RAIRO Operations Research
RAIRO Oper. Res. **38** (2004) 39–62
DOI: 10.1051/ro:2004013

UNE NOUVELLE TRANSFORMATION DES RÉSEAUX DE PETRI GÉNÉRALISÉS : L'ABSTRACTION GÉNÉRALISÉE

Christophe Haro[1], Patrick Martineau[1] et Christian Proust[1]

Communiqué par Dominique de Werra

Abstract. This paper introduces a new transformation of generalized Petri nets. This transformation is a reduction rule. We prove that it preserves the invariants and most important structural properties. A function that transforms the markings helps us to give some indications to prove the conservation of the behavioral properties.

Résumé. Cet article introduit une nouvelle transformation des réseaux de Petri généralisés appelée l'*abstraction généralisée*. C'est une réduction dont nous montrons qu'elle conserve les invariants du réseau de départ et les propriétés structurelles les plus importantes. Une fonction de transformation de marquages nous permet d'introduire l'étude de la conservation des propriétés comportementales.

Mots Clés. Réseaux de Petri, transformation, réduction, simplification.

Introduction

Les réseaux de Petri se sont révélés intéressants pour modéliser des systèmes parallèles ou des systèmes faisant intervenir la synchronisation et le partage de ressources. Cependant, il n'existe pas de méthodologie de conception de modèles

Reçu le 24 janvier 2000.

[1] Laboratoire d'Informatique – Polytech'Tours, 64 avenue Jean Portalis, 37200 Tours, France ; e-mail : {haro ;pmartineau ;proust}@e3i.univ-tours.fr ; http://www.e3i.univ-tours.fr

de RdP possédant des propriétés données. Il s'avère de plus quasiment impossible d'effectuer l'analyse globale d'un RdP de grande taille avec les méthodes usuelles d'analyse par énumération ou de conduire l'analyse structurelle de tels réseaux par l'algèbre linéaire [9, 14]. Une façon de s'affranchir des calculs complexes générés par le graphe des marquages du réseau ou l'analyse algébrique consiste à concevoir des modules constitués de RdP élémentaires réduits dont on établit facilement les propriétés, puis à composer ces « briques de base » d'une façon contrôlée, modulaire et hiérarchique, de sorte que certaines propriétés restent vraies pour le réseau obtenu. C'est l'objet des méthodes de synthèse que de permettre de telles études et elles ont donné lieu à de nombreux travaux [11–13]. Trois types de méthodes ont été proposées pour composer des RdP : les méthodes ascendantes, les méthodes descendantes et les méthodes mixtes.

Une méthode descendante part du modèle du système global et le développe progressivement en précisant les détails du réseau [13]. L'opération principale de cette méthode consiste à remplacer une place ou une transition du réseau global par un RdP bien formé [11,12]. Cette approche semble bien adaptée pour modéliser des systèmes composés de sous-systèmes indépendants. Mais il s'avère difficile de trouver des modèles agrégés de taille acceptable pour des systèmes, de production par exemple, composés de sous-systèmes fortement liés comme ceux partageant des ressources [9]. Une méthode ascendante [6, 10] compose des modèles des sous-systèmes en fusionnant des places ou des transitions. Mais il est alors difficile de déterminer les conditions dans lesquelles les propriétés souhaitées sont préservées. Les approches mixtes, ou incrémentales, permettent d'avoir une vue d'ensemble du modèle, par exemple quand il est issu d'un découpage fonctionnel et d'y intégrer des éléments construits de façon ascendante.

Une autre voie pour étudier les propriétés des réseaux de grande taille consiste à définir un ensemble de règles de transformations de ces réseaux qui préservent les propriétés auxquelles on s'intéresse. Cette démarche est efficace lorsqu'elle utilise des règles qui réduisent le nombre de sommets (places ou transitions) du réseau initial ou du graphe des marquages. On parle alors de règles de réduction. Les réductions de réseaux ont été étudiées, entre autre, par [1, 2, 7, 8] pour les réseaux généralisés, [5] pour les réseaux à choix libres. Dans ce type de transformation on perd la sémantique sous-jacente aux réseaux transformés.

L'objet de notre contribution est d'étendre aux réseaux généralisés les réductions de réseaux de Petri à choix libres introduites et étudiées dans [5].

La transformation étudiée dans cet article est une réduction qui permet de supprimer une cellule constituée d'une place et d'une transition satisfaisant à des conditions caractérisées algébriquement. Nous montrons que cette réduction conserve les invariants et la bornitude structurelle. Une premiere section précise le vocabulaire de base associé aux transformations de réseaux. La deuxième section définit l'abstraction et donne quelques exemples élémentaires de réduction de réseaux généralisés. La section suivante étudie la conservation des invariants et la quatrième section démontre la conservation des propriétés structurelles. Nous introduisons ensuite une fonction de transformation de marquages qui devrait permettre d'aborder l'étude de la conservation des propriétés comportementales. Une derniere section, enfin conclut rapidement cette étude.

1. Généralités : transformation de réseaux de Petri

Dans cette section on rappelle quelques notions de base sur les règles de transformations des réseaux de Petri. Il s'agit de préciser les notations utilisées dans l'article.

On appelle *règle de transformation* une relation binaire φ sur une classe particulière donnée de réseaux. En notant $\mathcal{G}_\varphi$ le graphe de cette relation, on a, pour deux réseaux $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$: $(\mathcal{R}\varphi\mathcal{R}') \Leftrightarrow ((\mathcal{R}, \mathcal{R}') \in \mathcal{G}_\varphi)$. On s'intéresse ici aux réseaux généralisés pour lesquels les valuations des arcs sont non négatives, mais quelconques. Par abus de notation, nous écrirons $(\mathcal{R}, \mathcal{R}') \in \varphi$ toutes les fois qu'aucune confusion n'est à craindre.

Une règle de transformation φ est une règle de réduction lorsque le nombre de sommets de $\mathcal{R}'$ est strictement inférieur au nombre de sommets de $\mathcal{R}$. C'est une règle de synthèse lorsque le nombre de sommets augmente. Lorsque le nombre de sommets ne varie pas, mais que le nombre d'arcs diminue dans le processus de transformation, on parle de règle de simplification.

2. Définition de l'abstraction généralisée et premiers exemples

Dans cette première section, nous définissons l'abstraction généralisée et en donnons quelques exemples.

La réduction est d'abord définie comme une transformation sur le graphe du réseau. Une seconde section la définit algèbriquement. Un exemple simple permet ensuite d'illustrer son utilisation. On termine enfin cette partie par l'énoncé de quelques résultats immédiats utiles pour la suite.

Soit $\mathcal{R}$ un réseau de Petri quelconque dont les ensembles P des places et T des transitions sont de cardinalités n et m respectivement. La règle d'abstraction généralisée φ_a est une réduction qui porte sur un couple (Place, Transition). Soit (p_n, t_m) ce couple. On suppose ainsi, sans perte de généralité, que ce couple est associé à la dernière ligne et la dernière colonne de la matrice d'incidence du réseau. Lorsqu'aucune confusion n'est à craindre, on note dans la suite p la place p_n et t la transition t_m. La réduction se définit par les conditions d'application, qui sont des conditions sur la structure du réseau initial $\mathcal{R}$ et par la construction du réseau résultant $\mathcal{R}'$. Nous donnons deux définitions équivalentes de l'abstraction généralisée. La première présente la réduction comme une opération sur le graphe du réseau. La seconde la définit algébriquement. Elle utilise une matrice intermédiaire qui opère sur la matrice d'incidence du réseau $\mathcal{R}$ à transformer.

2.1. Transformation du graphe du réseau

Soit $\mathcal{R} = (P, T, F, \boldsymbol{W})$ un réseau de Petri quelconque de places P, $|P| = n$ et de transitions T, $|T| = m$, avec $F \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$ l'ensemble des arcs et $\boldsymbol{W} : F \to \mathbb{N}^+$ l'application de valuation des arcs de F. L'abstraction généralisée étend la réduction définie dans [5] aux réseaux dont les arcs sont valués par un entier, positif mais quelconque. La figure 1 illustre la réduction étudiée par ces auteurs pour les réseaux de Petri à choix libre.

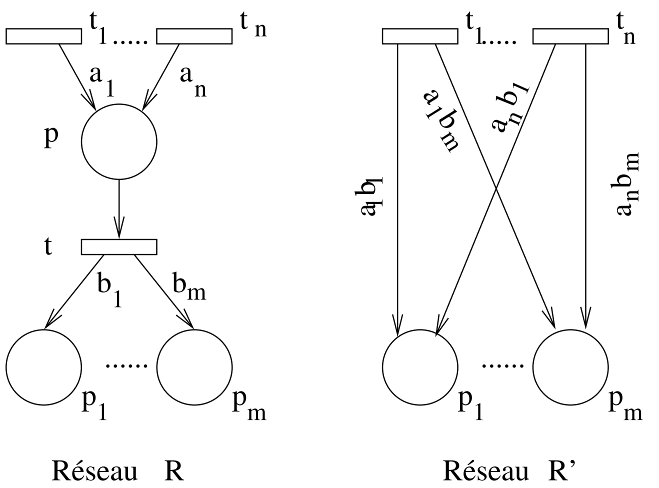

Figure 1. Règle φ_a définie dans [5].

L'abstraction généralisée est définie par la **règle** 2.1 ci-dessous.

Définition 2.1 (règle d'abstraction généralisée ou règle φ_a)**.** Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ deux réseaux généralisés. Le couple $(\mathcal{R}, \mathcal{R}')$ appartient à φ_a s'il existe $p \in P$ et $t \in T$ telles que :

(1) conditions sur $\mathcal{R}$:
   (a) ${}^\circ p \neq \emptyset$ & $p^\circ = \{t\}$;
   (b) $t^\circ \neq \emptyset$ & ${}^\circ t = \{p\}$;
   (c) $({}^\circ p \times t^\circ) \cap F = \emptyset$;

(2) construction de $\mathcal{R}'$:
   (d) $P' = P \backslash \{p\}$ & $T' = T \backslash \{t\}$;
   (e) $F' = (F \cap ((P' \times T') \cup (T' \times P'))) \cup ({}^\circ p \times t^\circ)$;
   (f) $\forall f \in F$:

$$W'(f) = \begin{cases} W({}^\circ p, p) \times W(t, t^\circ) & \text{si } f \in ({}^\circ p \times t^\circ) \\ W(f) \times W(p, t) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les conditions (a), (b), (c) et les opérations (d) et (e) sont celles définies par [5] pour la règle d'abstraction dans les réseaux à choix libre. Elles expriment que la cellule (p,t) est supprimée et qu'un arc est créé de chaque transition d'entrée de p vers chaque place de sortie de t.

