

# ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

HENRI PAILLOUX

## Quelques applications du calcul fonctionnel à la mécanique rationnelle

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 3<sup>e</sup> série*, tome 69 (1952), p. 213-257

[http://www.numdam.org/item?id=ASENS\\_1952\\_3\\_69\\_\\_213\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1952_3_69__213_0)

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1952, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

---

# QUELQUES APPLICATIONS DU CALCUL FONCTIONNEL A LA MÉCANIQUE RATIONNELLE

PAR M. HENRI PAILLOUX.



Le présent travail se rattache au Calcul fonctionnel, au Calcul tensoriel et à la Mécanique rationnelle. Ayant voulu étudier des problèmes de Mécanique relatifs à des systèmes dépendant de fonctions arbitraires, il nous a fallu étendre la méthode classique de la Mécanique analytique de Lagrange, car les procédés anciens étaient insuffisants. La notion de dérivée fonctionnelle, quoique non indispensable, nous fut très utile; en particulier pour écrire simplement les nouvelles équations du mouvement. En approfondissant les procédés de calcul, nous avons été amenés à constater que les notations tensorielles, convenablement introduites, simplifient notablement l'écriture.

Dans un premier chapitre nous rappelons la notion de dérivée fonctionnelle, en précisant les limites de son emploi. Dans une digression, nous indiquons rapidement comment les notations du Calcul tensoriel sont utiles, et comment s'étendent des propriétés simples de l'Analyse élémentaire. Après avoir repris dans un deuxième chapitre la question du potentiel de forme, nous étendons le théorème de Castigliano et le théorème corrélatif, puis dans un troisième chapitre, les équations de Lagrange. Au quatrième chapitre, nous retrouvons les résultats classiques pour une poutre horizontale chargée et pour une verge vibrant, encastrée à une extrémité. Dans le cinquième chapitre, nous donnons des exemples nouveaux : mouvement d'un fil inextensible, dans un plan et sur une surface fixe ou mobile; mouvement d'une courbe élastique, dans le plan et dans l'espace.

Le dernier chapitre montre comment on peut passer des équations rigoureuses de l'Élasticité à des équations approchées, voisines de celles de la Résistance des matériaux, valables pour les poutres droites.

L'emploi des méthodes et des notations de l'Analyse fonctionnelle se montre ainsi très utile au développement de la Mécanique. Inversement cette dernière fournit à l'Analyse fonctionnelle des exemples qui restent élémentaires dans leur principe, quoique les calculs soient généralement longs; mais ce dernier point est une des servitudes de la Mécanique.

## CHAPITRE I.

### LE CALCUL FONCTIONNEL EN MÉCANIQUE.

Dans la Mécanique de Lagrange, les systèmes matériels considérés ont leur position définie par un nombre fini de paramètres géométriques, et la notion de dérivation ordinaire suffit à la mise en équation des problèmes correspondants. Cependant, dans d'autres questions de Mécanique où interviennent des systèmes élastiques ou déformables, à chaque instant, la position du système ne peut être définie que par la donnée, ou la connaissance, d'une ou de plusieurs fonctions d'une, deux ou trois variables qui remplacent les paramètres de Lagrange, et que nous appelons des fonctions-paramètres.

Il est commode dans de telles questions de séparer l'application des principes de la Mécanique des calculs qui en découlent, le volume de ces derniers risquant de faire perdre de vue les idées directrices. C'est pourquoi il est utile de faire appel aux notions élémentaires du calcul fonctionnel et du calcul tensoriel.

Considérons un domaine  $D$  décrit par un point  $P$ , et une fonction  $f(P)$  définie dans  $D$ . Une fonctionnelle de  $f$  est un nombre qui dépend de l'ensemble des valeurs de la fonction  $f$  dans  $D$ . Tels sont le maximum de  $f$ , l'intégrale de  $f$  ou de son carré, ou du carré de son gradient dans  $D$ . La masse d'une plaque de densité  $\rho(x, y)$ , et d'épaisseur  $e(x, y)$  située dans le plan des  $x, y$ , et dont le contour est bien précisé, est une fonctionnelle de la densité superficielle  $\rho$  ou de l'épaisseur  $e$ .

La définition de la dérivée d'une fonctionnelle  $\mathcal{F}$  peut être ainsi présentée : la fonction  $f$  ayant été choisie ainsi que le point  $P$  du domaine  $D$ , considérons un élément de volume  $\Delta\tau$  entourant  $P$ , et l'accroissement, constant,  $\Delta f$  de  $f$ , uniquement dans  $\Delta\tau$ ,  $\Delta f$  étant nul dans  $D - \Delta\tau$ . L'accroissement de la fonctionnelle,  $\Delta\mathcal{F}$  est infiniment petit avec  $\Delta\tau$  et avec  $\Delta f$ . Si le rapport  $\frac{\mathcal{F}(f + \Delta f) - \mathcal{F}(f)}{\Delta f \Delta\tau}$  possède une limite lorsque  $\Delta f$  tend vers zéro, et que  $\Delta\tau$  tend vers zéro dans toutes ses dimensions en entourant constamment le point  $P$ , nous dirons que cette limite est la dérivée fonctionnelle de  $\mathcal{F}$  au point  $P$ , pour la fonction  $f$ .

Pour des raisons de commodité d'écriture, nous allons provisoirement employer les conventions d'écriture du Calcul tensoriel et constater que cette

dérivée fonctionnelle est l'extension naturelle de la dérivée partielle d'une fonction de plusieurs variables.

Dans l'espace  $E_r$  à  $r$  dimensions, un point est caractérisé par ses coordonnées  $x^i$ . Si pour un instant on laisse de côté la place de l'indice, on peut dire que les coordonnées sont données par les valeurs de la fonction d'une variable  $x(i)$  pour des valeurs entières de la variable : 1, 2, ...,  $r$ . Le point P des paragraphes précédents joue le même rôle que l'indice  $i$ ; aussi convenons-nous de désigner par  $x^P$ , avec l'indice supérieur P, une fonction de P. La notion élémentaire de point de coordonnées  $x^i$  est remplacée par celle de point de coordonnées  $x^P$ . Désignons par  $\varepsilon_x$  l'ensemble des valeurs prises par  $x^P$ . A côté de cet espace ponctuel  $\varepsilon_x$ , le domaine D joue le rôle suivant : dans le cas d'un nombre fini de variables, D se réduit à un nombre fini de points numérotés 1, 2, ...,  $r$ ; en quelque sorte le point P du domaine D désigne une direction d'axe de coordonnées. Une fonction  $f(x^i)$  est un nombre déterminé par la connaissance du point  $x^i$ . De même une fonctionnelle  $f(x^P)$  est définie par la connaissance du point  $x^P$  dans l'espace  $\varepsilon_x$ .

La dérivée  $\frac{\partial f}{\partial x^i}$  se calcule en faisant varier seulement  $x^i$ . Disons plus simplement que nous faisons varier la fonction  $f$  uniquement dans la direction  $i$ , nous faisons ensuite le rapport de l'accroissement de la fonction à celui de la variable. Dans l'espace  $\varepsilon_x$  cette définition se conserve, mais il faut faire intervenir l'élément de volume de D pour avoir une limite. Comme conséquence de ces remarques, nous dirons que la dérivée fonctionnelle est calculée au point  $x$ , suivant la direction définie par P, ou très brièvement, nous parlerons de la *dérivée en  $x$ , vers P*. Cette convention de langage rend toutes naturelles les propriétés que nous avons à utiliser. Nous notons la dérivée fonctionnelle  $\frac{\partial f}{\partial x^P}$ .

GRADIENT FONCTIONNEL. — Avec  $r$  variables, la différentielle d'une fonction  $f(x_i)$  s'écrit

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i,$$

et le vecteur covariant  $\frac{\partial f}{\partial x^i}$  est appelé gradient de la fonction  $f$ , de sorte que, par définition du produit scalaire, *la différentielle de la fonction  $f$  est le produit scalaire du gradient par le vecteur différentiel  $dx$* .

Dans l'espace  $\varepsilon_x$  nous admettons l'existence de vecteurs ou tenseurs du premier ordre, à un indice supérieur ou inférieur  $u^P$  ou  $v_Q$ . Ce sont des fonctionnelles de  $f$ , et dépendant en plus d'une direction P ou Q. Partageons d'autre part le domaine D en petits domaines tels que  $\Delta\tau$  qui entoure le point P. Partant d'une fonction  $x^P$  donnée, et qui ne variera pas dans ce qui suit, considérons un accroissement de  $x$ , et désignons par  $\Delta x^P$  l'accroissement vers P; et remplaçons pour un instant, par  $\Delta x^P$  dans  $\Delta\tau$ , l'accroissement réel de  $f$ .

L'accroissement total de  $f$  pour tout le domaine  $D$  est mesuré en première approximation par la somme des accroissements

$$\sum \frac{\partial f}{\partial x^p} \Delta x^p \Delta \tau.$$

Si la fonctionnelle  $f$  possède une dérivée, et sous des réserves de convergence que nous ne précisons pas, la différentielle  $df$  a la valeur suivante :

$$\delta f = \int_D \frac{\partial f}{\partial x^p} \delta x^p d\tau.$$

Pour l'interpréter géométriquement, introduisons la notion de produit scalaire entre deux vecteurs de variances opposées,  $u^p, v_p$ ,

$$(u, v) = \int_D u^p v_p d\tau.$$

C'est l'extension de la formule connue en calcul tensoriel  $(u, v) = u^i v_i$ . La différentielle  $df$  est donc le produit scalaire du vecteur contravariant  $\delta x^p$ , et du vecteur covariant  $\frac{\partial f}{\partial x^p}$  que nous appelons le gradient de la fonctionnelle. Ce vecteur constitue l'ensemble des valeurs des dérivées fonctionnelles en un point donné de  $\epsilon_x$ .

FONCTIONNELLES DE PLUSIEURS FONCTIONS. — Jusqu'ici nous avons supposé que la fonctionnelle  $f$  ne dépendait que de la seule variable  $x^p$ . Supposons maintenant que  $f$  dépende des fonctions  $x^p, y^q, \dots$ , où les points  $P, Q, \dots$  varient dans des domaines  $D_p, D_q, \dots$ . Ces domaines peuvent être distincts ou confondus. Si l'on suppose que l'une des fonctions varie seule, on sait définir la dérivée fonctionnelle correspondante, nous dirons que c'est une dérivée partielle. Nous écrirons ainsi les dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x^p}, \quad \frac{\partial f}{\partial y^q}, \quad \dots$$

La différentielle de la fonctionnelle  $f$  est donnée par la relation suivante :

$$\delta f = \int_{D_p} \frac{\partial f}{\partial x^p} \delta x^p d\tau(P) + \int_{D_q} \frac{\partial f}{\partial y^q} \delta y^q d\tau(Q) + \dots$$

Dans l'espace à trois dimensions,  $D$  peut être un volume, une surface, une ligne, ou un point, et les domaines  $D_p, D_q, \dots$  peuvent être de nature différente.

CALCUL PRATIQUE DES DÉRIVÉES FONCTIONNELLES. — Pour savoir si une fonctionnelle possède une dérivée, et la calculer, on forme très généralement la diffé-

rentielle, c'est-à-dire l'expression  $\delta f = f(x + \delta x) - f(x)$  qu'on cherche à mettre sous la forme suivante :

$$\delta f = \int_D g_p \delta x^p d\tau.$$

Si c'est possible,  $g_p$  représente la dérivée cherchée. Or, très fréquemment auprès d'une intégrale de volume, pour prendre un exemple, figurent des intégrales doubles, simples, ou des termes relatifs à des points isolés, les divers domaines d'intégrations se situant dans  $D$  ou sur sa frontière. Nous reportant à la définition de la dérivée en un point, nous voyons que  $g_p$  représente toujours la dérivée fonctionnelle en un point qui n'est pas sur l'un des domaines d'intégration supplémentaires. Pour ces derniers points, il n'y a pas de dérivée fonctionnelle, et la formule donnée plus haut pour la différentielle n'est plus valable; elle doit être remplacée par la formule correcte.

De nombreux exemples illustreront ce fait. Or, dans les exemples concernant la Mécanique, les intégrales supplémentaires figurant dans la différentielle sont calculées sur la frontière. De plus les fonctions  $x^p, y^q, \dots$  ne sont pas absolument arbitraires, elles doivent vérifier certaines conditions, telles que ces termes supplémentaires sont nuls. Nous parlerons de « dérivées conditionnelles », et dans ce cas, la différentielle se réduit à l'unique terme considéré initialement.

**THÉORÈME D'EULER SUR LES FONCTIONNELLES HOMOGENES.** — Soit  $f$  une fonctionnelle des fonctions  $x^p, y^q, z^r, \dots$  respectivement définies dans des domaines  $D_p, D_q, \dots$ . Cette fonctionnelle est dite homogène d'ordre  $m$ , si quelle que soit la constante  $t$  on a identiquement

$$f(tx, ty, tz) = t^m f(x, y, z).$$

Nous admettons que, grâce à certaines conditions frontières, la différentielle de la fonctionnelle a la forme suivante :

$$\delta f = \int_{D_p} \frac{\delta f}{\delta x^p} \delta x^p d\tau(P) + \dots$$

Considérons maintenant que dans la suite du calcul, les fonctions  $x^p, y^q, \dots$  sont invariables, inchangées. La fonctionnelle peut être considérée comme une fonction de la variable  $t$ , soit  $\varphi(t)$ . Pour obtenir la différentielle de  $\varphi(t)$ , nous devons former  $\varphi(t + \delta t) - \varphi(t)$ . C'est une expression qui peut s'évaluer grâce à la différentielle de la fonctionnelle, avec des accroissements de fonctions  $\delta x^p = x^p \delta t, \dots$  :

$$\delta \varphi(t) = \int_{D_p} \frac{\delta f}{\delta x^p} x^p \delta t d\tau + \dots$$

Une autre manière de calculer la différentielle de  $\varphi(t)$  consiste à différencier en  $t$  la relation de définition de la fonctionnelle homogène

$$\varphi(t) = t^m f(x, y, \dots), \quad \delta \varphi(t) = mt^{m-1} \delta t f(x, y, \dots).$$

La comparaison de ces deux valeurs pour  $t=1$  donne la relation suivante, généralisation du théorème sur les fonctions homogènes à plusieurs variables :

$$mf = \int_{D_p} x^p \frac{\partial f}{\partial x^p} d\tau(P) + \int_{D_q} y^q \frac{\partial f}{\partial y^q} d\tau(Q) + \dots$$

FONCTIONNELLES ADJOINTES. — Le théorème précédent va nous servir à étendre le procédé de passage de l'équation ponctuelle à l'équation tangentielle de la même courbe ou surface. Nous rencontrerons des considérations analogues quand nous étendrons le théorème de Castigliano en vue de l'étude des systèmes déformables.

D'une manière précise, si  $f(x, y, z)$  est une fonction homogène de degré  $m$ , posons

$$u = \frac{1}{m} f'_x, \quad v = \frac{1}{m} f'_y, \quad w = \frac{1}{m} f'_z,$$

et résolvons ces relations en  $x, y, z$ . Transportons les valeurs ainsi obtenues dans  $f$ , nous obtenons une nouvelle fonction homogène  $g(u, v, w)$ . On démontre que l'on a identiquement

$$x = \frac{1}{\mu} g'_u, \quad y = \frac{1}{\mu} g'_v, \quad z = \frac{1}{\mu} g'_w, \quad \frac{1}{m} + \frac{1}{\mu} = 1.$$

La réciprocité entre les groupes de variables  $x, y, z$  et  $u, v, w$  est complète. On peut dire encore que la transformation qui permet de passer de l'un de ces groupes à l'autre, a pour carré l'unité.

Soit maintenant une fonctionnelle homogène  $f$  de degré  $m$  d'un nombre quelconque de fonctions arbitraires. Posons

$$u_p = \frac{1}{m} \frac{\partial f}{\partial x^p}, \quad v_q = \frac{1}{m} \frac{\partial f}{\partial y^q}, \quad \dots$$

Supposons que ces relations permettent d'obtenir les fonctions  $x, y, \dots$  quand  $u, v, \dots$  sont données. Transportant ces valeurs dans  $f$ , nous obtenons une nouvelle fonctionnelle

$$g(u, v, \dots) = f(x, y, \dots).$$

Nous allons démontrer que l'on a

$$x^p = \frac{1}{\mu} \frac{\partial g}{\partial u_p}, \quad y^q = \frac{1}{\mu} \frac{\partial g}{\partial v_q}, \quad \dots, \quad \frac{1}{m} + \frac{1}{\mu} = 1.$$

En effet le théorème d'Euler s'applique à la fonctionnelle homogène  $f$ ,

$$mf = \int_{D_p} x^p \frac{df}{dx^p} d\tau(P) + \dots = m \int_{D_p} x^p u_p d\tau(P) + \dots$$

Prenons alors la différentielle

$$m \delta f = m \int_{D_p} u_p \delta x^p d\tau(P) + \dots + m \int_{D_p} x^p \delta u_p d\tau(P) + \dots$$

Or, cette même différentielle se calcule encore ainsi, par définition, et grâce aux notations introduites :

$$\delta f = \int_{D_p} \frac{df}{dx^p} \delta x^p d\tau(P) + \dots = m \int_{D_p} u_p \delta x^p d\tau(P) + \dots$$

Si nous retranchons la dernière valeur de la différentielle de la valeur obtenue initialement, nous avons

$$(m - 1) \delta f = m \int_{D_p} x^p \delta u_p d\tau(P) + \dots$$

ou bien

$$\delta g = \mu \int_{D_p} x^p \delta u_p d\tau(P) + \dots$$

Or, d'après la définition des dérivées fonctionnelles, il en résulte les formules annoncées.

