R seront alors aussi des surfaces paraanalytiques relativement à R.

Équations des surfaces dérivées d'une surface dérivable donnée par son équation canonique. — Soit S une surface dérivable relativement à une règle R, et donnée par son équation $F(X, Y, Z) = 0$. Nous savons qu'elle a une famille de surfaces dérivées de S relativement à R, famille parfaitement définie et formée (exclusivement quand S n'est pas cylindrique) de surfaces homothétiques entre elles. Il est naturel de se demander comment on pourra former l'équation générale de ces surfaces dérivées connaissant l'équation de S.

Nous savons d'abord que par des « changements de coordonnées » (définis p. 33), nous pouvons ramener l'équation de S à l'une des formes III à VII précisées page 56. Alors on peut former la représentation paramétrique correspondante de S. Celle d'une des surfaces dérivées sera donnée par les expressions correspondantes (déduites des pages 45 et 46)

$$X = L(u, v), \qquad \ldots, \qquad Z = N(u, v).$$

Et de cette représentation, on pourra tirer l'équation

$$\varphi(X, Y, Z) = 0$$

de l'une des surfaces S′ dérivées de S. L'équation générale des surfaces dérivée de S sera alors

$$\varphi(\lambda X + a, \lambda Y + b, \lambda Z + c) = 0,$$

où λ, a, b, c sont des paramètres arbitraires ($\lambda \neq 0$).

Nous allons effectuer le calcul de $\varphi(X, Y, Z)$ pour chacune des formes canoniques de III à VII, en laissant de côté le cas des surfaces des types I et II, puisque ces surfaces sont nécessairement cylindriques.

Forme III. — Soit

$$a(X) + b(Y) = c(Z) \tag{40}$$

(où aucun des trois termes n'est constant), l'équation de la surface S. Par hypothèse, on peut alors adopter la représentation paramétrique

$$u = a(X), \qquad v = b(Y), \qquad u + v = c(Z),$$

d'où

$$X = A(u), \qquad Y = B(v), \qquad Z = C(u + v).$$

Alors, d'après la page 45, la représentation

$$X_1 = A'(u), \qquad Y_1 = B'(v), \qquad Z_1 = C'(u + v)$$

sera celle d'une S', des surfaces dérivées de S; d'où l'on tire l'équation de S' qui sera de la forme

$$(41) \qquad \alpha(X_1) + \beta(Y_1) = \gamma(Z_1),$$

étant entendu que α, β, γ sont déduites respectivement de a, b, c par le processus indiqué.

On peut d'ailleurs formuler explicitement l'équation fonctionnelle qui relie $\alpha(X)$ et $a(X)$, par exemple.

En effet, on a

$$X = A[a(X)], \qquad X_1 = A'[\alpha(X_1)], \qquad \text{d'où} \qquad 1 = A'[a(X)]\,a'(X).$$

Or on a

$$a(X) = u = \alpha(X_1), \qquad \text{d'où} \qquad 1 = A'[\alpha(X_1)]\,a'(X) = X_1 a'(X)$$

et, par suite,

$$a(X) = \alpha\left[\frac{1}{a'(X)}\right].$$

Ainsi, connaissant l'équation (40) de S et, par suite, $a(X)$, $b(Y)$, $c(Z)$, il suffira pour former l'équation (41) de S', de tirer α, β, γ des équations fonctionnelles

$$(42) \qquad \boxed{a(X) = \alpha\left[\frac{1}{a'(X)}\right], \qquad b(Y) = \beta\left[\frac{1}{b'(Y)}\right], \qquad c(Z) = \gamma\left[\frac{1}{c'(Z)}\right].}$$

Forme IV. — Soit

$$(43) \qquad Z = \beta(Y)\,\alpha(X) + \gamma(X)$$

[où $\beta'(Y) \neq 0$, $\alpha(X) \neq 0$] l'équation de S; pour obtenir une représentation paramétrique du type correspondant, prenons $v = \beta(Y)$ et soit $u = a(X)$ une fonction convenablement choisie. On en tire

$$X = A(u), \qquad Y = B(v), \qquad \text{d'où} \qquad Z = v\alpha[A(u)] + \gamma[A(u)].$$

En posant $C(u) = \gamma[A(u)]$, il suffira pour avoir une expression du type voulu, de prendre $u = a(X)$, de sorte que

$$\alpha[A(u)] = A'(u).$$

Or,

$$X = A[a(X)], \qquad \text{d'où} \qquad 1 = A'(u)\,a'(X).$$

Il suffit donc de prendre $\alpha(X)$ de sorte que

$$a'(X) = \frac{1}{\alpha(X)}$$

[$\alpha(X)$ est supposé $\neq 0$].

Ceci étant, une, S', des surfaces dérivées de S (relativement à la même règle R que S) sera définie par les formules

$$X_1 = A'(u), \qquad Y_1 = B'(v), \qquad Z_1 = v\,A''(u) + C'(u).$$

Pour en déduire l'équation de S', on en tire

$$u = f(X_1), \qquad v = g(Y_1),$$

d'où

$$Z_1 = g(Y_1)\,F(X_1) + H(X_1),$$

en posant

$$F(X_1) = A''[f(X_1)], \qquad H(X_1) = C'[f(X_1)].$$

On peut former cette équation en suivant le processus ci-dessus. Ou bien on peut former les équations fonctionnelles définissant g, F, H.

En effet, on a

$$X_1 = A'(u) = \alpha(X), \qquad \gamma(X) = C[a(X)],$$

d'où

$$\gamma'(X) = C'(u)\,a'(X) = \frac{C'(u)}{\alpha(X)},$$

d'où

$$H[\alpha(X)] = C'(u) = \alpha(X)\,\gamma'(X).$$

On obtient donc la fonction $H(X_1)$ au moyen de l'équation fonctionnelle

$$\boxed{H[\alpha(X)] = \alpha(X)\,\gamma'(X)} \tag{45}$$

connaissant les fonctions α et γ figurant dans l'équation (43) de S.

De même, on a

$$A''(u)\,du = dX_1,$$

d'où

$$A''(u) = \frac{d\alpha(X)}{da(X)} = \frac{\alpha'(X)}{a'(X)} = \alpha(X)\,\alpha'(X).$$

Or

$$F[\alpha(X)] = F(X_1) = A''(u) = \alpha(X)\,\alpha'(X).$$

Donc la fonction $F(X_1)$ s'obtiendra comme solution de l'équation fonctionnelle

$$\boxed{F[\alpha(X)] = \alpha(X)\,\alpha'(X).} \tag{46}$$

Enfin

$$g(Y_1) = v = \beta(Y), \qquad \text{avec} \quad Y_1 = B'(v), \qquad Y = B(v),$$

d'où

$$Y_1 = \frac{dB(v)}{dv} = \frac{dY}{d\beta(Y)} = \frac{1}{\beta'(Y)}.$$

Donc $g(Y_1)$ s'obtient comme solution de l'équation fonctionnelle

$$(47) \qquad \boxed{g\left[\frac{1}{\beta'(Y)}\right]=\beta(Y).}$$

Forme V. — Soit

$$Z=\alpha(X)Y^2+\beta(X)Y+\gamma(X)$$

l'équation d'une surface S. Nous pourrons encore déterminer la représentation paramétrique d'une dérivée S′ de S si nous obtenons une représentation paramétrique du type V de S. Mais ici le calcul sera beaucoup plus long. En adoptant la notation de la page 38, on est amené à déterminer des fonctions $A(u)$, $B(u)$, $C(u)$ telles que d'après le tableau I.