L'opération (f) précise la règle de recalcul des valuations des arcs du réseau. Les valuations des arcs de $\mathcal{R}'$ non adjacents à p ou t sont multipliées par la valuation de l'arc (p,t). La valuation d'un arc (u,q) de $\mathcal{R}'$ avec $u \in^\circ p$ et $q \in t^\circ$ est égale au produit des valuations dans $\mathcal{R}$ des arcs (u,p) et (q,t).

La définition qui précède est utile en ce qu'elle permet de comprendre facilement le fonctionnement de la règle de réduction. Mais elle n'est pas opératoire, en ce sens qu'elle ne permet pas d'étudier les propriétés des réseaux obtenus. La section suivante présente une définition algébrique de φ_a utile pour les démonstrations des chapitres suivants.

2.2. Transformation algébrique

Dans la suite de cet article nous utilisons quelques notations qui sont précisées ici. Soit $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ une matrice de dimension $n \times m$ et ${}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{A}$ sa transposée. On note :

- $\boldsymbol{A}_j$ le vecteur colonne de numéro j de $\boldsymbol{A}$. Ainsi, $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{A}_j)_{1\leq j\leq m}$;
- $\boldsymbol{A}_i^T$ le vecteur ligne de numéro i de $\boldsymbol{A}$. On a ${}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{A}_i)_{1\leq i\leq n}$ et $\boldsymbol{A}_i^T = {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{A}_i$ pour tout i.

La définition algébrique de l'abstraction généralisée s'inspire de celle de [5] pour l'étendre à un réseau généralisé.

Définition 2.2 (définition algébrique de l'abstraction généralisée)**.** Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ deux réseaux généralisés. Le couple $(\mathcal{R},\mathcal{R}')$ appartient à φ_a s'il existe $p \in P$ et $t \in T$ telles que :

(1) conditions sur $\mathcal{R}$:
- (a)
  - $\boldsymbol{Post}_p^T \gneqq \boldsymbol{0}$;
  - $Pre(p,t) > 0$;
  - $(\forall u \in T\backslash\{t\})(Pre(p,u) = 0)$;
- (b)
  - $\boldsymbol{Post}_t \neq \boldsymbol{0}$;
  - $(\forall q \in P\backslash\{p\})(Pre(q,t) = 0)$;
- (c) $(\forall u \in^\circ p)(\forall q \in t^\circ)(Post(q,u) = Pre(q,u) = 0)$;

(2) construction de $\mathcal{R}'$:
- (d) $P' = P\backslash\{p\}$ & $T' = T\backslash\{t\}$;
- (e)

$$(\forall q \in P')(\forall u \in T')\begin{cases} Post'(q,u) &= Pre(p,t) \times Post(q,u) + Post(q,t) \times Post(p,u) \\ Pre'(q,u) &= Pre(p,t) \times Pre(q,u). \end{cases}$$

L'opération (e) définit la règle de calcul des valuations des arcs du réseau $\mathcal{R}'$. Cette règle est illustrée par l'exemple 2.2.1 développé plus bas. Soit $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{Post} - \boldsymbol{Pre}$ la matrice d'incidence du réseau $\mathcal{R}$. On envisage deux cas selon que l'arc de la place q à la transition u est un arc direct d'une entrée u de p à une sortie q de t ou l'un des autres arcs du graphe.

Si c'est un arc direct : $C(q,u) = 0$ d'après la condition (c) sur $\mathcal{R}$ de la définition 2.1. Par conséquent, on a la valuation : $(\forall q \in t^\circ)(\forall u \in ^\circ p)(C'(q,u) = C(q,t) \times C(p,u))$.

Pour les autres arcs du réseau : $(\forall q \in P\backslash\{p\})(q \notin t^\circ \Rightarrow C(q,t) = 0)$. Par contre, lorsque q est une place de sortie de t, la place p ne peut être une place de sortie de la transition u d'après la troisième condition sur $\mathcal{R}$. On a donc : $(\forall q \in P\backslash\{p\})(q \in t^\circ \Rightarrow p \notin u^\circ \Rightarrow C(p,u) = 0)$. Ainsi, $(C'(q,u) = -C(q,u) \times C(p,t))$ pour les arcs qui ne sont pas directs.

Enfin, lorsque le réseau $\mathcal{R}'$ est un réseau pur, on a $C'(q,u) = -C(p,t) \times C(q,u) + C(p,u) \times C(q,t)$. Ces considérations permettent de définir la matrice de transformation $\mathbf{\Pi}$ du réseau. Soit $\mathbf{\Pi} = (\pi_{ij})$ la matrice $(n-1) \times n$ définie par :

$$\pi_{ij} = \begin{cases} Pre(p,t) & \text{si } \ i = j \quad \text{et } j \neq n \\ Post(p_i,t) & \text{si } \ j = n \end{cases} \tag{1}$$

et où toutes les autres composantes sont nulles. Ainsi, la matrice $\mathbf{\Pi}$ se décompose en deux parties. La sous-matrice $(n-1) \times (n-1)$ est égale à $\boldsymbol{Id}_{n-1} \times Pre(p,t)$ où $\boldsymbol{Id}_{n-1}$ désigne la matrice identité de dimension $(n-1)$. Les composantes de la dernière colonne sont les valuations des arcs reliant t aux places associées à ces composantes.

La réduction φ_a se traduit algébriquement par le produit matriciel $\mathbf{\Pi} \times \boldsymbol{C}$. On obtient une matrice de dimension $(n-1) \times m$ dont la dernière colonne est nulle et dont la sous-matrice $(n-1) \times (m-1)$ est égale à la matrice $\boldsymbol{C}'$ du réseau réduit $\mathcal{R}'$. Dans la suite, on écrira, par abus de notation, $\boldsymbol{C}' = \mathbf{\Pi} \times \boldsymbol{C}$ lorsqu'aucune confusion n'est à craindre.

Les exemples ci-dessous illustrent cette réduction.

Exemple 2.2.1 (application de l'abstraction généralisée à un réseau quelconque)**.** Considérons le réseau généralisé $\mathcal{R}$ dont le graphe est représenté en figure 2.

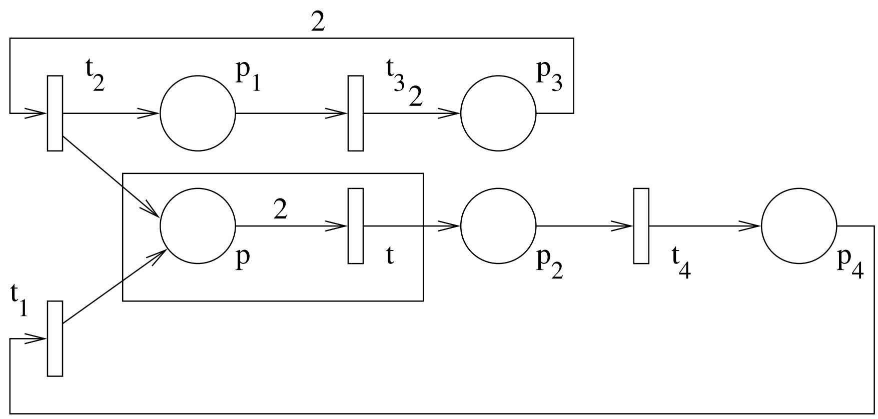

FIGURE 2. Réseau généralisé à réduire.

Sa matrice d'incidence est :

$$\boldsymbol{C}_0 = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} t_1 & t_2 & t_3 & t_4 & t \end{array} \\ \begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \end{array}.$$

La matrice de transformation de ce réseau associée à la cellule (p, t) est :

$$\boldsymbol{\Pi}_0 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice du réseau réduit $\mathcal{R}'_0$ est : $\boldsymbol{\Pi}_0 \times \boldsymbol{C}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. La matrice d'incidence du réseau réduit est la matrice précédente sans sa dernière colonne qui est nulle. Le graphe du réseau $\mathcal{R}'_0 = \mathcal{R}_1$ est représenté en figure 3. On remarque que dans ce nouveau réseau, l'abstraction est encore applicable à la cellule (p_1, t_3).

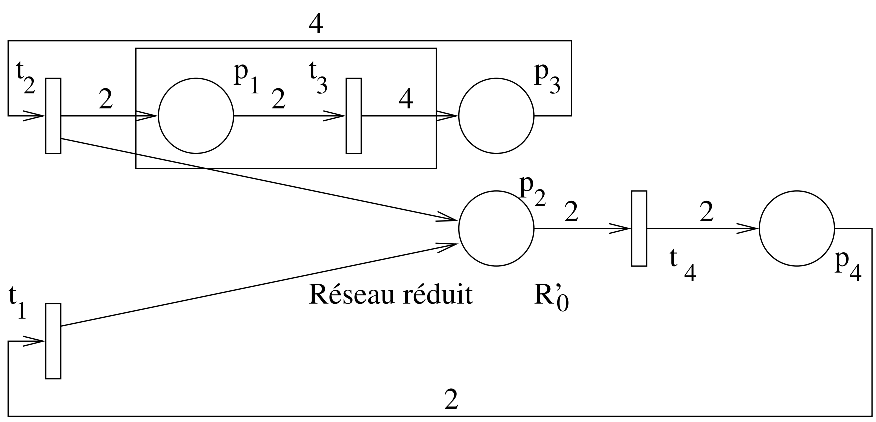

FIGURE 3. Réseau $\mathcal{R}_1$ obtenu après réduction de $\mathcal{R}_0$.