Nous pouvons remarquer que  $u, v, \dots$  sont homogènes et de degré  $m - 1$  en  $x, y, \dots$ . Inversement  $x, y, \dots$  sont de degré  $\frac{1}{m - 1}$  en  $u, v, \dots$ ,  $g$  est donc de degré  $\frac{m}{m - 1} = \mu$  en  $u, v, \dots$ . On constate la parfaite réciprocité des deux groupes de variables  $x, y, \dots$  et  $u, v, \dots$ . Sur les exemples pratiques, ceci constitue une propriété peu apparente.

CAS PARTICULIER DE CALCUL DE DÉRIVÉES FONCTIONNELLES. — Un exemple fréquent est celui d'une fonctionnelle ainsi définie :

$$I(y) = \int_a^b F(x, y, y', y'') dx.$$

$F$  est une fonction au sens ordinaire des variables  $x, y, y', y'', \dots$ . Les méthodes du Calcul des variations permettent d'évaluer la différentielle de cette fonctionnelle de  $y$ ,

$$\delta I = \left[ F'_{y'} \delta y + F'_{y''} \delta y' - \frac{d}{dx} F'_{y''} \delta y \right]_a^b + \int_a^b \left[ F'_y - \frac{d}{dx} F'_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F'_{y''} \right] \delta y dx.$$

Il se trouve que dans les problèmes de Mécanique qui conduisent à de tels



problèmes, les fonctions  $y$  et certaines de leurs dérivées, sont telles que leurs valeurs sont imposées aux extrémités, et par suite leurs variations sont nulles; ou bien ce sont les coefficients de ces variations qui sont nuls. Le crochet précédent de l'intégrale est donc nul (cas particulier d'une remarque faite plus haut relativement à la définition et au calcul de la dérivée ou de la différentielle d'une fonctionnelle). La dérivée fonctionnelle cherchée a donc la valeur suivante :

$$\frac{\delta I}{\delta y} = F'_y - \frac{d}{dx} F'_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F'_{y''}.$$

On peut développer d'une manière systématique le calcul fonctionnel combiné au calcul tensoriel. On rencontre successivement les étapes suivantes : espaces vectoriels affines, tenseurs, produit scalaire, pseudotenseurs, gradient, rotationnel, déplacement parallèle, dérivation covariante, divergence, métrique riemannienne, laplacien. Une convention utile est celle qui permet d'étendre la notion d'indice muet. Ainsi le produit scalaire qui se note  $u_i v^i$  en calcul tensoriel ordinaire, est ici  $\int_D u_P v^P d\tau$ , peut être noté simplement  $u_P v^P$  : l'indice P répété en positions supérieure et inférieure impliquant par convention, l'intégration dans le domaine D. On trouve formellement les mêmes formules qu'en calcul tensoriel ordinaire. Nous ne faisons que signaler ici les principales difficultés relatives à la résolution en  $x^P$  de l'équation intégrale

$$y^Q = \int_{D_P} \alpha^Q_P x^P d\tau_P \quad \text{ou} \quad y(Q) = \int_{D_P} \alpha(P, Q) x(P) d\tau_P,$$

avec les notations courantes. Un cas particulier est la transformation de Laplace.

## CHAPITRE II.

### ÉQUILIBRE DES SYSTÈMES ÉLASTIQUES.

Soit un système matériel quelconque en équilibre. Nous l'imaginons décrit par un point P, ou mieux, représenté à l'aide d'un point P décrivant un domaine D. Nous supposerons souvent que D est un volume unique, mais D pourra comprendre plusieurs volumes, des surfaces, des lignes et des points isolés. P caractérisera toujours le même élément de matière.

Sous l'influence de charges données  $\vec{Q} d\tau$  réparties ( $d\tau$  désignant l'élément de volume de D), le système matériel parvenant à un état d'équilibre, désignons par  $\vec{U}$  le déplacement du point P.

Soit  $\delta P$  un déplacement virtuel arbitraire, et  $\delta \mathcal{E}_i$  le travail correspondant des

forces intérieures. Le principe du travail virtuel nous permet d'écrire la relation suivante :

$$\delta \mathfrak{E}_i + \int_D \vec{Q} \cdot \delta \vec{P} \, d\tau = 0.$$

Cette relation est valable quel que soit le système considéré, élastique ou non. Nous allons maintenant introduire une à une les hypothèses nécessaires à la théorie et souligner les propriétés particulières que chacune d'elles introduit.

POTENTIEL DE FORME. — Supposons que le travail des forces intérieures entre deux états du système ne dépende que de l'état de déformation initial et de l'état final. Nous dirons alors que les forces intérieures dépendent d'un potentiel de forme. (Nous évitons l'expression potentiel interne qui sous-entend d'autres formes d'énergie.) L'état libre, c'est-à-dire en l'absence de charges, est généralement choisi comme état initial. Le potentiel de forme se présente donc comme une fonctionnelle de  $U$  qui caractérise la déformation du système (le mot déformation est pris ici, dans son sens le plus vague).

Le système étant en équilibre sous l'action des charges  $Q$  qui ont causé le déplacement  $U$ , effectuons un déplacement virtuel  $\delta U$ . D'après les conventions habituelles de signe,  $\varpi$  représentant l'énergie récupérable par suppression de toutes les charges, la variation de potentiel  $\delta \varpi$  changée de signe, représente le travail des forces intérieures.  $\delta \varpi$  est nécessairement, par hypothèse de l'existence du potentiel de forme, une différentielle fonctionnelle

$$\delta \varpi = \int_D \vec{Q} \cdot \delta \vec{U} \, d\tau.$$

LOI DE HOOKE. — Désignons par état  $\lambda$ ,  $\lambda$  étant une constante, l'état d'équilibre du système subissant les charges  $\lambda Q$ ; en particulier l'état *zéro* est l'état libre, l'état *un* est l'état sous l'action des charges  $Q$ . La loi de Hooke réside en ceci, que dans l'état  $\lambda$  les déplacements sont  $\lambda U$ . Si l'on remarque que le déplacement en un point donné est une fonctionnelle des charges, on peut encore dire que le déplacement est une fonctionnelle homogène de la charge d'ordre un.

La loi de Hooke conduit à une autre expression de la différentielle du potentiel de forme, et aussi à la valeur de ce potentiel.

Partons en effet de l'état  $\lambda$  et passons à l'état voisin  $\lambda + d\lambda$ . Nous définissons ainsi un déplacement virtuel  $\delta U = U \delta \lambda$ . Comme la charge locale est  $\lambda Q$ , les forces extérieures accomplissent le travail virtuel suivant :

$$\lambda \delta \lambda \int_D \vec{Q} \cdot \vec{U} \, d\tau.$$

Pour un instant, nous pouvons considérer le potentiel de forme comme une

fonction de  $\lambda$ . Nous venons d'en calculer la différentielle. Si nous intégrons entre zéro et un, nous aurons le potentiel correspondant à l'état un :

$$\varpi = \frac{1}{2} \int_{\mathfrak{D}} \vec{Q} \cdot \vec{U} \, d\tau.$$

Les postulats combinés d'existence du potentiel de forme et de la loi de Hooke nous ont permis de calculer le potentiel de forme. Comparons le résultat actuel avec la valeur de la différentielle trouvée avant l'introduction de la loi de Hooke. Désignons par X, Y, Z, les composantes de Q sur trois axes rectangulaires et par  $u, v, w$ , les composantes de U. Nous avons trouvé que

$$\delta\varpi = \int_{\mathfrak{D}} (X \delta u + Y \delta v + Z \delta w) \, d\tau.$$

Ceci peut se traduire dans le langage fonctionnel en disant que *les dérivées partielles fonctionnelles du potentiel de forme par rapport aux composantes du déplacement sont égales aux composantes de même nom de la force massique*

$$\frac{\partial\varpi}{\partial u} = X, \quad \frac{\partial\varpi}{\partial v} = Y, \quad \frac{\partial\varpi}{\partial w} = Z.$$

Après introduction de la loi de Hooke, le potentiel de forme, et non plus seulement sa différentielle, se calcule ainsi

$$2\varpi = \int_{\mathfrak{D}} (Xu + Yv + Zw) \, d\tau.$$

Prenons alors la différentielle

$$2\delta\varpi = \int_{\mathfrak{D}} (X \delta u + Y \delta v + Z \delta w) \, d\tau + \int_{\mathfrak{D}} (u \delta X + v \delta Y + w \delta Z) \, d\tau,$$

et comparons avec les résultats antérieurs; les deux intégrales ci-dessus sont égales et peuvent servir indifféremment à représenter

$$\delta\varpi = \int_{\mathfrak{D}} (X \delta u + Y \delta v + Z \delta w) \, d\tau = \int_{\mathfrak{D}} (u \delta X + v \delta Y + w \delta Z) \, d\tau.$$

Si nous considérons maintenant le potentiel de forme comme une fonctionnelle des charges, et non plus des déplacements comme précédemment, nous pouvons dire que *les composantes du déplacement sont les dérivées fonctionnelles du potentiel de forme par rapport aux composantes de la force massique*. On reconnaît l'énoncé du théorème de Castigliano, si le système matériel est soumis à un nombre fini de forces isolées.

Notons aussi la *symétrie entre force et déplacement*. On peut encore dire que le potentiel de forme exprimé en fonction des charges ou en fonction des déplacements sont deux fonctionnelles du second degré adjointes. Les propriétés démontrées dans le cas général sont vérifiées ici.

Il peut arriver que le déplacement du point P ait été mesuré au moyen de coordonnées curvilignes. Soit  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  ce déplacement. Si  $L d\xi + M d\eta + N d\zeta$  désigne le travail virtuel d'une force Q dont le point d'application s'est déplacé de  $d\xi$ ,  $d\eta$ ,  $d\zeta$ , les mêmes calculs que ceux qui précèdent donnent la valeur du potentiel de forme et de sa différentielle :

$$\begin{aligned} \mathfrak{w} &= \int_0^1 (L\xi + M\eta + N\zeta) d\tau, \\ \delta\mathfrak{w} &= \int_0^1 (L \delta\xi + M \delta\eta + N \delta\zeta) d\tau = \int_0^1 (\xi dL + \eta dM + \zeta dN) d\tau. \end{aligned}$$

Suivant que l'on exprime le potentiel de forme en fonction des déplacements  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  ou des charges L, M, N, on a l'un ou l'autre des deux systèmes équivalents :

$$\begin{aligned} L &= \frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial \xi}, & M &= \frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial \eta}, & N &= \frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial \zeta}, \\ \xi &= \frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial L}, & \eta &= \frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial M}, & \zeta &= \frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial N}. \end{aligned}$$

Les relations qui précèdent s'appliquent dans le cas de la dynamique des systèmes; puisque le principe du travail virtuel est encore valable, à condition que L, M, N fassent intervenir  $\vec{Q} - \rho \vec{\gamma}$  au lieu de Q;  $\rho$  et  $\gamma$  désignant respectivement la densité cubique et l'accélération de P. Cependant sous cette forme ces expressions ne sont pas simples, et il est préférable d'évaluer les forces d'inertie et leur travail virtuel suivant une méthode dont le principe est dû à Lagrange. Le moyen le plus commode consiste à partir du principe d'Hamilton.

### CHAPITRE III.

#### DYNAMIQUE DES SYSTÈMES ÉLASTIQUES.

La position d'un système de solides indéformables en contact est entièrement connue grâce à la notion de paramètres de Lagrange : *avant toute considération dynamique, la position de chaque point du système est exprimable à l'aide d'un nombre fini de paramètres géométriques et du temps; ces paramètres peuvent être indépendants ou reliés par des conditions en termes finis ou non.*

Dans le cas d'un système élastique, un nombre fini de paramètres est insuffisant pour représenter en toute rigueur toute position admissible du système. Il est nécessaire de prendre une infinité de paramètres, question que nous laissons de côté, ou bien, de faire intervenir des fonctions arbitraires d'une, deux ou trois variables. Nous laissons aussi de côté la représentation approchée du système au moyen d'un nombre fini de paramètres qui conduirait à la théorie de Rayleigh-Ritz.

Prenons pour exemple un fil inextensible, parfaitement souple, dont une extrémité, O, est fixe, et qui se déplace dans le plan  $xOy$ . Si  $\varphi(s, t)$ , fonction de l'arc et du temps, représente l'angle que fait  $Ox$  avec la demi-tangente positive au fil, tout point du fil a pour coordonnées

$$x = \int_0^s \cos \varphi \, ds, \quad y = \int_0^s \sin \varphi \, ds.$$

$\varphi$  est une fonction entièrement arbitraire, c'est ce que nous appellerons une *fonction-paramètre*, extension naturelle de la notion de paramètre de Lagrange.

EXTENSION DES ÉQUATIONS DE LAGRANGE. — Supposons que la position du système matériel que nous considérons, élastique ou non, dépende de fonctions-paramètres en nombre fini,  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ . Cela veut dire que ces fonctions permettent d'évaluer les coordonnées d'un point quelconque du système dans une position déformée quelconque. On peut alors évaluer la force vive  $2T$  du système. C'est une fonctionnelle bien déterminée des  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  et de leurs dérivées par rapport au temps  $\varphi'_1, \dots, \varphi'_n$ . Nous savons déterminer un déplacement virtuel  $\delta P$ , qui dépend des  $\varphi$ , des  $\delta\varphi$  et aussi des variables qui fixent la position de P dans le système libre. Nous admettons que par des transformations de calcul convenables, on puisse mettre le travail virtuel des forces intérieures et extérieures sous la forme suivante :

$$\delta\mathfrak{E} = \sum_h \int_{D_h} \Phi_h \delta\varphi_h \, d\tau_h \quad (h = 1, 2, \dots, n),$$

extension de la forme classique relative à un nombre fini de paramètres.

