ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

TARO URA

Sur les courbes définies à la surface du tore par des équations admettant un invariant intégral

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 69 (1952), p. 259-275

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1952_3_69__259_0>

SUR

LES COURBES DÉFINIES A LA SURFACE DU TORE

PAR

DES ÉQUATIONS ADMETTANT UN INVARIANT INTÉGRAL

PAR M. TARO URA.

I. — Introduction.

1. Depuis les recherches de Poincaré (1), les courbes définies par les équations différentielles à la surface du tore ont été étudiées par beaucoup de géomètres, parce que ce problème intéresse les mathématiques pures ainsi que leur application à la Mécanique céleste. Il a été démontré sous des conditions de continuité que, quand le système d'équations n'a aucun point singulier, ou bien il existe au moins une caractéristique périodique, ou bien le mouvement du point représentatif est ergodique. Mais, au contraire, quand il y a des points singuliers, le problème devient très difficile, et, autant que je le sache, M. Cherry seul a étudié (2) ce cas, et démontré que le système d'équations différentielles peut donner « the quasi-periodic flow of discontinuous type ».

Quand le système d'équations différentielles admet un invariant intégral, et n'a aucun point singulier, sous certaines conditions, ou bien toutes les caractéristiques sont périodiques, ou bien le mouvement du point est ergodique. La démonstration en a été donnée (3) d'une façon purement analytique par M. Saito.

(1) *J. Math. pures et appl.*, t. 1, 1885, p. 220-244; *Œuvres*, t. 1, 1928, p. 137-158.
(2) *Proc. London Math. Soc.*, vol. **44**, 1938, p. 175-215.
(3) *Sugaku*, vol. 1, 1949 (en japonais).

2. Alors je me suis proposé de résoudre la question : qu'arrive-t-il quand le système d'équations admet un invariant intégral et a des points singuliers ?

Dans ce cas, l'un des points singuliers au moins doit être un centre, selon le terme de Poincaré, et par conséquent il doit exister un ensemble de caractéristiques périodiques homotopes à zéro. Donc l'extension directe du théorème de M. Saito est impossible.

Dans ce qui suit, nous démontrons un théorème qui est une extension modifiée du théorème de M. Saito, et d'autres théorèmes sur les caractéristiques périodiques et sur les points singuliers.

Nous considérons le cas qui correspond dans les notations de M. Cherry à la valeur $\beta = \pm \frac{\pi}{2}$, cas que lui-même a écarté, et qui ne peut pas être traité par sa méthode. Notre démonstration est tout à fait élémentaire et topologique, mais nous n'utilisons ni la notion du « nombre de rotation » introduite par Poincaré et utilisée [4] par MM. Denjoy et Cherry, ni celle du « cycle sans contact » introduite par Poincaré et utilisée [5] par MM. Denjoy et Siegel.

Pour terminer cette introduction, j'exprime mes remerciements à MM. J. Chazy, Y. Hagihara, M. Hukuhara et T. Saito, qui m'ont aidé par plusieurs remarques importantes à ce sujet.

II. — Hypothèses et points singuliers.

3. Soit T le tore dont les coordonnées x et y ont la période 1 toutes les deux. Envisageons le système d'équations différentielles

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = dt, \tag{1}$$

où X et Y sont deux fonctions uniformes sur le tore T, et t est un paramètre représentant le temps. Nous appelons les courbes définies par le système (1) les caractéristiques. Nous supposons les deux fonctions X et Y analytiques sur le tore, ou seulement développables en chaque point (x_0, y_0) du tore sous la forme

$$\begin{cases} X = a_1 + a_{11}(x - x_0) + a_{12}(y - y_0) + \varepsilon_1, \\ Y = a_2 + a_{21}(x - x_0) + a_{22}(y - y_0) + \varepsilon_2, \end{cases} \tag{2}$$

où a_1, a_2, a_{11}, a_{12}, a_{21} et a_{22} sont des constantes, et ε_1, ε_2 deux fonctions des variables $x - x_0$, $y - y_0$, qui tendent vers zéro plus rapidement que $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ quand (x, y) tend vers (x_0, y_0) : c'est-à-dire que X et Y sont continûment différentiables sur le tore.

Alors nous pouvons classer les points singuliers, c'est-à-dire les points

---

(4) A. Denjoy, *J. Math. pures et appl.*, t. 18, 1932, p. 333-375.

(5) C. L. Siegel, *Ann. Math.*, vol. 46, 1945, p. 423-428.

(x_0, y_0) où $a_1 = a_2 = 0$, en deux espèces, comme le fait Poincaré [6]. Les points singuliers de la première espèce sont ceux où l'on a

$$a_1 = a_2 = 0, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{3}$$

dans les développements (2).

D'après la définition de Poincaré, pour qu'un point soit singulier de la première espèce, il faut qu'il remplisse une autre condition, savoir que l'équation (7) que nous envisagerons plus loin, n'ait pas de racine multiple. Mais cette autre condition n'est pas indépendante de la condition (3) dans le cas que nous considérons.

Nous supposons d'ailleurs que le système (1) n'a que des points singuliers de première espèce. Alors on démontre aisément que ces points singuliers sont en nombre fini.