$$\alpha(X)=\frac{1}{2}\frac{A''(u)}{[A'(u)]^2},$$
$$\beta(X)=-\frac{B(u)A''(u)}{[A'(u)]^2}+\frac{B'(u)}{A'(u)},$$
$$\gamma(X)=\frac{A''(u)B^2(u)}{2A'(u)^2}-\frac{B(u)B'(u)}{A'(u)}+C(u),$$

avec

$$X=A(u), \qquad Y=v A'(u)+B(u).$$

On a

$$\alpha[A(u)]\,dA=\frac{1}{2}\frac{A''}{A'}du=\frac{dA'}{2A'}, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{1}{2}\log|A'|=\int\alpha(X)\,dX=\varphi(X)+q,$$

d'où

$$\varphi'(X)=\alpha(X), \qquad A'=r\,e^{2\varphi(X)},$$
$$\frac{dX}{du}=A'(u)=r\,e^{2\varphi(X)}, \qquad \text{d'où} \qquad du=\frac{e^{-2\varphi(X)}}{r}dX,$$
$$u=\int\frac{e^{-2\varphi(X)}}{r}dX=\frac{\Psi(X)}{r}+q;$$
$$\beta(X)=\frac{d}{du}\frac{B(u)}{A'(u)}, \qquad \frac{B(u)}{A'(u)}=\int\frac{\beta(X)\,e^{-2\varphi(X)}}{r}dX=\frac{\theta(X)+t}{r};$$
$$B(u)=e^{2\varphi(X)}\int\beta(X)\,e^{-2\varphi(X)}dX=e^{2\varphi(X)}[\theta(X)+t].$$

Enfin, on a

$$C(u)=\gamma(X)+\frac{d}{du}\frac{B^2(u)}{2A'(u)}.$$

Et alors S′ sera représenté par

$$X_1=A'(u), \qquad Y_1=vA''+B', \qquad Z_1=\frac{1}{2}v^2A'''+vB''+C',$$

d'où

$$Z_1=\frac{A'''}{2A''^2}Y_1^2+\left(\frac{B''}{A''}-\frac{B'A'''}{A''^2}\right)Y_1+C'-\frac{B'B''}{A''}+\frac{B'^2A'''}{2A''^2},$$
$$Z_1\,du=\frac{Y_1^2}{2}d\left(-\frac{1}{A''}\right)+Y_1\,d\left(\frac{B'}{A''}\right)+d\left(C-\frac{B'^2}{2A''}\right),$$

que l'on peut écrire :

$$Z_1 = \alpha_1(X_1)Y_1^2 + \beta_1(X_1)Y_1 + \gamma_1(X_1),$$

avec

$$X_1 = A'(u) = r\,e^{2\varphi(X)},$$

$$\alpha_1(X_1) = \frac{1}{2}\frac{d}{du}\left(-\frac{1}{A''}\right), \qquad \beta_1(X_1) = \frac{d}{du}\left(\frac{B'}{A''}\right), \qquad \gamma_1(X_1) = \frac{d}{du}\left(C - \frac{B'^2}{2A''}\right).$$

Or

$$du = \frac{1}{r}e^{-2\varphi}\,dX, \qquad A'' = 2A'^2\alpha = 2\alpha r^2 e^{4\varphi}.$$

I. On a

$$\alpha_1(X_1) = \frac{1}{2}\frac{d}{du}\left(-\frac{1}{2r^2}\frac{e^{-4\varphi}}{\alpha}\right) = -\frac{1}{4r^2}\frac{dX}{du}\frac{d}{dX}\frac{e^{-4\varphi}}{\alpha} = +\frac{e^{-2\varphi}(\alpha' + 4\alpha^2)}{4r\alpha^2};$$

$\alpha_1(X_1)$ est donc solution de l'équation fonctionnelle

$$(48) \qquad \boxed{\alpha_1(r\,e^{2\varphi(X)}) = e^{-2\varphi}\left(\frac{\varphi'' + 4\varphi'^2}{4r\varphi'^2}\right),}$$

avec

$$\varphi'(X) = \alpha X.$$

II. On a

$$\beta_1(X_1) = \frac{dX}{du}\frac{d}{dX}\left(\frac{dB}{dA'}\right) = r\,e^{2\varphi(X)}\frac{d}{dX}\left\{\frac{\beta(X) + e^{2\varphi(X)}2\alpha(X)[\theta(X)+t]}{r\,e^{2\varphi}2\alpha}\right\}$$

$$= e^{2\varphi(X)}\frac{d}{dX}\left\{e^{-2\varphi(X)}\frac{\beta(X)}{2\alpha} + [\theta(X)+t]\right\}$$

$$= e^{2\varphi}\left[e^{-2\varphi}\left(\frac{\beta'\alpha - \beta\alpha'}{2\alpha^2}\right) + \frac{\beta}{2\alpha}e^{-2\varphi}(-2\alpha) + \beta\,e^{-2\varphi}\right] = \frac{1}{2}\frac{d}{dX}\frac{\beta}{\alpha}.$$

Ainsi $\beta_1(X_1)$ est solution de l'équation fonctionnelle :

$$(49) \qquad \boxed{\beta_1(r\,e^{2\varphi(X)}) = \frac{1}{2}\frac{d}{dX}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right).}$$

III. On a

$$\gamma_1(X_1) = \frac{dX}{du}\frac{d}{dX}\left(C - \frac{B'^2}{2A''}\right);$$

or

$$C - \frac{B'^2}{2A''} = \gamma(X) + \frac{1}{2}\frac{d}{du}\frac{B^2}{A'} - \frac{B'^2}{2A''} = \gamma(X) + \left[\frac{BB'}{A'} - B^2\alpha\right] - \frac{1}{4\alpha}\frac{B'^2}{A'^2}$$

$$= \gamma(X) - \frac{1}{4\alpha}\left[2\alpha B - \frac{B'}{A'}\right]^2$$

$$= \gamma(X) - \frac{1}{4\alpha}[2\alpha\,e^{2\varphi}(\theta+t) - e^{2\varphi}2\alpha(\theta+t) - e^{2\varphi}\beta\,e^{-2\varphi}]^2 = \gamma(X) - \frac{\beta^2}{4\alpha},$$

$$\gamma_1(X_1) = r\,e^{2\varphi}\frac{d}{dX}\left[\gamma - \frac{\beta^2}{4\alpha}\right];$$

$\gamma_1(X_1)$ est donc solution de l'équation fonctionnelle

$$(50) \qquad \boxed{\gamma_1(r\,e^{2\varphi(X)}) = r\,e^{2\varphi(X)}\frac{d}{dX}\left[\gamma(X) - \frac{\beta^2(X)}{4\alpha(X)}\right].}$$

Remarque. — Si l'on écrit les équations de S et de S′ sous la forme

$$(51)\qquad \begin{cases} Z = \alpha(X)[Y+\lambda(X)]^2+\mu(X), \\ Z_1 = \dfrac{\alpha_2(X_1)}{X_1}Y_1^2+\beta_1(X_1)Y_1+X_1\gamma_2(X_1), \end{cases}$$

on pourra tirer α_2, β_1, γ_2 de α, β, γ au moyen des équations fonctionnelles plus simples :

$$(52)\qquad \boxed{\begin{aligned} &\alpha_2(r\,e^{2\varphi(X)}) = 1+\frac{\alpha'(X)}{4\alpha^2}, \\ &\beta_1(r\,e^{2\varphi(X)}) = \frac{d\lambda(X)}{dX}; \\ &\gamma_2(r\,e^{2\varphi(X)}) = \frac{d\mu(X)}{dX}. \end{aligned}}$$