Rappelons l'énoncé du principe d'Hamilton, valable pour un déplacement virtuel arbitraire, conservant les liaisons ou non, pourvu que le travail virtuel  $\delta\mathfrak{E}$  de toutes les forces, intérieures, extérieures ou de contact en tienne compte :

*L'intégrale  $\int_{t_0}^{t_1} (\delta\mathfrak{E} + \delta T) \, dt$  est nulle pour un déplacement virtuel compté à partir du mouvement effectif, pourvu qu'aux deux instants  $t_0$  et  $t_1$  la position variée du système coïncide avec la position réelle.*

La force vive considérée comme une fonctionnelle des  $\varphi$  et des  $\varphi'$  séparément, est supposée dérivable. Sa différentielle a donc la valeur suivante :

$$\delta T = \sum_h \int_{D_h} \left( \frac{\partial T}{\partial \varphi_h} \delta\varphi_h + \frac{\partial T}{\partial \varphi'_h} \delta\varphi'_h \right) d\tau_h.$$

Grâce au principe d'Hamilton, nous pouvons écrire

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[ \sum_h \int_{D_h} \left( \Phi_h \delta\varphi_h + \frac{\partial T}{\partial \varphi_h} \delta\varphi_h + \frac{\partial T}{\partial \varphi'_h} \delta\varphi'_h \right) d\tau_h \right] dt = 0.$$

Une intégration par parties élimine les  $\delta\varphi'$  :

$$\sum_h \left[ \frac{\partial \Gamma}{\partial \varphi'_h} \delta\varphi_h \right]_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \left[ \sum \int_{D_h} \left( \Phi_h + \frac{\partial \Gamma}{\partial \varphi_h} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \Gamma}{\partial \varphi'_h} \right) \delta\varphi_h \right] dt = 0,$$

d'où le résultat suivant, puisque les  $\delta\varphi$  sont nuls aux instants  $t_0$  et  $t_1$  :

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[ \sum \int_{D_h} \left( \Phi_h + \frac{\partial \Gamma}{\partial \varphi_h} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \Gamma}{\partial \varphi'_h} \right) \delta\varphi_h \right] dt = 0.$$

Si les fonctions  $\varphi$  sont indépendantes, par un raisonnement classique du Calcul des variations, le coefficient de chaque fonction  $\delta\varphi$  doit être nul, d'où les équations de Lagrange généralisées :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \Gamma}{\partial \varphi'_h} - \frac{\partial \Gamma}{\partial \varphi_h} = \Phi_h \quad (h = 0, 1, 2, \dots, n).$$

Dans le cas où les fonctions  $\varphi$  ne sont pas indépendantes, mais sont reliées par  $k$  relations de la forme suivante :

$$\sum_h A_h^i \delta\varphi_h = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, k; h = 1, 2, \dots, n),$$

nous constatons que la dernière forme intégrale à laquelle nous a conduit le principe d'Hamilton est encore valable. Multiplions par  $\lambda_i$  indéterminé la  $i^{\text{ème}}$  relation entre les  $\delta\varphi$ . Ajoutons toutes les relations ainsi obtenues, intégrons le résultat obtenu. Comme il est nul, nous pouvons l'ajouter à l'intégrale d'Hamilton sans en changer la valeur,

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[ \sum_h \int_{D_h} \left( \Phi_h + \frac{\partial \Gamma}{\partial \varphi_h} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \Gamma}{\partial \varphi'_h} + \sum_i \lambda_i A_h^i \right) \delta\varphi_h \right] dt = 0.$$

Pour déterminer les multiplicateurs  $\lambda_i$  annulons  $k$  coefficients des  $\delta\varphi$ . Il reste  $n - k$  termes dans l'intégrale d'Hamilton. On peut supposer que les  $\varphi$  correspondants sont indépendants, sinon on ferait les modifications nécessaires dans le choix des coefficients annulés. On est ramené au cas antérieur, de  $\varphi$  indépendants, et par suite tous les coefficients des  $\delta\varphi$ , sans exception sont nuls :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \Gamma}{\partial \varphi'_h} - \frac{\partial \Gamma}{\partial \varphi_h} = \Phi_h + \sum_{i=1}^k A_h^i \lambda_i \quad (h = 1, 2, \dots, n).$$

THÉORÈME DES FORCES VIVES. — La position du système est définie à l'aide de  $n$  fonctions-paramètres  $\varphi_k$ ; chacune d'elles est définie dans un domaine  $D_k$  à 3, 2, 1 dimensions, et il peut même figurer parmi ces fonctions des paramètres ordinaires de Lagrange  $q_h$ .

La position d'un point M du système est caractérisée par le vecteur  $\overrightarrow{OM}$ , qui

est une fonctionnelle des  $\varphi_k$ , dépendant des paramètres qui précisent la position de M dans le système, et aussi du temps  $t$  éventuellement. Nous admettons que les fonctionnelles ou fonctions sont toutes dérivables et il en résulte l'existence d'une différentielle pour le vecteur OM :

$$\delta \vec{M} = \sum_k \int_{D_k} \frac{\partial \vec{M}}{\partial \varphi_k} \delta \varphi_k d\tau_k + \frac{\partial \vec{M}}{\partial t} \delta t.$$

On en déduit le vecteur vitesse du point M :

$$\vec{V} = \sum_k \int_{D_k} \frac{\partial \vec{M}}{\partial \varphi_k} \varphi'_k d\tau_k + \frac{\partial \vec{M}}{\partial t}.$$

Pour abréger le langage nous dirons que  $\delta \vec{M}$  est une forme linéaire en  $\delta \varphi_k$  et  $\delta t$  (c'est une fonctionnelle linéaire particulière, c'est-à-dire homogène et de degré un). De même la force vive est une forme quadratique :

$$2T = \int \left[ \sum_{ik} \int_{D_i} \int_{D_k} \frac{\partial \vec{M}}{\partial \varphi_i} \frac{\partial \vec{M}_i}{\partial \varphi_k} \varphi'_i \varphi'_k d\tau_i d\tau_k + 2 \sum_k \int_{D_k} \frac{\partial \vec{M}}{\partial t} \frac{\partial \vec{M}}{\partial \varphi_k} d\tau_k + \frac{\partial \vec{M}}{\partial t} \right] dm.$$

La force vive sera une forme quadratique homogène si le temps n'intervient pas explicitement dans l'expression du vecteur OM en fonction des  $\varphi_k$ . Établisons le théorème des forces vives :

*Si la position du système matériel dépend de n fonctions-paramètres indépendantes, sans dépendre explicitement du temps, et s'il existe une fonction de force U indépendante du temps, pour tout mouvement du système matériel la quantité T — U reste constante au cours du mouvement.*

En effet écrivons les équations de Lagrange, multiplions la  $k^{\text{ième}}$  équation par  $\varphi'_k$ , intégrons dans le domaine correspondant, et additionnons tous les résultats ainsi obtenus :

$$\sum_k \int_{D_k} \varphi'_k \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \varphi_k} d\tau_k - \sum_k \int_{D_k} \varphi'_k \frac{\partial T}{\partial \varphi_k} d\tau_k = \sum_k \int \frac{\partial U}{\partial \varphi_k} \varphi'_k d\tau_k.$$

Faisons la transformation classique du premier membre :

$$\frac{d}{dt} \sum_k \int_{D_k} \varphi'_k \frac{\partial T}{\partial \varphi'_k} d\tau_k - \sum_k \int_{D_k} \left( \varphi''_k \frac{\partial T}{\partial \varphi'_k} + \varphi'_k \frac{\partial T}{\partial \varphi_k} \right) d\tau_k = \sum_k \int \frac{\partial U}{\partial \varphi_k} \varphi'_k d\tau_k.$$

Nous sommes dans les conditions où la force vive est une forme quadratique homogène, par suite, le premier terme de l'expression ci-dessus est la dérivée par rapport au temps de  $2T$ , comme cela résulte du théorème d'Euler étendu au cas des fonctionnelles homogènes. Les termes suivants changés de signes représentent la dérivée totale de la force vive par rapport au temps. En effet, si l'on

se rappelle que dans cette théorie, les variables  $\varphi_k, \varphi'_k, t$  sont à considérer comme indépendantes dans les calculs formels, la différentielle de la force vive a la valeur suivante dans le cas général :

$$\delta T = \sum_k \int_{D_k} \left( \frac{\partial T}{\partial \varphi'_k} \delta \varphi'_k + \frac{\partial T}{\partial \varphi_k} \delta \varphi_k \right) d\tau_k + \frac{\partial T}{\partial t} \delta t.$$

Ici, le dernier terme manque. On déduit immédiatement la valeur de  $\frac{dT}{dt}$ . En résumé, le premier membre de la combinaison linéaire des équations de Lagrange représente  $\frac{dT}{dt}$ . On voit de même que le second membre est la dérivée par rapport au temps de la fonction de force. On conclut donc que la différence  $T - U$  est constante au cours du temps.

ÉTUDE DES PETITS MOUVEMENTS. — La méthode élémentaire peut encore être étendue sans difficulté. On suppose que le système matériel proposé a sa position définissable au moyen de fonctions-paramètres sans qu'intervienne explicitement le temps ; on suppose qu'il existe une position d'équilibre quand le système est soumis à une fonction de force indépendante du temps.

Il est commode de supposer que les fonctions-paramètres sont nulles pour la position d'équilibre ; elles resteront donc petites au cours du mouvement si l'équilibre est stable. En écrivant les équations de Lagrange, on voit que toutes les dérivées fonctionnelles de la fonction de force  $U$  doivent être nulles pour la position d'équilibre, et ceci suggère de prendre un développement de Taylor de  $U$  :

$$U(\psi + \varphi) = U(\psi) + \sum_k \int_{D_k} \frac{\partial U}{\partial \psi_k} \varphi_k d\tau_k + \frac{1}{2} \sum_{k,h} \int_{D_k} \int_{D_h} \frac{\partial^2 U}{\partial \psi_k \partial \psi_h} \varphi_k \varphi_h d\tau_k d\tau_h.$$

Ceci suppose que les dérivées fonctionnelles troisièmes sont bornées, point que nous admettons. Un développement de cette forme est pris avec les fonctions qui fournissent la position d'équilibre, c'est-à-dire zéro. Comme la fonction de force est définie à une constante additive près, on la supposera nulle pour l'équilibre. Les deux premiers termes du développement de Taylor sont nuls, et comme dans le cas élémentaire, on se borne à considérer la forme quadratique suivante :

$$\frac{1}{2} \sum_{k,h} \int_{D_k} \int_{D_h} \frac{\partial^2 U}{\partial \psi_k \partial \psi_h} \varphi_k \varphi_h d\tau_k d\tau_h.$$

où, après avoir calculé les dérivées secondes, on a remplacé les fonctions par zéro. On obtient donc une forme quadratique telle que

$$U = \frac{1}{2} \sum_{k,h} \int_{D_k} \int_{D_h} b_{kh} \varphi_k \varphi_h d\tau_k d\tau_h.$$



De même on verrait que dans la force vive on laisse les  $\varphi'_k$  tels qu'ils sont, mais on remplace par zéro les fonctions-paramètres figurant dans leurs coefficients. On trouve une forme quadratique du même type :

$${}_2 T = \sum_{k,h} \int_{D_k} \int_{D_h} a_{kh} \varphi'_k \varphi'_h d\tau_k d\tau_h.$$

D'où le système des équations de Lagrange :

$$\sum_{h=1}^n \int_{D_h} a_{kh} \varphi''_h d\tau_h = \sum_{h=1}^n \int_{D_h} b_{kh} \varphi'_h d\tau_h \quad (k=1, 2, \dots, n).$$

Cherchons les solutions périodiques, de la forme  $\varphi_h = \Phi_h e^{rt}$ ,  $r$  étant une constante. Les fonctions  $\Phi_h$  vérifient un système linéaire et homogène de la forme suivante :

$$\sum_h \int_{D_h} \lambda_{hk} \Phi_h d\tau_h = 0, \quad \lambda_{hk} = r^2 a_{hk} - b_{hk}.$$

Si l'on sait résoudre le problème suivant : *trouver la condition fonctionnelle à laquelle doivent satisfaire les fonctions  $\lambda_{hk}$  soumises à des conditions frontières données pour qu'il existe un système de fonctions  $\Phi_h$  non identiquement nul*, nous saurons former l'équation en  $r$ .

#### CHAPITRE IV.

##### APPLICATION A DES PROBLÈMES CLASSIQUES.

POUTRE SYMÉTRIQUE CHARGÉE POSÉE SUR DEUX APPUIS SIMPLES. — En l'absence de charges, la poutre considérée est rectiligne. Elle est posée sur deux appuis simples situés sur l'horizontale  $Ox$ , d'abscisses zéro et  $l$ . La poutre supporte une charge répartie  $p(x)$  par unité de longueur. Négligeant les effets de l'effort tranchant et de l'effort normal, nous admettrons la formule suivante qui donne le potentiel de forme en fonction du moment fléchissant  $M$  :

$$\varpi = \int_0^l \frac{M^2}{2EI} dx.$$

La flèche  $z$ , est comptée parallèlement à l'axe  $Oz$ , orienté suivant la verticale descendante. La réaction d'appui à droite a la valeur suivante :

$$R = -\frac{1}{l} \int_0^l \xi p(\xi) d\xi,$$

d'où la valeur du moment fléchissant :

$$M = -\int_x^l (\xi - x) p(\xi) d\xi - (l - x) R,$$

ou encore, pour l'exprimer comme une fonctionnelle de la charge

$$lM = (l-x) \int_0^x \xi p(\xi) d\xi + x \int_x^l (l-\xi) p(\xi) d\xi.$$

D'après la formule rappelée pour le potentiel de forme, la différentielle du potentiel vaut, si EI est constant le long de la poutre,

$$EI l \delta \varpi = \int_0^l M \left[ (l-x) \int_0^x \xi \delta p(\xi) d\xi + x \int_x^l (l-\xi) \delta p(\xi) d\xi \right] dx.$$

Or, le domaine d'intégration de la première intégrale double est le triangle  $0 < \xi < x < l$ . Si nous échangeons l'ordre des intégrations, nous obtenons

$$\int_0^l \xi \left[ \int_\xi^l M(x) (l-x) dx \right] \delta p(\xi) d\xi.$$

De même pour la deuxième intégrale qui se transforme en

$$\int_0^l (l-\xi) \left[ \int_0^\xi x M(x) dx \right] \delta p(\xi) d\xi.$$

Nous parvenons ainsi à la valeur suivante de la différentielle du potentiel de forme

$$EI l \delta \varpi = \int_0^l \left[ \xi \int_\xi^l (l-x) M(x) dx + (l-\xi) \int_0^\xi x M(x) dx \right] \delta p(\xi) d\xi,$$

d'où la dérivée du potentiel par rapport à la charge

$$\frac{\partial \varpi}{\partial p(\xi)} = \frac{l}{EI} \left[ \xi \int_\xi^l (l-x) M(x) dx + (l-\xi) \int_0^\xi x M(x) dx \right].$$

D'après l'extension fournie du théorème de Castigliano, cette expression représente exactement la flèche au point d'abscisse  $x$ .

*Vérification.* — Pour obtenir la flèche  $z(x)$ , la méthode classique consiste à intégrer l'équation différentielle suivante :

$$EI z'' = -M,$$

et d'en déterminer la solution qui est nulle aux deux extrémités. Une première intégration donne le résultat suivant :

$$EI z' = A - U(x), \quad \text{avec} \quad U(\xi) = \int_0^\xi M(x) dx.$$

Une deuxième intégration par parties donne ensuite

$$\begin{aligned} EI z &= Ax - \int_0^x U(\xi) d\xi = Ax + \int_0^x U(\xi) d(x-\xi) \\ &= [(x-\xi)U(\xi)]_0^x + Ax - \int_0^x (x-\xi) U'(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Or  $U$  est nul pour  $x = 0$ , donc

$$EIz = Ax - \int_0^x (x - \xi) M(\xi) d\xi.$$

Nous déterminons la constante  $A$  en annulant  $z$  pour  $x = l$  :

$$0 = Al - \int_0^l (l - \xi) M(\xi) d\xi.$$

Si l'on élimine  $A$ , on trouve le même résultat que par la méthode de la dérivée fonctionnelle.

*Remarque.* — Nous avons exprimé le potentiel de forme à l'aide de la charge locale, et nous en avons déduit  $z$ . Si inversement nous évaluons ce même potentiel en fonction de  $z$ , nous trouvons

$$2\varpi = EI \int_0^l z''^2 dx, \quad \text{car } M = -EIz''.$$

Sa différentielle a la valeur suivante :

$$\delta\varpi = EI \int_0^l z'' \delta z'' dx = EI [z'' \delta z' - z''' \delta z]_0^l + EI \int_0^l z'' \delta z dx.$$

Laisant de côté pour l'instant la partie intégrée, qui est d'ailleurs nulle, la dérivée fonctionnelle du potentiel de forme par rapport à  $z$  vaut  $z''$  et nous savons d'autre part qu'elle représente la valeur de la charge locale  $p = EIz''$ .

Or, la théorie classique permet de relier le moment fléchissant à l'effort tranchant  $T$ , et à la charge locale  $p$  par les formules suivantes :

$$p = T', \quad T = -M'.$$

L'élimination de  $T$  et  $M$  donne bien la relation obtenue plus haut. Nous avons un premier exemple de deux relations :  $z$  fonctionnelle de  $p$ , et  $p$  fonctionnelle de  $z$ , qui sont adjointes. Chacune d'elles est la solution de l'autre si on la résout par rapport à l'autre fonction.

Pour terminer, remarquons qu'à l'extrémité fixe  $\delta z = 0$ , et le moment fléchissant est nul, donc  $z'' = 0$ , et la partie tout intégrée de  $\delta\varpi$  est bien nulle comme nous l'avions annoncé.

VIBRATIONS TRANSVERSALES DES VERGES. — Une poutre rectiligne est encadrée à l'origine des coordonnées, où elle reste constamment tangente à l'axe des  $x$ . L'extrémité  $x = l$  est libre. De plus, la poutre supporte la charge locale  $p(x)$ . Soit  $u(x, t)$  la quantité dont s'abaisse à l'instant  $t$  le point de la verge d'abscisse  $x$ . Le potentiel de forme a la valeur suivante :

$$2\varpi = \int_0^l EI(u''_{,t})^2 dx.$$

Sa différentielle vaut, comme plus haut :

$$\delta\mathfrak{C} = \int_0^l EI u''_{x^2} \delta u''_{x^2} dx = [EI u''_{x^2} \delta u'_x - (EI u''_{x^2})'_x \delta u]_0^l + \int_0^l (EI u''_{x^2})''_{x^2} \delta u dx.$$

Le crochet est nul à l'extrémité fixe car  $\delta u = \delta u'_x = 0$ ; à l'extrémité libre l'effort tranchant et le moment fléchissant sont nuls, donc  $u''_{x^2} = u'''_{x^2} = 0$ , par suite, le crochet est nul aussi pour  $x = l$ .