4. En outre, supposons que le système (1) admet [7] un invariant intégral positif, c'est-à-dire qu'il y a une fonction M uniforme et continûment différentiable sur le tore T, telle que l'on ait

$$0 < \overline{m} < \mathrm{M} < \overline{\overline{m}} < \infty, \tag{4}$$

où $\overline{m}$ et $\overline{\overline{m}}$ sont deux constantes positives, et

$$\iint_{\mathrm{N}(t)} \mathrm{M}\, dx\, dy = \mathrm{K}, \tag{5}$$

où K désigne une constante indépendante du temps t, où N(0) est un ensemble mesurable de points sur le tore T, et où $\mathrm{N}(t)$ est l'ensemble de toutes les positions à l'époque t des points qui appartiennent à N(0) à l'époque $t = 0$, et qui se meuvent selon les équations (1).

Nous remarquons que dans le cas du tore la condition plus générale $0 < \mathrm{M} < \infty$ peut remplacer la condition (4), parce que la surface du tore est compacte.

La condition (5) est équivalente à l'équation

$$\frac{\partial(\mathrm{MX})}{\partial x} + \frac{\partial(\mathrm{MY})}{\partial y} = 0,$$

ou

$$\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial x}\mathrm{X} + \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial y}\mathrm{Y} + \mathrm{M}\left(\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial y}\right) = 0. \tag{6}$$

---

(6) *J. Math. pures et appl.*, t. 7, 1881, p. 385-393; *Œuvres*, t. 1, 1928, p. 12-20.

(7) H. Poincaré, *Acta Mathematica*, t. 13, 1890, p. 56-57; *Les méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*, t. 3, 1899, p. 4-7; E. Cartan, *Leçons sur les invariants intégraux*, 1922; J. Chazy, *Bull. Astron.*, t. 16, 1951, p. 155-156.

Considérons l'équation (6) en un point singulier. En chaque point singulier nous avons $X = Y = 0$, donc l'équation (6) se réduit à

$$M\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right) = 0,$$

ou encore, à cause de la condition (4), à

$$\frac{\partial X}{\partial x} = -\frac{\partial Y}{\partial y},$$

c'est-à-dire à

$$a_{11} = -a_{22}.$$

Envisageons l'équation

$$(7)\qquad \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Quand on pose

$$a_{11} = -a_{22} = a,$$

l'équation (7) se réduit à

$$-\lambda^2 = -a^2 - a_{12}a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0,$$

et il résulte que les deux racines de l'équation (7) sont réelles et de signes contraires, ou bien imaginaires pures et conjuguées. D'après la classification de Poincaré, il ne peut y avoir de nœud : dans le premier cas le point singulier considéré est un col, et un col particulier, puisque les deux racines y sont opposées; dans le second cas c'est un foyer particulier, ou exceptionnellement un centre.

5. Par un col passent deux caractéristiques et deux seulement. Parmi les quatre branches de ces deux caractéristiques, le point tend vers le col sur deux de ces branches quand $t \to \infty$, et sur les deux autres branches quand $t \to -\infty$. Les deux branches sur lesquelles le point tend vers le col quand $t \to \infty$ (ou bien $t \to -\infty$) ont la même tangente au col (*fig.* 1). Donc, comme Poincaré, nous conviendrons de suivre l'une des branches de droite ou de gauche, mais non celle qui a la même tangente, si nous voulons prolonger la caractéristique passant par le col.

Au contraire, toutes les caractéristiques passant suffisamment près d'un foyer tendent vers ce foyer en figurant une spirale quand $t \to \infty$ ou bien $t \to -\infty$. Mais nous allons montrer qu'il ne peut exister de foyer.

En effet, pour fixer les idées, supposons que les points dans un certain voisinage U du foyer A tendent vers le point A quand $t \to \infty$. Alors dans ce voisinage U la valeur de l'intégrale (5) est une certaine constante c positive :

$$\iint_{U} M\, dx\, dy = c > 0, \qquad 0 < \overline{m} < M < \overline{\overline{m}} < \infty.$$

Mais, puisque M est un invariant intégral, on a

$$\lim_{t \to \infty} \iint_{U} M\, dx\, dy = c > 0.$$

Et il résulte que la mesure de l'ensemble U tendrait vers l'infini avec le temps, contrairement à notre hypothèse. Ce qui montre que, dans les hypothèses considérées, il ne peut exister de foyer.

Le centre est un point singulier, au voisinage duquel toutes les caractéristiques sont périodiques, et ces caractéristiques couvrent une région fermée

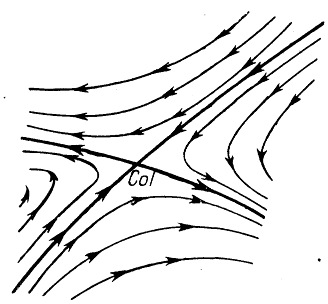

Fig. 1.

dont le bord est une caractéristique périodique sur laquelle il y a au moins un col.

Jusqu'ici, nous n'avons pas utilisé la nature spéciale du tore; tout le raisonnement a été local. Donc tous les résultats sont vrais aussi dans le mouvement du point défini par les équations différentielles (1) admettant un invariant intégral, dans une région du plan ou d'une surface fermée quelconque.

6. Poincaré a démontré ([8]) sur le tore, la relation

$$C - F - N = 0,$$

où C désigne le nombre des cols, N celui des nœuds, et F la somme du nombre des foyers et du nombre des centres. Or, dans le cas étudié, il n'y a ni nœud ni foyer, et nous avons

$$C = F,$$

F étant le nombre des centres, c'est-à-dire que *le nombre des cols et le nombre des centres sont égaux.*

([8]) *J. Math. pures et appl.*, t. 1, 1885, p. 203-208; *Œuvres*, t. 1, 1928, p. 121-125.