La nouvelle matrice de transformation $\boldsymbol{\Pi}_1$ est $\boldsymbol{\Pi}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. La renumérotation des places et des transitions du réseau de sorte que la cellule à abstraire soit associée à la dernière ligne et à la dernière colonne de la matrice d'incidence

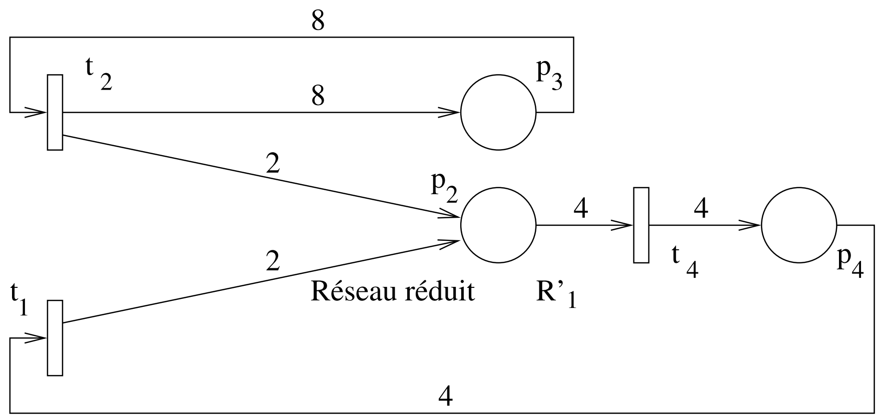

FIGURE 4. Nouveau réseau obtenu après abstraction sur $\mathcal{R}_1$.

conduit à la matrice $\boldsymbol{C}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Le produit $\boldsymbol{\Pi}_1 \times \boldsymbol{C}_1$ est égal à $\boldsymbol{\Pi}_1 \times \boldsymbol{C}_1 = \boldsymbol{C'}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$. On remarque que dans cette matrice on a $C'_1(2,2) = C'_1(p_3, t_2) = 0$. Le réseau obtenu n'est pas un réseau pur, comme le montre la figure 4 qui représente le réseau $\mathcal{R'}_1 = \mathcal{R}_2$. Les calculs suivants utilisent donc les matrices $\boldsymbol{Post}_2$ et $\boldsymbol{Pre}_2$ de ce réseau puisque la matrice d'incidence $\boldsymbol{C}_2$ ne porte plus toute l'information sur la structure du réseau. Les matrices d'incidence avant et arrière de $\mathcal{R}_2$ sont $\boldsymbol{Post}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 8 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ et $\boldsymbol{Pre}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ dans lesquelles les arcs (p_3, t_2) et (t_2, p_3) sont valués à 8 d'après la règle de recalcul des valuations. La matrice de transformation de $\mathcal{R}_2$ associée à la cellule (p_4, t_1) est $\boldsymbol{\Pi}_2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$. La transformation conduit aux matrices $\boldsymbol{\Pi}_2 \times \boldsymbol{Post}_2 = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 8 \\ 32 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\boldsymbol{\Pi}_2 \times \boldsymbol{Pre}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 16 & 8 \\ 32 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Le réseau obtenu est représenté sur la figure 5. Ce réseau n'est plus réductible puisque chaque cellule candidate intervient dans une boucle.

3. PREMIERS RÉSULTATS

Nous donnons dans cette section quelques résultats qui résultent immédiatement des définitions précédentes. Ils seront utilisés dans les démonstrations des propriétés de l'abstraction.

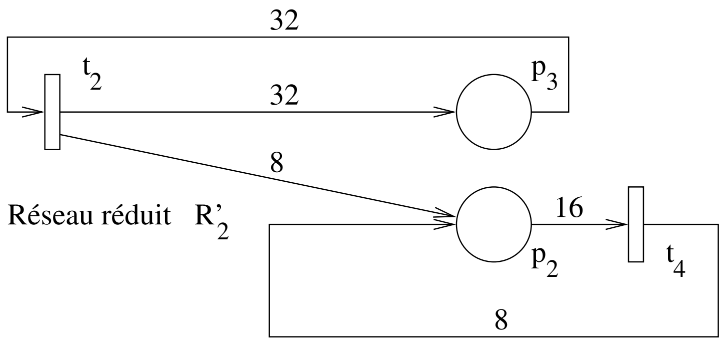

FIGURE 5. Réseau obtenu après réduction de $\mathcal{R}_2$.

3.1. Abstraction et dualité

Un résultat élémentaire précise que le réseau réduit par l'abstraction généralisée du réseau dual de $\mathcal{R}$ est le réseau dual de $\mathcal{R}'$.

Lemme 3.1 (abstraction et dualité)**.** *Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ deux réseaux de Petri généralisés. On a :*

$$(\mathcal{R}, \mathcal{R}') \in \varphi_a \Rightarrow (\mathcal{R}^d, (\mathcal{R}^d)') \in \varphi_a \text{ et } (\mathcal{R}')^d = (\mathcal{R}^d)'.$$

Démonstration. Il suffit de démontrer que $(\boldsymbol{C}')^d = (\boldsymbol{C}^d)'$. On a, par définition de $\mathbf{\Pi}$:

$$\mathbf{\Pi} = \left(\boldsymbol{Id}_{n-1} \times Pre(p,t) \ \boldsymbol{Post}_t\right).$$

Soit $\boldsymbol{\mathcal{T}}$ la matrice définie par :

$$\boldsymbol{\mathcal{T}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{Id}_{n-1} \times Pre(p,t) \\ \boldsymbol{Post}_p^T \end{pmatrix}.$$

On obtient immédiatement que $\boldsymbol{C}' = \mathbf{\Pi} \times \boldsymbol{C} = \boldsymbol{C} \times \boldsymbol{\mathcal{T}}$.
Soit $\mathbf{\Pi}^d$ la matrice de transformation du réseau $\mathcal{R}^d$, dual de $\mathcal{R}$, lorsqu'on applique l'abstraction à la cellule duale de (p, t). On a alors :

$$\mathbf{\Pi}^d = \left(\boldsymbol{Id}_{n-1} \times Pre(p,t) \ {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{Post}_p^T\right) = {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{\mathcal{T}}$$

et, de même, $\boldsymbol{\mathcal{T}}^d = {}^{\mathrm{t}}\mathbf{\Pi}$.

On a, successivement :

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{C}')^d &= {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{C}' \\ &= {}^{\mathrm{t}}(\boldsymbol{\Pi} \times \boldsymbol{C}) \\ &= {}^{\mathrm{t}}(\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{\mathcal{T}}) \\ &= {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{\mathcal{T}} \times {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{C} \\ &= \boldsymbol{\Pi}^d \times \boldsymbol{C}^d \\ &= (\boldsymbol{C}^d)'.\end{aligned}$$

□

3.2. Propriétés de la matrice de transformation

Lemme 3.2. *La matrice* $\mathbf{\Pi}$ *n'est pas un diviseur de* $\mathbf{0}$.

Démonstration. Soit $\mathbf{\Delta} = \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_{m-1} \end{pmatrix}$ un vecteur tel que $\mathbf{\Pi} \times \mathbf{\Delta} = \mathbf{0}$. On veut démontrer que $\mathbf{\Delta} = \mathbf{0}$.

Par définition de $\mathbf{\Pi}$, on a :

$$(\mathbf{\Pi} \times \mathbf{\Delta} = 0) \Rightarrow \\ ((\forall i,\ i = 1,\ \ldots,\ m-1)(\delta_i \times Pre(p,t) + \delta_{m-1} \times Post(p_{m-1},t) = 0))\,.$$

Or $Post(p_{m-1},t) \geq 0$ par définition de $\boldsymbol{Post}$ et $Pre(p,t) > 0$ puisque $p^\circ = \{t\}$ par hypothèse. Par conséquent $\delta_{m-1} = 0$ et donc $\delta_i = 0$ pour tout i. □

Une seconde propriété consiste à étendre la matrice de transformation pour en faire une matrice inversible. Soit alors $\widehat{\mathbf{\Pi}}$ la matrice obtenue en étendant $\mathbf{\Pi}$ par une ligne partout nulle, sauf en dernière composante où elle vaut 1 : $\mathbf{\Pi}_m^T = \big(0\ 0\ \ldots\ 0\ 1\big)$. On définit de même $\widehat{\boldsymbol{\mathcal{T}}}$ en étendant la matrice $\boldsymbol{\mathcal{T}}$ par une colonne supplémentaire, partout nulle sauf en dernière composante où elle vaut 1. On a alors le résultat :

Lemme 3.3 (inversion de la matrice $\widehat{\mathbf{\Pi}}$)**.** *La matrice* $\widehat{\mathbf{\Pi}}$ *est inversible et son inverse est* $\widehat{\mathbf{\Pi}}^{-1} = (\pi_{ij}^{-1})$ *donnée par :*

$$\pi_{ij}^{-1} = \begin{cases} \dfrac{1}{Pre(p,t)} = -\dfrac{1}{C(p,t)} & \textit{si } i = j \quad \textit{et } j \neq n \\ -\dfrac{Post(p_i,t)}{Pre(p,t)} = \dfrac{C(p_i,t)}{C(p,t)} & \textit{si } j = n \quad \textit{et } i \neq n \\ 1 & \textit{si } i = n \quad \textit{et } j = n \\ 0 & \textit{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration. La démonstration consiste à établir que le déterminant de la matrice de transformation étendue n'est pas nul. Pour cela, il suffit de montrer que la dernière colonne (respectivement dernière ligne) de cette matrice n'est pas identiquement nulle et de développer le calcul du déterminant par rapport à cette colonne (respectivement ligne). □

Le lemme 3.2 s'étend alors sans difficulté à la matrice $\widehat{\mathbf{\Pi}}$.

On démontre de même que $\widehat{\boldsymbol{T}}$ est inversible.

4. Conservation des invariants lors d'une réduction par la règle d'abstraction généralisée

Dans cette section nous montrons que les invariants du réseau initial sont conservés lors d'une réduction par l'abstraction généralisée. Ces résultats sont établis à l'aide du lemme 3.1.

Théorème 4.1 (conservation des invariants)**.** *L'abstraction généralisée conserve les T-invariants, les T-invariants strictement positifs, les P-invariants et les P-invariants strictement positifs.*

Démonstration. Nous démontrons la conservation des T-invariants. La conservation des T-invariants strictement positifs en est un corollaire immédiat. La conservation des P-invariants est celle des T-invariants du réseau dual.

La démonstration procède en deux étapes. On démontre d'abord qu'un T-invariant du réseau $\mathcal{R}$ privé de la dernière composante, c'est-à-dire privé de la composante associée à la transition t, est un T-invariant de $\mathcal{R}'$. On démontre ensuite que tout T-invariant de $\mathcal{R}'$ peut être complété d'une composante positive bien choisie qui en fait un T-invariant de $\mathcal{R}$.