Le travail élémentaire des forces extérieures et intérieures a donc la valeur suivante :

$$\delta\mathfrak{C} = \int_0^l p \delta z dx - \delta\mathfrak{C} = \int_0^l [p - (EI u''_{x^2})''_{x^2}] \delta z dx.$$

D'autre part la force vive de la poutre a la valeur suivante :

$$2T = \int_0^l \rho u_i'^2 dx.$$

dont nous calculons la différentielle

$$\delta T = \int_0^l \rho u_i' \delta u_i' dx,$$

ce qui nous indique que

$$\frac{\partial T}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial u_i'} = \rho u_i'.$$

L'équation de Lagrange du problème est la suivante :

$$(\rho u_i')'_i = p - (EI u''_{x^2})''_{x^2},$$

c'est bien l'équation classique.

La méthode qui consiste à considérer le potentiel de forme comme une fonctionnelle de la charge possède un inconvénient bien connu, c'est de n'être valable qu'en dehors des points où sont appliquées des charges ponctuelles; au moins en apparence, car l'introduction de l'effort tranchant et du moment fléchissant, non forcément continus, permet d'introduire les charges et les couples isolés. Il s'agit en réalité des termes intégraux supplémentaires que nous avons considérés dans la théorie générale. Nous laissons entièrement de côté cette question.

## CHAPITRE V.

### APPLICATIONS NOUVELLES.

MOUVEMENT PLAN D'UN FIL INEXTENSIBLE. — Soit un fil mobile dans le plan  $xOy$ , sans frottement. Le fil possède une extrémité fixe qui est l'origine des coordonnées, O, et l'origine des abscisses curvilignes sur le fil. Soient  $X ds$  et  $Y ds$

les composantes de la résultante des forces extérieures sur l'élément d'arc  $ds$  du fil. Comme fonction-paramètre pour déterminer la position de chaque point du fil, nous prendrons  $\varphi(s, t)$ , angle que fait  $Ox$  avec la demi-tangente positive au fil. Les coordonnées rectangulaires d'un point du fil à l'instant  $t$ , défini par son abscisse curviligne  $s$  sont données par les formules suivantes :

$$x = \int_0^s \cos \varphi ds, \quad y = \int_0^s \sin \varphi ds.$$

Ce sont bien des fonctionnelles de  $\varphi$ , dépendant encore du paramètre  $s$ . Nous allons mettre le problème en équation par la méthode de Lagrange généralisée. Pour cela nous avons besoin du travail virtuel des forces extérieures. Un déplacement virtuel du fil qui conserve les liaisons, et en particulier la longueur du fil s'obtient en différentiant les formules donnant  $x$  et  $y$  par rapport à  $\varphi$ , les variables  $s$  et  $t$  faisant figure de paramètres dans cette opération :

$$\delta x = - \int_0^s \sin \varphi \delta \varphi ds, \quad \delta y = \int_0^s \cos \varphi \delta \varphi ds.$$

On en déduit une première forme du travail élémentaire

$$\delta \mathfrak{E} = \int_0^l \left[ -X \int_0^s \sin \varphi \delta \varphi ds + Y \int_0^s \cos \varphi \delta \varphi ds \right] ds,$$

que nous devons transformer pour le mettre sous la forme suivante :

$$\delta \mathfrak{E} = \int_0^l \Phi \delta \varphi ds.$$

Pour parvenir à cette forme, nous appliquons la formule d'intégration par partie :

$$\int_0^l u' v ds = [uv]_0^l - \int_0^l uv' ds;$$

nous posons dans la première intégrale :

$$u = \int_s^l X ds, \quad v = \int_0^s \sin \varphi \delta \varphi ds,$$

et dans la seconde :

$$u = - \int_s^l Y ds, \quad v = \int_0^s \cos \varphi \delta \varphi ds,$$

de sorte que nous avons le résultat suivant, sous la forme désirée :

$$\delta \mathfrak{E} = \int_0^l \left[ - \sin \varphi \int_s^l X dx + \cos \varphi \int_s^l Y ds \right] \delta \varphi ds.$$

Nous avons besoin de la force vive et de sa différentielle :

$$2T = \int_0^l \rho(x'^2 + y'^2) ds, \quad \delta T = \int_0^l \rho(x' \delta x' + y' \delta y') ds.$$

Il y figure les composantes de la vitesse

$$x' = - \int_0^s \varphi' \sin \varphi ds, \quad y' = \int_0^s \varphi' \cos \varphi ds,$$

et leurs différentielles

$$\delta x' = - \int_0^s \delta \varphi' \sin \varphi ds - \int_0^s \varphi' \delta \varphi \cos \varphi ds,$$

$$\delta y' = - \int_0^s \delta \varphi' \cos \varphi ds - \int_0^s \varphi' \delta \varphi \sin \varphi ds.$$

D'où la différentielle de la force vive :

$$\delta T = \int_0^l \left[ -\rho x' \int_0^s \delta \varphi' \sin \varphi ds + \rho y' \int_0^s \delta \varphi' \cos \varphi ds \right. \\ \left. - \rho x' \int_0^s \varphi' \delta \varphi \cos \varphi ds - \rho y' \int_0^s \varphi' \delta \varphi \sin \varphi ds \right] ds,$$

dont nous transformons chacune des quatre intégrales par la méthode indiquée à propos du travail virtuel, de sorte que l'on a

$$\delta T = \int_0^l \left[ -\sin \varphi \int_s^l \rho x' ds + \cos \varphi \int_s^l \rho y' ds \right] \delta \varphi ds \\ - \int_0^l \left[ \cos \varphi \int_s^l \rho x' ds + \sin \varphi \int_s^l \rho y' ds \right] \varphi' \delta \varphi ds.$$

Cette forme met en évidence les dérivées fonctionnelles, utiles pour appliquer la méthode de Lagrange :

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi'} = -\sin \varphi \int_s^l \rho x' ds + \cos \varphi \int_s^l \rho y' ds, \\ \frac{\partial T}{\partial \varphi} = -\varphi' \left[ \cos \varphi \int_s^l \rho x' ds + \sin \varphi \int_s^l \rho y' ds \right].$$

L'équation du problème est donc la suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( -\sin \varphi \int_s^l \rho x' ds + \cos \varphi \int_s^l \rho y' ds \right) + \varphi' \left( \cos \varphi \int_s^l \rho x' ds + \sin \varphi \int_s^l \rho y' ds \right) \\ = -\sin \varphi \int_s^l X ds + \cos \varphi \int_s^l Y ds.$$

Si nous effectuons la dérivation par rapport au temps, nous pouvons encore écrire, sous une forme plus condensée :

$$-\sin \varphi \int_s^l (\rho x'' - X) ds + \cos \varphi \int_s^l (\rho y'' - Y) ds = 0.$$

Telle est l'équation intégrodifférentielle à laquelle satisfait  $\varphi$ . Il reste bien entendu à y remplacer  $x$  et  $y$  en fonction de  $\varphi$ .

Cette équation apparaît comme assez compliquée. Son avantage théorique est de ne faire intervenir que le paramètre géométrique  $\varphi$  et d'être débarrassée des réactions : tension du fil et réaction en O.

Il est possible d'obtenir la dernière équation par une autre voie, en supposant d'abord écrites les équations du mouvement d'un fil inextensible qui font intervenir la tension. Cela ne présente pas d'autre intérêt que de fournir une vérification. On a en effet

$$\rho \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial s} \left( T \frac{\partial x}{\partial s} \right) + X, \quad \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial s} \left( T \frac{\partial y}{\partial s} \right) + Y, \quad \left( \frac{\partial x}{\partial s} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial s} \right)^2 = 1.$$

Intégrons les deux premières équations entre  $s$  et  $l$ . Puisqu'à l'extrémité libre la tension est nulle, nous avons

$$\int_s^l (\rho x'' - X) ds = -T \cos \varphi, \quad \int_s^l (\rho y'' - Y) ds = -T \sin \varphi.$$

L'élimination de  $T$  conduit à la dernière équation obtenue plus haut.

MOUVEMENT D'UN FIL INEXTENSIBLE SUR UNE SURFACE. — Voici un exemple de système matériel pour lequel on ne peut pas toujours trouver explicitement la fonction-paramètre dont il dépend, mais pour lequel il existe deux fonctions-paramètres reliées par une condition fonctionnelle.

Considérons une surface fixe ou mobile, lieu d'un point P dont la position dépend de deux paramètres  $\alpha$ ,  $\beta$  et du temps  $t$ . Les deux paramètres  $\alpha$ ,  $\beta$  individualisent un élément matériel de la surface. Un fil est en mouvement sur cette surface. Soit  $s$  l'abscisse curviligne d'un point du fil. A temps constant, le vecteur unitaire tangent au fil est ainsi défini :

$$\vec{P}'_s = \vec{P}'_\alpha \alpha'_s + \vec{P}'_\beta \beta'_s.$$

Comme sa longueur est l'unité, nous avons donc, avec les notations de Gauss pour la théorie des surfaces :

$$E \alpha_s'^2 + 2F \alpha_s' \beta_s' + G \beta_s'^2 = 1.$$

Ce n'est que dans des cas exceptionnels que l'on sait résoudre une telle relation en  $\alpha$  et  $\beta$ , par introduction d'une fonction arbitraire, comme dans le cas d'une surface applicable sur une surface de révolution. Ainsi dans le cas d'une sphère fixe, où les paramètres sont la longitude  $\varphi$  et la colatitude  $\theta$ , la relation ci-dessus devient

$$\theta_s'^2 + \sin^2 \theta \varphi_s'^2 = 1.$$

On peut la résoudre par introduction d'une fonction arbitraire  $f(s, t)$  de l'arc et du temps, de la manière suivante :

$$\theta'_s = \cos f, \quad \sin \theta \varphi'_s = \sin f.$$

De cette manière  $\varphi$  et  $\theta$  sont explicitement évalués au moyen de la fonction-paramètre  $f$ , dans le cas d'un fil ayant une extrémité fixe sur la surface, grâce aux formules suivantes :

$$\theta = \int_0^s \cos f \, ds, \quad \varphi = \int_0^s \frac{\sin f}{\sin \theta} \, ds,$$

où il reste à remplacer  $\theta$  explicitement en fonction de  $f$  dans la deuxième intégrale. Les calculs sont relativement compliqués, et dans bien des cas il vaut mieux opérer comme si la résolution était impossible. Il nous faut alors conserver les deux fonctions-paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  reliées par la condition fonctionnelle.

Pour effectuer la mise en équation; calculons d'abord la vitesse, puis la force vive du fil :

$$\begin{aligned} \vec{V} &= \vec{P}'_\alpha \alpha'_i + \vec{P}'_\beta \beta'_i + \vec{P}'_t, \\ 2T &= \int_0^l \rho (E\alpha'^2 + 2F\alpha'_i\beta'_i + G\beta'^2 + 2H\alpha'_i + 2K\beta'_i + L) \, ds, \end{aligned}$$

en introduisant des notations évidentes.

Comme le déplacement virtuel de P a la forme suivante :

$$\delta \vec{P} = \vec{P}'_\alpha \delta \alpha + \vec{P}'_\beta \delta \beta,$$

on en déduit le travail virtuel des forces extérieures

$$\delta \mathfrak{V} = \int_0^l (Q \delta \alpha + R \delta \beta) \, ds,$$

forme valable quelle que soit la relation reliant  $\alpha$  et  $\beta$ .

Reportons-nous à la méthode et aux calculs qui nous ont conduit aux équations de Lagrange. L'intégration par parties par rapport au temps faite dans l'intégrale d'Hamilton reste valable, bien que les deux fonctions-paramètres ne soient plus indépendantes. Nous avons donc la relation suivante :

$$\int_{t_0}^{t_1} \left\{ \int_0^l (Q \delta \alpha + R \delta \beta) \, ds + \int_0^l \left[ \left( \frac{\partial T}{\partial \alpha} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial T}{\partial \alpha'} \right) \delta \alpha + \left( \frac{\partial T}{\partial \beta} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial T}{\partial \beta'} \right) \delta \beta \right] \, ds \right\} dt = 0.$$

Les deux variations  $\delta \alpha$  et  $\delta \beta$  ne sont pas indépendantes car nous devons avoir

$$\begin{aligned} (E\alpha'_s + F\beta'_s) \delta \alpha'_s + (F\alpha'_s + G\beta'_s) \delta \beta'_s + (E'_\alpha \alpha'^2_s + 2F'_\alpha \alpha'_s \beta'_s + G'_\alpha \beta'^2_s) \delta \alpha \\ + (E'_\beta \alpha'^2_s + 2F'_\beta \alpha'_s \beta'_s + G'_\beta \beta'^2_s) \delta \beta = 0. \end{aligned}$$



Multiplions les deux membres de cette relation par une fonction  $\lambda$  arbitraire, et intégrons tout le long du fil :

$$\int_0^l \lambda [(E\alpha'_s + F\beta'_s) \delta\alpha'_s + \dots] ds = 0.$$

Une intégration par parties en  $s$  ne fait intervenir que  $\delta\alpha$  et  $\delta\beta$  et non plus leurs dérivées

$$\begin{aligned} & [\lambda(E\alpha'_s + F\beta'_s) \delta\alpha + \lambda(F\alpha'_s + G\beta'_s) \delta\beta]_0^l \\ & + \int_0^l \left\{ \left[ \lambda(E'_\alpha \alpha_s'^2 + 2F'_\alpha \alpha'_s \beta'_s + G'_\alpha \beta_s'^2) - \frac{\partial}{\partial s} \lambda(E\alpha'_s + F\beta'_s) \right] \delta\alpha \right. \\ & \quad \left. + \left[ \lambda(E'_\beta \alpha_s'^2 + 2F'_\beta \alpha'_s \beta'_s + G'_\beta \beta_s'^2) - \frac{\partial}{\partial s} \lambda(F\alpha'_s + G\beta'_s) \right] \delta\beta \right\} ds = 0. \end{aligned}$$

Nous montrerons plus tard que la partie intégrée est nulle. Admettons qu'il en est bien ainsi, et intégrons l'expression ainsi obtenue par rapport au temps entre les instants  $t_0$  et  $t_1$ , et retranchons le résultat, qui est nul, à l'intégrale

$$\text{d'Hamilton : } \int_{t_0}^{t_1} dt \int_0^l (\alpha \delta\alpha + \beta \delta\beta) ds = 0,$$

$$\begin{aligned} \alpha &= Q + \frac{\partial T}{\partial \alpha} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial T}{\partial \alpha_t} - \lambda(E'_\alpha \alpha_s'^2 + 2F'_\alpha \alpha'_s \beta'_s + G'_\alpha \beta_s'^2) + \frac{\partial}{\partial s} \lambda(E\alpha'_s + F\beta'_s), \\ \beta &= R + \frac{\partial T}{\partial \beta} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial T}{\partial \beta_t} - \lambda(E'_\beta \alpha_s'^2 + 2F'_\beta \alpha'_s \beta'_s + G'_\beta \beta_s'^2) + \frac{\partial}{\partial s} \lambda(F\alpha'_s + G\beta'_s). \end{aligned}$$

Nous déterminons la fonction  $\lambda$ , jusqu'ici arbitraire, en annulant le coefficient de  $\delta\alpha$ . En conséquence le coefficient de  $\delta\beta$  doit aussi être nul. Nous sommes ainsi ramenés à l'intégration du système différentiel suivant :

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0,$$

où les inconnues sont  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\lambda$ . La troisième relation est celle qui exprime que  $s$  est l'arc du fil. Les dérivées fonctionnelles de la force vive ont les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \alpha_t} &= \rho(E\alpha'_t + F\beta'_t + H), \\ 2 \frac{\partial T}{\partial \alpha} &= \alpha_t'^2 \frac{\partial \rho E}{\partial \alpha} + 2\alpha'_t \beta'_t \frac{\partial \rho F}{\partial \alpha} + \beta_t'^2 \frac{\partial \rho G}{\partial \alpha} + 2\alpha'_t \frac{\partial \rho H}{\partial \alpha} + 2\beta'_t \frac{\partial \rho K}{\partial \alpha} + \frac{\partial \rho L}{\partial \alpha}, \end{aligned}$$

$\frac{\partial T}{\partial \beta_t}$  et  $\frac{\partial T}{\partial \beta}$  ont des valeurs analogues.

Pour montrer que les conditions d'extrémités du fil annulent le crochet rencontré plus haut, nous aurons besoin d'interpréter mécaniquement la fonction  $\lambda$ . Nous allons montrer qu'elle s'identifie avec la tension du fil, c'est-à-dire avec la force qu'il faut introduire en P, quand on supprime la portion de fil dont l'abscisse curviligne est supérieure à celle de P, si l'on veut que le mouvement ultérieur du fil ne soit pas modifié.