Pour éviter des explications compliquées, fixons ici la signification de certaines notations. Soit P un point quelconque sur le tore T : nous désignons par la même lettre P un certain point parmi les points de la représentation plane du tore T, qui correspondent au point P du tore. Nous désignons par $P(t)$ la caractéristique sur le tore qui passe par le point P à l'époque $t = 0$, et nous désignons également par $P(t)$ la courbe intégrale qui sur la représentation plane passe à l'époque $t = 0$ par le point représentatif P auparavant choisi. Nous désignons encore par $P(t)$ le point correspondant à l'époque t sur la caractéristique $P(t)$ du tore, ou sur la courbe intégrale $P(t)$ de la représentation plane.

III. — Périodicité.

7. Dans la démonstration des théorèmes que nous allons donner, le théorème de Jordan et le théorème de récurrence de Poincaré joueront un grand rôle. Ce dernier a été démontré ([9]) par Poincaré dans le mouvement d'un fluide incompressible dans un volume fermé, et étendu à un espace d'un nombre de dimensions quelconque. Nous ne l'utiliserons toutefois que dans une région du plan et sur une surface fermée. Et je crois qu'il convient de l'expliquer ici sous la forme où nous allons l'utiliser.

Théorème de récurrence de Poincaré. — *Dans une région du plan, soit* S, *ou bien sur une surface fermée* S, *nous envisageons le mouvement du point* $P(x, y)$ *défini par les équations différentielles*

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = dt, \tag{8}$$

où les deux fonctions X *et* Y *sont continûment différentiables ; nous supposons que le système* (8) *admet un invariant intégral selon la définition du* n° 4, *et que la région* S, *ou la surface* S, *a une mesure finie.*

Soit U *un voisinage quelconque d'un point* P : *il y a au moins une courbe intégrale* $Q(t)$ *telle que le point* $Q(0)$ *se trouve dans* U, *et que la courbe intégrale* $Q(t)$ *traverse* U *à infinité d'époques différentes, toutes égales à un multiple positif ou négatif de* τ, τ *étant une constante déterminée par le voisinage* U.

8. Avant d'entrer dans le sujet principal de ce Mémoire, nous donnons des lemmes qui servent de fondement à la démonstration des théorèmes I et II qui suivront :

Lemme 1. — *Dans les mêmes hypothèses que celles du théorème de récurrence que nous venons de rappeler, nous envisageons le mouvement du point défini par le sys-*

([9]) *Les méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*, t. 3, 1899, p. 140-151 et 155-157.

tème (8). *Soit* P *un point quelconque, qui n'est pas un point singulier, et soit* N *un segment passant par* P *et qui n'est pas tangent à la courbe intégrale* $P(t)$: *nous pouvons trouver une autre courbe intégrale* $Q(t)$ *qui coupe le segment* N *aux points* $Q(t_1)$ *et* $Q(t_2)$, t_1 *et* t_2 *étant deux nombres finis et* $t_1 < t_2$. *Le segment* N *peut être aussi petit que nous voulons* (*fig.* 2).

En effet, si le segment N est suffisamment petit, il n'y a pas de point singulier sur le segment N, et toutes les courbes intégrales passant par un point du segment N ne sont pas tangentes au point N, puisque le segment N n'est pas tangent à la courbe intégrale $P(t)$, et que les deux fonctions X et Y sont

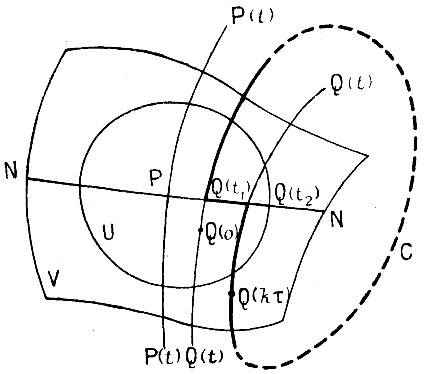

Fig. 2.

continues. Sans restreindre la généralité, nous pouvons supposer que le segment donné N remplit ces deux conditions.

Désignons par $\overline{N}$ le segment ouvert du segment N, c'est-à-dire le segment que nous obtenons en excluant les deux extrémités du segment N; soit V l'ensemble des positions où se trouveront, à toutes les époques t comprises entre $-\varepsilon$ et $+\varepsilon$, $(-\varepsilon < t < \varepsilon)$, tous les points appartenant au segment $\overline{N}$ à l'époque $t = 0$, quand ces points se meuvent selon les équations (8), ε étant un nombre positif assez petit.

Alors l'ensemble V est ouvert, puisqu'il n'y a pas de point singulier sur le segment $\overline{N}$, et que toutes les courbes intégrales passant par un point du segment $\overline{N}$ ne sont pas tangentes au segment $\overline{N}$. Si nous désignons par Q un point quelconque de l'ensemble V, la courbe intégrale passant par le point Q à une époque t_1 doit couper le segment $\overline{N}$ à une époque $t_2 (t_1 - \varepsilon < t_2 < t_1 + \varepsilon)$.

Nous désignons par U un voisinage du point P tel qu'on a $U \subset V$. Ce voisinage U existe toujours, puisque l'ensemble V est ouvert et que le point P appartient à l'ensemble V.