Soit $\boldsymbol{V}$ un T-invariant quelconque de $\mathcal{R}$. Par définition d'un T-invariant on a $\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{V} = \mathbf{0}$. Soit $\boldsymbol{V'}$ le vecteur égal à $\boldsymbol{V}$ privé de sa dernière composante, celle qui correspond à t. On a :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{C} \times \boldsymbol{V} = \mathbf{0} &\Rightarrow \mathbf{\Pi} \times (\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{V}) = \mathbf{0} \\ &\Rightarrow (\mathbf{\Pi} \times \boldsymbol{C}) \times \begin{pmatrix} \boldsymbol{V'} \\ v_m \end{pmatrix} = \mathbf{0} \\ &\Rightarrow \boldsymbol{C'} \times \boldsymbol{V'} = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Par conséquent, $\boldsymbol{V'}$ est un T-invariant de $\mathcal{R}'$.

Réciproquement, soit $\boldsymbol{V'}$ un T-invariant quelconque de $\mathcal{R}'$. Par définition, $\boldsymbol{C'} \times \boldsymbol{V'} = \mathbf{0}$. Soit $\boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{V'} \\ v_m \end{pmatrix}$ avec $v_m = \frac{\boldsymbol{Post}_p^T \times \boldsymbol{V'}}{Pre(p,t)}\cdot$ Les vecteurs $\boldsymbol{Post}_p^T$ et $\boldsymbol{V'}$ sont positifs ou nuls, sans être identiquement nuls et, par conséquent, $v_m \geq 0$. On a alors :

$$\widehat{\mathbf{\Pi}} \times \boldsymbol{C} \times \boldsymbol{V} = \big(\boldsymbol{C'} \times \boldsymbol{V'}\ \ \boldsymbol{Post}_p^T \times \boldsymbol{V'} - v_m \times Pre(p,t)\big) = \mathbf{0}.$$

Comme $\widehat{\boldsymbol{\Pi}}$ n'est pas un diviseur de $\mathbf{0}$ d'après le lemme 3.2, il vient que $\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{V} = \mathbf{0}$. Par conséquent, $\boldsymbol{V}$ est un T-invariant de $\mathcal{R}$. □

5. Étude de la conservation des propriétés structurelles

Dans cette section nous étudions la conservation des propriétés pour lesquelles il existe des caractérisations par l'algèbre linéaire. On démontre d'abord la conservation de la bornitude structurelle puis celle de la répétitivité.

5.1. Bornitude structurelle

La propriété de bornitude structurelle exige que le réseau reste borné quel que soit le marquage initial.

Théorème 5.1 (conservation de la bornitude structurelle)**.** *Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ deux réseaux de Petri généralisés tels que $(\mathcal{R}, \mathcal{R}') \in \varphi_a$.*

$\mathcal{R}$ est structurellement borné si et seulement si $\mathcal{R}'$ est structurellement borné.

Démonstration. On sait qu'un réseau généralisé $\mathcal{R}$ est structurellement borné si et seulement si $(\exists \boldsymbol{W} > 0)({}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{W} \times \boldsymbol{C} \leq 0)$.

Soit alors $\boldsymbol{W} = {}^{\mathrm{t}}(w_1, w_2, \ldots, w_n) > \mathbf{0}$ tel que ${}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{W} \times \boldsymbol{C} \leq \mathbf{0}$. La matrice de transformation $\widehat{\boldsymbol{\mathcal{T}}}$ est positive par définition. On a donc $({}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{W} \times \boldsymbol{C} \leq \mathbf{0}\ \&\ \widehat{\boldsymbol{\mathcal{T}}} \geq \mathbf{0}) \Rightarrow ({}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{W} \times \boldsymbol{C} \times \widehat{\boldsymbol{\mathcal{T}}} \leq \mathbf{0})$. Comme $\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{\mathcal{T}} = \boldsymbol{C}'$, il vient ${}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{W} \times \boldsymbol{C} \times \widehat{\boldsymbol{\mathcal{T}}} = \big({}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{W}' \times \boldsymbol{C}' \ -w_n \times Pre(p,t) + {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{W}' \times \boldsymbol{Post}_t\big) \leq \mathbf{0}$ avec $\boldsymbol{W}' = {}^{\mathrm{t}}(w_1, w_2, \ldots, w_{n-1}) > \mathbf{0}$. Ainsi, $\boldsymbol{W}'^{t} \times \boldsymbol{C}' \leq 0$ avec $\boldsymbol{W}' > \mathbf{0}$. Par conséquent, $\mathcal{R}'$ est structurellement borné.

Réciproquement, supposons que $\mathcal{R}'$ est structurellement borné. Alors, $(\exists \boldsymbol{W}' > \mathbf{0})({}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{W}' \times \boldsymbol{C}' \leq 0)$. On veut prouver que $(\exists \boldsymbol{W} > 0)({}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{W} \times \boldsymbol{C} \leq 0)$. Pour cela, on pose $w_n = \frac{1}{Pre(p,t)} \times \sum_{i=1}^{i=n-1} w'_i \times Post(p_i, t)$. Nous démontrons successivement que w_n est strictement positif et que $\boldsymbol{W} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{W}' \\ w_n \end{pmatrix} > \mathbf{0}$ satisfait à ${}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{W} \times \boldsymbol{C} \leq \mathbf{0}$.

Le vecteur colonne $Post(p_i, t)$ est positif et non identiquement nul puisque $t^\circ \neq \emptyset$. Comme on a $(\forall i, i = 1, 2, \ldots, n-1)(w'_i > 0)$, le produit scalaire $\sum_{i=1}^{i=n-1} w'_i \times Post(p_i, t)$ est strictement positif et donc $w_n = \frac{1}{Pre(p,t)} \times \sum_{i=1}^{i=n-1} w'_i \times Post(p_i, t) > 0$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{W}^t \times \boldsymbol{C} &= \big({}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{W}' \ w_n\big) \times \begin{pmatrix} \boldsymbol{C}' & \boldsymbol{Post}_t \\ \mathbf{0} & -Pre(p,t) \end{pmatrix} \times \widehat{\boldsymbol{\mathcal{T}}}^{-1} \\
&= \big({}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{W}' \times \boldsymbol{C}' \ -w_n \times Pre(p,t) + {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{W}' \times \boldsymbol{Post}_t\big) \times \widehat{\boldsymbol{\mathcal{T}}}^{-1}.
\end{aligned}
$$

Comme $-w_n \times Pre(p,t) + {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{W'} \times \boldsymbol{Post}_t = 0$ par définition de w_n, il vient :

$$\begin{aligned}{}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{W} \times \boldsymbol{C} &= \left({}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{W'} \times \boldsymbol{C'}\ 0\right) \times \begin{pmatrix} \frac{1}{Pre(p,t)} \times \boldsymbol{Id}_{m-1} & \boldsymbol{0} \\ -\frac{\boldsymbol{Post}_p^T}{Pre(p,t)} & 1 \end{pmatrix} \\ &= \left({}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{W'} \times \boldsymbol{C'} \times \left[\frac{\boldsymbol{Id}_{m-1}}{Pre(p,t)}\right]\ 0\right)\end{aligned}$$

avec $\left[\frac{\boldsymbol{Id}_{m-1}}{Pre(p,t)}\right] \geq \boldsymbol{0}$ et donc ${}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{W'} \times \boldsymbol{C'} \times \left[\frac{\boldsymbol{Id}_{m-1}}{Pre(p,t)}\right] \leq \boldsymbol{0}$. Par conséquent ${}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{W} \times \boldsymbol{C} \leq \boldsymbol{0}$. Ainsi, $\mathcal{R}$ est structurellement borné. □

5.2. Répétitivité

La répétitivité est une propriété qui caractérise partiellement la vivacité structurelle d'un réseau. Elle repose sur le fait que toute transition d'un réseau peut être franchie un nombre illimité de fois.

Théorème 5.2 (conservation de la répétitivité)**.** *Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ deux réseaux de Petri généralisés tels que $(\mathcal{R}, \mathcal{R}') \in \varphi_a$.*

$\mathcal{R}$ est répétitif si et seulement si $\mathcal{R}'$ est répétitif.

Démonstration. On sait qu'un réseau est répétitif si et seulement si $(\exists \boldsymbol{V} > \boldsymbol{0})(\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{V} \geq \boldsymbol{0})$.

Soit alors $\boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} > \boldsymbol{0}$ tel que $\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{V} \geq \boldsymbol{0}$. On a :

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{C'} & \boldsymbol{Post}_t \\ \boldsymbol{0} & -Pre(p,t) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{Pre(p,t)} \times \boldsymbol{Id}_{m-1} & \boldsymbol{0} \\ -\frac{\boldsymbol{Post}_p^T}{Pre(p,t)} & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} \geq \boldsymbol{0} \ .$$

Donc

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{C'} & \boldsymbol{Post}_t \\ \boldsymbol{0} & -Pre(p,t) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\boldsymbol{V'}}{Pre(p,t)} \\ k \end{pmatrix} \geq \boldsymbol{0}$$

avec $\boldsymbol{V'} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{m-1} \end{pmatrix} > \boldsymbol{0}$ et $k = v_m - \sum_{j=1}^{j=m-1} v_j \times \frac{Post(p,t_j)}{Pre(p,t)}$. Ce système d'inéquations s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{\boldsymbol{C'} \times \boldsymbol{V'}}{Pre(p,t)} + k \times \boldsymbol{Post}_t \geq \boldsymbol{0} \\ -k \times Pre(p,t) \geq \boldsymbol{0} \end{cases}$$

dans lequel $Pre(p,t) > 0$ et donc tel que $k \leq 0$. Comme $\boldsymbol{Post}_t \geq \mathbf{0}$, il vient $k \times \boldsymbol{Post}_t \leq \mathbf{0}$. On a alors $-k \times \boldsymbol{Post}_t \geq \mathbf{0}$ et $\frac{\boldsymbol{C'} \times \boldsymbol{V'}}{Pre(p,t)} - k \times \boldsymbol{Post}_t \geq \mathbf{0}$ implique $\frac{\boldsymbol{C'} \times \boldsymbol{V'}}{Pre(p,t)} \geq \mathbf{0}$. Comme $\frac{1}{Pre(p,t)} > 0$, on obtient que $\boldsymbol{C'} \times \boldsymbol{V'} \geq \mathbf{0}$. Ainsi :

$$(\exists \boldsymbol{V} > \mathbf{0})(\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{V} \geq \mathbf{0}) \Rightarrow (\exists \boldsymbol{V'} > \mathbf{0})(\boldsymbol{C'} \times \boldsymbol{V'} \geq \mathbf{0}).$$

Par conséquent, $\mathcal{R}'$ est un réseau répétitif.