Forme VI. — Soit

$$a(Z) = U(X, Y), \qquad \text{avec} \quad \Delta U = 0$$

l'équation de S. Pour chercher celle de S′, formons la représentation paramétrique de S correspondant au type VI :

$$u = a(Z), \qquad u+iv = U(X, Y)+iV(X, Y),$$

où $U+iV$ est une fonction analytique de $\zeta = X+iY$ ou

$$Z = A(u), \qquad X+iY = P(u, v)+i\,Q(u, v),$$

où $P+iQ$ est une fonction analytique de $u+iv$. Alors les expressions

$$Z_1 = A'(u), \qquad X_1+iY_1 = \frac{\partial}{\partial u}P(u, v)+i\frac{\partial}{\partial u}Q(u, v)$$

fournissent une réprésentation paramétrique d'une surface S′ dérivée de S.

Pour éviter de former P et Q, observons que

$$u+iv = \varphi(X+iY) = \varphi[f(u+iv)] \qquad \text{d'où} \qquad 1 = \varphi' f';$$

$$X_1+iY_1 = \frac{1}{\varphi'(X+iY)} = \frac{1}{U'_X - iU'_Y},$$

$$X_1 = \frac{U'_X}{U'^2_X+U'^2_Y}, \qquad Y_1 = \frac{U'_Y}{U'^2_X+U'^2_Y}.$$

Dès lors, on a une autre représentation paramétrique de S′.

Car, d'autre part,

$$u = a(Z) = a[A(u)], \qquad \text{d'où} \qquad 1 = a'(Z)A'(u);$$

$$Z_1 = \frac{1}{a'(Z)} \qquad \text{avec} \quad a(Z) = U(X, Y),$$

En éliminant X, Y, Z entre ces quatre équations, on aura l'équation de S′.

Forme VII. — Soit la surface

$$Z = K(X, Y).$$

On aura une représentation paramétrique du type VII de la page 38 en posant

$$X = u, \qquad Y = v, \qquad Z = K(u, v).$$

Une surface dérivée sera donnée par

$$X_1 = 1, \qquad Y_1 = \frac{\partial K}{\partial u}, \qquad Z_1 = \frac{\partial K}{\partial v}.$$

Elle sera donc dans le plan

$$X_1 = 1.$$

Exemples de détermination de surfaces dérivées. — III. Si S a pour équation

$$X^m + Y^n = Z^p,$$

on a d'après (42)

$$X^m = \alpha\left(\frac{1}{mX^{m-1}}\right), \qquad \text{d'où} \qquad \alpha(X_1) = (mX_1)^{\frac{m}{1-m}};$$

de même pour β, γ, de sorte que l'équation de S′ est :

$$(mX_1)^{\frac{m}{1-m}} + (nY_1)^{\frac{n}{1-n}} = (pZ_1)^{\frac{p}{1-p}}.$$

IV. Si S a pour équation

$$Z = XY^n + X^p,$$

on aura d'abord d'après (47)

$$g\left(\frac{1}{nY^{n-1}}\right) = Y^n,$$

de sorte que comme plus haut

$$g(Y_1) = (nY_1)^{\frac{n}{1-n}}.$$

Par contre $X_1 = X$, et d'après (46), (45)

$$F(X) = X, \qquad H(X) = XpX^{p-1}.$$

Ainsi S′ a pour équation

$$Z_1 = X_1(nY_1)^{\frac{n}{1-n}} + pX_1^p.$$

V. Prenons le cas où $\alpha(X)$, $\beta(X)$, $\gamma(X)$ sont constants, de sorte que l'équation de S est celle d'un cylindre parabolique

$$Z = \alpha Y^2 + \beta Y + \gamma.$$

Alors, d'après les formules de la page 69,

$$\varphi'(X) = \alpha, \qquad X_1 = r\, e^{2\alpha X}$$

$$\alpha_1(X_1) = \frac{e^{-2\alpha X}}{r} = \frac{1}{X_1},$$

$$\beta_1(X_1) = 0 \qquad \text{et} \qquad \gamma_1(X_1) = 0,$$

d'où

$$Z_1 = \frac{1}{X_1} Y_1^2.$$

Ainsi la surface dérivée S′ de S a pour équation :

$$Y_1^2 = X_1 Z_1,$$

cône du second degré ayant son sommet à l'origine.

VI. Soit S la surface dont l'équation est

$$Z^m = X^2 - Y^2, \qquad (m \neq 1).$$

Avec les notations de la page 45, on aura

$$Z_1 = \frac{1}{mZ^{m-1}}, \qquad X_1 = \frac{1}{2}\frac{X}{X^2+Y^2}, \qquad Y_1 = \frac{1}{2}\frac{-Y}{X^2+Y^2},$$

d'où

$$Z^m = \frac{1}{4}\frac{X_1^2 - Y_1^2}{(X_1^2+Y_1^2)^2}$$

et, par suite, l'équation de S′ est :

$$4(mZ_1)^{\frac{m}{1-m}} = \frac{X_1^2 - Y_1^2}{(X_1^2+Y_1^2)^2}.$$

Surfaces exponentielles.

Première définition. — Si l'on veut distinguer parmi les surfaces d'une famille de surfaces dérivables relativement à une règle R, des surfaces dont la définition rappelle l'une des définitions de la fonction exponentielle classique, on peut trouver assez naturelle la définition suivante :

Une surface dérivable relativement à R serait une surface dont l'une des représentations paramétriques correspond à une fonction hypercomplexe $\Phi(w)$ qui est exponentielle relativement à R. Ce sera une surface exponentielle canonique si $\Phi(w)$ est canonique. En se reportant au tableau V (p. 53) des fonctions exponentielles canoniques, on en déduit par des calculs faciles, les équations suivantes de ces surfaces.

Tableau IX.

Équations des surfaces exponentielles canoniques suivant la première définition.

I.	I_a :	$X = 0, \quad Y = \alpha,$	droite,
	I_b :	$X = Y = 0,$	droite ;
II.	II_a et II_b :	$\frac{X}{\alpha} = \frac{Y}{\beta},$	plan,
	II_c :	$\frac{X}{\alpha} = \frac{Y}{\beta} = \frac{Z}{\gamma},$	droite ;
III.		$\gamma XY = \alpha\beta r,$	paraboloïde hyperbolique ;
IV.		$Z = a e^{\frac{Y}{X}},$	conoïde ;
V.		$a(Y^2 - 2XZ) + bX^2 = 0,$	cône du second degré ;
VI.		$(\beta^2+\gamma^2)X^2 = \alpha^2(Y^2+Z^2),$	cône du second degré ;
VII.		$X = Y = 0,$	droite.

Mais la définition précédente, si elle n'exige que des calculs faciles, est trop analytique et surtout trop étroite. Nous allons en examiner une autre, moins analytique, plus intuitive mais donnant lieu à des calculs moins simples.