En appliquant le théorème de récurrence au voisinage U, nous pouvons trouver une courbe intégrale $Q(t)$ telle que le point $Q(0)$ se trouve dans U, et que la courbe intégrale $Q(t)$ traverse U à infinité d'époques différentes, toutes égales à un multiple positif ou négatif de τ, τ étant une constante.

Envisageons les deux points $Q(0)$ et $Q(k\tau)$ $(k\tau > 2\varepsilon)$, k étant un nombre entier. Comme les deux points $Q(0)$ et $Q(k\tau)$ appartiennent au voisinage U et *a fortiori* à l'ensemble V, la courbe intégrale $Q(t)$ doit couper le segment $\overline{N}$ au moins en deux points, soit $Q(t_1)$ et $Q(t_2)$, t_1 et t_2 étant deux nombres finis tels que l'on a

$$t_1 < \varepsilon; \qquad t_2 > k\tau - \varepsilon > \varepsilon.$$

Donc on a $t_1 < t_2$.

9. Cela posé, dans la suite nous conviendrons d'appeler une courbe intégrale $P(t)$ périodique, si elle remplit l'une des trois conditions suivantes :

1° ou bien il existe un nombre positif T tel que

$$P(0) = P(T);$$

2° ou bien l'on a

$$\lim_{t \to \infty} P(t) = \lim_{t \to -\infty} P(t);$$

3° ou bien il existe d'autres courbes intégrales $Q(t)$, $R(t)$, ..., $S(t)$ telles que l'on ait

$$\lim_{t \to \infty} P(t) = \lim_{t \to -\infty} Q(t), \qquad \lim_{t \to \infty} Q(t) = \lim_{t \to -\infty} R(t), \qquad \ldots, \qquad \lim_{t \to \infty} S(t) = \lim_{t \to -\infty} P(t).$$

La condition 1° est la condition ordinaire pour qu'une courbe intégrale soit périodique, et elle est suffisante, parce que les fonctions X et Y, dans toutes les équations de ce Mémoire, ne contiennent pas le temps t. Le nombre T est la période de la courbe intégrale $P(t)$. D'après la condition 1°, nous pouvons considérer comme périodique la solution correspondant à un point singulier et à une position d'équilibre, et représentée par une constante; le point singulier est ainsi considéré comme une courbe intégrale périodique, et la période correspondante est arbitraire.

La condition 2° nous permet de considérer une courbe intégrale comme périodique si les points de cette courbe intégrale tendent vers un col pour $t \to \infty$, et vers le même col pour $t \to -\infty$.

La condition 3° signifie que, si une courbe intégrale aboutit à un col, si on la prolonge un certain nombre de fois suivant la convention énoncée plus haut, et si l'on revient au point de départ, la courbe intégrale est considérée comme périodique.

Dans les deux cas 2° et 3°, on peut dire que la période est infinie.

Lemme II. — *Si l'on considère le mouvement du point dans une région du plan, et les hypothèses du théorème de récurrence énoncées au n° 7, toutes les courbes* *intégrales du système* (8) *sont périodiques.* Il faut remarquer que ce lemme ne peut s'étendre comme le théorème de récurrence au mouvement du point sur une surface fermée arbitraire.

En effet, soit P un point quelconque dans la région S du plan. Si P est un point singulier, la courbe singulière $P(t) \equiv P$ est périodique, comme nous l'avons précisé au commencement de ce numéro. Si P n'est pas un point singulier, nous désignons par N la normale à la courbe intégrale $P(t)$ au point P, limitée à un segment assez petit pour que toutes les courbes intégrales passant par un point de ce segment N ne lui soient pas tangentes. D'après le lemme I nous pouvons trouver une courbe intégrale $Q(t)$ qui traverse le segment N deux fois aux points $Q(t_1)$ et $Q(t_2)$ $(t_1 < t_2)$.

Supposons que les points $Q(t_1)$ et $Q(t_2)$ soient distincts : je dis que cette

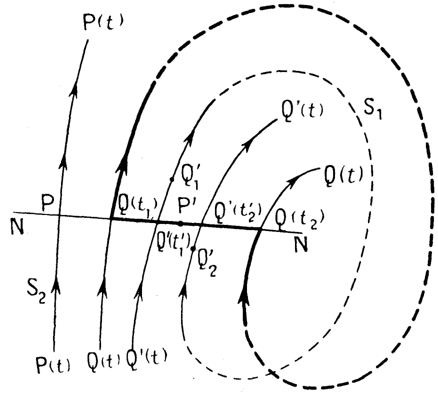

Fig. 3.

hypothèse conduit à une contradiction. Envisageons, en effet, la courbe fermée C constituée par l'arc $\overparen{Q(t_1), Q(t_2)}$ de la courbe intégrale $Q(t)$ et par le segment $\overparen{Q(t_2), Q(t_1)}$ de la normale N (*fig.* 2).

Soit P′ un point quelconque sur le segment $\overparen{Q(t_2), Q(t_1)}$ (*fig.* 3) : d'après le lemme I nous pouvons trouver encore une courbe intégrale $Q'(t)$ qui traverse le segment N aux points $Q'(t'_1)$ et $Q'(t'_2)$ situés entre les deux points $Q(t_1)$ et $Q(t_2)$.

Jusqu'ici tous les résultats sont valables aussi dans le mouvement sur la surface fermée pourvu que cette surface ait une mesure finie, parce que nous n'avons pas utilisé la nature spéciale du plan.