Réciproquement, étant donné un réseau répétitif $\mathcal{R}'$, donc tel que $(\exists \boldsymbol{V'} > \mathbf{0})(\boldsymbol{C'} \times \boldsymbol{V'} \geq \mathbf{0})$, on veut prouver que $(\exists \boldsymbol{V} > \mathbf{0})(\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{V} \geq \mathbf{0})$. Posons $\boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{V'} \\ \frac{\boldsymbol{Post}_p^T \times \boldsymbol{V'}}{Pre(p,t)} \end{pmatrix}$.

On a successivement :

- $\frac{1}{Pre(p,t)} > 0$;
- $p^\circ = \{t\} \Rightarrow (\forall u \in T \backslash \{t\})(Post(p,u) \geq 0) \Rightarrow \boldsymbol{Post}_p^T \geq 0$;
- $\boldsymbol{V'} > \mathbf{0} \Rightarrow \boldsymbol{Post}_p^T \times \boldsymbol{V'} \geq 0$ et comme $\boldsymbol{Post}_p^T \neq \mathbf{0}$ puisque ${}^\circ p \neq \emptyset$, on obtient $\boldsymbol{V} > \mathbf{0}$.

Montrons alors que $\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{V} \geq \mathbf{0}$.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{V} &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{C'} & \boldsymbol{Post}_t \\ \mathbf{0} & -Pre(p,t) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{Pre(p,t)} \times \boldsymbol{Id}_{m-1} & \mathbf{0} \\ -\frac{\boldsymbol{Post}_p^T}{Pre(p,t)} & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \boldsymbol{V'} \\ \frac{\boldsymbol{Post}_p^T \times \boldsymbol{V'}}{Pre(p,t)} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \boldsymbol{C'} & \boldsymbol{Post}_t \\ \mathbf{0} & -Pre(p,t) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\boldsymbol{V'}}{Pre(p,t)} \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\boldsymbol{C'} \times \boldsymbol{V'}}{Pre(p,t)} \\ 0 \end{pmatrix} \geq \mathbf{0} \ .
\end{aligned}$$

Par conséquent, $\mathcal{R}$ est répétitif. □

6. Étude de la conservation des propriétés comportementales

Cette section aborde l'étude exploratoire d'un point de vue original pour démontrer la conservation des propriétés comportementales lors de l'application de l'abstraction généralisée. La démonstration de cette conservation, notamment celle de la vivacité, est difficile et reste essentiellement inachevée. Plus précisément, nous montrons que la vivacité n'est pas conservée dans le cas général. Afin de déterminer les classes de réseaux pour lesquelles on peut raisonnablement envisager cette conservation, nous introduisons une fonction de transformation de marquage. Cette fonction nous permet de démontrer quelques résultats préliminaires utilisés pour établir la conservation de la bornitude comportementale. Quelques voies d'étude sont ensuite ouvertes pour la caractérisation des réseaux dont l'abstraction conserverait la vivacité.

Dans la suite on note $\overrightarrow{e_u}$ l'image commutative de la séquence $\sigma = u$, c'est-à-dire de la séquence réduite à la seule transition u. On a ainsi $\overrightarrow{e_u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ où la seule composante non nulle est égale à 1 et correspond à la composante associée à la transition u.

6.1. Règle de transformation de marquages

Soit u une transition quelconque de T, tirable depuis un marquage $\boldsymbol{M}_0$ du réseau $\mathcal{R}$. L'équation d'état permet d'écrire :

$$(\forall u \in T) \left(\forall \boldsymbol{M}_0 \in \mathbb{N}^{|P|}\right) ((\boldsymbol{M}_0[u > \boldsymbol{M}) \Rightarrow (\boldsymbol{M}_0 \geq \boldsymbol{Pre}_u \ \& \ \boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}_0 + \boldsymbol{C} \times \overrightarrow{e_u}))\,.$$

On considère alors deux cas selon que $u \neq t$ ou $u = t$.

<u>Si $u \neq t$</u> : d'après les propriétés de la matrice de transformation $\boldsymbol{\Pi}$ on a :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{M}_0 \geq \boldsymbol{Pre}_u &\Rightarrow \boldsymbol{\Pi} \times \boldsymbol{M}_0 \geq \boldsymbol{\Pi} \times \boldsymbol{Pre}_u \\ &\Rightarrow \boldsymbol{\Pi} \times \boldsymbol{M}_0 \geq \boldsymbol{Pre}'_u \\ &\Rightarrow \boldsymbol{\Pi} \times \boldsymbol{M}_0[u > . \end{aligned}$$

Autrement dit, la transition u reste tirable dans le réseau marqué $\mathcal{N}' = (\mathcal{R}',\ (\boldsymbol{\Pi} \times \boldsymbol{M}_0))$. De plus :

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}_0 + \boldsymbol{C} \times \overrightarrow{e_u} \Rightarrow \boldsymbol{\Pi} \times \boldsymbol{M} = \boldsymbol{\Pi} \times \boldsymbol{M}_0 + \boldsymbol{C}' \times \overrightarrow{e_u}.$$

Par conséquent : $\boldsymbol{M}_0[u > \boldsymbol{M} \Rightarrow \boldsymbol{\Pi} \times \boldsymbol{M}_0[u > \boldsymbol{\Pi} \times \boldsymbol{M}$.

<u>Si $u = t$</u> : $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}_0 + \boldsymbol{C}_t \Rightarrow \boldsymbol{\Pi} \times \boldsymbol{M} = \boldsymbol{\Pi} \times \boldsymbol{M}_0$ par définition de $\boldsymbol{\Pi}$. Par conséquent : $\boldsymbol{M}_0[t > \boldsymbol{M} \Rightarrow \boldsymbol{\Pi} \times \boldsymbol{M}_0 = \boldsymbol{\Pi} \times \boldsymbol{M}$.

Ainsi, le tir de $u \neq t$ dans $\mathcal{R}$ correspond au tir de u dans $\mathcal{R}'$ et le marquage résultant est le marquage transformé par $\boldsymbol{\Pi}$. Le tir de t dans $\mathcal{R}$ correspond à deux marquages identiques dans $\mathcal{R}'$. D'où le résultat :

Lemme 6.1 (conservation du tir d'une transition)**.** *Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ deux réseaux de Petri généralisés tels que $(\mathcal{R}, \mathcal{R}') \in \varphi_a$ et u une transition quelconque tirable depuis un marquage quelconque $\boldsymbol{M}_0$ de $\mathcal{R}$. On a le résultat suivant :*

- $u \neq t$: $\boldsymbol{M}_0[u > \boldsymbol{M} \Rightarrow (\boldsymbol{\Pi} \times \boldsymbol{M}_0)[u > (\boldsymbol{\Pi} \times \boldsymbol{M})$;
- $u = t$: $\boldsymbol{M}_0[u > \boldsymbol{M} \Rightarrow (\boldsymbol{\Pi} \times \boldsymbol{M}_0) = (\boldsymbol{\Pi} \times \boldsymbol{M})$.

Remarquer que $(\forall q \in P')(\mathbf{\Pi} \times \boldsymbol{M})(q) = Pre(p,t) \times M(q) + Post(q,t) \times M(p)$.

La réciproque de cette propriété est fausse. Pour s'en convaincre, il suffit de considérer le contre-exemple illustré par la figure 6. Dans cet exemple, la transition t_2 est tirable dans le réseau $\mathcal{R}'$, mais elle ne l'est pas dans le réseau $\mathcal{R}$.

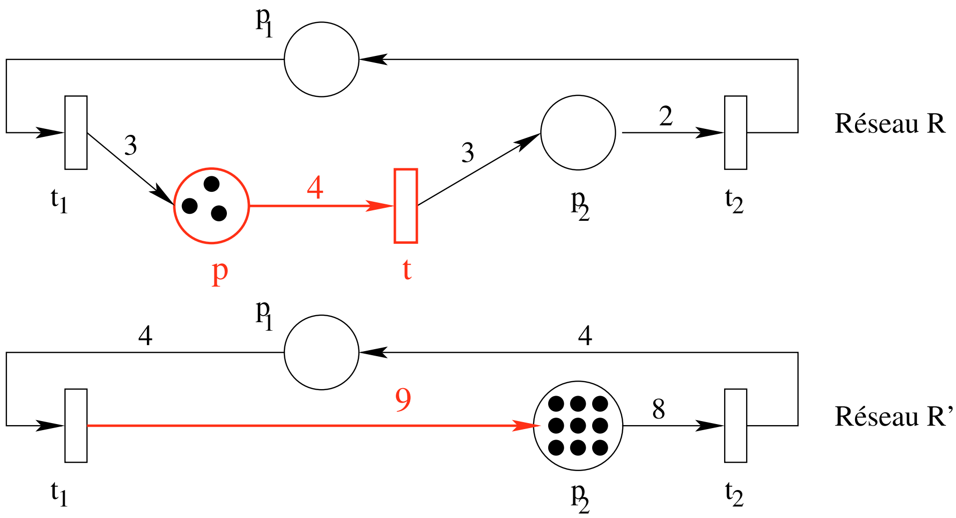

FIGURE 6. Contre-exemple à la réciproque du lemme de conservation du tir d'une transition.

La simple transformation de la dynamique du réseau $\mathcal{R}$ de départ par l'application de la matrice de transformation $\mathbf{\Pi}$ ne suffit pas pour obtenir des réseaux équivalents du point de vue de cette dynamique. On peut donc affirmer que les deux réseaux $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ ne sont pas équivalents pour les propriétés comportementales qui résultent des marquages de $\mathcal{R}$ et des marquages obtenus par leur transformation par la matrice $\mathbf{\Pi}$. Dans le paragraphe suivant on définit une règle d'évolution du marquage lors de l'application à un réseau de la règle d'abstraction généralisée. Cette règle a pour but de préserver la dynamique du réseau $\mathcal{R}$ lorsqu'il subit la réduction étudiée. On appelle *marquages déduits* les marquages obtenus par l'application de cette nouvelle règle. Le paragraphe ci-dessous a pour but d'introduire cette règle en montrant comment elle a été obtenue.