DEUXIÈME DÉFINITION. — Soit S une surface dérivable relativement à une règle R donnée. Par analogie avec une propriété de la fonction exponentielle e^x, et puisqu'ici il n'y a pas *une* surface dérivée de S, mais une famille de surfaces dérivées, nous dirons que S est une surface exponentielle relativement à la règle R, si elle coïncide avec l'une de ses propres dérivées relativement à R. Il est clair que les surfaces exponentielles au sens de la première définition seront aussi exponentielles au sens de la seconde, mais non réciproquement.

Nous nous limiterons au cas des surfaces dérivables *non* cylindriques, cas qui est plus simple en ce que les surfaces dérivées d'une même surface S sont toutes homothétiques par rapport à l'origine.

Nous allons déterminer des surfaces exponentielles de chaque forme canonique.

Pour chaque forme, nous indiquerons la forme générale des équations à résoudre pour trouver toutes les surfaces exponentielles de chaque type.

Comme pour plusieurs types, on est ramené à la solution d'équations fonctionnelles analogues, nous reporterons à la fin l'étude de ce genre d'équation fonctionnelle et nous commencerons par donner des exemples simples. Il sera inutile de répéter les exemples particulièrement simples du tableau IX.

Nous en donnerons donc des exemples un peu moins simples en montrant comment on peut opérér, soit en passant par une représentation paramétrique, soit en utilisant les équations fonctionnelles des pages 65 à 71.

FAMILLE III. — *Méthode directe.* — Partons de l'équation générale

$$a(X)+b(Y)=c(Z)$$

d'une surface S dérivable du type III. On obtiendra l'équation

$$(53)\qquad \alpha(X_1)+\beta(Y_1)=\gamma(Z_1)$$

d'une S′ de ses dérivées en prenant pour α, β, γ des solutions du système ( ). Pour que S soit exponentielle, il faut et il suffit qu'elle soit identique à une homothétique de S′, c'est-à-dire que l'équation (53) représente la même surface que l'équation

$$a(pX_1+\lambda)+b(pY_1+\mu)=c(pZ_1+\nu)\qquad (p\neq 0).$$

Pour qu'il en soit ainsi, il faudra, d'après la page 57, qu'on ait

$$a(pX_1+\lambda)=\xi\alpha(X_1)+\rho,\qquad b(pY_1+\mu)=\xi\beta(Y_1)+\eta,$$
$$c(pZ_1+\nu)=\xi\gamma(Z_1)+\rho+\eta\qquad(\xi\neq 0).$$

Il faut alors pour trouver l'exponentielle la plus générale du type III déterminer les fonctions a, b, c telles qu'il existe des nombres $p \neq 0$, $\xi \neq 0$, λ, μ, ν, ρ, η pour lesquels

$$
(54) \qquad \left\{ \begin{aligned} a\left[\frac{p}{a'(X)} + \lambda\right] &= \xi a(X) + \rho, \\ b\left[\frac{p}{b'(Y)} + \mu\right] &= \xi b(Y) + \nu, \\ c\left[\frac{p}{c'(Z)} + \nu\right] &= \xi c(Z) + \rho + \eta, \end{aligned} \right.
$$

Méthode indirecte. — Les expressions

$$X = A(u), \qquad Y = B(v), \qquad Z = C(u+v)$$

représentent une surface S du type III et les expressions

$$X_1 = A'(u), \qquad Y_1 = B'(v), \qquad Z_1 = C'(u+v)$$

en représentent une surface dérivée S'.

Pour que S soit exponentielle, il faut que S soit identique à une homothétique de S', ou S' identique à une homothétique S_2 de S :

$$X_2 = pA(u_1) + a, \qquad Y_2 = pB(v_1) + b, \qquad Z_2 = pC(u_1 + v_1) + c \qquad (p \neq 0).$$

Puisque les représentations paramétriques de S' et S_2 sont du même type III et représentent la même surface, elles doivent d'après la page 62, devenir identiques en prenant pour u_1, v_1 des expressions de la forme

$$u_1 = tu + \sigma, \qquad v_1 - tv + \sigma' \qquad (t \neq 0).$$

Finalement les fonctions A, B, C doivent être telles qu'il existe des nombres $p \neq 0$, $t \neq 0$, a, b, c, σ, σ' tels que

$$
(55) \qquad \left\{ \begin{aligned} &A'(u) = pA(tu + \sigma) + a, \qquad B'(v) = pB(tu + \sigma') + b, \\ &\qquad C(u+v) = pC[t(u+v) + \sigma + \sigma']. \end{aligned} \right.
$$

Pour la raison indiquée page 73, nous reportons plus loin (p. 79), l'étude générale de ce type d'équations fonctionnelles.

On observera, cependant, dès maintenant, que si l'on réussit à former plusieurs systèmes de solutions (A_1, B_1, C_3), ..., (A_n, B_n, C_n) du système (55), on pourra en déduire le système plus général de solutions

$$A = \Sigma q_k A_k, \qquad B = \Sigma r_k B_k, \qquad C = \Sigma s_k C_k.$$

Exemple simple. — Soit la surface S

$$(56) \qquad \boxed{Z = KX^a Y^b} \qquad (X, Y > 0;\ a, b > 0).$$

On peut en former une représentation paramétrique

$$X = e^{\frac{u}{a}}, \qquad Y = e^{\frac{v}{b}}, \qquad Z = K e^{u+v}$$

qui est bien du type III. On a la surface dérivée générale T

$$X_1 = p\,L + \alpha = \frac{p}{a} e^{\frac{u}{a}} + \alpha, \qquad Y_1 = p\,M + \beta = \frac{p}{b} e^{\frac{v}{b}} + \beta$$
$$Z = p\,N + \gamma = p\,K\,e^{u+v} + \gamma.$$

Pour que T soit identique à S, il suffit que l'on puisse trouver p, σ, σ', t, α, β, γ tels que

$$\frac{p}{a} e^{\frac{u}{a}} + \alpha = e^{\frac{tu+\sigma}{a}}, \qquad \frac{p}{b} e^{\frac{v}{b}} + \beta = e^{\frac{tv+\sigma'}{b}},$$
$$p\,e^{u+v} + \gamma = e^{tu+tv+\sigma+\sigma'}.$$

D'où

$$\frac{p}{a} X + \alpha = e^{\frac{\sigma}{a}} X^t \quad \text{quel que soit } X > 0 \qquad (p \neq 0).$$

On a donc $t = 1$, $\alpha = 0$ et, de même, $\beta = \gamma = 0$. Dès lors :

(57) $$\frac{p}{a} = e^{\frac{\sigma}{a}}, \qquad \frac{p}{b} = e^{\frac{\sigma'}{b}}, \qquad p = e^{\sigma+\sigma'},$$

d'où en éliminant σ et σ'

$$p = \left(\frac{p}{a}\right)^a \left(\frac{p}{b}\right)^b,$$

où

$$p^{a+b-1} = a^a b^b,$$

Si donc a et b positifs sont pris arbitrairement *tels que* $a + b \neq 1$, (c'est-à-dire que S ne soit pas un cône ayant son sommet à l'origine) on pourra calculer p par cette formule et ensuite σ et σ' par les formules (57).

Donc toutes les surfaces d'équation (56) qui ne sont pas des cônes, sont des surfaces exponentielles du type III dépendant des *trois paramètres* K, a, b.