Comme $t_2 - t_1$ est fini, il n'y a aucun point singulier sur l'arc $\overparen{Q(t_1), Q(t_2)}$, et la courbe C a partout une tangente continue excepté aux deux points $Q(t_1)$ et $Q(t_2)$. Il résulte que la courbe C est une courbe de Jordan, et elle partage le plan en deux parties, que nous appelons S_1 et S_2. Pour fixer les idées, nous supposons que le point $Q(t_2 + \varepsilon)$ appartienne à S_1, ε étant un nombre positif suffisamment petit.

Par hypothèse la courbe intégrale passant par un point quelconque du segment N n'est pas tangente à ce segment N, donc toutes les courbes intégrales passant par un point du segment N doivent traverser ce segment dans le même sens. Il résulte que les points $Q'(t'_1 + \varepsilon') = Q'_1$ et $Q'(t'_2 - \varepsilon') = Q'_2$ se trouvent respectivement dans S_1 et S_2, ε' étant un nombre suffisamment petit positif.

Donc, d'après le théorème de Jordan, il faut que l'arc $\widehat{Q'_1, Q'_2}$ de la courbe intégrale $Q'(t)$, soit l'arc C', coupe la courbe C. Or, il n'y a aucun point singulier sur l'arc C'. D'ailleurs aucune courbe intégrale ne peut couper le segment N de S_1 à S_2 dans U : d'où une contradiction. Il résulte qu'il faut que les points $Q(t_1)$ et $Q(t_2)$ soient confondus, c'est-à-dire que la courbe intégrale $Q(t)$ est périodique.

Donc, nous avons démontré que la courbe intégrale passant par chacun des points d'un ensemble partout dense dans la région S, est périodique, et que la période correspondante est finie.

10. Désignons encore par P un point non singulier quelconque dans la région S. Soit comme précédemment N la normale de la courbe intégrale $P(t)$ au point P, limitée à un segment assez petit pour que toutes les courbes intégrales passant par un point de ce segment N ne lui soient pas tangentes. Suivant le résultat du numéro précédent, la courbe intégrale passant par chacun des points d'un sous-ensemble partout dense du segment N, est périodique. Soit $f(x)$ la loi de conséquence définie [10] par Poincaré sur le segment N, où x est une abscisse convenablement choisie. Alors $f(x)$ est continu sur le segment N, et s'annule sur un sous-ensemble partout dense de N. Donc, $f(x)$ est identiquement nul sur N, et en particulier au point P, c'est-à-dire que la courbe intégrale $P(t)$ est périodique.

Il faut remarquer d'ailleurs que la période de la courbe intégrale $P(t)$ peut être infinie.

Or, par hypothèse, le point P est arbitraire dans la région S. Donc toutes les courbes intégrales de cette région sont périodiques.

11. Théorème I. — *S'il y a une caractéristique périodique non homotope à zéro, toutes les caractéristiques du système* (1) *sont périodiques.*

En effet, soit $U(t)$ la caractéristique périodique non homotope à zéro. Alors

[10] *J. Math. pures et appl.*, t. 8, 1882, p. 251-261; *Œuvres*, t. 1, 1928, p. 44-53.

l'ensemble qu'on obtient en retranchant cette caractéristique du tore, soit $R = T - U(t)$, est équivalent à la région d'anneau du plan.

Si la caractéristique $U(t)$ ne passe par aucun col, l'ensemble R est invariant par rapport au système (1). En appliquant le lemme II au mouvement du point dans la région R, nous pouvons démontrer que toutes les caractéristiques sont périodiques.

Au contraire, si la caractéristique $U(t)$ passe par un col au moins, l'ensemble R n'est pas invariant, mais la démonstration subsiste. Ajoutons ici quelques remarques.

Soit P un point quelconque de l'ensemble R. Si le point P est singulier, la caractéristique $P(t) \equiv P$ est déjà périodique, selon la définition 1°. Si le point P n'est pas un point singulier, désignons par N un segment de la normale à la caractéristique $P(t)$ au point P, assez petit pour que toutes les caractéristiques passant par un point du segment N coupent ce segment dans le même sens. En appliquant le lemme I deux fois au mouvement sur le tore, et en raisonnant comme dans la première partie de la démonstration du lemme II, nous pouvons trouver deux caractéristiques $Q(t)$ et $Q'(t)$, dont la première $Q(t)$ coupe le segment N aux points $Q(t_1)$ et $Q(t_2)$ $(t_1 < t_2)$, et dont la deuxième $Q'(t)$ coupe le segment aux points $Q'(t'_1)$ et $Q'(t'_2)$ $(t'_1 < t'_2)$ situés entre les deux points $Q(t_1)$ et $Q(t_2)$. Comme $t_2 - t_1$ et $t'_2 - t'_1$ sont finis, les caractéristiques $Q(t)(t_1 \leqq t \leqq t_2)$ et $Q'(t)(t'_1 \leqq t \leqq t'_2)$ ne peuvent pas traverser la caractéristique $U(t)$.

Donc nous pouvons traiter les courbes $Q(t)(t_1 \leqq t \leqq t_2)$ et $Q'(t)(t'_1 \leqq t \leqq t'_2)$ sur le tore T, comme nous avons traité plus haut la courbe C et l'arc C' dans la région d'anneau R sur le plan. Alors, en raisonnant comme dans la démonstration du lemme II, nous démontrons aisément le théorème I.