On veut établir une règle notée λ d'évolution du marquage de $\mathcal{R}$ lorsque ce réseau subit une réduction par φ_a. On souhaite que cette règle soit telle que :

$$\lambda \boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}' \text{ et } (\mathcal{R}, \mathcal{R}') \in \varphi_a \Rightarrow ((\mathcal{R}, \boldsymbol{M}), (\mathcal{R}', \lambda \boldsymbol{M})) \in \varphi_a \ .$$

Soit u une transition de T' telle que $\boldsymbol{M}'[u > \boldsymbol{M}'_1$ dans $\mathcal{R}'$ et $\boldsymbol{M}[u > \boldsymbol{M}_1$ dans $\mathcal{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{M}[u > \boldsymbol{M}_1 &\Rightarrow \boldsymbol{M}_1 = \boldsymbol{M} \ +\boldsymbol{C} \times \overrightarrow{e_u} \\
\boldsymbol{M}'[u > \boldsymbol{M}'_1 &\Rightarrow \boldsymbol{M}'_1 = \boldsymbol{M}' \ +\boldsymbol{C}' \times \overrightarrow{e_u} \\
&\Rightarrow \boldsymbol{M}'_1 - \boldsymbol{M}' \ = \boldsymbol{C}' \times \overrightarrow{e_u} \\
&\qquad\qquad\qquad = (\boldsymbol{\Pi} \times \boldsymbol{C}) \times \overrightarrow{e_u} \\
&\Rightarrow \boldsymbol{M}'_1 - \boldsymbol{M}' \ = \boldsymbol{\Pi} \times [\boldsymbol{M}_1 - \boldsymbol{M}] \,.
\end{aligned}$$

On est donc conduit à poser $\boldsymbol{M}' = \lambda\boldsymbol{M} = (\boldsymbol{\Pi} \times \boldsymbol{M}) + \boldsymbol{K}$ où $\boldsymbol{K}$ est un vecteur de dimension $|P'| = n - 1$ dont il s'agit de préciser la valeur.

On remarque d'abord que la formule $M'(q) = (\boldsymbol{\Pi} \times \boldsymbol{M})(q)$ se réduit à $M'(q) = Pre(p,t) \times M(q)$ pour toute place q qui n'est pas une place en sortie de t. Ainsi, le marquage d'une place qui n'appartient pas à t° est simplement multiplié par $Pre(p,t)$. Une place en sortie de t doit recevoir aussi les jetons qui résultent des tirs potentiels de t. Cependant, les jetons reportés dans $q \in t^\circ$ ne doivent pas contribuer au tir dans $\mathcal{R}'$ d'une transition qui ne serait pas tirable dans $\mathcal{R}$.

Notons a $\boldsymbol{Mod}$ b l'opérateur « **Modulo** » qui retourne le reste dans la division entière de a par $b \neq 0$. La fonction de transformation de marquage est définie par :

$$\boldsymbol{M}' = Pre(p,t) \times \boldsymbol{M} + \boldsymbol{Post}_t \times \{M(p)\ \boldsymbol{Mod}\ Pre(p,t)\} \cdot$$

En développant le deuxième produit, il est simple d'établir que $\boldsymbol{M}' = \boldsymbol{\Pi} \times \boldsymbol{M} + \boldsymbol{K}$ dans laquelle $\boldsymbol{K} = -\boldsymbol{Post}_t \times Pre(p,t) \times \left[\frac{M(p)}{Pre(p,t)}\right]$. D'où la définition :

Définition 6.1 (marquage déduit)**.** Soit $(\mathcal{R}, \boldsymbol{M})$ un réseau marqué et $\mathcal{R}'$ tel que $(\mathcal{R}, \mathcal{R}') \in \varphi_a$. On note $\lambda\boldsymbol{M}$ le marquage de $\mathcal{R}'$ défini par $\boldsymbol{M}' = \lambda\boldsymbol{M} = \boldsymbol{\Pi} \times \boldsymbol{M} + \boldsymbol{K}$ avec $\boldsymbol{K} = -\boldsymbol{Post}_t \times Pre(p,t) \times \left[\frac{M(p)}{Pre(p,t)}\right]$ où $\left[\frac{a}{b}\right]$ désigne la partie entière du quotient de a par $b \neq 0$.

Il n'est pas difficile de vérifier que le lemme 6.1 reste vrai en remplaçant partout les produits $\boldsymbol{\Pi} \times \boldsymbol{M}$ par $\lambda\boldsymbol{M}$. Cette règle nous permet d'établir qu'un marquage déduit d'un marquage accessible de $\mathcal{R}$ est un marquage accessible de $\mathcal{R}'$. Dans la suite, on note $\mathcal{A}(\mathcal{R}, \boldsymbol{M})$ l'ensemble des marquages de $\mathcal{R}$ accessibles depuis le marquage $\boldsymbol{M}$.

Lemme 6.2 (marquage déduit d'un marquage accessible)**.** *Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ deux réseaux généralisés tels que $(\mathcal{R}, \mathcal{R}') \in \varphi_a$.*

Soient $\boldsymbol{M}_0$ un marquage initial quelconque de $\mathcal{R}$ et $\boldsymbol{M}'_0$ le marquage de $\mathcal{R}'$ déduit de $\boldsymbol{M}_0$.

Tout marquage $\boldsymbol{M}'$ déduit d'un marquage $\boldsymbol{M}$, accessible depuis $\boldsymbol{M}_0$ est un marquage de $\mathcal{R}'$ accessible depuis $\boldsymbol{M}'_0$, où $\boldsymbol{M}'_0$ est le marquage déduit de $\boldsymbol{M}_0$.

Démonstration. On veut démontrer que $\boldsymbol{M} \in \mathcal{A}(\mathcal{R}, \boldsymbol{M}_0) \Rightarrow \lambda\boldsymbol{M} \in \mathcal{A}(\mathcal{R}', \lambda\boldsymbol{M}_0)$. Dire que $\boldsymbol{M}$ est un marquage accessible de $\mathcal{A}(\mathcal{R}, \boldsymbol{M}_0)$ c'est dire qu'il existe une séquence de franchissements σ de l'alphabet construit sur T telle que $\boldsymbol{M}_0[\sigma > \boldsymbol{M}$. En notant T^* cet alphabet, ceci s'écrit :

$$\boldsymbol{M} \in \mathcal{A}(\mathcal{R}, \boldsymbol{M}_0) \Rightarrow (\exists \sigma \in T^*)(\boldsymbol{M}_0[\sigma > \boldsymbol{M}).$$

Posons $\sigma = u_1\ u_2\ \cdots\ u_k$. On a alors :

$$\boldsymbol{M}_0[\sigma > \boldsymbol{M} \Leftrightarrow \boldsymbol{M}_0[u_1 > \boldsymbol{M}_1[u_2 > \cdots > \boldsymbol{M}_{k-1}[u_k > \boldsymbol{M}.$$

On envisage deux cas selon que la transition t de la cellule (p,t) à abstraire appartient ou non à la séquence σ.

- Si $t \notin \sigma$: d'après le lemme 6.1 de conservation du tir d'une transition, chacune des transitions u_i de la séquence σ est tirable depuis le marquage $\lambda\boldsymbol{M}_{i-1}$ déduit du marquage $\boldsymbol{M}_{i-1}$. Ainsi :

$$\boldsymbol{M}_0[\sigma > \boldsymbol{M} \Rightarrow \lambda\boldsymbol{M}_0[\sigma > \lambda\boldsymbol{M}$$

  et donc $\boldsymbol{M} \in \mathcal{A}(\mathcal{R}, \boldsymbol{M}_0) \Rightarrow \lambda\boldsymbol{M} \in \mathcal{A}(\mathcal{R}', \lambda\boldsymbol{M}_0)$.
- Si $t \in \sigma$: on a alors $\sigma = \sigma_1 t \sigma_2 t \cdots t \sigma_r,\ r \geq 2$ et t n'apparaît dans aucune des $\sigma_i,\ 1 \leq i \leq r$. D'autre part, certaines des séquences σ_i peuvent être vides. On obtient :

$$\boldsymbol{M} \in \mathcal{A}(\mathcal{R}, \boldsymbol{M}_0) \Rightarrow \boldsymbol{M}_0[\sigma_1 > \boldsymbol{M}_1[t > \boldsymbol{M}_2[\sigma_2 > \cdots > \boldsymbol{M}_r[\sigma_r > \boldsymbol{M}.$$

  Comme t n'apparaît dans aucune des séquences de la suite (σ_i), on a, d'après le cas précédent :

$$(\forall i,\ 1 \leq i \leq r)(\boldsymbol{M}_{i-1}[\sigma_s > \boldsymbol{M}_i \Rightarrow \lambda\boldsymbol{M}_{i-1}[\sigma_s > \lambda\boldsymbol{M}_i).$$

  Considérons alors les marquages obtenus à la suite du tir de deux séquences consécutives de la suite (σ_i). On a :

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{M}_{i-1}[\sigma_i > \boldsymbol{M}_i[t > \boldsymbol{M}_{i+1}[\sigma_{i+1} > \boldsymbol{M}_{i+2})\\ &\qquad\qquad \Rightarrow (\lambda\boldsymbol{M}_{i-1}[\sigma_i > \lambda\boldsymbol{M}_i)\ \&\ \lambda\boldsymbol{M}_{i+1}[\sigma_{i+1} > \lambda\boldsymbol{M}_{i+2})\end{aligned}$$

  d'après le cas précédent. Mais $\boldsymbol{M}_i[t > \boldsymbol{M}_{i+1} \Rightarrow \lambda\boldsymbol{M}_i = \lambda\boldsymbol{M}_{i+1}$ d'après le lemme 6.1 et donc :

$$\lambda\boldsymbol{M}_{i-1}[\sigma_i > \lambda\boldsymbol{M}_i = \lambda\boldsymbol{M}_{i+1}[\sigma_{i+1} > \lambda\boldsymbol{M}_{i+2}.$$