Famille IV. — En raisonnant comme pour III, pour qu'une surface exponentielle S du type IV, qu'on peut écrire

$$X = A(u), \qquad Y = C(v), \qquad Z = v A'(u) + B(u)$$

soit exponentielle, il faut qu'on puisse déterminer des nombres $p \neq 0$, $t \neq 0$, σ, σ' tels que

(58) $$\begin{cases} A'(u) = p\,A(tu+\sigma) + a, \\ C'(v) = p\,C(tv+\sigma') + c, \\ B'(u) = p\,B(tu+\sigma) + p\sigma' A'(tu+\sigma) + b. \end{cases}$$

Exemple simple. — Si l'équation de S est de la forme

(59) $$Z = X[\lambda \log Y + \mu X^r + \nu],$$

où l'on suppose naturellement $r \neq 0$; S est du type IV. D'après la page 45, l'équation

(60) $$Z_1 = F(X_1)\,g(Y_1) + H(X_1)$$

représentera une surface dérivée de S du même type IV, quand on prendra

$$g(Y) = \log Y, \qquad F(\lambda X) = \lambda X \lambda,$$
$$H(\lambda X) = \lambda X[\mu(r+1)X^r + \nu],$$

d'où

$$F(X_1) = \lambda X_1, \qquad H(X_1) = X_1\left[\mu(r+1)\left(\frac{X_1}{\lambda}\right)^r + \nu\right].$$

De sorte que (60) peut s'écrire

$$Z_1 = X_1\left[\lambda \log Y_1 + \mu\frac{(r+1)}{\lambda^r}X_1^r + \nu\right].$$

Dès lors pour que (59) soit exponentielle relativement à la règle du type IV, il suffit qu'on prenne $r > 0$, puis λ tels que

$$\alpha^r = r + 1.$$

Famille V. — On devra avoir

$$A'(u) = pA(tu+\sigma) + a,$$
$$vA'' + B' = p\{(tv+\sigma')A'(tu+\sigma) + B(tu+\sigma)\} + b,$$
$$\frac{v^2}{2}A''' + vB'' + C' = p\left\{\frac{(tv+\sigma')^2}{2}A''(tu+\sigma) + (tv+\sigma')B'(tu+\sigma) + C(tu+\sigma)\right\} + c.$$

D'où

$$(61)\qquad \left\{\begin{array}{l} A'(u) = pA(tu+\sigma) + a, \\ B'(u) = p\{\sigma'A'(tu+\sigma) + B(tu+\sigma)\} + b, \\ C'(u) = p\left\{\frac{\sigma'^2}{2}A''(tu+\sigma) + \sigma'B'(tu+\sigma) + C(tu+\sigma)\right\} + c. \end{array}\right.$$

Exemple simple. — Les surfaces S dont l'équation est du type

$$Z = \alpha(X)Y^2$$

sont des cas particuliers des surfaces canoniques du type V (tableau VII).

Elles ne sont pas nécessairement exponentielles. Mais on peut chercher s'il est possible de choisir la fonction $\alpha(X)$ pour que la surface correspondante, S, soit exponentielle relativement à la règle V. Il suffit que S soit homothétique à l'une de ses dérivées et en particulier à celle, S', que l'on trouve par la méthode de la page 68.

Or, on peut obtenir une représentation paramétrique de S sous la forme

$$X = A(u), \qquad Y = vA', \qquad Z = \frac{v^2}{2}A''$$

qui donne

$$ZA'^2 = \frac{Y^2}{2}A''.$$

Il suffit de prendre

$$(64)\qquad X = A(u) \quad \text{et} \quad \alpha(X) = \frac{A''}{2A'^2},$$

d'où l'on tire comme page 68,

$$A' = r\,e^{2\varphi(X)}, \qquad \text{avec} \quad \varphi'(X) = \alpha(X)$$

et

$$u = \int \frac{e^{-2\varphi(X)}\,dX}{r}.$$

Les expressions

$$X_1 = A'(u_1), \qquad Y_1 = v_1 A''(u_1), \qquad Z_1 = \frac{v_1^2}{2} A'''(u_1)$$

définiront une surface dérivée S' de S.

S devra coïncider avec une surface homothétique de S' ou S' avec une homothétique de S, soit

$$X_2 = p\,A(u) + \lambda, \qquad Y_2 = pv\,A'(u) + \mu, \qquad Z_2 = p\frac{v^2}{2} A''(u) + \nu.$$

Et il y aura une relation entre u, v et u_1, v_1 telle que

$$(65) \qquad \left\{ \begin{array}{l} p\,A(u) + \lambda = A'(u_1), \qquad pv\,A'(u) + \mu = v_1 A''(u_1), \\ p\dfrac{v^2}{2} A''(u) + \nu = v_1^2 \dfrac{A'''(u_1)}{2}; \end{array} \right.$$

On en tire, en éliminant v_1,

$$(62) \qquad [A''(u_1)]^2 \left[p\frac{v^2}{2} A''(u) + \nu \right] - \frac{A'''(u_1)}{2} [pv\,A'(u) + \mu]^2 = 0.$$

Or, d'après la première des équations (65), si $A'(u_1)$ ne se réduit pas à une constante, u_1 est une fonction déterminée de u seul : $u_1 = \varphi(u)$. En remplaçant u_1 par $\varphi(u)$ dans (62), on a une relation entre les variables indépendantes u et v qui doit nécessairement se réduire à une identité. En annulant les coefficients du premier membre de (62) considéré comme un trinome en v, on a donc

$$[A''(u_1)]^2 p \frac{A''}{2}(u) = \frac{A'''(u_1)}{2} p^2 A'^2(u),$$

$$A'''(u_1)\,\mu p A'(u) = 0, \qquad [A''(u_1)]^2 \nu = \frac{A'''(u_1)}{2} \mu^2.$$

Si $A'''(u_1)\,A'(u) \neq 0$, comme p doit être $\neq 0$, on a $\mu = 0$, d'où

$$[A''(u_1)]^2 \nu = 0$$

et si $A''(u_1) \neq 0$, on a $\nu = 0$. Il reste alors

$$p\frac{A'''(u_1)}{[A''(u_1)]^2} = \frac{A''(u)}{A'^2(u)} \qquad \text{ou} \qquad \frac{p\,dA''(u_1)}{[A''(u_1)]^2\,du_1} = \frac{dA'(u)}{[A'(u)]^2\,du}.$$

Or d'après (65)

$$(63) \qquad p\,A'(u)\,du = A''(u_1)\,du_1;$$

donc

$$\frac{d\mathrm{A}''(u_1)}{\mathrm{A}''(u_1)} = \frac{d\mathrm{A}'(u)}{\mathrm{A}'(u)},$$

d'où

$$\mathrm{A}''(u_1) = q\,\mathrm{A}'(u)$$

d'où en portant dans (63)

$$p\,\mathrm{A}'(u)\,du = q\,\mathrm{A}'(u)\,du_1 \qquad \text{et} \qquad pv\,\mathrm{A}'(u) = v_1 q\,\mathrm{A}'(u)$$

ou

$$\mathrm{A}'(u)[p\,du - q\,du_1] = 0 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{A}'(u)[pv - qv_1] = 0.$$

On a déjà supposé $\mathrm{A}'(u) \neq 0$, donc en posant $t = \frac{q}{p}$

$$u = tu_1 + \sigma. \qquad v = tv_1,$$

donc

$$\mathrm{A}''(u_1) = q\,\mathrm{A}'(tu_1 + \sigma)$$

et en intégrant

$$p\,\mathrm{A}(u) + \lambda = \mathrm{A}'(u_1)$$

La fonction $\mathrm{A}(u)$ sera donc déterminée par la relation fonctionnelle

(66) $$\mathrm{A}'(u) = p\,\mathrm{A}(tu_1 + \sigma) + \lambda.$$

Quand on aura trouvé la solution générale en $\mathrm{A}(u_1)$ de cette équation, on obtiendra $\alpha(\mathrm{X})$ en éliminant α entre les deux équations (64). On observera que l'équation fonctionnelle (66) est analogue aux équations fonctionnelles (55) relatives au type III, à la page 74.