IV. — Ergodicité.

12. Théorème II. — *S'il n'existe pas de caractéristique périodique non homotope à zéro, le mouvement du point défini par les équations* (1) *dans l'ensemble*

$$S = T - R$$

est périodique, R *étant la réunion des régions couvertes par les caractéristiques périodiques homotopes à zéro autour des centres.*

Rappelons que dans le cas considéré l'ergodicité signifie ce qui suit : *Si* P *et* Q *sont deux points quelconques de l'ensemble* S, *et si* U *est un voisinage quelconque du point* P, *il existe un nombre* $\bar{t}$ *tel que* $Q(\bar{t})$ *appartient au voisinage* $U : Q(\bar{t}) \in U$.

Pour démontrer le théorème, remarquons qu'évidemment l'ensemble R et *a posteriori* l'ensemble S sont invariants par rapport au système (1). Donc la fonction M est un invariant intégral dans le mouvement du point défini par le système (1) dans l'ensemble S.

Cela posé, la normale à la caractéristique $P(t)$ aux point P est définie, puisqu'il n'y a pas de point singulier dans l'ensemble S : soit N_P un segment de cette normale qui appartient au voisinage U.

D'après le lemme I, nous pouvons trouver une caractéristique $P'(t)$ qui coupe le segment N_P au moins deux fois aux points $P'(t_1)$ et $P'(t_2)$ $(t_1 < t_2)$.

Nous envisageons la courbe fermée C constituée par l'arc $\widehat{P'(t_1), P'(t_2)}$ de la caractéristique $P'(t)$ et par le segment $\widehat{P'(t_2), P'(t_1)}$ du segment N_P. Il est évident que la courbe fermée C est une courbe de Jordan, mais n'est pas homotope à zéro.

Pour fixer les idées, nous supposons que l'on a

$$P'(t_1) = (0, 0), \qquad P'(t_2) = (m + \varepsilon, n + \varepsilon'),$$

où m et n sont deux nombres entiers tels que

$$(m, n) \neq (0, 0), \qquad (m, n) \neq (1, 0),$$

et où ε et ε' sont deux nombres voisins de zéro.

Nous désignons par C_0 la courbe constituée par l'arc $\widehat{(0, 0), (m+\varepsilon, n+\varepsilon')}$ de la courbe intégrale $P'(t)$ et par le segment $\widehat{(m+\varepsilon, n+\varepsilon'), (m, n)}$ du segment N_P; nous désignons par C_1 la courbe partant du point (m, n) et congruente à la courbe C_0, par C_{-1} la courbe aboutissant au point $(0, 0)$ et congruente à la courbe C_0, et ainsi de suite.

Posons

$$\overline{C} = \ldots + C_{-1} + C_0 + C_1 + \ldots.$$

Nous désignons par $\overline{\overline{C}}$ la courbe passant par le point $(1, 0)$ et congruente à la courbe $\overline{C}$. Envisageons la région A bordée par les deux courbes $\overline{C}$ et $\overline{\overline{C}}$. Cette région A est équivalente à la région d'anneau du plan (*fig.* 4).

Soit Q un point quelconque dans l'ensemble S. Si le point Q était situé sur la courbe C, la démonstration du théorème serait achevée. Donc nous pouvons supposer que le point Q ne se trouve pas sur la courbe C. La caractéristique $Q(t)$ ne peut couper l'arc $\widehat{P'(t_1), P'(t_2)}$ de la caractéristique $P'(t)$, parce qu'il n'y a pas de point singulier sur l'arc $\widehat{P'(t_1), P'(t_2)}$, $t_2 - t_1$ étant fini. Si la caractéristique $Q(t)$ coupait le segment de la normale N_P, la démonstration serait encore achevée. Il résulte que nous pouvons supposer que la caractéristique $Q(t)$ ne coupe pas la courbe C.

Nous désignons par la même lettre Q un des points représentatifs de la région d'anneau A qui correspondent au point Q sur le tore T. Alors la caractéristique $Q(t)$ dans la région d'anneau A qui passe par le point Q que nous venons de choisir, ne peut couper les bords $\overline{C}$ et $\overline{\overline{C}}$ de la région d'anneau A.

Soit U_Q un voisinage quelconque du point Q dans la région d'anneau A et dans l'ensemble S. Je dis qu'il existe au moins un point dans le voisinage U_Q par lequel passe la caractéristique qui coupe le bord $\overline{C}$ ou $\overline{\overline{C}}$, quand ce voisinage se meut selon les équations (1).

Soit

$$U'_Q = \bigcup_t U_Q(t),$$

c'est-à-dire la réunion des ensembles $U_Q(t)$ pour toutes les valeurs de t

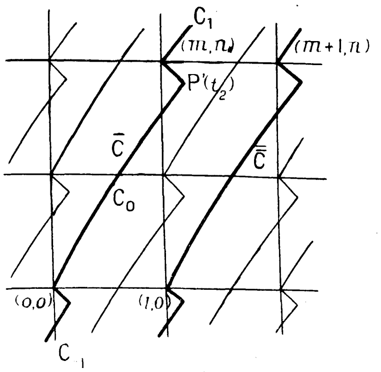

Fig. 4.

comprises entre $-\infty$ et $+\infty$. Supposons $U'_Q \subset A$, et nous trouverons une contradiction. En effet, U'_Q est alors une région invariante par rapport aux équations (1), et de mesure finie. En appliquant le lemme II au mouvement du point dans la région U'_Q, nous pouvons démontrer que toutes les caractéristiques dans la région U'_Q doivent être périodiques; ce qui est en contradiction avec l'hypothèse suivant laquelle il n'y a pas de caractéristique périodique dans la région S.