En effet, reprenons les calculs antérieurs qui nous ont fourni la mise en équation avec les nouvelles considérations suivantes : le principe du travail virtuel est appliqué à la portion du fil dont l'abscisse curviligne est comprise entre zéro et  $s$ ; en P nous introduisons une tension  $\vec{\Theta}$  dont le travail virtuel est  $\vec{\Theta} \delta \vec{P}$ . On parvient, après avoir repris tous les calculs, à la forme finale de l'intégrale d'Hamilton qui contient une partie tout intégrée :

$$\int_{t_0}^{t_1} \left\{ \int_0^s [(\mathcal{A} \delta \alpha + \mathcal{B} \delta \beta) ds + \vec{\Theta} \delta \vec{P}]_0^s - \lambda [(E \alpha'_s + F \beta'_s) \delta \alpha + (F \alpha'_s + G \beta'_s) \delta \beta]_0^s \right\} dt = 0.$$

Pour interpréter  $\lambda$ , nous devons nous rappeler que cette fonction annule  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$ . Il en découle la relation suivante valable à chaque instant pour tout déplacement virtuel conservant la longueur du fil, et maintenant le fil sur la surface

$$[\vec{\Theta} \delta \vec{P} - \lambda [E \alpha'_s + F \beta'_s) \delta \alpha - \lambda (F \alpha'_s + G \beta'_s) \delta \beta]_0^s = 0.$$

Comme les déplacements virtuels aux deux extrémités du fil sont indépendants, le crochet doit être nul en chaque point du fil. Avec un déplacement virtuel suivant la normale géodésique au fil, le coefficient de  $\lambda$  est nul : le travail de la réaction est alors nul, donc la composante correspondante de la réaction est nulle. Si nous prenons un déplacement  $\delta s$  suivant la tangente au fil, nous avons

$$\delta \alpha = \alpha'_s \delta s, \quad \delta \beta = \beta'_s \delta s,$$

et le coefficient de  $\lambda$  est  $\delta s$ . Ceci démontre que *la composante tangentielle de la réaction est égale à  $\lambda$ ; la composante suivant la normale géodésique est nulle*. La composante de la réaction suivant la normale à la surface n'est pas déterminée par ce raisonnement.

D'une façon générale, en une extrémité libre de fil mobile sur une surface, la tension est nulle, c'est-à-dire  $\lambda$ . Le crochet

$$[\lambda (E \alpha'_s + F \beta'_s) \delta \alpha + \lambda (F \alpha'_s + G \beta'_s) \delta \beta],$$

que l'on rencontre dans la relation entre  $\delta \alpha$  et  $\delta \beta$  est bien nul en une extrémité libre. En une extrémité fixe, où  $\alpha$  et  $\beta$  ont des valeurs bien déterminées,  $\delta \alpha$  et  $\delta \beta$  sont nuls, et par suite le crochet précédent est encore nul. La relation intégrale entre  $\lambda$ ,  $\delta \alpha$ ,  $\delta \beta$  a bien la forme que nous avons admise.

VIBRATIONS D'UNE COURBE ÉLASTIQUE DANS SON PLAN. — Soit une courbe élastique encastrée à l'origine O des coordonnées de façon que Ox soit la tangente de départ de la courbe.  $s$  représente l'abscisse curviligne d'un point de la courbe, et  $\alpha$  l'angle que fait Ox avec la tangente orientée du fil. R est le rayon de courbure

en ce même point. Les coordonnées d'un point de la courbe sont données par les formules suivantes :

$$x = \int_0^\alpha R \cos \alpha \, d\alpha, \quad y = \int_0^\alpha R \sin \alpha \, d\alpha,$$

$\alpha_0$  correspondra à l'extrémité libre du fil.

Quand on suppose que la section de la courbe matérielle est petite vis-à-vis de sa longueur, la déformation de la courbe consiste principalement en variation du rayon de courbure, l'allongement étant négligeable. Nous faisons donc l'hypothèse que la longueur de la courbe est invariable. Dans ces conditions, pour de faibles déplacements de la courbe, les coordonnées d'un point, qui sont  $x$  et  $y$  pour la courbe libre, deviennent  $x + \xi$  et  $y + \eta$ .  $\xi, \eta$  sont deux fonctions de  $\alpha$  et  $t$  que nous supposons petites ainsi que leurs dérivées en  $\alpha$ . Si nous écrivons que la courbe libre et la courbe déformée ont le même arc, nous obtenons

$$0 = (dx + d\xi)^2 + (dy + d\eta)^2 - (dx^2 + dy^2) = 2(dx \, d\xi + dy \, d\eta) + (d\xi^2 + d\eta^2).$$

Le dernier terme étant négligeable,  $\xi, \eta$  doivent vérifier la condition suivante assurant l'inextensibilité du fil :

$$\cos \alpha \frac{\partial \xi}{\partial \alpha} + \sin \alpha \frac{\partial \eta}{\partial \alpha} = 0.$$

Pour satisfaire à cette condition, introduisons une fonction arbitraire  $\varphi(\alpha, t)$ , en posant

$$\xi \cos \alpha + \eta \sin \alpha = \varphi.$$

Cette relation dérivée par rapport à  $\alpha$ , quand on tient compte de la condition ci-dessus, se réduit à

$$-\xi \sin \alpha + \eta \cos \alpha = \varphi'_\alpha.$$

Résolvons ces deux dernières relations en  $\xi$  et  $\eta$ ; nous obtenons les fonctions  $\xi, \eta$ , les plus générales conservant les longueurs des courbes planes

$$\xi = \varphi \cos \alpha - \varphi'_\alpha \sin \alpha, \quad \eta = \varphi \sin \alpha + \varphi'_\alpha \cos \alpha.$$

On peut interpréter ces relations en remarquant que  $\varphi$  et  $\varphi'_\alpha$  sont précisément les composantes du déplacement suivant la tangente et la normale à la courbe.

Dans le problème des petits mouvements d'une courbe élastique,  $\varphi$  est la fonction-paramètre. Nous allons mettre le problème en équation en supposant qu'aucune force extérieure n'agit sur la courbe en dehors des réactions d'encastrement.

La vitesse d'un point de la courbe se calcule très simplement par rapport à la tangente et la normale à la courbe libre. Par rapport à ces axes particuliers, qui sont fixes pour un point P donné, nous avons vu que les coordonnées rectangulaires de P sont  $\varphi, \varphi'_\alpha$ . Les composantes de la vitesse de ce point

s'obtiennent en dérivant par rapport au temps  $\varphi'_i, \varphi''_{\alpha i}$ . La force vive du système a donc la valeur suivante :

$$2T = \int_0^{\alpha_0} \rho R (\varphi_i'^2 + \varphi_{\alpha i}''^2) d\alpha.$$

Cette expression est une fonctionnelle de  $u = \varphi'_i$  et non de  $\varphi$ . Elle se présente sous la forme suivante :

$$2T = \int_0^{\alpha_0} \rho R (u^2 + u'^2) d\alpha,$$

et par suite sa différentielle vaut

$$\delta T = [\rho R \varphi_{\alpha i}'' \delta \varphi_i']_0^{\alpha_0} + \int_0^{\alpha_0} \left[ \rho R \varphi'_i - \frac{d}{d\alpha} (\rho R \varphi_{\alpha i}'') \right] \delta \varphi_i' d\alpha.$$

Nous admettons que le crochet est nul, point que nous vérifierons plus tard. L'équation de Lagrange du problème est donc la suivante :

$$\frac{d^2}{d\alpha^2} [\rho R \varphi - (\rho R \varphi'_{\alpha})_{\alpha}] + \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \varphi} = 0.$$

Si l'on néglige l'effet de l'effort tranchant, admettons la formule suivante pour le potentiel de forme

$$2\bar{\omega} = \int_0^{\alpha_0} EIR \left( \Delta \frac{1}{R} \right)^2 d\alpha,$$

en désignant par  $R + \Delta R$  le rayon de courbure de la courbe en mouvement. Appelons  $\alpha + \sigma$  l'angle que fait avec  $Ox$ , la tangente orientée de la courbe en mouvement, et indiquons par des accents les dérivations en  $\alpha$ . L'angle  $\sigma$  se calcule de la manière suivante :

$$\operatorname{tg}(\alpha + \sigma) = \frac{d(y + \eta)}{d(x + \xi)} = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \frac{\varphi + \varphi''}{R}}{1 - \operatorname{tg} \alpha \frac{\varphi + \varphi''}{R}}.$$

Comme  $\sigma$  est une quantité petite,

$$\sigma = \frac{\varphi + \varphi''}{R}.$$

On en déduit *la nouvelle courbure*

$$\frac{1}{R} + \Delta \frac{1}{R} = \frac{1}{R} \frac{d(\alpha + \sigma)}{d\alpha} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R} \left( \frac{\varphi + \varphi''}{R} \right)',$$

et la valeur du *potentiel de forme*

$$2\bar{\omega} = \int_0^{\alpha_0} \frac{M^2}{EI} R d\alpha \quad \text{si} \quad M = \frac{EI}{R} \left( \frac{\varphi + \varphi''}{R} \right)'.$$

Comme nous avons une intégrale définie portant sur une fonction au sens ordinaire de  $\varphi$  et de ses dérivées, on a immédiatement

$$\delta\pi = \left[ M \frac{\delta\varphi + \delta\varphi''}{R} - \frac{M'}{R} \delta\varphi' + \left( \frac{M'}{R} \right)' \delta\varphi \right]_0^{\alpha_0} - \int_0^{\alpha_0} \left[ \frac{M'}{R} + \left( \frac{M'}{R} \right)'' \right] \delta\varphi \, d\alpha.$$

A l'extrémité fixe,  $\delta\varphi = \delta\varphi' = 0$ , puisque  $\alpha$ ,  $\xi$  et  $\eta$  sont nuls. Si nous calculons encore

$$\varphi'' = (-\xi' \sin \alpha + \eta' \cos \alpha) - (\xi \cos \alpha + \eta \sin \alpha),$$

nous trouvons zéro à l'extrémité fixe, car  $\eta' = 0$  comme conséquence de l'encastrement. A l'extrémité libre, le moment fléchissant et ses deux premières dérivées sont nulles. La partie tout intégrée ci-dessus est donc nulle. Nous connaissons la dérivée fonctionnelle du potentiel par rapport à  $\varphi$ , ce qui nous permet d'écrire d'une manière complète, l'équation de Lagrange :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} [\rho R \varphi - (\rho R \varphi')'] = \frac{1}{R} \left[ \frac{EI}{R} \left( \frac{\varphi + \varphi''}{R} \right)' \right]' + \left\{ \frac{1}{R} \left[ \frac{EI}{R} \left( \frac{\varphi + \varphi''}{R} \right)' \right]' \right\}''.$$

C'est une équation aux dérivées partielles, linéaire et homogène. Cherchons-en les solutions propres, c'est-à-dire celles qui sont de la forme suivante :

$$\varphi(\alpha, t) = \psi(\alpha) e^{i\omega t},$$

$\psi$  doit vérifier l'équation linéaire et homogène suivante :

$$\omega^2 [\rho R \psi - (\rho R \psi')'] + \frac{1}{R} \left[ \frac{EI}{R} \left( \frac{\psi + \psi''}{R} \right)' \right]' + \left\{ \frac{1}{R} \left[ \frac{EI}{R} \left( \frac{\psi + \psi''}{R} \right)' \right]' \right\}'' = 0.$$

C'est une équation différentielle du sixième ordre qui doit satisfaire aux six conditions suivantes : Pour  $\alpha = 0$ ,  $\varphi$  et ses deux premières dérivées doivent être nulles; pour  $\alpha = \alpha_0$ , le moment fléchissant  $M$  et ses deux premières dérivées doivent être nuls. En général, la seule solution possible est identiquement nulle, sauf si la constante  $\omega$  vérifie une certaine relation appelée équation aux pulsations propres, dont nous désignons les racines en nombre infini par  $\omega_n$ . Les  $\lambda_n$  étant des constantes, la solution générale de l'équation différentielle se présente alors sous la forme suivante :

$$\varphi(\alpha, t) = \sum_n \lambda_n \psi_n(\alpha) e^{i\omega_n t},$$

et il conviendrait de rechercher si l'on peut choisir les nombres  $\lambda_n$  pour vérifier les conditions initiales de position et de vitesse, qui donnent les valeurs pour  $t = 0$ , de  $\varphi$ ,  $\varphi'_\alpha$ ,  $\varphi'_t$ ,  $\varphi''_{\alpha t}$ .

Considérons en particulier le cas d'un arc de cercle (le cas de la poutre droite est exclu, car on ne peut prendre  $\alpha$  comme paramètre sur une droite), homogène, de section constante. L'équation  $\psi$  devient alors

$$\frac{R^4 \omega^2 \rho}{EI} (\psi - \psi'') + (\psi + \psi'')'' + (\psi + \psi'')'' = 0.$$

C'est une équation différentielle linéaire et homogène à coefficients constants, qui a pour équation caractéristique

$$\frac{R^4 \omega^2 \rho}{EI} (1 - r^2) + r^2 (1 + r^2)^2 = 0.$$

On met la solution générale de l'équation différentielle sous la forme suivante :

$$\psi = \sum (A_i \operatorname{sh} r_i \alpha + B_i \operatorname{ch} r_i \alpha) \quad (i = 1, 2, 3),$$

où  $\pm r_i$  sont les racines de l'équation caractéristique; on écrit ensuite les six conditions d'extrémités précédemment données. Ce sont six équations linéaires et homogènes en  $A_i, B_i$ , avec des coefficients en  $r$ . Si l'on annule le déterminant de ce système d'équations linéaires on obtient une condition pour les racines de l'équation caractéristique. Nous sommes ainsi ramenés à un problème d'élimination.

VIBRATIONS D'UNE COURBE DE FORME ET DE SECTION QUELCONQUES. — Soit une courbe élastique quelconque soumise à des conditions d'extrémités non précisées. Dans le cas d'une courbe métallique, les vibrations n'altèrent pas d'une manière sensible les longueurs. Nous allons donc préciser par le calcul la position d'une courbe voisine d'une courbe donnée. Nous introduisons ainsi trois fonctions-paramètres et nous évaluerons ensuite, à la manière classique, le potentiel de forme dans une position déformée quelconque.

Soient P un point de la courbe donnée, supposée libre de charges, et  $\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}$ , les trois vecteurs unitaires du trièdre principal de la courbe en P. Si P<sub>1</sub> est la position du point P à un instant quelconque, désignons par  $\vec{U}$  le vecteur  $\vec{PP}_1$ . Écrivons que les lieux de P et de P<sub>1</sub> ont le même arc; on trouve successivement

$$\begin{aligned} d\vec{P}^2 &= (d\vec{P} + d\vec{U})^2, & d\vec{P} \cdot d\vec{U} &= 0, \\ \vec{t} \cdot \vec{U}' &= 0, & (\vec{t} \cdot \vec{U})' - \frac{\vec{U} \cdot \vec{n}}{R} &= 0. \end{aligned}$$

Les dérivées par rapport à l'arc sont indiquées par un accent, R et T sont les rayons de courbure et de torsion de la courbe donnée au point P.

La dernière relation met en évidence les projections de U sur les axes du trièdre principal, soient  $u, v, w$ . Deux de ces composantes sont arbitraires. *Le déplacement le plus général qui conserve les longueurs des arcs dépend de deux fonctions arbitraires  $\varphi, \psi$ , et nous pouvons poser*

$$u = \varphi, \quad v = R\varphi', \quad w = \psi, \quad \vec{U} = \varphi \vec{t} + R\varphi' \vec{n} + \psi \vec{b}.$$

Notons ici que *les deux fonctions  $\varphi, \psi$  qui définissent entièrement le déplacement géométrique de la courbe sont insuffisantes pour caractériser le déplacement d'une*

*courbe matérielle*, nous introduirons plus tard une troisième fonction  $\chi$  qui indiquera comment varie chaque section droite dans son plan.