Famille VI. — On doit avoir

$$f'(u + iv) = p\,f(tu + \sigma + i(tv + \sigma')) + \mu + i\nu,$$
$$\mathrm{A}'(u) = p\,\mathrm{A}(tu + \sigma) + \lambda.$$

En posant

$$u + iv = z, \qquad \sigma + i\sigma' = \varphi, \qquad \mu + i\nu = \rho,$$

la première relation devient analogue à la seconde :

$$f'(z) = pf(tz + \varphi) + \rho.$$

Exemple simple. — La surface S représentée par

$$\mathrm{X} + i\mathrm{Y} = e^{(a+ib)(u+iv)}, \qquad \mathrm{Z} = e^{\alpha u} \qquad (\alpha \neq 0)$$

est évidemment du type VI.

On s'assure facilement que son équation est

$$\mathrm{Z} = (\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2)^{\frac{\alpha a}{2(a^2+b^2)}}\, e^{\frac{\alpha b}{a^2+b^2}\operatorname{arctg}\frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{X}}}.$$

de la forme

(67) $$\boxed{\mathrm{Z} = (\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2)^q\, e^{r\operatorname{arctg}\frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{X}}}.}$$

Inversement, se donnant q et r, et supposant naturellement $qr \neq 0$, on peut la représenter ainsi (en remplaçant les u, v précédents par αu et αv)

$$X + iY = e^{\frac{u+iv}{2q-ir}}, \qquad Z = e^u. \tag{68}$$

Pour prouver que cette surface est exponentielle du type VI, il suffirait de démontrer qu'on peut trouver σ, σ' tels que

$$\frac{1}{2q-ir} e^{\frac{u+iv}{2q-ir}} = p\, e^{\frac{u+iv}{2q-ir}}\, e^{\frac{\sigma+i\sigma'}{2q-ir}},$$
$$e^u = p\, e^{u+\sigma}.$$

D'où, en prenant $p = e^{-\sigma}$

$$\frac{1}{2q-ir} = e^{\frac{\sigma+i\sigma'}{2q-ir} - \sigma}.$$

ou

$$\sigma(1-2q) + i(\sigma' + r\sigma) = -(2q-ir)\log(2q-ir).$$

Si $q \neq \frac{1}{2}$, on peut en tirer σ, puis σ'.

Dès lors, on voit qu'il suffit de supposer $q \neq \frac{1}{2}$ pour que la surface représentée par (67) soit une surface exponentielle du type V.

D'ailleurs, on a déjà rencontré au tableau IX (pour $\beta^2 + \gamma^2 = \alpha^2$ et à une permutation de X et Z près) une surface exponentielle correspondant ici au cas où $q = \frac{1}{2}$ (et $r = 0$).

Solution générale de l'équation fonctionnelle $A'(u) = pA(tu + \sigma) + a$. Réduction de l'équation. — Posons

$$A(u) = A_1(pu + \varphi) + \lambda.$$

On aura

$$pA'_1(pu + \varphi) = a + p[\lambda + A_1(\varphi + ptu + p\sigma)].$$

Par hypothèse p est $\neq 0$, on peut prendre $\lambda = -\frac{a}{p}$, d'où

$$A'_1(pu + \varphi) = A_1(tpu + \varphi + p\sigma)$$

ou

$$A'_1(u') = A_1[t(u' - \varphi) + \varphi + p\sigma].$$

On a alors *deux cas*.

Ou bien $t \neq 1$; on peut prendre

$$\varphi = \frac{p\sigma}{t-1}, \qquad \text{d'où} \qquad A'_1(u') = A_1(tu') \qquad (t \neq 1)$$

ou bien $t = 1$ et on a

$$A'_1(u') = A_1(u' + s) \qquad \text{en posant} \quad s = p\sigma.$$

Ainsi nous avons à trouver les solutions de deux équations fonctionnelles de la forme

(69) $$\theta'(u) = \theta(u+s),$$

(70) $$\xi'(u) = \xi(tu) \qquad (t \neq 1).$$

La première équation fonctionnelle réduite. — La première donne immédiatement dans le cas particulier où s est nul

$$\theta(u) = \mathrm{K}\, e^u.$$

Reste donc à considérer le cas où $s \neq 0$.

Alors dans ce cas, cherchons les solutions de (69) qui sont définies de $-\infty$ $+\infty$.

Pour que $\theta(u)$ soit une telle solution de (69), il faut que cette équation ait un sens et, par suite, que $\theta(u)$ soit partout dérivable. $\theta(u+s)$ étant alors aussi partout dérivable, $\theta'(u)$ sera partout dérivable. $\theta(u)$ aura donc partout une dérivée seconde. Et ainsi de suite. Ainsi $\theta(u)$ *devra être partout indéfiniment dérivable.*

Alors on pourra écrire

(71) $$\theta^{(p)}(u) = \theta^{(p-1)}(u+s)$$

et

(72) $$\theta^{(p)}(u) = \theta(u+ps) \qquad (p=1, 2, \ldots).$$

Il est facile de voir que *si* $\theta(u)$ *est connu dans un intervalle* (u_0, u_1), *de longueur* s $\theta(s)$ *est alors déterminé partout.* Posons, à cet effet,

$$u_n = u_0 + ns, \qquad n = 0, 1, -1, 2, -2, \ldots).$$

et supposons d'abord $s > 0$.

On a

(73) $$\theta(u) = \theta^{(p)}(u - ps),$$

donc $\theta(u)$ est déterminé pour

$$u_p \leqq u < u_{p+1}, \qquad (p = 0, 1, \ldots),$$

c'est-à-dire pour $u \geqq u_0$. On a

$$\theta(u) = \theta(u_0) + \int_{u_1}^{u+s} \theta(u)\, du;$$

$\theta(u)$ sera donc déterminé dans $u_{-1} \leqq u \leqq u_0$. Alors on pourra opérer de même dans (u_{-2}, u_{-1}), ...

Finalement, on voit que si $\theta(u)$ est une solution partout, *il suffit de connaître* $\theta(u)$ *pour*

$$u_0 \leqq u < u_0 + s = u_1$$

pour que $\theta(u)$ soit exactement *déterminé partout.*

Or $\theta(u)$ est en partie arbitraire dans (u_0, u_1).

On sait que $\theta(u)$ doit être indéfiniment dérivable sur u_0, u_1 et doit être tel que

$$\theta^{(p)}(u_0) = \theta^{(p-1)}(u_1) \qquad (p = 1, 2, \ldots). \tag{74}$$

Existe-t-il d'abord une telle fonction? Donnons-nous arbitrairement une infinité de nombres c_0, c_1, ...