Il résulte qu'il existe au moins un point dans le voisinage U_Q, par lequel passe la caractéristique coupant la normale N_P. Donc la caractéristique, qui passe par chacun des points dont l'ensemble est partout dense dans l'ensemble S, coupe le segment N_P.

13. Nous désignons encore par Q un point quelconque dans l'ensemble S et par U_Q un voisinage du point Q dans lequel toutes les caractéristiques coupent dans le même sens la normale de la caractéristique $Q(t)$ au point P. Soit N_Q le segment de cette normale qui appartient au voisinage U_Q. Par le résultat du numéro précédent, la caractéristique passant par chacun des points dont

l'ensemble est partout dense dans U_Q coupe le segment N_P. Donc la caractéristique passant par chacun des points d'un sous-ensemble partout dense de N_Q, coupe le segment N_P.

Soit x une abscisse convenablement choisie du segment N_Q et y celle du segment N_P. Alors nous pouvons obtenir une correspondance $y=f(x)$, telle que le domaine de x est un sous-ensemble partout dense de N_Q, et que y est l'abscisse du point où la caractéristique passant par le point d'abscisse x coupe le segment N_P pour la première fois. Cette fonction $f(x)$ est continue. Donc $f(x)$ est bien définie au point Q, d'où résulte que la caractéristique $Q(t)$ doit couper le segment N_P, c'est-à-dire qu'il existe un nombre $\bar{t}$ tel qu'on a $Q(\bar{t}) \in U$.

V. — Distribution des caractéristiques et des points singuliers.

14. L'objet principal de cette section est de démontrer que le cas du n° 17 ne peut avoir lieu. Nous pouvons obtenir plusieurs résultats concernant la distribution des caractéristiques et des points singuliers en utilisant les idées de la démonstration du théorème III, que nous allons donner. Mais l'étude complète du cas général où la valeur commune de F et C est un entier quelconque, est très laborieuse, et nous ne traiterons ici que le cas où cette valeur commune est l'unité : $F=C=1$.

15. Nous désignons par F et C respectivement le centre et le col. Une région R autour du centre F est couverte par les caractéristiques périodiques homotopes à zéro, et la caractéristique qui constitue le bord de la région R est une caractéristique passant par le col. Donc, parmi les quatre branches A', A'', B' et B'' qui tendent vers le col pour $t\to\infty$ ou pour $t\to-\infty$, une paire au moins doit constituer une seule caractéristique périodique. Nous supposons que ce soit la paire A', A'', et nous désignons par A cette caractéristique périodique.

16. Considérons le cas où *la caractéristique* A *est homotope à zéro.*

a. Supposons d'abord que *les deux branches* B' *et* B'' *forment une seule caractéristique* B, *dans la région* T — R.

D'après la définition de la caractéristique périodique dans le second cas, la caractéristique B est périodique, mais elle ne peut être homotope à zéro, parce qu'alors, dans la région bordée par la caractéristique B, il existerait au moins un centre en outre du centre F, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse $F=1$.

Il résulte que *toutes les caractéristiques dans la région* T — R *sont périodiques et non homotopes à zéro*, par application du théorème I.

b. Supposons que *les branches* B′ *et* B″ *ne forment pas une seule caractéristique dans la région* T — R.

Dans ce cas, d'après le théorème II, *le mouvement du point dans la région* T — R *est ergodique*.

17. Considérons le cas où *la caractéristique* A *n'est pas homotope à zéro*.

Supposons le col placé à l'origine $x = 0$, $y = 0$. Nous désignons par A la courbe intégrale sur la représentation plane qui tend vers le point (o, o) pour $t \to -\infty$, et qui correspond à la caractéristique A sur le tore. Puisque la caractéristique A est périodique et non homotope à zéro, il faut qu'il existe un

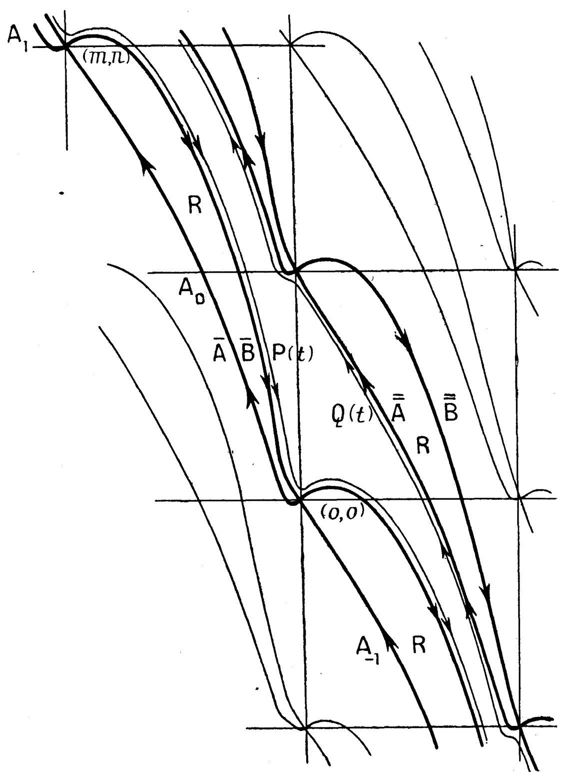

Fig. 5.