  En répétant ce raisonnement pour toutes les séquences de la suite, on obtient que $\boldsymbol{M} \in \mathcal{A}(\mathcal{R}, \boldsymbol{M}_0) \Rightarrow \lambda\boldsymbol{M} \in \mathcal{A}(\mathcal{R}', \lambda\boldsymbol{M}_0)$. □

Soit alors $\boldsymbol{M}'$ un marquage quelconque de $\mathcal{R}'$. On définit le marquage $\beta\boldsymbol{M}'$ de $\mathcal{R}$ par :

$$(\forall q \in P)\left(\beta M'(q) = \begin{cases} M'(q) & \text{si } q \neq p \\ O & \text{si } q = p \end{cases}\right).$$

On utilise l'expression « un marquage de $\mathcal{R}'$ est un marquage de $\mathcal{R}$ » lorsque les deux marquages coïncident sur P'. On a le résultat suivant, qui complète le résultat de conservation de l'accessibilité :

Lemme 6.3 (conservation de l'accessiblité)**.** *Soit* $\boldsymbol{M}'_0$ *un marquage initial quelconque de* $\mathcal{R}'$*. Tout marquage* $\boldsymbol{M}'$ *de* $\mathcal{R}'$*, accessible depuis* $\boldsymbol{M}'_0$ *est un marquage de* $\mathcal{R}$*, accessible depuis* $\beta\boldsymbol{M}'_0$*.*

$$\boldsymbol{M}' \in \mathcal{A}(\mathcal{R}', \boldsymbol{M}'_0) \Rightarrow \beta\boldsymbol{M}' \in \mathcal{A}(\mathcal{R}, \beta\boldsymbol{M}'_0).$$

Démonstration. Soient $\boldsymbol{M}'_{i-1}$ et $\boldsymbol{M}'_i$ deux marquages de $\mathcal{A}(\mathcal{R}', \boldsymbol{M}'_0)$ et $u \in T'$ telle que $\boldsymbol{M}'_{i-1}[u > \boldsymbol{M}'_i$. Démontrons qu'il existe une séquence $\sigma = u_1\ u_2\ \cdots\ u_k$ de transitions de T^* telle que $\beta\boldsymbol{M}'_{i-1}[\sigma > \beta\boldsymbol{M}'_i$. On note $u^h = \underbrace{uu\cdots u}_{h\ tirs}$ une séquence de h tirs de $u \in T$, avec $u^0 = \epsilon$ la séquence vide, c'est-à-dire la séquence telle que $\boldsymbol{M}[\epsilon > \boldsymbol{M}$ pour tout $\boldsymbol{M}$.

La transition u est tirable depuis le marquage $\boldsymbol{M}'_{i-1}$ de $\mathcal{R}'$ par hypothèse. On a donc :

$$\boldsymbol{M}'_{i-1}[u > \boldsymbol{M}'_i \Rightarrow \boldsymbol{M}'_{i-1} \geq \boldsymbol{Pre}'_u \ \&\ \boldsymbol{M}'_i = \boldsymbol{M}'_{i-1} + \boldsymbol{C}'_u$$

et donc :

$$\boldsymbol{M}'_i = \boldsymbol{M}'_{i-1} + (\boldsymbol{\Pi} \times \boldsymbol{C}) \times \overrightarrow{e_u}.$$

Considérons la séquence $\sigma = u^{Pre(p,t)}.t^{Post(p,u)}$. Nous démontrons successivement que :

- σ est tirable depuis $\beta\boldsymbol{M}'_{i-1}$ et on obtient un marquage $\boldsymbol{M}_i$;
- $\boldsymbol{M}_i = \beta\boldsymbol{M}'_i$.

(1) <u>σ est tirable depuis $\beta\boldsymbol{M}'_{i-1}$</u>

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}'_{i-1}[u > &\Rightarrow \boldsymbol{M}'_{i-1} \geq Pre(p,t) \times \boldsymbol{Pre}_u\\ &\Rightarrow \beta\boldsymbol{M}'_{i-1} \geq Pre(p,t) \times \boldsymbol{Pre}_u\\ &\Rightarrow \beta\boldsymbol{M}'_{i-1}[u^{Pre(p,t)} > .\end{aligned}$$

Soit $\boldsymbol{M}_{i_1}$ le marquage atteint. On a donc : $\beta\boldsymbol{M}'_{i-1}[u^{Pre(p,t)} > \boldsymbol{M}_{i_1}$.
On a $\boldsymbol{M}_{i_1} = \beta\boldsymbol{M}'_{i-1} + Pre(p,t) \times \boldsymbol{C}_u$. On veut prouver que $\boldsymbol{M}_{i_1}[t^{Post(p,u)} >$.

(2) <u>$t^{Post(p,u)}$ est tirable depuis $\boldsymbol{M}_{i_1}$</u>.
Comme $^\circ t = \{p\}$, la seule place de P à considérer est la place p. Pour cette place on a :

$$\begin{aligned}M_{i_1}(p) &= \beta M'_{i-1}(p) + Pre(p,t) \times (\boldsymbol{C}_u)(p)\\ &= \beta M'_{i-1}(p) + Pre(p,t) \times (Post(p,u) - Pre(p,u))\end{aligned}$$

- $\beta\boldsymbol{M}'_{i-1}(p) = 0$ par définition de $\beta\boldsymbol{M}$;
- $Pre(p,u) = 0$ puisque $p^\circ = \{t\}$ et $u \in T \backslash \{t\}$.

On obtient :

$$M_{i_1}(p) = Pre(p,t) \times Post(p,u) \Rightarrow \boldsymbol{M}_{i_1}[t^{Post(p,u)} >.$$

(3) $\underline{\beta \boldsymbol{M}'_{i-1}[\sigma > \beta \boldsymbol{M}'_i}$
Du résultat précédent on déduit :

$$\beta \boldsymbol{M}'_{i_1}[u^{Pre(p,t)} > \boldsymbol{M}_{i_1}[t^{Post(p,u)} > \boldsymbol{M}_i.$$

D'où $\beta \boldsymbol{M}'_{i-1}[\sigma > \boldsymbol{M}_i$.

(4) $\underline{\beta \boldsymbol{M}'_i = \boldsymbol{M}_i}$
Soit q une place quelconque de P. Comme $\beta \boldsymbol{M}'_{i-1}[\sigma > \boldsymbol{M}_i$, il vient :

$$\begin{aligned} M_i(q) = \beta M'_{i-1}(q) &+ Pre(p,t) \times (Post(q,u) - Pre(q,u)) \\ &+ Post(p,u) \times (Post(q,t) - Pre(q,t)). \end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned} M'_i(q) &= M'_{i-1}(q) + Post'(q,u) - Pre'(q,u) \\ &= M'_{i-1}(q) + Pre(p,t) \times (Post(q,u) - Pre(q,u)) \\ &\qquad + Post(p,u) \times Post(q,t). \end{aligned}$$

On envisage alors deux cas selon que la place étudiée est ou non la place p de la cellule à abstraire.

- $\underline{q \neq p}$:

$$\begin{aligned} \beta M'_{i-1}(q) &= M'_{i-1}(q) \\ &= M'_i(q) \quad - Pre(p,t) \times Post(q,u) \\ &\qquad\quad + Pre(p,t) \times Pre(q,u) \\ &\qquad\quad - Post(p,u) \times Post(q,u). \end{aligned}$$

  On obtient, en reportant cette expression de $\beta M'_{i-1}(q)$ dans celle de $M_i(q)$: $M_i(q) = M'_i(q)$.
- $\underline{q = p}$: On a alors :

$$\begin{aligned} M_i(q) = \beta M'_{i-1}(q) &+ Pre(p,t) \times (Post(p,u) - Pre(p,u)) \\ &+ Post(p,u) \times (Post(p,t) - Pre(p,t)). \end{aligned}$$

  Comme $Pre(p,u) = Post(p,t) = 0$ par définition de φ_a, on obtient $M_i(p) = \beta M'_{i-1}(p) = 0$.

En résumé, on a obtenu :

- $q \neq p$: $M_i(q) = M'_i(q)$;
- $q = p$: $M_i(p) = O$.

Ainsi, $\boldsymbol{M}_i = \beta \boldsymbol{M}'_i$ et par conséquent $\beta \boldsymbol{M}'_{i-1}[\sigma > \beta \boldsymbol{M}'_i$ avec $\sigma = u^{Pre(p,t)} t^{Post(p,u)}$□.

Ces résultats sont utilisés pour la démonstration des deux résultats suivants.

6.2. Conservation de la bornitude comportementale

Théorème 6.1 (conservation de la bornitude)**.** *Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ deux réseaux de Petri généralisés tels que $(\mathcal{R}, \mathcal{R}') \in \varphi_a$.*

$\mathcal{R}$ est borné si et seulement si $\mathcal{R}'$ est borné.

Démonstration. Par définition, le réseau $\mathcal{R}$ est borné si et seulement si :

$$(\forall q \in P)(\exists k_q\ \mathbb{N})(\forall \boldsymbol{M} \in \mathcal{A}(\mathcal{R}, \boldsymbol{M}_0))(M(q) \leq k_q).$$

Soit alors $\mathcal{R}$ un réseau borné et supposons que $\mathcal{R}'$ n'est pas borné. Ceci s'écrit :

$$(\exists q \in P')(\forall k' \in \mathbb{N})(\exists \boldsymbol{M'} \in \mathcal{A}(\mathcal{R}', \boldsymbol{M}'_0))(M'(q) > k').$$

D'après le lemme 6.3, $\beta \boldsymbol{M'} \in \mathcal{A}(\mathcal{R}, \beta \boldsymbol{M}'_0)$. Comme $q \in P'$, on a que $\beta M'(q) = M'(q)$ et donc $\beta M'(q) = M'(q) > k'$. Ainsi, $\mathcal{R}$ ne serait pas borné, ce qui contredit l'hypothèse.

Réciproquement, supposons que $\mathcal{R}'$ est borné et que $\mathcal{R}$ n'est pas borné. On a alors :

$$(\exists q \in P)(\forall k \in \mathbb{N})(\exists \boldsymbol{M} \in \mathcal{A}(\mathcal{R}, \boldsymbol{M}_0))(M(q) > k).$$

$M(q) > k \Rightarrow Pre(p,t) \times M(q) + Post(q,t) \times M(p) > Pre(p,t) \times k + Post(q,t) \times M(p)$.