Émile Borel a démontré ([14]) que : quels que soient les nombres réels c_0, c_1, ... et u_0, il existe une fonction réelle $f(u)$ indéfiniment dérivable quel que soit u telle que

$$f(u_0) = c_0, \qquad f'(u_0) = c_1, \qquad \ldots, \qquad f^{(p)}(u_0) = c_p, \qquad \ldots.$$

Soit maintenant $\mathrm{T}(u)$ une fonction indéfiniment dérivable partout et telle que $\mathrm{T}(u) \neq 0$ pour $u \neq 0$ et que

$$\mathrm{T}(0) = 0, \qquad \mathrm{T}'(0) = 0, \qquad \ldots, \qquad \mathrm{T}^{(p)}(0) = 0, \qquad \ldots;$$

par exemple

$$\mathrm{T}(u) = e^{-\frac{1}{|u|}} \qquad \text{pour} \quad u \neq 0, \qquad \mathrm{T}(0) = 0.$$

Et soit $g(u)$ une fonction partout indéfiniment dérivable et pour le moment arbitraire.

Posons alors,

$$\varphi(u) = f(u) + g(u)\,\mathrm{T}(u - u_0).$$

On aura

$$\varphi(u_0) = c_0, \qquad \varphi'(u_0) = c_1, \qquad \ldots, \qquad \varphi^{(p)}(u_0) = c_p, \qquad \ldots.$$

Nous allons montrer qu'on peut choisir $g(u)$ de sorte que

$$\varphi'(u_0) = \varphi(u_1), \qquad \ldots, \qquad \varphi^{(p+1)}(u_0) = \varphi^{(p)}(u_1), \qquad \ldots.$$

On aura

$$\begin{aligned}
\varphi(u_1) &= f(u_1) + g(u_1)\,\mathrm{T}(u_1 - u_0),\\
\varphi'(u_1) &= f'(u_1) + g(u_1)\,\mathrm{T}'(u'_1 - u_0) + g'(u_1)\,\mathrm{T}(u_1 - u_0),\\
\varphi^{(p)}(u_1) &= f^{(p)}(u_1) + g(u_1)\,\mathrm{T}^{(p)}(u_1 - u_0) + \ldots + g^{(p)}(u_1)\,\mathrm{T}(u_1 - u_0).
\end{aligned}$$

Il suffira donc de prendre $g(u)$ tel que

$$\begin{aligned}
g(u_1)\,\mathrm{T}(u_1 - u_0) &= c_1 - f(u_1),\\
g'(u_1)\,\mathrm{T}(u_1 - u_0) &= c_2 - f'(u_1) - g(u_1)\,\mathrm{T}'(u_1 - u_0),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
g^{(p)}(u_1)\,\mathrm{T}(u_1 - u_0) &= c_{p+1} - f^{(p)}(u_1) - g^{(p-1)}(u_1)\,\mathrm{T}'(u_1 - u_0),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Et comme $\mathrm{T}(u_1 - u_0) \neq 0$, on pourra ainsi déterminer ce que doivent être

([14]) *Ann. Éc. Norm. Sup.*, (3), t. 12, 1895, p. 35-44. *Voir* une démonstration simple et un exemple de solution, par Arthur Rosenthal, *Proc. Amer. Math. Soc.*, t. 4, 1953, p. 600-602.

successivement $g(u_1)$, $g'(u_1)$, $\ldots$, $g^{(p)}(u_1)$, $\ldots$. Or, d'après le théorème de Borel, il existe au moins une fonction partout indéfiniment dérivable $g(u)$ pour laquelle $g(u_1)$, $g'(u_1)$, $\ldots$ auront les valeurs requises.

En résumé, il existe au moins une fonction $\psi(u)$ indéfiniment dérivable sur (u_0, u_1) et vérifiant (69), à savoir, par exemple, la fonction $\varphi(u)$ précédente.

Il existe d'ailleurs, sur u_0, u_1, une infinité de telles fonctions. Par exemple les fonctions

$$\omega(u) = \psi(u) + \mathrm{T}(u-u_0)\,\mathrm{T}(u-u_1)\,h(u), \tag{75}$$

où $h(u)$ est une fonction partout indéfiniment dérivable, mais à part cela *arbitraire*.

Prenons maintenant $\theta(u) = \psi(u)$ pour $u_0 \leqq u < u_1$, puis déduisons comme plus haut et d'une façon unique les valeurs de $\theta(u)$ satisfaisant à (69) sur toute la droite de $-\infty$ à $+\infty$. Une telle fonction sera évidemment partout continue et dérivable indéfiniment sauf peut être pour $u =$ l'un des u_n puisque nous n'avons pas utilisé dans l'extension les valeurs de $\psi(u_1)$, $\psi'(u_1)$, $\psi''(u_1)$, $\ldots$. Cependant, on aura, par construction de θ

$$\theta(u_1) = \psi'(u_0) = \psi(u_1), \qquad \theta'(u_1) = \psi''(u_0) = \psi'(u_1), \qquad \ldots,$$

c'est-à-dire les valeurs de $\theta(u_1)$ et de ses dérivées à droite seront celles de $\psi(u_1)$ et de ses dérivées à gauche, de sorte que $\theta(u)$ sera continu et indéfiniment dérivable pour $u = u_1$. On verrait de même qu'il en est ainsi pour

$$u = u_2,\ u_3,\ \ldots; \qquad u = u_{-1},\ u_{-2},\ \ldots.$$

En résumé, *l'équation*

$$\theta'(u) = \theta(u+s)$$

a une infinité de solutions partout indéfiniment dérivables.

Chacune d'elles est déterminée partout connaissant ses valeurs sur un intervalle quelconque u_0, u_1 de longueur s. Et pour ses valeurs sur cet intervalle, il faut prendre — et cela suffit — une fonction prise arbitrairement parmi les fonctions $\psi(u)$ en nombre infini qui sont indéfiniment dérivables partout et telles que

$$\psi'(u_0) = \psi(u_1), \qquad \ldots, \qquad \psi^{(p+1)}(u_0) = \psi^{(p)}(u_1), \qquad \ldots.$$

Le cas où $s < 0$, se traiterait exactement de même, sauf qu'on aurait $u < \ldots < u_2 < u_1 < u_0 < u_{-1} < u_{-2} < \ldots$.

Seconde équation fonctionnelle réduite. — Considérons maintenant l'équation

$$\xi'(u) = \xi(tu) \qquad (t \neq 1). \tag{76}$$

Elle se traite de façon analogue à la précédente. Si t était nul, la solution serait de la forme

$$\xi(u) = a(u+1).$$

Supposons donc $t \neq 1$ et $t \neq 0$ et pour commencer $t > 1$. Alors on voit, comme pour la première équation fonctionnelle, que s'il existe une solution pour toute valeur de t, cette solution doit être partout indéfiniment dérivable et qu'on a

$$\xi^{(p+1)}(u) = t^p \xi^{(p)}(tu), \tag{77}$$

$$\xi^{(p+1)}(u) = t^{1+2+\ldots+p} \xi(t^{p+1} u). \tag{78}$$

Mais, pour la suite, il faut distinguer entre $u > 0$ et $u < 0$. Nous voyons, en effet, que l'équation (76) n'établit aucun lien entre les valeurs de $u > 0$ et les valeurs de $u < 0$, sauf par l'intermédiaire de $u = 0$.