couple de nombres entiers $(m, n) \neq (0, 0)$ tels que la courbe intégrale A sur la représentation plane tende vers le point (m, n) pour $t \to \infty$, et qu'il n'y ait pas de col sur l'arc $\overparen{(0,0),(m,n)}$ de la courbe intégrale A. Nous désignons par A_0 l'arc $\overparen{(0,0),(m,n)}$ de la courbe intégrale A, par A_1 l'arc $\overparen{(m,n),(2m,2n)}$ congruent à la courbe A_0, par A_{-1} l'arc $\overparen{(-m,-n),(0,0)}$, et ainsi de suite, et par $\bar{A}$ la courbe totale (*fig.* 5), soit

$$\bar{A} = \ldots + A_{-1} + A_0 + A_1 + \ldots.$$

Sans restreindre la généralité, nous pouvons supposer que la courbe $\overline{A}$ ne passe pas par le point $(1, 0)$. Soit x la plus petite des valeurs telles qu'une courbe intégrale congruente à la courbe $\overline{A}$ et différente de $\overline{A}$ passe par le point $(x, 0)(0 < x \leqq 1)$. Désignons par $\overline{\overline{A}}$ cette courbe intégrale.

Cela posé, la région R est couverte par les caractéristiques périodiques homotopes à zéro, et la caractéristique A n'est pas homotope à zéro. Donc la courbe A ne constitue pas le bord entier de la région R. Donc la branche B′ et la branche B″ forment une seule caractéristique périodique B, qui est l'autre partie du bord de la région R.

Soit B la courbe intégrale sur la représentation plane, qui correspond à la caractéristique B sur le tore, et tend vers le point $(0, 0)$ quand $t \to \infty$. Alors la courbe B doit tendre vers le point (m, n) quand $t \to -\infty$. Appliquons à partir de cette courbe la construction qui nous a donné la courbe $\overline{A}$ à partir de la courbe A : nous obtenons la courbe $\overline{B}$.

18. Envisageons la région $\overline{T}$ bordée par les deux courbes $\overline{A}$ et $\overline{\overline{A}}$ sur la représentation plane. Si P est un point quelconque du tore T, il y a infinité de points dans la région $\overline{T}$ qui correspondent au point P. Donc la courbe $\overline{B}$, ou une courbe $\overline{\overline{B}}$ congruente à la courbe $\overline{B}$, appartient à la région $\overline{T}$.

Or, si l'on considère la définition de la courbe $\overline{\overline{A}}$, il est aisé de démontrer qu'il n'y a pas de col dans la région $\overline{T}$, excepté sur les bords. Donc deux courbes différentes et congruentes à la courbe B ne peuvent appartenir à la région $\overline{T}$ à la fois. Et, si la courbe $\overline{B}$ n'appartient pas à la région $\overline{T}$, la courbe $\overline{\overline{B}}$ appartient à la région $\overline{T}$, et passe par les cols situés sur la courbe $\overline{\overline{A}}$ qui sont en nombre infini dans la représentation plane. Sans restreindre la généralité, nous pouvons supposer que la courbe $\overline{B}$ appartient à la région $\overline{T}$.

19. Soit $P(t)$ une courbe intégrale assez proche de la courbe intégrale $\overline{B}$ dans la région $\overline{T}$, pour que le mouvement du point sur la courbe intégrale $P(t)$ ait le même sens que celui de la courbe intégrale $\overline{B}$. Nous définissons la courbe intégrale $Q(t)$ à partir de la courbe intégrale $\overline{\overline{A}}$ comme nous avons défini $P(t)$ à partir de la courbe intégrale $\overline{B}$. Puisque la caractéristique A est périodique non homotope à zéro, d'après le théorème I, les deux caractéristiques $P(t)$ et $Q(t)$ sont périodiques et non homotopes à zéro. Désignons par $\overline{\overline{T}}$ la région bordée par les deux courbes intégrales $P(t)$ et $Q(t)$. Cette région est évidemment équivalente à la région d'anneau du plan, et il n'y a pas de point singulier dans cette région, bords compris, et le mouvement du point sur les bords a le sens contraire. La région $\overline{\overline{T}}$ est, bien entendu, une région invariante admettant l'invariant intégral M. Mais, d'après le dernier théorème de Géométrie de

Poincaré, cela est impossible ([11]), puisque dans la région $\overline{\overline{\mathrm{T}}}$, il n'y a pas de point singulier.

20. Nous avons donc le

THÉORÈME III. — *Quand on a*

$$\mathrm{F}=\mathrm{C}=1,$$

les deux branches qui tendent vers le col pour $t\to\infty$ *ou pour* $t\to-\infty$, *forment une caractéristique périodique homotope à zéro, qui constitue le bord entier de la région* R *couverte par les caractéristiques homotopes à zéro autour du centre. Si les deux autres branches aboutissant au col forment dans la région* T — R *une seule caractéristique, cette caractéristique périodique ne doit pas être homotope à zéro, et toutes les caractéristiques de la région* T — R *sont périodiques non homotopes à zéro; mais au contraire, si ces deux branches ne forment pas une seule caractéristique non homotope à zéro, le mouvement du point dans la région* T — R *est ergodique.*

([11]) *Rendiconti del Circolo Matematico di Parlermo*, t. 33, 1912, p. 376-378; GEORGE D. BIRKHOFF, *Dynamical Systems*, 1927, p. 165-169.