Par conséquent :

$$M(q) > k \Rightarrow Pre(p,t) \times M(q) > Pre(p,t) \times k.$$

D'autre part, on a vu que :

$$\boldsymbol{M} \in \mathcal{A}(\mathcal{R}, \boldsymbol{M}_0) \Rightarrow (\lambda \boldsymbol{M}) \in \mathcal{A}(\mathcal{R}', \lambda \boldsymbol{M}_0).$$

On obtient donc :

- si $q \neq p$: on pose $k' = Pre(p,t) \times k$. On a : $M(q) > k \Rightarrow \lambda \boldsymbol{M}(q) > k'$ par définition de $\lambda \boldsymbol{M}$;
- si $q = p$: considérons alors une place s quelconque de t°. On sait qu'une telle place existe puisque $t^\circ \neq \emptyset$ par définition de l'abstraction généralisée. Dans $\mathcal{R}'$ on a :

$$\begin{aligned} \lambda \boldsymbol{M}(s) &= Pre(p,t) \times M(s) + Post(s,t) \times M(p) + K(s) \\ &> Pre(p,t) \times M(s) + Post(s,t) \times k. \end{aligned}$$

  En posant cette fois $k' = Pre(p,t) \times M(s) + Post(s,t) \times k$ on obtient $\lambda M(s) > k'$ et ainsi, si p n'est pas bornée dans $\mathcal{R}$ alors toute place de t° ne l'est pas non plus dans $\mathcal{R}'$.

On a donc dans tous les cas que $\mathcal{R}$ non borné contredit l'hypothèse que $\mathcal{R}'$ est borné. $\square$

6.3. Conservation de la vivacité

Nous nous restreignons, dans cette section, à l'étude de la quasi-vivacité. Nous rappelons d'abord les définitions puis nous démontrons le résultat de conservation.

Définition 6.2 (quasi-vivacité [3])**.** Soient $\mathcal{N}_0 = (\mathcal{R}, \boldsymbol{M}_0)$ un réseau marqué. Une transition u de T est *quasi-vivante* s'il existe un marquage $\boldsymbol{M}$, accessible depuis $\boldsymbol{M}_0$, tel que u est tirable depuis $\boldsymbol{M}$.

$$\exists \boldsymbol{M} \in \mathcal{A}(\mathcal{R}, \boldsymbol{M}_0) \text{ tel que } \boldsymbol{M}[u >.$$

Le réseau $\mathcal{N}_0 = (\mathcal{R}, \boldsymbol{M}_0)$ est quasi-vivant si toutes ses transitions sont quasi-vivantes.

La définition de la vivacité est rappelée ci-dessous :

Définition 6.3 (vivacité)**.** Soit $\mathcal{N}_0 = (\mathcal{R}, \boldsymbol{M}_0)$ un réseau marqué. Une transition u de T est *vivante* si, pour tout marquage $\boldsymbol{M}$, accessible depuis $\boldsymbol{M}_0$, u est quasi-vivante dans le réseau marqué $\mathcal{N} = (\mathcal{R}, \boldsymbol{M})$.
Le réseau marqué $\mathcal{N}_0$ est vivant si toutes ses transitions sont vivantes.

On peut à présent établir que :

Lemme 6.4 (conservation de la quasi-vivacité)**.** *Soient $\mathcal{R}$ and $\mathcal{R}'$ deux réseaux généralisés tels que $(\mathcal{R}, \mathcal{R}') \in \varphi_a$.*

- *Si une transition u quelconque de $T \backslash \{t\}$ est quasi-vivante dans le réseau marqué $\mathcal{N}_0 = (\mathcal{R}, \boldsymbol{M}_0)$, alors elle est quasi-vivante dans le réseau marqué $\mathcal{N}'_0 = (\mathcal{R}', \boldsymbol{M}'_0)$ avec $\boldsymbol{M}'_0 = \lambda \boldsymbol{M}_0$.*
- *Si une transition u de T' est quasi-vivante dans le réseau marqué $\mathcal{N}'_0 = (\mathcal{R}', \boldsymbol{M}'_0)$, alors elle est quasi-vivante dans le réseau marqué $\mathcal{N}_0 = (\mathcal{R}, \beta \boldsymbol{M}_0)$.*

Démonstration. Soit u une transition quelconque de $T \backslash \{t\}$, quasi-vivante dans le réseau marqué $\mathcal{N}_0 = (\mathcal{R}, \boldsymbol{M}_0)$. On a : $(\exists \boldsymbol{M} \in \mathcal{A}(\mathcal{R}, \boldsymbol{M}_0))$ $(\boldsymbol{M}[u >)$. D'après le lemme 6.2 ci-dessus, on a aussi : $(\exists \boldsymbol{M}' = \lambda \boldsymbol{M} \in \mathcal{A}(\mathcal{R}', \lambda \boldsymbol{M}_0))$ $(\boldsymbol{M}'[u >)$. Ainsi, u est quasi-vivante dans $(\mathcal{R}', \boldsymbol{M}'_0 = \lambda \boldsymbol{M}_0)$.
Inversement, soit u une transition de T', quasi-vivante dans $\mathcal{N}'_0 = (\mathcal{R}', \boldsymbol{M}'_0)$. On a :

$$(\exists \boldsymbol{M}' \in \mathcal{A}(\mathcal{R}', \boldsymbol{M}'_0))(\boldsymbol{M}'[u >).$$

Considérons alors les marquages de $\mathcal{R}$ définis par $\boldsymbol{M}_0 = \beta \boldsymbol{M}'_0$ et $\boldsymbol{M} = \beta \boldsymbol{M}'$. D'après le lemme 6.3, $\boldsymbol{M} \in \mathcal{A}(\mathcal{R}, \beta \boldsymbol{M}'_0)$ et $(\boldsymbol{M}'[u >) \Rightarrow (\exists \sigma \in T^*)(\boldsymbol{M}[u >)$. □

Conclusion

Nous avons étendu une règle de réduction des réseaux à choix libre aux réseaux de Petri généralisés. Cette réduction permet d'éliminer une cellule (place, transition) qui remplit des conditions simples définies en terme de structure du réseau initial. Une définition algébrique de la réduction permet de démontrer les propriétés de conservation des invariants du réseau, ainsi que la conservation des propriétés structurelles. La définition d'une fonction de transformation de marquages permet d'établir la conservation de la bornitude comportementale et de la quasi-vivacité. Mais la conservation de la vivacité reste un problème ouvert difficile. Nous travaillons à la démontrer en restreignant la règle d'abstraction à des sous-ensembles particuliers de réseaux généralisés, qui restent des sur-ensembles des réseaux à choix libre, utilisés plus particulièrement pour la modélisation des systèmes de conduite automatisée.

L'utilisation de cette transformation, bien que générale puisqu'elle s'applique à un réseau généralisé, reste cependant restrictive de par les hypothèses de structures imposées au réseau initial. Elle est facilement automatisable, mais la factorisation, qui permettrait de l'appliquer à plusieurs cellules simultanément, est une opération délicate car non commutative [4]. Elle nécessite aussi d'être utilisée conjointement à d'autres règles, comme celles de [1,2] par exemple, pour permettre une réduction significative des réseaux intermédiaires.

Nous nous attachons aussi à résoudre le problème de la complétude d'un ensemble de règles de transformation. Le problème consiste, pour un ensemble de propriétés données à conserver, à déterminer l'ensemble des règles de réduction qui permettent de transformer un réseau initial donné possédant ces propriétés en un réseau réduit possédant également ces propriétés.

Références

[1] G. Berthelot, *Transformations et analyse de réseaux de petri. Applications aux protocoles.* Thèse de doctorat d'état és sciences, Université Pierre et Marie Curie, Paris VI (1983).

[2] G. Berthelot, Transformations de Réseaux de Petri. *TSI* **4** (1985) 91-101.

[3] G.W. Brams, *Réseaux de petri : Tome 1 – Théorie et analyse.* Masson, Paris (1983).

[4] E. Daniel, P. Kuntz and B. El hajjaji, Détermination des cellules (place, transition) à abstraire dans un RdP généralisé et génération des matrices d'incidence du réseau résultant. Rapport de projet de fin d'études sous la direction de C. Haro, E3I–Université de Tours (1999).

[5] J. Desel and J. Esparza, Free Choice Petri Nets. *Cambridge Tracts Theoret. Comput. Sci.* **40** (1995).

[6] I. Koh and F. Dicesare, Modular Transformation Methods For Generalized Petri Nets and Their Application to Automated Manufacturing Systems. *IEEE Trans. Systems, MAN Cybernetics* **21** (1991) 1512-1522.

[7] H. Lee-kwang and J. Favrel, Hierarchical Reduction Method For Analysis and Decomposition of Petri Nets. *IEEE Trans. Systems, MAN Cybernetics* **15** (1985) 272-280.

[8] H. Lee-kwang, J. Favrel and P. Baptiste, Generalized Petri Net Reduction Method. *IEEE Trans. Systems, MAN Cybernetics* **17** (1987) 297-303.

[9] J.Y. Morel, *Contribution à la modélisation et à l'analyse des systèmes à événements discrets par réseaux de Petri généralisés et colorés.* Thèse de troisième cycle, ISTIA – Université d'Angers, Angers (1996).

[10] Y. Narahari and N. Viswanadham, A Petri Net Approach to The Modelling and Analysis of Flexible Manufacturing Systems. *Ann. Oper. Res.* **3** (1985) 449-472.

[11] I. Suzuki and T. Murata, Stepwise Refinements of Transitions and Places, in *IFB 52*, edited by C. Girault and W. Reisig. (1982) 136-141.
[12] R. Valette, Analysis of Petri Nets by Stepwise Refinements. *J. Comput. Syst. Sci.* **18** (1979) 35-46.
[13] M. Zhou, F. Dicesare, A.A. Desrochers, A Top-Down Approach to Systematic Synthesis of Petri Net Models for Manufacturing Systems, in *Conf. Robotics and Automation*, Scottsdale – Arizona, May (1996).
[14] M. Zhou, K. Mcdermott and P.A. Patel, Petri Net Synthesis and Analysis of A Flexible Manufacturing System Cell. *IEEE Trans. Systems, MAN Cybernetics* **23** (1993) 523–531.