Nous pouvons donc d'abord chercher des fonctions qui soient chacune une solution pour $u \neq 0$, c'est-à-dire que $\xi(u)$ coïncidera pour $u > 0$ avec une solution $\eta(u)$ définie seulement pour $u > 0$ et, par suite, indéfiniment dérivable pour $u > 0$ et $\xi(u)$ coïncidera pour $u < 0$, avec une solution $\varphi(u)$ définie seulement (et, par suite, indéfiniment dérivable) pour $u < 0$.

Si, alors, u_0, u'_0 sont deux nombres arbitraires l'un $u_0 > 0$, l'autre $u'_0 < 0$ et si l'on pose

$$u_n = t^n u_0, \qquad u'_n = t^n u'_0,$$

on aura

$$u'_2 < u'_1 < u'_0 < u'_{-1} < u'_{-2} < \ldots < 0 < \ldots < u_{-1} < u_0 < u_1 < \ldots.$$

Et en procédant comme pour la première équation fonctionnelle, les formules (77) et (78) légèrement différentes de (71) et (72) conduiront à la même conclusion :

Il existe une infinité de solutions $\eta(u)$, $\varphi(u)$ définies respectivement pour $u > 0$ et pour $u < 0$; $\eta(u)$ est déterminé connaissant seulement ses valeurs dans un intervalle (u_0, u_1) quelconque pourvu que $\frac{u_1}{u_0} = t$, $u_0 > 0$.

On peut d'ailleurs prendre pour les valeurs d'une solution $\eta(u)$ dans un tel intervalle toute fonction $\psi(u)$ indéfiniment dérivable dans cet intervalle et telle que

$$\psi'(u_0) = \psi(u_1), \qquad \psi^{(p+1)}(u_0) = t^p \psi^{(p)}(u_1) \qquad (p = 1, 2, \ldots).$$

Il existe, comme on l'a vu plus haut, une infinité de telles fonctions. Parmi elles il y en a une infinité dépendant d'une fonction indéfiniment dérivable sur (u_0, u_1) et qui en u_0 prennent avec leurs dérivées une suite de valeurs arbitrairement données.

On aura des résultats analogues pour $\varphi(u)$ en remplaçant u_0, u_1 par u'_0, u'_1 tels que $\frac{u'_1}{u'_0} = t$, $u'_0 < 0$.

Considérons maintenant deux telles solutions $\eta(u)$ pour $u > 0$, $\varphi(u)$ pour $u < 0$. Si l'on appelle $\xi(u)$ une fonction égale à $\eta(u)$ pour $u > 0$ et à $\varphi(u)$ pour $u < 0$ et enfin égale à une valeur arbitraire a pour $u = 0$, $\xi(u)$ sera une fonction définie pour tout u qui est indéfiniment dérivable pour $u \neq 0$ et qui vérifie (76) pour $u \neq 0$.

Si elle vérifie (76) aussi pour $u=0$, il faut qu'elle soit aussi indéfiniment dérivable pour $u=0$, donc qu'elle et ses dérivées soient continues pour $u=0$. On devra donc avoir

$$(79)\qquad \begin{cases} a=\xi(0)=\lim\limits_{u\succ+0}\eta(u)=\lim\limits_{u\succ-0}\varphi(u) \\ \lim\limits_{u\succ+0}\eta^{(p)}(u)=\lim\limits_{u\succ-0}\varphi^{(p)}(u)=\text{par définition } \xi^{(p)}(0). \end{cases}$$

Ces dernières relations sont, d'après (78), équivalentes aux premières de (79).

Il faut, en outre, que

$$(80)\qquad \lim_{u\succ+0}\eta'(u)=\lim_{u\succ+0}\frac{\eta(u)-a}{u}=\text{par définition } \xi'(0)=a$$

et de proche en proche :

$$(80\ bis)\qquad \lim_{u\succ+0}\frac{\eta^{(p)}(u)-\xi^{(p)}(0)}{u}=\xi^{(p+1)}(0).$$

Et de même pour $\varphi(u)$.

La dernière relation est équivalente d'après (78) à

$$(81)\qquad \lim_{u\succ0} t^{1+2+\ldots+p-1}\frac{[\eta(t^p u)-a]}{u}=t^{1+2+\ldots+p}a$$

ou

$$\lim_{u\succ+0}\frac{\eta(t^p u)-a}{t^p u}=a.$$

L'égalité (80 *bis*) est donc équivalente à (80).

Il suffit donc qu'on ait

$$\lim_{u\succ+0}\frac{\eta(u)-a}{u}=\lim_{u\succ+0}\eta(u)$$

et de même pour φ, donc en définitive que l'on ait ( ) et

$$\lim_{u\succ+0}\left[\frac{\eta(u)-a}{u}-\eta(u)\right]=0=\lim_{u\succ-0}\left[\frac{\varphi(u)-a}{u}-\varphi(u)\right].$$

Dans le cas où $t<1$, les raisonnements seraient les mêmes, mais les points u_{-1}, u_0, u_1, ... seraient dans l'ordre décroissant au lieu de l'ordre croissant. En outre, dans ce cas, on peut trouver une solution analytique.

Cherchons, en effet, s'il existe une solution représentable par une fonction holomorphe à l'origine

$$\xi(u)=a_0+a_1u+\ldots+a_nu^n+\ldots.$$

On devra avoir

$$a_1+2a_2u+\ldots+na_nu^{n-1}+\ldots=a_0+a_1tu+\ldots+a_{n-1}t^{n-1}u^{n-1}+\ldots.$$

Si une telle solution existe, elle est donc de la forme

$$\xi(u) = a_0 \mathrm{F}(u),$$

$$(82) \qquad \mathrm{F}(u) = 1 + u + \frac{t}{2}u^2 + \ldots + t^{1+\ldots+(n-1)}\frac{u^n}{n!} + \ldots.$$

Comme cette série converge quel que soit u pour $|t| < 1$, elle représente bien une solution de ( ) qui est une fonction entière de u. On voit, en outre, qu'il n'existe pour $t > 1$ aucune solution holomorphe à l'origine.

Après avoir obtenu les résultats précédents, nous avons appris qu'à l'occasion d'un problème arithmétique sans aucun rapport avec notre problème géométrique, Kurt Mahler ([15]) avait été conduit à étudier la même équation fonctionnelle

$$\xi'(u) = \xi(tu).$$

Mais c'est surtout le comportement asymptotique à l'infini de $\xi(u)$ dont il s'est occupé, étude qui a été poursuivie (pour une équation un peu plus générale), par N. G. de Bruijn ([16]) et pour laquelle nous renvoyons à ces deux auteurs.

Généralisation. — L'équation plus générale que (70) traitée par de Bruijn est

$$\xi'(u) = e^{\alpha u + \beta}\xi(u + s).$$

Les résultats que nous avons obtenus pour (70) s'étendraient sans difficulté à l'équation plus générale encore

$$\xi'(u) = e^{\mathrm{F}(u)}\xi(tu),$$

où $\mathrm{F}(u)$ est une fonction partout indéfiniment dérivable arbitraire donnée.

([15]) *On a special functional equation* (*J. London Math. Soc.*, 15, t. 1940, p. 115-123).

([16]) *The difference-differential equation* $\mathrm{F}'(x) = e^{\alpha x + \beta}\mathrm{F}(x-1)$ (*Proc. Kon. Nederlandse Akademie van Wetensch*, t. LVI, p. 448-464).