Désignons par l'indice *un* les éléments relatifs au point P et par le symbole  $\Delta$  l'accroissement d'un élément quand on passe de P à P<sub>1</sub>. Grâce aux formules de Frenet-Serret, nous allons établir les résultats suivants :

$$\Delta \frac{1}{R} = \zeta' + \frac{\eta}{T}, \quad \Delta \frac{1}{T} = \xi' - \frac{\eta}{R},$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \vec{t} = \zeta \vec{n} - \eta \vec{b}, \\ \Delta \vec{n} = -\zeta \vec{t} + \xi \vec{b}, \\ \Delta \vec{b} = \eta \vec{t} - \xi \vec{n}, \end{array} \right. \text{ avec } \left\{ \begin{array}{l} \xi = R \left( -\eta' + \frac{\zeta}{T} \right); \\ -\eta = \frac{R\varphi'}{T} + \psi'; \\ \zeta = \frac{\varphi}{R} + (R\varphi')' - \frac{\psi}{T}. \end{array} \right.$$

En effet, dérivons par rapport à l'arc la relation suivante :

$$\vec{OP}_1 = \vec{OP} + \vec{U};$$

nous trouvons ainsi immédiatement  $\vec{t}_1$  puis  $\Delta t$ . Dérivons maintenant cette valeur de  $t_1$  :

$$\frac{\vec{n}_1}{R_1} = \frac{\vec{n}}{R} + \vec{n} \Delta \frac{1}{R} + \frac{\Delta \vec{n}}{R} = \frac{\vec{n}}{R} + \zeta' \vec{n} - \eta' \vec{b} + \zeta \left( -\frac{\vec{t}}{R} + \frac{\vec{b}}{T} \right) + \frac{\eta \vec{n}}{T}.$$

Faisant le produit scalaire par  $\vec{n}$ , nous en déduisons  $\Delta n$  et  $\Delta \frac{1}{R}$ . Ayant ainsi introduit  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  qui figurent dans  $\Delta t$  et  $\Delta n$ , nous remarquons que ces quantités définissent le vecteur-rotation infinitésimal qui permet le passage du trièdre principal de P en P<sub>1</sub>.  $\Delta b$  est donc nécessairement de la forme indiquée.

Il reste à trouver la variation de la torsion. Or, cette quantité peut s'évaluer à partir de la relation suivante :

$$\frac{1}{T} = \vec{b} \frac{d\vec{n}}{ds},$$

dont nous écrivons la variation

$$\Delta \frac{1}{T} = \Delta \vec{b} \cdot \vec{n}' + \vec{b}' (\Delta \vec{n}),$$

d'où le résultat annoncé.

Introduisons le *trièdre « matériel »* de la courbe en P. C'est un trièdre trirectangle défini par trois vecteurs unitaires  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ;  $\vec{i} = \vec{t}$  est tangent à la fibre moyenne en P.  $\vec{j}$  et  $\vec{k}$  situés dans le plan normal en P ont la direction des axes de l'ellipse d'inertie de la section droite dont P est supposé être le centre de gravité. Soit  $\varpi$  l'angle dont il faut faire tourner le trièdre principal pour l'amener

sur le trièdre matériel. La rotation  $\vec{\Omega}$  du trièdre matériel est égale à celle du trièdre principal augmentée de  $\vec{i}\varpi'$ . (Ces rotations sont les rotations instantanées au sens de la Cinématique pour un mobile décrivant la courbe avec la vitesse + 1) :

$$\vec{\Omega} = \frac{\vec{t}}{T} + \frac{\vec{b}}{R} + \varpi' \vec{t}.$$

Ce vecteur est rapporté au trièdre principal, il est préférable d'introduire le trièdre matériel qui a un sens mécanique :

$$\vec{\Omega} = \frac{\vec{i}}{T_r} + \frac{\vec{j}}{R_g} + \frac{\vec{k}}{R_m},$$

$$\frac{1}{T_r} = \frac{1}{T} + \varpi', \quad \frac{1}{R_g} = \frac{\sin \varpi}{R}, \quad \frac{1}{R_m} = \frac{\cos \varpi}{R}.$$

(Nous employons des notations qui sont celles de la Théorie des surfaces, mais ici il s'agit uniquement de notations commodes.)

Sous l'influence de charges données, la courbe se déforme et parvient à un état d'équilibre. Le trièdre matériel est défini par des vecteurs  $\vec{i} + \Delta\vec{i}$ ,  $\vec{j} + \Delta\vec{j}$ ,  $\vec{k} + \Delta\vec{k}$  et la rotation  $\vec{\Omega}$  devient

$$\left( \vec{\Omega} + \frac{\Delta\vec{i}}{T_r} + \frac{\Delta\vec{j}}{R_g} + \frac{\Delta\vec{k}}{R_m} \right) + \Delta\vec{\Omega},$$

où nous avons posé

$$\Delta\vec{\Omega} = \vec{i} \Delta \frac{1}{T_r} + \vec{j} \Delta \frac{1}{R_g} + \vec{k} \Delta \frac{1}{R_m}.$$

Si  $\Delta\vec{\Omega}$  était nul, il n'y aurait pas de déformation locale de la courbe matérielle, mais uniquement un déplacement d'ensemble qui n'introduirait pas d'autres forces intérieures que celle qui existent au repos. Au contraire  $\Delta\vec{\Omega}$  caractérise la déformation de la courbe matérielle. En plus du déplacement d'ensemble précédent, un élément d'arc de longueur  $un$  subit torsion et flexions : imaginant l'une des sections terminales fixe, l'autre tourne de l'angle  $\Delta \frac{1}{T_r}$  autour de la tangente, et de  $\Delta \frac{1}{R_g}$ ,  $\Delta \frac{1}{R_m}$  autour de chacun des axes de l'ellipse d'inertie de la section considérée. Or, les hypothèses classiques de la Résistance des matériaux relient ces trois composantes de la rotation aux composantes sur les mêmes axes du moment  $\vec{M}$ , par rapport à P, de toutes les forces appliquées à la courbe, au delà de P, toutes réactions comprises, sauf le système des réactions en P,

$$M_1 = GJ \Delta \frac{1}{T_r}, \quad M_2 = EI_2 \Delta \frac{1}{R_g}, \quad M_3 = EI_3 \Delta \frac{1}{R_m}.$$



E, G sont les modules d'élasticité et de glissement;  $I_2, I_3, J$  sont respectivement les moments d'inertie de l'aire de la section droite par rapport à ses deux axes et son centre. Nous ne tenons pas compte de l'effort tranchant ni de l'allongement de la fibre moyenne.

La troisième fonction-paramètre qui achève de définir la position voisine de la courbe est l'angle de rotation des axes de l'ellipse d'inertie de la section droite,  $\chi = \Delta\varpi$ .

Montrons maintenant comment la détermination de  $\varphi, \psi, \chi$  peut être faite, connaissant les charges supportées par la courbe et les conditions aux limites. D'une manière plus complète, nous allons donner les équations du mouvement de la courbe : les trois fonctions-paramètres  $\varphi, \psi, \chi$  qui sont les inconnues du problème, sont des fonctions de  $s$  et  $t$ . Conformément à la théorie classique, nous prenons la valeur suivante du potentiel interne de la courbe

$$2\varpi = \int_0^l \left( \frac{M_1^2}{GJ} + \frac{M_2^2}{EI_2} + \frac{M_3^2}{EI_3} \right) ds.$$

La vitesse du point P se calcule par rapport au trièdre principal du point P au repos. En effet, ce dernier est immobile, et les coordonnées rectangulaires de P sont  $\varphi, R\varphi', \psi$ . Il suffit de dériver par rapport au temps pour avoir les composantes de la vitesse, d'où la valeur de la force vive

$$2T = \int_0^l \rho (\varphi_t'^2 + R^2 \varphi_{st}''^2 + \psi_t'^2) ds.$$

Cette expression est une fonctionnelle de  $\varphi_t'$  et de  $\psi_t'$ , et non de  $\varphi, \psi, \chi, \chi_t'$ . Comme il s'agit d'une intégrale définie portant sur un polynôme en  $\varphi_t', \psi_t'$  et leurs dérivées en  $s$ , nous avons immédiatement

$$\delta T = [\rho R^2 \varphi_{st}'' \delta \varphi_t']_0^l + \int_0^l \{ [\rho \varphi_t' - (\rho R^2 \varphi_{st}'')_s] \delta \varphi_t' + \rho \psi_t' \delta \psi_t' \} ds,$$

d'où les trois équations de Lagrange :

$$\rho \varphi_t'' - (\rho R^2 \varphi_{st}'')_s + \frac{\partial \varpi}{\partial \varphi} = 0, \quad \rho \psi_t'' + \frac{\partial \varpi}{\partial \psi} = 0, \quad \frac{\partial \varpi}{\partial \chi} = 0,$$

en l'absence de forces extérieures. Il nous reste à former effectivement le potentiel de forme  $\varpi$  <sup>(1)</sup>. Nous utiliserons la formule suivante équivalente à celle que nous avons donnée :

$$2\varpi = \int_0^l (GJ\lambda^2 + EI_2\mu^2 + EI_3\nu^2) ds.$$

---

(1) La confusion entre le potentiel de forme  $\varpi$  et l'angle de rotation  $\varpi$ , qui amène le trièdre principal sur le trièdre matériel, n'est pas à craindre.

$\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$  sont les trois composantes de  $\Delta\Omega$  sur les axes du trièdre matériel. Nous avons donc, en fonction des  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  :

$$\lambda = \Delta \frac{1}{T} + \chi', \quad \mu = \chi \frac{\cos \varpi}{R} + \sin \varpi \Delta \frac{1}{R}, \quad \nu = -\chi \frac{\sin \varpi}{R} + \cos \varpi \Delta \frac{1}{R};$$

$$2\varpi = \int_0^l \left[ \text{GJ} \left( \xi' - \frac{\eta}{T} + \chi' \right)^2 + \text{E} (\text{I}_2 \cos^2 \varpi + \text{I}_3 \sin^2 \varpi) \frac{\chi^2}{R^2} \right. \\ \left. + 2\text{E} \sin \varpi \cos \varpi (\text{I}_2 - \text{I}_3) \left( \zeta' + \frac{\eta}{T} \right) \frac{\chi}{R} + \text{E} (\text{I}_2 \sin^2 \varpi + \text{I}_3 \cos^2 \varpi) \left( \zeta' + \frac{\eta}{T} \right)^2 \right] ds$$

( $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  s'expriment en fonction de  $\varphi$ ,  $\psi$  et de leurs dérivées au moyen de formules données antérieurement). On constate que le potentiel est une intégrale définie portant sur un polynôme par rapport à  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\chi$  et leurs dérivées en  $s$ , nous savons donc former sa variation. Les calculs sont assez longs, aussi nous nous bornons à former l'équation de Lagrange en  $\chi$  dans le cas général, et les trois équations de Lagrange dans le cas particulier d'un ressort hélicoïdal.

Comme  $\chi$  n'intervient pas dans  $\xi$ ,  $\eta$  et  $\zeta$ , ces quantités sont des termes constants dans le calcul de la dérivée partielle en  $\chi$  :

$$\frac{\partial \varpi}{\partial \chi} = - \left[ \text{GJ} \left( \xi' - \frac{\eta}{T} + \chi' \right) \right]' + \text{E} (\text{I}_2 \cos^2 \varpi + \text{I}_3 \sin^2 \varpi) \frac{\chi}{R^2} \\ + \text{E} (\text{I}_2 - \text{I}_3) \sin \varpi \cos \varpi \left( \zeta' - \frac{\eta}{T} \right) \frac{1}{R}.$$

Cette expression est nulle d'après la troisième équation de Lagrange. On a une relation indépendante du temps entre  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\chi$  (2). On peut l'écrire

$$\chi'' + \text{A}\chi' + \text{B}\chi + \text{C} = 0.$$

Les coefficients sont des fonctions de l'arc par l'intermédiaire de  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $R$ ,  $T$ . Considérée comme une équation différentielle du second ordre en  $\chi$ , cette relation fournit  $\chi$  connaissant la forme de la courbe au repos, ainsi que  $\varphi$ ,  $\psi$ , à condition de préciser les conditions d'extrémité. Ainsi, pour une extrémité libre,  $\chi$  est nul si aucun couple de torsion n'agit.

Évaluons les seconds membres à mettre aux équations de Lagrange dans le cas où une force  $\vec{F} ds$  agit sur chaque élément d'arc. Si  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$  sont les composantes de cette force massique sur les axes principaux, le travail élémentaire des forces extérieures, qu'il conviendrait d'ajouter à celui des forces d'inertie et des forces intérieures considéré jusque ici serait

$$\delta \varpi = \int_0^l (F_1 \delta \varphi + R F_2 \delta \varphi' + F_3 \delta \psi) ds.$$

---

(2) Cette relation est encore vraie si la courbe est chargée.

Une intégration par parties donne le résultat suivant :

$$\delta\mathfrak{C} = [\mathbf{RF}_2 \delta\varphi]_0^l + \int_0^l \{ [\mathbf{F}_1 - (\mathbf{RF}_2)'] \delta\varphi + \mathbf{F}_3 \delta\psi \} ds,$$

de sorte que les équations de Lagrange ont la forme suivante, en supposant certaines conditions d'extrémités remplies :

$$\begin{aligned} \rho\varphi_{s^2}'' - (\rho R^2 \varphi_{s^2}''')_s + \frac{\partial\mathfrak{C}}{\partial\varphi} &= \mathbf{F}_1 - (\mathbf{RF}_2)'_s, \\ \rho\psi_{s^2}'' + \frac{\partial\mathfrak{C}}{\partial\psi} &= \mathbf{F}_3, \quad \frac{\partial\mathfrak{C}}{\partial\chi} = 0. \end{aligned}$$

Ces équations sont à employer dans le cas de l'équilibre, toutes les dérivées en  $t$  étant nulles. Dans le cas du mouvement, il est en général plus simple de déterminer d'abord la position d'équilibre sous l'action des charges données. On considère cette position comme étant une position de courbe non déformée, en l'absence de toute charge, et l'on retrouve alors des équations homogènes pour le mouvement.

Considérons le potentiel de forme dans les cas intéressants suivants :  $\mathbf{I}_2 = \mathbf{I}_3$  qui correspond à une section circulaire ou carrée ;  $\mathbf{I}_3 = 0$ , c'est-à-dire  $\mathbf{I}_3$  négligeable vis-à-vis de  $\mathbf{I}_2$ , et qui correspond au cas d'une courbe découpée dans une surface mince d'épaisseur négligeable. Dans ces deux cas le potentiel de forme vaut

$$\begin{aligned} 2\mathfrak{C} &= \int_0^l \mathbf{I} \left[ 2\mathbf{G} \left( \xi' - \frac{\eta}{\mathbf{T}} + \chi' \right)^2 + \mathbf{E} \frac{\chi^2}{\mathbf{R}^2} + \mathbf{E} \left( \xi' + \frac{\eta}{\mathbf{T}} \right)^2 \right] ds \quad \text{si } \mathbf{I}_2 = \mathbf{I}_3 = \mathbf{I}, \\ 2\mathfrak{C} &= \int_0^l \mathbf{I} \left\{ \mathbf{G} \left( \xi' - \frac{\eta}{\mathbf{T}} + \chi' \right)^2 + \mathbf{E} \left[ \cos\varpi \frac{\chi}{\mathbf{R}} + \sin\varpi \left( \xi' + \frac{\eta}{\mathbf{T}} \right) \right]^2 \right\} ds \quad \text{si } \mathbf{I}_3 = 0. \end{aligned}$$

Un autre cas de simplification important est celui où  $\varpi = 0$ , il correspond au cas où le trièdre matériel est confondu avec le trièdre principal. Cela est obtenu par découpage d'une bande étroite sur une surface où les tensions internes sont absentes, la courbe choisie étant une géodésique ou une asymptotique. Dans ce cas, nous avons

$$2\mathfrak{C} = \int_0^l \left[ \mathbf{GJ} \left( \xi' - \frac{\eta}{\mathbf{T}} + \chi' \right)^2 + \mathbf{EI}_2 \frac{\chi^2}{\mathbf{R}^2} + \mathbf{EI}_3 \left( \xi' + \frac{\eta}{\mathbf{T}} \right)^2 \right] ds.$$

Étudions plus complètement le cas d'un ressort. La courbure et la torsion sont constantes. Nous supposons de plus que la section du ressort est circulaire et constante, et nous désignons par  $\mathbf{I}$  la valeur commune de  $\mathbf{I}_2$  et  $\mathbf{I}_3$ .  $\mathbf{J} = 2\mathbf{I}$ . Le potentiel de forme vaut dans ces conditions :

$$\begin{aligned} 2\mathfrak{C} &= \int_0^l \mathbf{I} \left[ 2\mathbf{G} \left( \frac{2\mathbf{R}^2}{\mathbf{T}} \varphi'' + \frac{2\varphi'}{\mathbf{T}} + \mathbf{R}\psi'' + \frac{\mathbf{T}^2 - \mathbf{R}^2}{\mathbf{RT}^2} \psi' + \chi' \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{R}^2} \chi^2 + \mathbf{E} \left( \mathbf{R}\varphi'' + \frac{\mathbf{T}^2 - \mathbf{R}^2}{\mathbf{RT}^2} \varphi' - \frac{2\psi'}{\mathbf{T}} \right)^2 \right] ds. \end{aligned}$$

C'est une intégrale portant sur un polynôme par rapport à  $\varphi, \psi, \chi$  et leurs dérivées. Nous savons donc en trouver la variation, et en particulier, en l'absence de forces extérieures, nous avons les équations suivantes pour le mouvement

$$\begin{aligned} \rho\varphi'' - \rho R^2 \varphi_{s^2}'' &= \frac{4GI}{T} \frac{\partial \omega_1}{\partial s} + \frac{4GIR^2}{T} \frac{\partial^3 \omega_1}{\partial s^3} + EI \frac{T^2 - R^2}{RT^2} \frac{\partial \omega_2}{\partial s} + ERI \frac{\partial^3 \omega_2}{\partial s^3}, \\ \rho\psi'' &= -4GI \frac{R^2 - T^2}{RT^2} \frac{\partial \omega_1}{\partial s} + 4GIR \frac{\partial^3 \omega_1}{\partial s^3} - \frac{2EI}{T} \frac{\partial \omega_2}{\partial s}, \\ &- 2GI \frac{\partial \omega_1}{\partial s} + \frac{E}{R^2} \chi = 0, \end{aligned}$$

avec

$$\omega_1 = \frac{2R^2}{T} \varphi'' + \frac{2\varphi'}{T} + R\psi'' + \frac{T^2 - R^2}{RT^2} \psi' + \chi', \quad \omega_2 = R\varphi'' + \frac{T^2 - R^2}{RT^2} \varphi' - \frac{2\psi'}{T}.$$

Si nous cherchons en particulier les petits mouvements périodiques du ressort, de pulsation  $\omega$ , nous posons

$$\varphi = \Phi e^{i\omega t}, \quad \psi = \Psi e^{i\omega t}, \quad \chi = X e^{i\omega t}.$$

Les fonctions de l'arc,  $\Phi, \Psi, X$  sont alors solution du système différentiel suivant :

$$\begin{aligned} \rho\omega^2(\Phi - R^2\Phi'') + \frac{4GI}{T}(\Omega'_1 + R^2\Omega''_1) + EI\left(\frac{T^2 - R^2}{RT^2}\Omega'_2 + R\Omega''_2\right) &= 0, \\ \rho\omega^2\Psi + 4GI\left(-\frac{R^2 - T^2}{RT^2}\Omega'_1 + R\Omega''_1\right) - \frac{2EI}{T}\Omega'_2 &= 0, \\ -2GI\Omega'_1 + \frac{E}{R^2}X &= 0, \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \frac{2R^2}{T}\Phi'' + 2\frac{\Phi'}{T} + R\Psi'' + \frac{T^2 - R^2}{RT^2}\Psi' + X', \\ \Omega_2 &= R\Phi'' + \frac{T^2 - R^2}{RT^2}\Phi' - \frac{2\Psi'}{T}. \end{aligned}$$

CONDITIONS D'EXTREMITÉS. — Nous allons opérer à la manière classique, en introduisant l'effort tranchant  $\vec{T}$  et le moment fléchissant  $\vec{M}$  au point P. Pour définir ces éléments on procède de la manière suivante. Soit un fil d'extrémités A et B. Si l'on coupe le fil en P, pour ne pas modifier le mouvement de la portion AP, il est nécessaire d'introduire un système de réactions en P, de somme géométrique  $\vec{T}$  et de moment  $\vec{M}$  en P. Considérons alors la portion de fil BP. Elle est en équilibre, statique ou dynamique, à condition d'admettre à côté des forces massiques données le long du fil, toutes les réactions éventuelles, y compris les réactions définies par  $-\vec{T}$  et  $-\vec{M}$  en P. Ce système de forces étant en équilibre, il en résulte que  $\vec{T}$  et  $\vec{M}$  sont respectivement la somme géométrique et le moment en P de toutes les actions extérieures agissant sur l'arc PB. Telles sont les définitions classiques des efforts en P. Si l'on applique le principe

fondamental de la Mécanique à l'arc dont les extrémités ont pour abscisses curvilignes  $s$  et  $s + ds$ , on trouve les deux équations vectorielles suivantes, valables s'il n'existe pas de répartition continue de moments, et en dehors des forces isolées appliquées :

$$\vec{F} + \vec{T}' = 0, \quad \vec{M}' + \vec{t} \wedge \vec{T} = 0.$$

$\vec{F} ds$  désigne la résultante des actions extérieures sur l'arc considéré.

Les accents désignent des dérivées par rapport à l'arc. Faisons le produit scalaire par  $\vec{t}$ , vecteur unitaire tangent au fil  $\vec{t} \cdot \vec{M}' = 0$ . Cette relation a été obtenue précédemment sous la forme fonctionnelle  $\frac{\partial \varpi}{\partial \chi} = 0$ . Pour le vérifier écrivons ainsi la formule vectorielle :

$$R(\vec{M} \cdot \vec{t})' - \vec{M} \cdot \vec{n} = 0.$$

Or, avec les notations antérieures, nous avons

$$\vec{M} \cdot \vec{t} = M_1, \quad \vec{M} \cdot \vec{n} = M_2 \cos \varpi - M_3 \sin \varpi,$$

d'où résulte

$$-R \frac{\partial M_1}{\partial s} + M_2 \cos \varpi - M_3 \sin \varpi = 0,$$

qui est la relation antérieurement trouvée sous la forme  $\frac{\partial \varpi}{\partial \chi} = 0$ .

Si dans la formule  $\vec{M}' + \vec{t} \wedge \vec{T} = 0$  nous faisons les produits scalaires par  $\vec{n}$  ou  $\vec{b}$ , nous trouvons deux des composantes de  $\vec{T}$ , ce qui montre que  $\vec{M}$  est un élément essentiel de l'étude des poutres ou arcs. En effet

$$\vec{T} \cdot \vec{n} = -\vec{b} \cdot \vec{M}', \quad \vec{T} \cdot \vec{b} = \vec{n} \cdot \vec{M}'.$$

Pour avoir la troisième composante de  $\vec{T}$ , dérivons la relation entre  $\vec{T}$  et  $\vec{M}$  :

$$\vec{M}'' + \vec{t} \wedge \vec{T}' + \frac{\vec{n}}{R} \wedge \vec{T} = 0,$$

remplaçons  $\vec{T}'$  par  $-\vec{F}$ , puis multiplions par  $\vec{b}$  :

$$\vec{T} \cdot \vec{t} = R(\vec{b} \cdot \vec{M}'' - \vec{n} \cdot \vec{F}).$$

Nous avons maintenant tous les éléments pour obtenir les conditions d'extrémités :

En une extrémité fixe (rotule sphérique), le déplacement  $u, v, w$  est nul, donc pour la courbe variée,  $\delta \varphi = \delta \varphi' = \delta \psi = 0$ , de plus  $\vec{M} = 0$ .

En une extrémité encastrée,  $u, v, w$  sont nuls,  $\vec{t}$  est inchangé, ce qui entraîne

$$\delta \varphi = \delta \varphi' = \delta \varphi'' = \delta \psi = \delta \psi' = 0.$$

En une extrémité libre,  $\vec{T}$  et  $\vec{M}$  sont nuls. Nous rappelons les formules qui donnent les composantes de  $\vec{M}$  sur les axes du trièdre matériel

$$M_1 = GJ \left( \xi - \frac{\eta}{R} + \chi' \right),$$

$$M_2 = EI_2 \left[ \sin \varpi \left( \zeta' + \frac{\eta}{T} \right) + \frac{\chi}{R} \cos \varpi \right], \quad M_3 = EI_3 \left[ \cos \varpi \left( \zeta' + \frac{\eta}{T} \right) - \frac{\chi}{R} \sin \varpi \right],$$

et l'on en déduirait des composantes de  $T$ , d'où les conditions pour  $\delta\varphi$ ,  $\delta\psi$ ,  $\delta\chi$  et leurs dérivées.

## CHAPITRE VI.

### ÉQUATIONS D'ÉQUILIBRE DES POUTRES DROITES.

Notre intention est d'indiquer un moyen d'obtenir des équations d'équilibre des poutres droites, en partant des équations de l'équilibre élastique à trois dimensions, grâce à certaines approximations que l'on peut améliorer, au moins en théorie. On peut ainsi mieux tenir compte de la répartition des efforts à la surface que dans la théorie classique de la Résistance des matériaux. En revanche, on doit éviter les charges concentrées, et des difficultés peuvent se présenter aux extrémités quand on veut préciser la nature des supports.

**HYPOTHÈSES.** — La poutre considérée sera presque droite, sa section ne variera que lentement, le centre de gravité des sections parallèles au plan  $yOz$  sera voisin de l'axe  $Ox$ . De plus, cette poutre est soumise à des forces données sur sa surface et à des forces massiques connues. Toutes ces forces sont supposées varier lentement quand le point d'application se déplace dans la poutre. Ainsi, une force ponctuelle doit être écartée et remplacée par une force étalée sur une certaine aire de la surface ou un certain volume intérieur. Ceci est plus conforme à la réalité physique, et plus conforme aussi à notre méthode. La méthode peut cependant être légèrement modifiée pour en tenir compte. Le principe de la méthode, utilisation de fonctions-paramètres, est très général et pourrait s'appliquer aussi à des corps de structure cristalline quelconque.

Un point quelconque de la poutre déformée sous l'action de charges quelconques sera caractérisé par les coordonnées  $x, y, z$  de sa position quand la poutre est libre de charges.  $x, y, z$  sont donc des constantes. La position de ce point dans la poutre chargée sera définie par les coordonnées rectangulaires  $x + U, y + V, z + W$ . Appelons section de la poutre l'ensemble des points de la poutre pour lesquels le paramètre  $x$  a une valeur bien déterminée. *Nous admettons* et c'est là une de nos hypothèses essentielles, *que*  $U, V, W$  *peuvent*

être représentés par un développement limité suivant les puissances croissantes de  $y$  et  $z$ . Ainsi

$$U(x, y, z) = u + a_1 y + a_2 z + \frac{1}{2}(a_{11} y^2 + 2a_{12} yz + a_{22} z^2) + \dots$$

V et W ont un développement analogue, où  $u$  et  $a$  seraient remplacés par  $v$  et  $b$ , ou  $w$  et  $c$ . Les fonctions  $u, v, \dots, a_1, \dots, c_{22}$  dépendent uniquement de  $x$ .

Les fonctions U, V, W composantes du déplacement de  $P(x, y, z)$  sont donc supposées suffisamment régulières dans chaque section de la poutre pour avoir un développement limité de Taylor; de plus les dérivées d'ordre maximum écrites sont supposées varier très peu dans chaque section, et l'on remplace leur valeur variable par une valeur fixe, celle qui est prise pour  $y = z = 0$ . Ceci n'est admissible que si les forces appliquées, comme nous l'avons indiqué plus haut, varient assez lentement dans le volume ou sur la surface.

Tous les coefficients  $u, v, w$ , et les  $a, b, c$  sont des fonctions de  $x$ , et il convient de les déterminer, connaissant les charges appliquées. Appelons approximation d'ordre  $n$ , celle dans laquelle nous conservons tous les termes en  $y$  et  $z$  de degré inférieur ou égal à  $n - 1$ , et nous supprimons tous les termes de degré supérieur. Il est bon de remarquer que nous ne supposons pas que  $y$  et  $z$  sont des quantités petites, mais seulement que les dernières dérivées conservées varient peu dans une section donnée.

Nous bornant par exemple à l'approximation du second ordre, les neuf fonctions  $u, v, w, a_1, \dots, c_2$  peuvent être considérées comme des fonctions-paramètres pour le système matériel. Soit  $\varphi$  l'une d'entre elles,  $\varpi$  le potentiel de forme considéré comme une fonctionnelle des  $\varphi$  et

$$\delta\varpi = \int_0^l Q_\varphi \delta\varphi dx$$

le travail élémentaire des forces extérieures dans un déplacement virtuel. Les équations de Lagrange de l'équilibre se réduisent alors à

$$Q_\varphi = \frac{\partial\varpi}{\partial\varphi}.$$

Nous constaterons que *ce sont des équations différentielles ordinaires.*

Nous plaçant dans les hypothèses habituellement admises, le potentiel de forme a la valeur suivante :

$$2\varpi = \iiint [\lambda(e_1 + e_2 + e_3)^2 + 2\mu(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2) + 4\mu^2(g_1^2 + g_2^2 + g_3^2)] dx dy dz,$$

où figurent les notations suivantes :

$$\begin{aligned} e_1 &= U'_x, & e_2 &= V'_y, & e_3 &= W'_z, \\ 2g_1 &= W'_y + V'_z, & 2g_2 &= U'_z + W'_x, & 2g_3 &= V'_x + U'_y. \end{aligned}$$

APPROXIMATION DU PREMIER ORDRE. — Tous les  $a, b, c$  sont négligés. Les coefficients de la déformation ont les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} e_1 &= u', & e_2 &= 0, & e_3 &= 0, \\ 2g_1 &= 0, & 2g_2 &= w', & 2g_3 &= v'. \end{aligned}$$

Les accents désignent, ici et dans la suite, les dérivées en  $x$ .

On en déduit la valeur du potentiel de forme

$$2\mathfrak{W} = \int_0^l A [(\lambda + 2\mu)u'^2 + \mu(v'^2 + w'^2)] dx,$$

$A$  représentant l'aire de la section.

Soient d'autre part  $X, Y, Z$  les composantes de la résultante des actions extérieures sur une tranche de longueur-unité de la poutre. Le travail élémentaire de ces actions a pour valeur

$$\delta\mathfrak{E} = \int_0^l (X \delta u + Y \delta v + Z \delta w) dx.$$

Nous avons donc les trois équations suivantes d'équilibre :

$$A(\lambda + 2\mu)u'' = X, \quad \mu A v'' = Y, \quad \mu A w'' = Z.$$

En particulier, pour une poutre horizontale supportant uniquement des charges verticales :

$$u'' = v'' = 0, \quad \mu A w'' = Z.$$

Ces équations sont nettement différentes de celles qui sont employées.

APPROXIMATION DU SECOND ORDRE. — Nous admettons que le déplacement du point  $P$  a la forme suivante :

$$U = u + a_1 y + a_2 z, \quad V = v + b_1 y + b_2 z, \quad W = w + c_1 y + c_2 z.$$

Nous avons donc les coefficients suivants pour la déformation

$$\begin{aligned} e_1 &= u' + y a'_1 + z a'_2, & e_2 &= b_1, & e_3 &= b_2; \\ 2g_1 &= c_1 + b_2, & 2g_2 &= a_2 + w' + y c'_1 + z c'_2, & 2g_3 &= a_1 + v' + y b'_1 + z b'_2, \end{aligned}$$

Le potentiel de forme est une intégrale de volume dans laquelle nous effectuons les intégrations en  $y$  et  $z$ . Employons les notations suivantes *qui ne sont pas les notations classiques* :

$$\begin{aligned} A &= \iint dy dz, & I_y &= \iint y dy dz, & I_z &= \iint z dy dz, \\ I_{yy} &= \iint y^2 dy dz, & I_{yz} &= \iint yz dy dz, & I_{zz} &= \iint z^2 dy dz. \end{aligned}$$



On a les transformations suivantes sur le potentiel de forme :

$$\begin{aligned}
 2\bar{\omega} &= \iiint \{ \lambda(b_1 + c_2 + u' + ya'_1 + za'_2)^2 + 2\mu[(u' + ya'_1 + za'_2)^2 + b_1^2 + c_2^2] \\
 &\quad + \mu[(c_1 + b_2)^2 + (a_2 + w' + yc'_1 + zc'_2)^2 + (a_1 + v' + yb'_1 + zb'_2)^2] \} dx dy dz, \\
 2\bar{\omega} &= \int_0^l \{ A\lambda(b_1 + c_2 + u')^2 + 2\mu(u'^2 + b_1^2 + c_2^2) + \mu[(c_1 + b_2)^2 + (a_2 + w')^2 + (a_1 + v')^2] \} dx \\
 &\quad + 2 \int_0^l I_y \{ \lambda a'_1(b_1 + c_2 + u') + 2\mu a'_1 u' + \mu[c'_1(a_2 + w') + b'_1(a_1 + v')] \} dx \\
 &\quad + 2 \int_0^l I_z \{ \lambda a'_2(b_1 + c_2 + u') + 2\mu a'_2 u' + \mu[c'_2(a_2 + w') + b'_2(a_1 + v')] \} dx \\
 &\quad + \int_0^l I_{yy} [(\lambda + 2\mu)a_1'^2 + \mu(c_1'^2 + b_1'^2)] dx \\
 &\quad + 2 \int_0^l I_{yz} [(\lambda + 2\mu)a_1' a_2' + \mu(b_1' b_2' + c_1' c_2')] dx + \int_0^l I_{zz} [(\lambda + 2\mu)a_2'^2 + \mu(b_2'^2 + c_2'^2)] dx.
 \end{aligned}$$

On en déduit le système des dérivées fonctionnelles

$$\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial u} = - [A\lambda(b_1 + c_2 + u') + 2A\mu u' + (\lambda + 2\mu)(I_y a'_1 + I_z a'_2)]',$$

$$\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial v} = - [\mu A(a_1 + v') + \mu(I_y b'_1 + I_z b'_2)]',$$

$$\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial w} = - [\mu A(a_2 + w') + \mu(I_y c'_1 + I_z c'_2)]',$$

$$\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial a_1} = A\mu(a_1 + v') + \mu(I_y b'_1 + I_z b'_2) - [\lambda I_y(b_1 + c_2 + u') + 2\mu I_y u' + (\lambda + 2\mu)(I_{yy} a'_1 + I_{yz} a'_2)]',$$

$$\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial a_2} = A\mu(a_2 + w') + \mu(I_y c'_1 + I_z c'_2) - [\lambda I_z(b_1 + c_2 + u') + 2\mu I_z u' + (\lambda + 2\mu)(I_{yz} a'_1 + I_{zz} a'_2)]',$$

$$\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial b_1} = A\lambda(b_1 + c_2 + u') + 2\mu A b_1 + \lambda(I_y a'_1 + I_z a'_2) - \{ \mu[I_y(a_1 + v') + I_{yy} b'_1 + I_{yz} b'_2] \}',$$

$$\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial b_2} = A\mu(c_1 + b_2) - \{ \mu[I_z(a_1 + v') + I_{yz} b'_1 + I_{zz} b'_2] \}',$$

$$\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial c_1} = A\mu(c_1 + b_2) - \{ \mu[I_y(a_2 + w') + I_{yy} c'_1 + I_{yz} c'_2] \}',$$

$$\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial c_2} = A\lambda(b_1 + c_2 + u') + 2\mu A c_2 + \lambda(I_y a'_1 + I_z a'_2) - \{ \mu[I_z(a_2 + w') + I_{yz} c'_1 + I_{zz} c'_2] \}'.$$

Ces dérivées existent au sens où nous les avons définies, pourvu que les conditions d'extrémités permettent de vérifier la relation suivante, ce que nous admettons :

$$[F'_u \delta u + F'_v \delta v + F'_{w'} \delta w + F'_{a_1'} \delta a_1 + \dots + F'_{c_1'} \delta c_1]_0' = 0,$$

après avoir posé

$$2\bar{\omega} = \int_0^l F(u, u', v, v', \dots, c_2, c_2') dx.$$

$F'_u, \dots, F'_{c_i}$  sont des dérivées partielles ordinaires, moyennant quoi, les dérivées fonctionnelles ci-dessus s'écrivent

$$\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial u} = F'_u - (F'_u)', \quad \dots$$

Nous avons besoin d'autre part de connaître le travail virtuel des forces extérieures. Désignons par  $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$  les composantes de la force unitaire agissant sur l'élément d'aire de la surface latérale de la poutre et par  $\mathcal{X}_1, \mathcal{Y}_1, \mathcal{Z}_1$  les composantes de la force massique. Le travail virtuel cherché se présente sous la forme suivante :

$$\delta \bar{\omega} = \sum \iint \mathcal{X} (\delta u + y \delta a_1 + z \delta a_2) dx ds + \sum \iiint \mathcal{X}_1 (\delta u + y \delta a_1 + z \delta a_2) dx dy dz,$$

ou encore

$$\delta \bar{\omega} = \int_0^l (X \delta u + Y \delta v + Z \delta w + \alpha_1 \delta a_1 + \alpha_2 \delta a_2 + \beta_1 \delta b_1 + \beta_2 \delta b_2 + \mathcal{C}_1 \delta c_1 + \mathcal{C}_2 \delta c_2) dx,$$

grâce aux notations suivantes :

$$X = \int \mathcal{X} ds + \int \mathcal{X}_1 dy dz, \quad \alpha_1 = \int y \mathcal{X} ds + \int y \mathcal{X}_1 dy dz, \quad \dots$$

Les intégrales simples et doubles sont respectivement étendues au contour et à l'aire de la section.

Nous pouvons maintenant écrire le système des neuf équations à neuf inconnues dont dépend la résolution du problème posé. Précisons encore qu'il s'agit des conditions les plus générales pour une poutre presque droite : le centre de gravité n'est pas nécessairement sur  $Ox$ , la section peut varier lentement en grandeur, ainsi que la direction et les axes de l'ellipse d'inertie; les charges ont une direction quelconque :

$$\begin{aligned} -(F'_u)' &= X, & -(F'_v)' &= Y, & -(F'_w)' &= Z; \\ F'_{a_1} - (F'_{a_1})' &= \alpha_1, & F'_{a_2} - (F'_{a_2})' &= \alpha_2, \\ F'_{b_1} - (F'_{b_1})' &= \beta_1, & F'_{b_2} - (F'_{b_2})' &= \beta_2, \\ F'_{c_1} - (F'_{c_1})' &= \mathcal{C}_1, & F'_{c_2} - (F'_{c_2})' &= \mathcal{C}_2. \end{aligned}$$

Pour comparer avec les résultats classiques, plaçons-nous dans les conditions les plus fréquentes : le centre de gravité se trouve rigoureusement sur  $Ox$  ( $I_y = I_z = 0$ ), la poutre admet le plan vertical  $xOz$  comme plan de symétrie ( $I_{yz} = 0$ ), les sections sont toutes égales et le matériau homogène ( $\lambda, \mu, A, I_{yy}, I_{zz}$  sont des constantes). Enfin supposons que toutes les charges soient verticales :  $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \mathcal{X}_1 = \mathcal{Y}_1 = 0$ . Ceci entraîne

$$X = Y = 0, \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = \beta_2 = 0.$$

Nous avons alors le système suivant, qui, bien entendu, peut être obtenu directement par la même méthode, avec un peu moins de calculs :

$$\begin{cases} -A[\lambda(b_1 + c_2 + u') + 2\mu u'] = 0, \\ A[\lambda(b_1 + c_2 + u') + 2\mu b_1] - \mu I_{yy} b_1'' = 0, \\ A[\lambda(b_1 + c_2 + u') + 2\mu c_2] - \mu I_{zz} c_2'' = 0; \\ -\mu A(a_1 + w') = 0, \\ \mu A(a_1 + w') - (\lambda + 2\mu) I_{yy} a_1'' = 0; \\ -\mu A(a_2 + w') = Z, \\ \mu A(a_2 + w') - (\lambda + 2\mu) I_{zz} a_2'' = 0; \\ \mu A(c_1 + b_2) - \mu I_{zz} b_2'' = 0, \\ \mu A(c_1 + b_2) - \mu I_{yy} c_1'' = C_1. \end{cases}$$

Les inconnues sont groupées en quatre systèmes partiels. Les équations sont obtenues respectivement quand on dérive par rapport aux fonctions-paramètres  $u, b_1, c_2; v, a_1; w, a_2; b_2, c_1$ .

Prenons plus particulièrement le troisième système. Le second membre  $Z$  représente la densité de charge  $p(x)$  habituellement introduite. On constate que la première équation de ce système peut s'intégrer

$$\mu A(a_2 + w') = T, \quad T = \int_x^l Z dx + \text{const.}$$

$T$  est analogue à l'effort tranchant, à une constante additive près, peut-être. (Pour étudier ce point il faudrait faire intervenir les conditions d'extrémité.) Nous en déduisons  $a_2''$  :

$$a_2'' = \frac{\mu A(a_2 + w')}{(\lambda + 2\mu) I_{zz}} = \frac{T}{(\lambda + 2\mu) I_{zz}}.$$

Une intégration nous permet d'introduire un élément analogue au moment fléchissant, toujours sous réserve des conditions d'extrémité :

$$a_2' = \frac{M}{(\lambda + 2\mu) I_{zz}}, \quad M = - \int_x^l T dx + \text{const.}$$

Éliminons  $a_2'$  en utilisant à nouveau la première équation du système :

$$(\lambda + 2\mu) I_{zz} w'' = -M - \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \frac{I_{zz}}{A} Z.$$

*Cette équation est à rapprocher de l'équation classique*

$$EI w'' = -M.$$

Il convient de faire les remarques suivantes :  $M$  n'a peut-être pas la même signification dans les deux formules; le moment d'inertie  $I$  est bien le même, mais

le coefficient E est remplacé par  $\lambda + 2\mu$ , or, ces deux termes ne sont pas égaux :

$$\lambda + 2\mu = E \frac{1 - \sigma}{(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)},$$

$\sigma$  étant le coefficient de Poisson. C'est une différence sensible. Enfin nous avons un terme supplémentaire au second membre.

Faisons une remarque relative aux charges ponctuelles. Nous avons dit pourquoi il fallait les remplacer par des charges étalées. Si ces charges ne causent pas trop de perturbation, et si l'on peut accepter une déformation partout linéaire en  $y$  et  $z$ , on remarque que les termes T et M introduits peuvent se calculer comme l'effort tranchant et le moment fléchissant habituels, c'est-à-dire (à une constante additive près qui ne peut être précisée que grâce aux conditions d'extrémité), en faisant la somme de toutes les charges (ou des moments) finis ou infiniment petits, au delà du point considéré.

INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE DES APPROXIMATIONS DES DIVERS ORDRES. — Dans l'approximation du premier ordre, tous les points d'une section ont le même déplacement. Cette section se déplace donc par translation. Ceci est très loin des hypothèses habituelles : Bernoulli admet que chaque section est indéformable en grandeur et reste perpendiculaire à la fibre moyenne. Nous avons ici conservation de la grandeur de la section, mais elle ne reste pas perpendiculaire à la fibre moyenne.

Dans l'approximation du second ordre, chaque section subit une affinité définie par une relation linéaire en  $y$  et  $z$ , puisque  $x$  reste constant. Cette section reste donc plane, son plan change, mais elle n'est pas indéformable en général. Ceci est une supériorité de la méthode présentée qui, dans l'approximation du second ordre, est plus souple que la méthode habituelle, puisqu'elle tient compte, d'une certaine manière, de la déformation de cette section qui, de plus, ne reste sans doute pas exactement perpendiculaire à la fibre moyenne. De plus, par la présence des termes  $\alpha_1, \dots, \mathcal{C}_2$ , elle tient compte de la répartition des charges à la surface.

Une approximation meilleure, celle du troisième ordre, où le déplacement a la valeur suivante :

$$U = u + y a_1 + z a_2 + \frac{1}{2}(y^2 a_{11} + 2yz a_{12} + z^2 a_{22}), \quad V = \dots, \quad W = \dots,$$

transforme une section en un morceau de surface algébrique, ce qui est plus satisfaisant encore. Les calculs sont plus pénibles. Il s'agit de former un système de 18 équations à 18 inconnues. La méthode suivie jusqu'ici s'applique sans autre difficulté que la longueur des calculs. Parmi les coefficients s'introduisent des termes qui ne sont pas considérés habituellement, tels que

$$I_{yy} = \iint y^3 dy dz, \quad I_{yyz} = \iint y^2 z dy dz, \quad \dots,$$

étendus à une section.

Les forces extérieures, au contour ou massiques font intervenir les termes suivants :

$$\int y^2 \mathcal{X} ds + \iint y^2 \mathcal{X}_1 dy dz, \quad \int yz \mathcal{X} ds + \iint yz dy dz, \quad \dots,$$

où comme au second ordre déjà, la disposition des charges à la surface n'est pas négligeable.

CONDITIONS AUX LIMITES. — Cette question paraît assez délicate, elle a pour but de déterminer les constantes qui s'introduisent dans l'intégration des divers systèmes différentiels. La principale difficulté vient de ce que nous excluons *a priori* les charges ponctuelles et qu'il faut revenir sur la notion de réactions aux extrémités. D'autre part, il convient de vérifier la condition d'extrémité qui a été indiquée lors de l'écriture des équations de Lagrange.

On peut concevoir un encastrement parfait, purement théorique, pour lequel la section encastree serait parfaitement indéformable. Pour  $x = 0$ , on devrait avoir

$$\delta u = \delta v = \delta w = 0, \quad \delta a_1 = \dots = \delta c_2 = 0,$$

mais cela paraît difficile à imaginer réalisé dans la pratique.

Une extrémité libre est plus naturelle. Il nous faut alors revenir sur la détermination des tensions à l'intérieur de la poutre, on sait qu'elles sont données par les relations suivantes :

$$N_1 = \lambda e + 2\mu U'_x, \quad N_2 = \lambda e + 2\mu U'_y, \quad N_3 = \lambda e + 2\mu U'_z \quad (e = U'_x + V'_y + W'_z), \\ T_1 = \mu(W'_y + V'_z), \quad T_2 = \mu(U'_z + W'_x), \quad T_3 = \mu(V'_x + U'_y).$$

Il sera particulièrement intéressant d'évaluer les composantes de la tension unitaire pour une aire située dans une section de la poutre, à savoir  $N_1$ ,  $T_3$ ,  $T_2$ , nous allons constater que les moyennes de ces éléments ou de leurs différents moments du premier ordre ont une interprétation assez simple, quand on introduit les dérivées partielles de la fonction  $F$  rencontrée à propos du potentiel de forme. Nous avons ici

$$N_1 = (\lambda + 2\mu)(u' + ya'_1 + za'_2) + \lambda(b_1 + c_2), \\ T_3 = \mu(a_1 + v' + yb'_1 + zb'_2), \quad T_2 = \mu(a_2 + w' + yc'_1 + zc'_2),$$

de sorte qu'en surlignant la quantité dont on prend la moyenne, nous avons

$$\bar{N}_1 = F'_{u'}, \quad \bar{T}_3 = F'_{v'}, \quad \bar{T}_2 = F'_{w'}, \quad \bar{yN}_1 = F'_{a'_1}, \quad \bar{zN}_1 = F'_{a'_2}, \\ \bar{yT}_3 = F'_{b'_1}, \quad \bar{zT}_3 = F'_{b'_2}, \quad \bar{yT}_2 = F'_{c'_1}, \quad \bar{zT}_2 = F'_{c'_2},$$

On peut remarquer que les éléments de réduction du système des réactions dans une section donnée sont  $F'_{u'}$ ,  $F'_{v'}$ ,  $F'_{w'}$ , pour la somme géométrique, et  $F'_{c'_1} - F'_{b'_2}$ ,  $F'_{a'_2}$ ,  $-F'_{a'_1}$  pour le moment calculé au point de la section situé

sur  $Ox$ . L'ensemble de ces six derniers nombres est insuffisant à remplacer le tableau des neuf nombres ci-dessus, d'où des difficultés aux extrémités.

Si nous nous reportons au terme tout intégré dans la variation du potentiel de forme, nous trouvons

$$[\bar{N}_1 \delta u + \bar{T}_3 \delta v + \bar{T}_2 \delta w + \bar{y} \bar{N}_1 \delta a_1 + \bar{z} \bar{N}_1 \delta a_2 + \bar{y} \bar{T}_3 \delta b_1 + \bar{z} \bar{T}_3 \delta b_2 + \bar{y} \bar{T}_2 \delta c_1 + \bar{z} \bar{T}_2 \delta c_2]_0.$$

En une extrémité libre, le crochet sera nul si toutes les moyennes sont nulles, ce sont les conditions cherchées pour la détermination des constantes d'intégration.

*Remarque.* — La distribution des efforts intérieurs que nous déduisons des équations trouvées, après leur intégration, ne doit pas être considérée comme parfaite. Ainsi, à la surface, les tensions calculées ne sont pas rigoureusement égales aux efforts donnés qui ont servi à les déterminer. Ces deux catégories de forces sont équivalentes au sens suivant : elles rendent égales les trois composantes de la somme géométrique et les six moments du premier ordre, dans le cas de l'approximation du second ordre. L'approximation du troisième ordre ajouterait l'égalité des neuf moments du second ordre.

L'intégration des quatre systèmes différentiels comportant neuf inconnues en tout peut être présentée d'une manière simple. On constate que les véritables inconnues sont les groupements déjà rencontrés, à savoir certaines dérivées partielles de  $F$ , ce qui est commode pour utiliser les conditions d'extrémités.

### CONCLUSION.

Les idées générales développées au sujet des systèmes mécaniques dont la position ou la forme dépendent de fonctions arbitraires dépassent le cadre de l'exposé des exemples traités. Si des considérations physiques conduisent à une forme différente du potentiel ou même conduisent à rejeter la loi de Hooke, les principes subsistent. Des considérations particulières peuvent conduire à des développements du déplacement, dans la théorie des poutres, qui ne soient pas des développements de Taylor.

Un autre sujet important d'application, que nous réservons pour une publication particulière est la *théorie des membranes élastiques* où on se heurte à la grande longueur des calculs. Nous pensons aussi pouvoir développer notre point de vue sur la combinaison du Calcul fonctionnel et du Calcul tensoriel qui mène à une étude des propriétés géométriques des espaces de Banach.

La méthode exposée permet encore de retrouver les *équations du mouvement des fluides en variables quelconques de Lagrange*. Cette méthode permet donc de donner une grande unité à l'étude des systèmes matériels dépendant de paramètres arbitraires ou de fonctions arbitraires en nombre quelconque.

